# Matemáticas en el «Texas Hold'em Poker»: El arte de vencer a la suerte

por

**Pedro Ruymán García Díaz**

Resumen. Las Matemáticas y, dentro de estas, el cálculo de probabilidades, son una herramienta fundamental en la práctica de todas las modalidades de póquer. Todos los profesionales de este juego conocen a la perfección las probabilidades que intervienen en cada mano que juegan y, a partir de ellas, elaboran su estilo de juego. Aunque hay muchos otros aspectos en los que un buen jugador debe destacar, un hecho irrefutable es que los jugadores con más éxito son aquellos que dominan y comprenden las matemáticas que intervienen en el póquer.

La opinión generalizada entre los grandes maestros de este juego tiene un denominador común, y es que *el póquer es un juego de azar en el que apenas influye la suerte*. Defendiendo esta idea nació en 2009 la Federación Internacional de Póquer (IFP), cuyo objetivo es el de promover el póquer como un deporte mental y reafirmar el elemento de habilidad involucrado, así como el talento y la determinación necesarias para conseguir el éxito. ¿Hasta qué punto esto es cierto? ¿Qué papel juegan las Matemáticas? A lo largo del documento trataremos de dar respuesta a estas y otras cuestiones.

## 1. Introducción

Mirada fija, rostro imperturbable, músculos rígidos. Humo y tensión flotando en el ambiente. Una madrugada cualquiera, en un tugurio de cualquier ciudad americana, unos tipos duros juegan al póquer. Esta era la turbia imagen que siempre había acompañado a este juego en la imaginación colectiva. Ahora todo ha cambiado. Un joven de cualquier lugar podría estar jugando al póquer desde su móvil mientras se toma algo con unos amigos en una terraza. Nunca, en toda su historia, desde su nacimiento, había sido tan popular.

El origen de este juego es un tanto incierto. La creencia más popular es que los chinos lo inventaron alrededor del año 900 d.C. como una modalidad del dominó. Otros afirman que el póquer nació a partir del juego persa «as nas», un juego de cinco jugadores que requiere un mazo especial de veinticinco cartas y cinco palos. La teoría más aceptada lo relaciona con el juego francés *poque*. Los franceses llevaron este juego a Nueva Orleans alrededor de 1480 y allí se popularizó gracias a los barcos de vapor que navegaban por el río Misisipi. El *poque* comenzó a denominarse *poker*, y durante la Guerra Civil se hicieron populares algunas modificaciones del juego original como el *stud poker*, el *draw* y el *straight*.

Posteriormente llegaría otra modalidad que es la que nos ocupa en este documento, el ***Texas Hold'em Poker***.[1] Aunque se sabe poco de la invención del *Hold'em*, la legislación del estado de Texas reconoce oficialmente a Robstown (Texas) como el lugar de nacimiento del juego, originado en torno a 1900. La auténtica explosión del *Texas Hold'em* tuvo lugar en la década de los 70, ya que se convirtió en la modalidad elegida en las Series Mundiales de Póquer (WSOP), y en la actualidad se ha convertido en la variante más jugada y popular. El conocido jugador tejano C. Addington comentaba acerca del *Hold'em*:

> «*Pensé que, si triunfaba, se convertiría en el juego por excelencia. Draw Poker, dos apuestas; Hold'em, cuatro apuestas. Esto implicaba que podías jugar estratégicamente. Era más el tipo de juego para el hombre que piensa.*»


La mayoría de los jugadores actuales proceden de internet. Son cada vez más las casas de apuestas que ofrecen la posibilidad de jugar *online* y ahí es donde radica una parte importante de la gran difusión que ha tenido este juego en los últimos años. Según publica la prestigiosa revista *Forbes*, el magnate Sheldon Adelson, presidente y director ejecutivo de numerosos casinos en Las Vegas, ha sido, a nivel mundial, el empresario que más ha incrementado su fortuna en 2013, lo que augura un futuro prometedor a las compañías relacionadas con este sector.

Otro factor decisivo en el boom del póquer está asociado a un nombre: Chris Moneymaker (derecha). La primera gesta de este jugador fue la de clasificarse para jugar las WSOP en 2003 tras vencer en un torneo clasificatorio de 39 dólares en PokerStars (la entrada ordinaria al WSOP cuesta alrededor de diez mil dólares). Posteriormente, Moneymaker sorprendería al mundo ganando el torneo y embolsándose unos dos millones y medio de dólares.


Esta forma aparentemente fácil de ganar dinero, junto con la crisis económica, han agudizado el interés por el póquer. Además, cada vez con más frecuencia los medios de comunicación retransmiten partidas y torneos de *Texas Hold'em.* Como ejemplo podemos citar programas de televisión como *PokerStars: estrellas en juego*, *All in Sports Series* o *Pokerstars: Campeonato Nacional Estrellas del Poker*, películas como *Rounders* (1998), *Casino Royale* (2006), *Lucky you* (2007)... o vídeos musicales de artistas emergentes como Katy Perry *(Waking up Las Vegas)* o Lady Gaga *(Poker face)*.

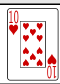
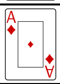
[1] A lo largo del artículo respetaremos muchos términos originales, así como los que por su uso frecuente se han castellanizado. Presentaremos estos términos en letra itálica.

El texto se ha redactado de manera autocontenida para favorecer la comprensión de los no iniciados en el juego. La complejidad matemática será creciente a medida que avancemos por las diferentes secciones, aunque los argumentos que esgrimiremos no requerirán de conceptos matemáticos demasiado profundos. Para comenzar, las siguientes dos secciones son una descripción de las reglas del Hold'em y de la notación técnica que emplearemos. En la cuarta sección justificamos que el ranking de manos establecido está matemáticamente bien definido, y en la quinta haremos un estudio de las manos iniciales, su fortaleza y modo de juego. En la sección sexta introducimos los conceptos de *outs* y *odds* en sus diferentes versiones así como la regla 4-2, que nos ayudarán a decidir si debemos aceptar una apuesta o debemos retirarnos de una mano. Posteriormente, justificaremos matemáticamente el uso de la apuesta de continuación cuando estamos ante menos de dos rivales. En la séptima sección exponemos el Teorema Fundamental del Póquer, que recoge la filosofía de la *estrategia perfecta* que se debe seguir para jugar exitosamente. La novena sección trata el modelo independiente de fichas (ICM) y su uso en situación de burbuja para facilitar la toma las decisiones. Las dos últimas secciones tienen una clara afinidad con la Economía. Por un lado, describimos el sistema SAGE, basado en una estrategia de equilibrio de Nash y, por otro, adaptamos el criterio de Kelly al *Texas Hold'em* para gestionar correctamente nuestro *bankroll* y evitar la bancarrota.

## 2. Reglas del Texas Hold'em Poker

Como hemos comentado anteriormente, el *Texas Hold'em* es la variante de póquer que más se practica en todo el mundo. Esto no es casualidad: la mecánica se aprende con suma facilidad y puede parecer que la dominamos tras unas pocas manos. Sin embargo, se trata de un juego con infinidad de detalles que requiere mucha habilidad y perspicacia.

Para jugar se necesita un mazo de 52 cartas francesas sin comodín. Esta baraja está organizada en cuatro palos (picas, diamantes, corazones y tréboles) con trece cartas cada uno organizadas de mayor a menor como A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2. Para referirnos a cualquier carta utilizaremos una abreviatura compuesta por su numeración y su palo:

| Carta | Nombre | Abreviatura | Carta | Nombre | Abreviatura |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Rey de picas |  |  | Diez de corazones |  |
|  | As de diamantes |  |  | Reina de tréboles |  |

También es necesario un juego de fichas *(chips)* o dinero en metálico *(cash)* para las apuestas y, por supuesto, de dos a diez jugadores que supondremos sentados en torno a una mesa. Un jugador quedará eliminado si se queda sin fichas.


Para comenzar, uno de los jugadores debe ejercer de repartidor *(dealer)*, cargo que irá rotando mano tras mano en el sentido de las agujas del reloj. El repartidor se dice que ocupa la posición de *botón* en la mesa. Los dos jugadores sentados a la izquierda del repartidor deben apostar forzosamente una cierta cantidad predeterminada (ciegas o *blinds*). El primero de ellos aporta la ciega pequeña *(small blind, SB)* y el segundo la ciega grande *(big blind, BB)*, que normalmente es el doble de la anterior.[2] Delante del repartidor y de las ciegas se coloca una ficha que los identifica.[3]


Tras emplazar las ciegas, el repartidor da a cada jugador dos cartas boca abajo que son privadas. A lo largo de la mano, se colocarán cinco cartas más boca arriba en el centro de la mesa, las llamadas «cartas comunitarias», compartidas por todos los jugadores. Estas cinco cartas se enseñan en tres etapas: *flop* (tres cartas), *turn* (una carta) y *river* (una carta).


Todo este proceso da lugar, a lo sumo, a cuatro rondas de apuestas. Si en alguna ronda todos los jugadores menos uno abandonan, se da por concluida la mano y dicho participante recibe todas las fichas que se han apostado hasta el momento. Este conjunto de fichas se llama bote *(pot)*.

La primera ronda de apuestas comienza al recibir las dos cartas privadas con el jugador situado a la izquierda de la ciega grande y termina con el jugador que está en la ciega grande. Cada jugador en su turno puede realizar una de las siguientes acciones:

- Aceptar la apuesta actual *(call)*.
- Pasar y abandonar la mano *(fold)*.
- Reservarse *(check)*. Se continúa jugando pero sin apostar.
- Apostar *(raise)*. Consiste en hacer una apuesta.
- Resubir *(re-raise)*. Consiste en subir la apuesta hecha por otro jugador.

[2] Cuando se juega a Texas Hold'em en la modalidad de torneo, las ciegas aumentan a intervalos de tiempo preestablecidos. En fases más avanzadas se añade una apuesta obligatoria que afecta a todos los jugadores *(ante)*.

[3] En la mayoría de los torneos la labor de *dealer* queda a cargo de un *croupier*.

En cualquier caso, una ronda de apuestas no concluirá hasta que todos los jugadores tengan igualadas sus apuestas o hayan abandonado. Normalmente la cuantía de las apuestas o resubidas de cada jugador debe ser de, al menos, el doble de la ciega grande y en múltiplos de la ciega pequeña. La cuantía máxima de cada apuesta puede tener un techo *(limit Texas Hold'em)* o puede apostarse todo lo que se quiera *(no-limit Texas Hold'em)*. Si un jugador apuesta todas sus fichas o dinero se dice que va *all in* o que ha hecho *push*.

Las siguientes tres rondas de apuestas tienen lugar tras mostrar el *flop*, *turn* y *river*, respectivamente. En todas ellas, el primero en intervenir será la ciega pequeña.

Al término, cada jugador formará su mano usando la mejor combinación de cinco cartas entre sus dos cartas privadas y las cinco comunitarias. Para crear la mejor jugada, el jugador podrá usar una de sus dos cartas de mano, las dos o ninguna. La jerarquía de las manos, de forma descendente, es la siguiente:

| Nº | Mano | Denominación | Explicación |
|---|---|---|---|
| 1º | Q♠ J♠ 10♠ 9♠ 8♠ | **Escalera de color** *(Straight flush)* | Cinco cartas consecutivas del mismo palo. La mejor mano, A♠ K♠ Q♠ J♠ 10♠, se conoce como **Escalera de color real** *(Royal flush)*. |
| 2º | 7♦ 7♠ 7♣ 7♥ 2♣ | **Póquer** *(Poker, Four of a kind)* | Cuatro cartas de igual numeración. |
| 3º | J♠ J♦ J♥ 3♦ 3♠ | **Full** *(Full house)* | Dos grupos de cartas: uno de tres y otro de dos cartas, ambos con igual numeración. |
| 4º | K♣ 9♣ 6♣ 5♣ 3♣ | **Color** *(Flush)* | Cinco cartas del mismo palo. |
| 5º | 9♥ 8♦ 7♠ 6♠ 5♦ | **Escalera** *(Straight)* | Cinco cartas de numeración consecutiva. |
| 6º | Q♦ Q♠ Q♥ 2♦ 9♥ | **Trío** *(Three of a kind)* | Tres cartas con la misma numeración. |
| 7º | J♠ J♦ 3♥ 3♠ 5♣ | **Doble pareja** *(Two pairs)* | Dos grupos de dos cartas de igual numeración. |
| 8º | J♥ J♣ 9♠ 8♥ 2♣ | **Pareja** *(Pair)* | Dos cartas de igual numeración. |
| 9º | K♣ 10♣ 7♥ 5♦ 4♣ | **Carta Alta** *(High card)* | Ninguna de las combinaciones anteriores. |

Podemos encontrarnos dos manos en el mismo rango, por ejemplo, dos jugadores que tengan full, escalera, dobles parejas, etc. En estos casos hay que regirse por la carta más alta. Veamos dos ejemplos:

| 9♦ 9♠ | Q♣ 9♣ 6♦ 4♦ Q♥ | Q♠ 6♠ |
|---|---|---|
| *Jugador A* | *Cartas comunes* | *Jugador B* |

El jugador A tiene full de nueves y reinas mientras que el full del jugador B es de reinas y seises. En este caso gana el jugador B pues prevalece que su trío es el más alto.

Supongamos ahora que tenemos un empate a dobles parejas de sietes y ochos:

| A♣ 7♠ | 7♣ 8♣ 8♥ J♦ K♦ | 7♣ 5♠ |
|---|---|---|
| *Jugador A* | *Cartas comunes* | *Jugador B* |

Observemos que la mejor carta para complementar las dobles parejas de ambos son el as para el jugador A y el rey para el jugador B. En este caso se dice que el jugador A tiene el acompañante *(kicker)* más alto y gana la mano.

En aquellos casos donde las manos sean exactamente del mismo valor, se reparte el bote a partes iguales. Esto podría haber ocurrido en la mano anterior si las cartas del jugador A hubiesen sido, por ejemplo, Q♣ 7♠.

# 3. Rudimentos matemáticos

Las principales herramientas que utilizaremos para realizar nuestros cálculos pertenecen a la rama de la Estadística y la Probabilidad. No es necesario tener grandes conocimientos en estas áreas para poder seguir los razonamientos que realizaremos. El objetivo de este apartado es el de fijar la notación y refrescar algunos conceptos básicos.

En primer lugar, el número de subconjuntos de $r$ elementos que podemos extraer de un conjunto de $n$ sin repetir elementos y sin importar el orden viene dado por el *número combinatorio* $\mathrm{C}_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

Para el cálculo de probabilidades utilizaremos la *regla de Laplace*, dividiendo los casos favorables a un suceso entre el número total de casos posibles. Multiplicaremos estas probabilidades por 100 para expresar los resultados en porcentaje. En algunas ocasiones trabajaremos con diagramas de tipo árbol y realizaremos cálculos aplicando la regla de probabilidad condicionada. Según esta, si tenemos dos sucesos $A$ y $B$, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$.

Dada la naturaleza del juego del póquer, multitud de situaciones se pueden idealizar como muestreos aleatorios sin reemplazamiento. Si tenemos un conjunto de $N$ elementos de los cuales distinguimos un subconjunto de $d$ elementos y se seleccionan $n$ elementos al azar, la variable aleatoria discreta $X =$ «Nº de elementos de la clase distinguida que están en la muestra seleccionada» sigue una distribución hipergeométrica. La denotaremos como $X \sim \mathcal{H}(N, n, d)$. La función de probabilidad viene dada por

$$P(X = x) = \frac{\binom{d}{x} \cdot \binom{N-d}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \qquad 0 \leq x \leq \min\{n, d\}.$$

Finalmente, recordemos que, para una variable aleatoria discreta $X$, la esperanza matemática viene dada por $E[X] = \sum x_i \cdot p_i$, variando $x_i$ en todos los posibles valores que puede tomar la variable y donde $p_i$ es la probabilidad de tomar dicho valor.

# 4. Probabilidad y ranking de manos

Desde el punto de vista matemático, la primera pregunta que surge es la de si el ranking de manos establecido está bien definido. Esto es, el orden de manos fijado debe ser inverso a su probabilidad de ocurrencia. Caben preguntas como si es más o menos probable obtener un full o un color, pues esto no parece evidente a simple vista.

## 4.1. Póquer tradicional: 5 cartas

En el póquer tradicional se reparten cinco cartas a cada jugador. Usando la Combinatoria, existen $\mathrm{C}_5^{52} = \binom{52}{5} = 2\,598\,960$ formas posibles de hacer este reparto. En la siguiente tabla se muestra un análisis detallado de las probabilidades de las diferentes manos de póquer. Para más detalles, puede consultarse [1] o bien [14]:

| Mano | Cómputo | Nº de manos | Probabilidad (%) |
|---|---|---|---|
| Escalera de color | $10 \cdot 4$ | 40 | 0.0015 |
| Póquer | $13 \cdot 48$ | 624 | 0.024 |
| Full | $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2}$ | 3 744 | 0.144 |
| Color | $4 \cdot \binom{13}{5} - 40$ | 5 108 | 0.197 |
| Escalera | $10 \cdot 4^5 - 40$ | 10 200 | 0.392 |
| Trío | $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{12}{2} \cdot 4^2$ | 54 912 | 2.11 |
| Doble pareja | $\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2}^2 \cdot 44$ | 123 552 | 4.75 |
| Pareja | $13 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{12}{3} \cdot 4^3$ | 1 098 240 | 42.26 |
| Carta alta | $\left[\binom{13}{5} - 10\right] \cdot (4^5 - 4)$ | 1 302 540 | 50.12 |
| | $\binom{52}{5}$ | 2 598 960 | $\approx 100$ |

Por tanto, el rango de manos establecido en el póquer tradicional se corresponde de manera inversa con la probabilidad de obtener cada mano, que es lo esperable.

## 4.2. Texas Hold'em Poker: 7 cartas

En una mano de *Texas Hold'em* que se completa hasta el *river* tenemos siete cartas entre las que se debe extraer la combinación de cinco cartas que tenga un mayor rango en el sentido que hemos visto anteriormente. Los cálculos se resumen en la siguiente tabla:

| Mano | Cómputo | Nº de manos | Probabilidad (%) |
|---|---|---|---|
| Escalera de color | $4 \cdot \left[\binom{47}{2} + 9 \cdot \binom{46}{2}\right]$ | 41 584 | 0.03 |
| Póquer | $13 \cdot \binom{48}{3}$ | 224 848 | 0.17 |
| Full | $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{11}{2} \cdot 4^2 + 13 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{12}{2} \cdot \binom{4}{2}^2 + \binom{13}{2} \cdot 4^2 \cdot 44$ | 3 473 184 | 2.60 |
| Color | $4 \cdot \left[\binom{13}{5} \cdot \binom{39}{2} + \binom{13}{6} \cdot 39 + \binom{13}{7}\right] - 41\,584$ | 4 047 644 | 3.03 |
| Escalera | $\left[\binom{8}{2} + 9 \cdot \binom{7}{2}\right] \cdot \left[4^7 - 4 \cdot \left(1 + \binom{7}{6} \cdot 3 + \binom{7}{5} \cdot 3^2\right)\right]$<br>$+(8 + 9 \cdot 7) \cdot 6 \cdot \binom{4}{2} \cdot \left[4^5 - \left(4 + \binom{5}{4} \cdot 2 \cdot 3\right)\right]$<br>$+10 \cdot 5 \cdot \binom{4}{3} \cdot (4^4 - 3)$<br>$+10 \cdot 10 \cdot (6 \cdot (4^3 - 2) + 24 \cdot (4^3 - 1) + 6 \cdot 4^3)$ | 3 372 180<br>+ 2 530 440<br>+ 50 600<br>+ 226 800<br>= 6 180 020 | 4.62 |
| Trío | $\left[\binom{13}{5} - 10\right] \cdot 5 \cdot 4 \cdot (4^4 - 3)$ | 6 461 620 | 4.83 |
| Doble pareja | $\binom{13}{4} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2}^3 \cdot 4 + \left[\binom{13}{5} - 10\right] \cdot \binom{5}{2} \cdot (6 \cdot (4^3 - 2) + 24 \cdot (4^3 - 1) + 6 \cdot 4^3)$ | 31 433 400 | 23.50 |
| Pareja | $\left[\binom{13}{6} - 9 - 2 \cdot 7 - 8 \cdot 6\right] \cdot (4^5 - 34) \cdot 6 \cdot \binom{4}{2}$ | 58 627 800 | 43.82 |
| Carta alta | $\left[\binom{13}{7} - 8 - 2 \cdot 6 - 7 \cdot 5 - 2 \cdot \binom{7}{2} - 8 \cdot \binom{6}{2}\right] \cdot (4^7 - 844)$ | 23 294 460 | 17.41 |
| | $\binom{52}{7}$ | 133 784 560 | $\approx 100$ |

El conteo de manos y cartas es mucho más complicado que en el caso tradicional, pues algunas manos se pueden obtener de varias formas. Por ejemplo, un *full* se puede obtener de tres formas: con un trío, una pareja y dos cartas acompañantes diferentes, con un trío y dobles parejas, o bien con dos tríos y una carta acompañante, pues solo se considera la mejor combinación de cinco cartas. El cálculo de cada uno de estos tres casos explica los tres sumandos que aparecen en la tabla. El caso de *escalera* es el más complicado pues se puede obtener una escalera de cuatro formas: con siete cartas de numeración diferente, con seis cartas de numeración diferente (hay una pareja), con cinco cartas de numeración diferente y un trío, o cinco cartas de numeración diferente y dobles parejas. Además, en cada caso se deben eliminar las combinaciones que den lugar a un *color*, pues es una mano de rango superior. Los detalles de estos cálculos pueden consultarse en [1].

Surgen algunos hechos que pueden generar debate. Dentro de una misma mano, por ejemplo un *full*, podría establecerse un ranking interno si se considerasen las siete cartas pues es menos probable ligar dos tríos que un trío y una pareja. Algo parecido pasa con la probabilidad de ligar pareja y ligar carta alta, siendo esta última menos probable si se consideran todas las cartas.

## 5. MANOS INICIALES. HEADS UP

Como sabemos, hay $\binom{52}{2} = 1\,326$ posibles formas de obtener las dos cartas iniciales. Todas estas posibilidades pueden reducirse, pues en el *Texas Hold'em* ningún palo tiene prioridad. Por ejemplo, a efectos prácticos es lo mismo obtener cualquiera de las seis parejas A♠A♥, A♠A♦, A♠A♣, A♥A♦, A♥A♣, A♣A♦. También, las manos 5♣6♦ y 5♣6♥ son equivalentes en el momento inicial del reparto. Posteriormente es posible que en el *flop* salgan tres cartas del mismo palo y sea más ventajoso tener una pareja que otra, pero eso a priori no lo sabemos. Por tanto, los únicos factores que determinan la fortaleza de la mano inicial son su numeración y si son del mismo palo *(suited)* o no. La probabilidad de obtener alguna de estas manos queda reflejada en esta tabla:

| MANO | CÓMPUTO | N° DE MANOS | PROBABILIDAD (%) |
|---|---|---|---|
| Pareja | $13 \cdot \binom{4}{2}$ | 78 | 5.88 |
| Mismo palo | $\binom{13}{2} \cdot 4$ | 312 | 23.53 |
| No emparejadas y distinto palo | $\binom{13}{2} \cdot 4 \cdot 3$ | 936 | 70.59 |
| | $\binom{52}{2}$ | 1 326 | 100 |

La primera decisión que tomamos al jugar al póquer la hacemos al recibir nuestras dos primeras cartas tapadas. La información de la que disponemos es muy escasa y debemos decidir si con nuestras cartas tendremos posibilidades de formar una buena mano con las cartas comunitarias.

Dado el ranking de las manos, obtener una pareja, dos cartas altas o dos cartas consecutivas, a ser posible del mismo palo, son cartas más que aceptables para entrar en acción. Por supuesto, existen otros muchos factores importantes como nuestra posición en la mesa, el tipo de jugadores al que nos enfrentemos o el número de fichas de que dispongamos en ese momento *(stack)*, que pueden llevarnos a jugar otro tipo de manos más débiles o a no jugar las mencionadas anteriormente.

En [17], D. Sklansky y M. Malmuth organizaron las manos iniciales en grupos de forma que todas aquellas pertenecientes a un mismo grupo se les supone que deberían jugarse de la misma forma. Las manos iniciales más fuertes están representadas por números menores y las que no tienen numeración se entiende que son manos muy débiles y que no deberían jugarse. Si pensamos la siguiente tabla como una matriz, las manos de la diagonal superior las supondremos con cartas del mismo palo y la de la diagonal inferior de diferente palo:

**Mismo palo** *(suited)* / **Distinto palo** *(off-suit)*

| | A | K | Q | J | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| K | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| Q | 3 | 4 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | | | | | | |
| J | 4 | 5 | 5 | 1 | 3 | 4 | 6 | 8 | | | | | |
| 10 | 6 | 6 | 6 | 5 | 2 | 4 | 5 | 7 | | | | | |
| 9 | 8 | 8 | 8 | 7 | 7 | 3 | 4 | 5 | 8 | | | | |
| 8 | | | | 8 | 8 | 7 | 4 | 5 | 6 | 8 | | | |
| 7 | | | | | | | 8 | 5 | 5 | 6 | 8 | | |
| 6 | | | | | | | | 8 | 5 | 6 | 7 | | |
| 5 | | | | | | | | | 8 | 6 | 6 | 7 | |
| 4 | | | | | | | | | | 8 | 7 | 7 | 8 |
| 3 | | | | | | | | | | | | 7 | 8 |
| 2 | | | | | | | | | | | | | 7 |

Algunos cálculos interesantes que podemos hacer en esta etapa inicial son:

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener una pareja de ases? Utilizando la probabilidad condicionada resulta $P(AA) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot 100 = 0.45\,\%$, es decir, aproximadamente 1 de cada 221 veces.
- Tenemos una pareja, ¿cuál es la probabilidad de obtener un trío o superior en el *flop*? Si definimos $X =$ «Nº de cartas de la misma numeración que mi pareja que saldrán en el *flop*» resulta que $X \sim \mathcal{H}(50, 3, 2)$. Por tanto,

$$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{48}{2} + \binom{2}{2} \cdot \binom{48}{1}}{\binom{50}{3}}$$
$$= 0.1176\ (\cdot 100) = 11.76\,\%.$$

  Aproximadamente un 12 %, es decir, 1 de cada 8 veces que tengamos una pareja de mano obtendremos un trío o un póquer con las tres primeras cartas comunitarias.

- Tenemos dos cartas del mismo palo y hacemos *all in*, ¿cuál es la probabilidad de ligar color si alguien acepta? En este caso, definimos $X =$ «Nº de cartas del mismo palo que mis cartas que habrá en el *showdown*» y se tiene que $X \sim \mathcal{H}(50, 5, 11)$. Por tanto,

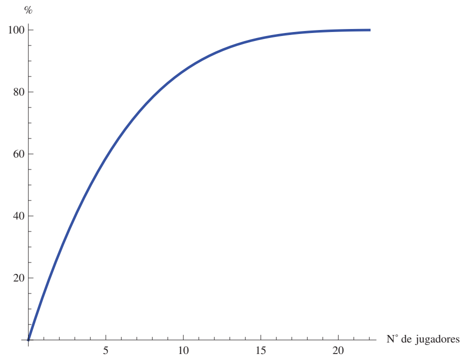
$$P(X \geq 3) = \frac{\binom{11}{3} \cdot \binom{39}{2} + \binom{11}{4} \cdot \binom{39}{1} + \binom{11}{5} \cdot \binom{39}{0}}{\binom{50}{5}} = 0.064\ (\cdot 100) = 6.4\,\%.$$

  Redondeando podemos decir que 1 de cada 16 veces ligaremos color si tenemos dos cartas del mismo palo y se muestran las cinco cartas comunitarias.

- Somos $k$ jugadores, ¿cuál es la probabilidad de que se haya repartido al menos un as? Definimos $X =$ «Nº de ases que habrá en las cartas repartidas» y se tiene que $X \sim \mathcal{H}(52, 2k, 4)$. Para cada $k$, queda

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{(52-2k)\cdot(51-2k)\cdot(50-2k)\cdot(49-2k)}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49}$$
$$= \frac{2k\cdot(257\,449 - 15\,299k + 404k^2 - 4k^3)}{32\,487}.$$

La gráfica de esta función viene dada por




Para $k = 4$ prácticamente se llega al 50 % y en una mesa completa con $k = 10$, la probabilidad de que alguien tenga un as es de casi un 87 %.

## 5.1. MANOS INICIALES EN EL UNO CONTRA UNO (*Heads up*)

La parte final de un torneo suele acabar con dos jugadores que se enfrentan el uno contra el otro. En esta situación es fundamental conocer qué probabilidad de ganar tiene nuestra mano inicial para decidir qué tipo de juego emplear.

Existen diversos programas que nos pueden ayudar a dilucidar cuál es la probabilidad de que nuestra mano gane a una mano aleatoria, a una mano concreta o a un rango de manos. Estos programas emplean el método de la fuerza bruta considerando las manos iniciales que se asignen y teniendo en cuenta todas las posibles cartas descubiertas que pueden salir. Unos ejemplos de este tipo de programas son el *Poker Stove* o el *Equilab*.

Como es lógico, en un torneo en vivo no disponemos de ningún software de apoyo con el que podamos consultar en cada mano. Sin embargo, la siguiente tabla nos da una aproximación general a las probabilidades de victoria cuando se enfrentan dos manos concretas:

| Cartas | Ejemplos | Probabilidades |
|---|---|---|
| *Pareja* vs *Dos cartas superiores* | 8♥ 8♠ vs Q♦ 9♣ | 56 % vs 44 % |
| | 8♥ 8♠ vs Q♦ J♦ | 51 % vs 49 % |
| *Pareja* vs *Una carta superior* | 6♥ 6♣ vs 10♥ 2♣ | 70 % vs 30 % |
| | 6♥ 6♣ vs 10♥ 6♦ | 67 % vs 33 % |
| *Pareja* vs *Pareja inferior* | K♦ K♠ vs 3♥ 3♣ | 81 % vs 19 % |
| *Pareja* vs *Dos cartas inferiores* | K♦ K♥ vs Q♥ 6♣ | 88 % vs 12 % |
| | K♣ K♥ vs 6♦ 5♦ | 78 % vs 22 % |
| *Dos cartas superiores* vs *Dos cartas inferiores* | K♠ 9♥ vs 8♦ 5♣ | 65 % vs 35 % |
| | K♠ 9♥ vs 6♦ 5♦ | 58 % vs 42 % |
| *Carta superior e inferior* vs *Dos cartas intermedias* | A♦ 3♥ vs 10♦ 5♠ | 61 % vs 39 % |
| | A♦ 3♥ vs 6♦ 5♦ | 54 % vs 46 % |
| *Carta superior e intermedia* vs *Cartas intercaladas* | K♣ 5♠ vs J♥ 3♦ | 64 % vs 36 % |
| *Cartas altas iguales y diferente acompañante* | A♣ J♦ vs A♥ 6♦ | 73 % vs 27 % |

Hay que tener en cuenta si las manos iniciales son del mismo palo o no (favorece los colores), si se comparten cartas del mismo palo, la proximidad numérica de las cartas (favorece las escaleras), lo que hace variar ligeramente las probabilidades. Para más detalles puede consultarse [12, pág. 257], [7, pág. 125] o usar cualquier software del mencionado anteriormente.

Examinando la tabla anterior se pueden deducir ideas interesantes, como, por ejemplo, que al hacer *all in* con una pareja baja, la probabilidad máxima que podemos esperar es aproximadamente un 50 %, pues seguramente nos encontraremos en la primera situación. A esto se le conoce como jugar un *flip*. Por otro lado, si una de nuestras dos cartas es un as y hacemos *all in*, lo normal es que tengamos mejores probabilidades que nuestro adversario (salvo que nuestro rival tenga también otro as y un acompañante más alto o una pareja).

## 6. Outs y Odds. La regla 4-2. Pot odds. SPR. Pot commited

Una vez que ya tenemos nuestras dos cartas ocultas en nuestro poder, una información importante es saber cuántas cartas nos pueden ayudar a conseguir una buena mano y qué probabilidad tenemos de que aparezcan en el grupo de cartas comunes. Más aún, esta situación se reproduce en las diferentes fases que tiene una mano de póquer. Por ejemplo, debemos saber qué probabilidad tenemos de hacer un color, una escalera o una pareja determinada. Las cartas que necesitamos se llaman *outs (cards out there)* y las probabilidades de que salgan dichas cartas se llaman *odds*.

Habitualmente estas probabilidades se expresan mediante porcentajes o utilizando una notación «$x : y$» en la que se comparan los resultados desfavorables con los favorables. Por ejemplo, cuando tiramos un dado tenemos $\frac{1}{6} \cdot 100 = 16.67\,\%$ de probabilidad de sacar un tres. Alternativamente, podemos decir que tenemos una probabilidad de «5 contra 1 (5 : 1)». Podemos pasar de una expresión a otra empleando las fórmulas

| PROBABILIDAD (X:Y) | PROBABILIDAD (%) |
|---|---|
| $x : y$ | $\frac{y}{x+y} \cdot 100$ |
| $\left(\frac{100}{\%} - 1\right) : 1$ | $\%$ |

## 6.1. LA REGLA 4-2

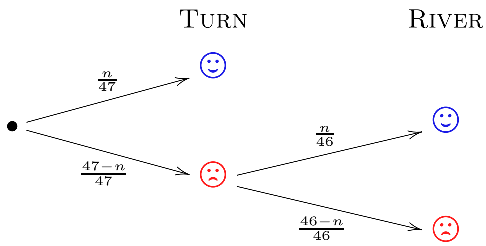
Uno de los momentos clave en una mano de póquer tiene lugar cuando aparecen las primeras tres cartas comunitarias. En ese momento da igual si nuestras dos cartas ocultas suponían una mano débil o fuerte a priori, las cartas del *flop* pueden cambiarlo todo.

Una vez descubierto el *flop*, tenemos nuestra primera combinación de cinco cartas. Lo normal es que esta combinación no sea del todo buena y que pueda mejorar a otras manos superiores en el ranking tras el *turn* o el *river*. Cuando esto ocurre decimos que tenemos un *proyecto* (*draw*). Por ejemplo,

| 6♣ 7♦ | 8♥ K♦ 5♠ |
|---|---|
| *Cartas ocultas* | *Cartas comunes* |

Nuestra mano actual es carta alta rey pero tenemos un proyecto de escalera que se puede completar por la parte inferior con un 4 o superiormente con un 9. Esta mano se conoce también como «escalera a dos puntas» (*open-ended straight draw*).

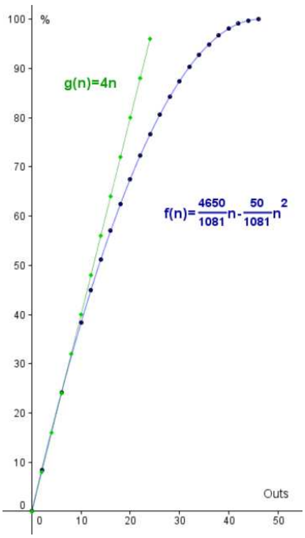
En esta situación, y en otras similares, resulta interesante saber cuál es la probabilidad que tenemos de completar nuestro proyecto. Supongamos que tenemos $n$ cartas que nos son favorables ($n$ outs); podemos esquematizar nuestra situación de la siguiente forma:




De este modo podemos establecer una función de probabilidad discreta, $f$, que determina la probabilidad de culminar con éxito nuestro proyecto con las dos cartas restantes, $f(n) = \frac{n}{47} + \frac{47-n}{47} \cdot \frac{n}{46}$. Realizando las operaciones necesarias y expresando la probabilidad en porcentaje resulta

$$f(n) = \frac{4650}{1081} n - \frac{50}{1081} n^2.$$

Así, en el ejemplo anterior de proyecto de escalera a dos puntas, nuestra probabilidad de culminar dicho proyecto si llegamos al *river* es $f(8) = 31.45\,\%$.




Evidentemente, en una partida de póquer no disponemos de una calculadora que nos permita hacer estas operaciones en cada momento. Podemos simplificar mucho los cálculos si hacemos una aproximación lineal de la función $f$. Resulta ser $g(n) = \frac{4650}{1081}n$ y si redondeamos la fracción a un entero queda $g(n) = 4n$. Por tanto, para obtener la probabilidad de que tras el *turn* y el *river* se complete nuestro proyecto tan solo debemos multiplicar por 4 el número de cartas que nos son favorables.

En el caso de que la cuarta carta comunitaria no haya sido favorable para nuestros intereses, la probabilidad de completar nuestro proyecto se reduce tan solo a $\frac{n}{46} \cdot 100$, que es ligeramente superior a un $2n\,\%$. Por tanto, basta con multiplicar por 2 nuestros *outs* para hacernos una idea de la probabilidad que tenemos de ligar una de las cartas que esperamos.

La siguiente tabla recoge diferentes ejemplos de manos con proyectos tras el *flop* junto con las cartas y las probabilidades que nos proporcionarían el éxito si se muestran todas las cartas comunitarias:

| Mano | Proyecto | Outs | n | % |
|---|---|---|---|---|
| 3♠ 3♦ + J♥ 10♣ 3♥ | Póquer | 3♣ | 1 | 4.26 |
| 7♣ 6♣ + 4♣ J♥ 5♣ | Escalera de color | 3♣ 8♣ | 2 | 8.42 |
| A♥ 3♦ + 5♦ 9♥ 6♠ | Pareja de ases | A♠ A♣ A♦ | 3 | 12.49 |
| J♥ Q♦ + 8♦ 2♠ 9♥ | Escalera (interna) | 10♠ 10♦ 10♥ 10♣ | 4 | 16.47 |
| A♠ 6♦ + 4♠ 6♥ J♣ | Doble pareja máxima o trío | A♦ A♣ A♥ 6♣ 6♠ | 5 | 20.35 |
| A♥ K♦ + 7♥ 6♥ 3♣ | Pareja máxima | A♠ A♣ A♦ K♠ K♣ K♥ | 6 | 24.14 |
| 7♣ 7♠ + A♥ 7♥ 6♥ | Póquer o Full | 7♦ A♣ A♦ A♠ 6♠ 6♣ 6♦ | 7 | 27.85 |
| J♥ 10♣ + Q♠ K♥ 7♦ | Escalera (doble punta) | 9♥ 9♣ 9♦ 9♠ A♠ A♣ A♦ A♥ | 8 | 31.45 |
| A♦ 2♦ + 6♦ J♠ 10♦ | Color | 3♦ 4♦ 5♦ 7♦ 8♦ 9♦ J♦ Q♦ K♦ | 9 | 34.97 |
| 4♠ 4♥ + 6♣ 3♦ 5♣ | Trío o Escalera | 4♦ 4♣ 2♠ 2♣ 2♦ 2♥ 7♠ 7♣ 7♦ 7♥ | 10 | 38.39 |
| K♦ K♠ + 7♠ 2♠ J♠ | Trío o Color | K♥ K♣ 3♠ 4♠ 5♠ 6♠ 8♠ 9♠ 10♠ Q♠ A♠ | 11 | 41.72 |
| A♥ 2♥ + Q♥ 5♠ 8♥ | Pareja máxima o Color | A♠ A♦ A♣ 3♥ 4♥ 5♥ 6♥ 7♥ 9♥ 10♥ J♥ K♥ | 12 | 44.95 |
| 10♣ J♣ + 9♦ 3♣ Q♣ | Escalera o Color | 8♠ 8♦ 8♣ 8♥ K♠ K♦ K♣ K♥ 2♣ 4♣ 5♣ 6♣ 7♣ 9♣ A♣ | 15 | 54.12 |

## 6.2. Pot odds y Pot odds implícitas. SPR. Pot commited

Como la vida misma, el póquer es decisión. En general, lo conveniente en el póquer es tomar aquellas decisiones que conlleven una mayor expectativa de ganancias a largo plazo.

Supongamos que Pedro y Roberto participan en un juego cuya entrada es de un euro y que consiste en lanzar una moneda al aire; si sale cara, Pedro gana todo el dinero y, si sale cruz, lo gana Roberto. Modifiquemos este juego considerando que ahora Roberto paga una entrada de dos euros y el resto de condiciones permanecen inalterables. Por sentido común, el primer juego no ofrece expectativa de ganancia a ningún jugador mientras que el segundo parece beneficioso para Pedro. De manera matemática, denotando por $X_i$ =«Ganancia de Pedro en el juego $i$», las distribuciones de probabilidad en ambos juegos son

| $(x_1)_i$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

$E[X_1] = 0$

| $(x_2)_i$ | $-1$ | $2$ |
|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

$E[X_2] = 0.5$

Por tanto, la ganancia media por partida en el primer juego es cero para Pedro (juego equitativo) mientras que en el segundo ganará medio euro de promedio en cada partida.

Esta idea de ganancia media en el infinito es la que está detrás de cada decisión en el póquer. En todo momento trataremos de apostar en situaciones donde la ganancia media que tengamos sea positiva: esta es la manera de «vencer a la suerte».

Las *probabilidades del bote (pot odds)* son una forma de expresar la relación entre la cantidad que tenemos que poner para igualar la apuesta de un rival y la cantidad que obtendremos si ganamos esa apuesta. Se puede interpretar como una relación riesgo/beneficio. Las *pot odds* nos van a dar la clave de la cantidad adecuada a apostar en cada momento del juego y qué apuesta nos conviene aceptar y cuál rechazar. Las probabilidades del bote se calculan mediante

$$\textit{Pot odds} = \frac{\textit{Fichas para igualar}}{\textit{Fichas totales en el bote}}.$$

Si nos encontramos jugando una mano y denotamos por $b = \textit{Pot odds}$, $o = \textit{odds}$ y $B = \textit{Fichas totales en el bote}$, la distribución de probabilidad de la variable $X$ = «Ganancia en la mano» es

| $x_i$ | $B - bB$ | $-bB$ |
|---|---|---|
| $p_i$ | $o$ | $1 - o$ |

Nos interesa saber cuándo $E[X] > 0$, esto es, $o(B-bB)-(1-o)bB > 0$, y esto solo ocurre cuando $o > b$. Es decir, deberíamos aceptar la apuesta si las probabilidades de formar una mano ganadora son mayores que las probabilidades del bote. En caso contrario deberíamos abandonar la mano.

EJEMPLOS

- Nos encontramos con el proyecto de escalera que hemos comentado anteriormente con un bote de 600 fichas y el único adversario que nos queda en la mesa apuesta 200 fichas.

*Cartas ocultas* *Flop* *Turn* *Bote:* 600 *Apuesta:* 200

En esta situación, las probabilidades del bote son $\frac{200}{1000}$, es decir, un 20 %. Analizando las cartas parece que la única forma posible de ganar la mano es ligando nuestra escalera que, por la regla 4-2, a falta de una carta nos ofrece un $2 \cdot 8 = 16\,\%$. Por tanto, deberíamos abandonar.

- Tenemos un proyecto de color. En el bote hay 800 fichas y el único rival que tenemos va *all in* apostando 600 fichas tras ver el *flop*.

| A♠ 2♠ | 6♠ K♦ 9♠ | | |
|---|---|---|---|
| *Cartas ocultas* | *Flop* | *Bote:* 800 | *Apuesta:* 600 |

  Seguramente nuestro rival haya ligado el rey, dobles parejas o incluso un trío y nos quiere echar de la mano. Las *pot odds* son $\frac{600}{2000}$, que en porcentaje representa un 30 %. Analizando las cartas pensamos que podemos ganar si sale otra pica. Si sale un as es posible que también ganemos, pero como no estamos seguros no contabilizaremos los tres ases restantes dentro de nuestras *outs*. Las *odds* que tenemos son aproximadamente $4 \cdot 9 = 36\,\%$ y, por tanto, debemos aceptar la apuesta.

En algunas ocasiones puede estar justificado hacer *call* a pesar de que no se cumpla la anterior relación. Por ejemplo, si nos encontramos en una mano con rivales agresivos que suben y resuben constantemente puede ser razonable aceptar una apuesta si sabemos que de ligar nuestra mano probablemente doblemos o tripliquemos nuestro *stack*. En este caso hablamos de probabilidades del bote implícitas y se definen como

$$\textit{Implied Pot odds} = \frac{\textit{Fichas para igualar}}{\textit{Fichas totales en el bote} + \textit{Fichas a posteriori}}.$$

Ejemplo. Tenemos una pareja baja en la fase *preflop*, 5♥5♣. Estamos en la posición de botón y la mano viene subida con un bote de 650 fichas y dos rivales. Para igualar la apuesta debemos poner 150 fichas. Además, sabemos que estos rivales son agresivos y pueden apostar fuerte si ligan una pareja alta en el *flop*. Nuestro *stack* es de 750 fichas y pensamos que, si ligamos un trío, al menos podremos doblarnos. Entonces

$$\textit{Implied Pot odds} = \frac{150}{800 + 2 \cdot 600} = 0.075 \approx 7.5\,\%.$$

Como vimos en la sección cinco, la probabilidad de ligar un trío en el *flop* con una pareja *preflop* es de $0.1176 = 11.76\,\%$ por lo que las *odds* son mayores que las probabilidades del bote (implícitas) y deberíamos igualar la apuesta.

Por otro lado, SPR es el acrónimo de *Stack to Pot Ratio*, que significa «relación entre el bote y el número de fichas que tenemos». Fue desarrollado en [5] y se calcula dividiendo el *stack* efectivo (el *stack* más pequeño de aquellos que siguen en la mano) entre el tamaño del bote en el *flop*, antes de que ningún jugador apueste en esta fase. El dominio y control del SPR es muy importante en el desarrollo de estrategias avanzadas para el juego *postflop*.

Se dice que estamos comprometidos con el bote (*pot commited*) cuando la cantidad de fichas que nos quedan por apostar es suficientemente pequeña en relación al bote como para que tengamos forzosamente que pagar cualquier apuesta de nuestros rivales. Si tenemos el *stack* efectivo y un rival nos hace *all in*, nuestras *pot odds* son

$$\textit{Pot odds} = \frac{\textit{Stack efectivo}}{\textit{Bote} + 2 \cdot \textit{Stack efectivo}} = \frac{\text{SPR}}{1 + 2 \cdot \text{SPR}}.$$

Una consecuencia directa de esto es que, si disponemos de un *stack* relativamente pequeño y nos hacen una subida fuerte *preflop*, es mejor resubir *all in* que simplemente hacer *call*. Esto es así porque, tras el *flop*, seguramente estaremos comprometidos con el bote y no podremos abandonar la mano. La ventaja de movernos *all in* es que podemos inducir la retirada del rival en la fase *preflop*.

EJEMPLO. Estamos en ciega grande con un *stack* de 10 BB. La mano viene limpia y nuestro rival que está en ciega pequeña sube 4 BB. En este caso SPR $= 6/8 = 0.75$ y las *pot odds* son de 0.3. Por tanto, aun si sospechamos que nuestro rival tiene una mejor mano en el *flop*, debemos querer su posible *all in* en casi todas las circunstancias pues solo necesitamos unas *odds* del 30 %.

## 7. El Teorema Fundamental del Póquer

Toda persona que haya profundizado algo en Matemáticas sabe de la existencia de los llamados Teoremas Fundamentales que, como su propio nombre indica, dan una idea bastante clara de la importancia de los mismos. Así, hay un Teorema Fundamental del Cálculo, del Álgebra, de la Aritmética, de la Geometría Riemanniana, etc.

Sorprendentemente, también existe un Teorema Fundamental del Póquer. Este fue enunciado por D. Sklansky en [16]. El concepto en sí es muy simple y hasta casi obvio, pero es justamente esa simplicidad de lógica la que nos permite entender cómo funciona el juego del póquer y qué deberíamos hacer para desarrollar una estrategia ganadora.

TEOREMA. *Cada vez que usted juega distinto de como habría jugado si pudiera ver las cartas de sus adversarios, ganan ellos; cada vez que usted juega igual que habría jugado si pudiera ver las cartas de sus adversarios, pierden ellos. Y viceversa: cada vez que los adversarios juegan distinto de como habrían jugado si pudieran ver las cartas de usted, gana usted; cada vez que juegan igual que habrían jugado si pudieran ver las cartas de usted, ganan ellos.*

Aunque el teorema es muy claro, su aplicación no lo es tanto. Veamos algunos ejemplos:

EJEMPLO 1. Supongamos que estamos en una mesa de seis jugadores. Tenemos una pareja de nueves y hacemos una subida a la que solo aguanta el jugador que está en la posición de botón con un as y un rey. El *flop*

| 9♣ 9♣ | 2♠ 6♦ 9♥ | A♠ K♦ |
|---|---|---|
| *Nosotros* | *Flop* | *Botón* |

nos proporciona un trío muy fuerte que en ese momento representa la mejor mano posible. ¿Qué debemos hacer? Pasar. El motivo es que nuestro rival solo tiene la combinación carta alta as y, si subimos la apuesta, muy probablemente él decida abandonar. Esto significaría que él está tomando la mejor decisión posible pues es lo que haría si viese nuestras cartas.

Por nuestro lado, que nuestro rival abandone no es lo mejor que puede pasar. Lo que queremos es que, aun teniendo una mano peor que la nuestra, siga en el juego, para conseguir el mayor valor posible por nuestra mano. Si pasamos, es probable que nuestro rival intente un farol en el *flop* o en el *turn*. O, mejor aún, quizás aparezca en el *flop* un rey o un as, lo que nos permitiría subir la apuesta y que nuestro rival vea la subida, ya que, seguramente, supondrá que tiene la mejor mano.

Ejemplo 2. Supongamos una situación similar a la anterior donde las cartas ahora son

| A♦ A♠ | K♥ 8♣ 9♣ | K♣ J♣ |
|---|---|---|
| *Nosotros* | *Flop* | *Botón* |

En esta ocasión también tenemos una mejor mano que nuestro oponente en el *flop* pero ahora la mejor decisión es apostar para proteger nuestra mano. Deberíamos apostar una cantidad suficiente para que nuestro rival no tenga las *odds* que necesita para seguir en la mano tratando de completar su proyecto.

Ejemplo 3. En las mismas condiciones que los casos anteriores, sea

| 2♥ 2♣ | 9♥ A♣ Q♠ | 8♣ 8♦ |
|---|---|---|
| *Nosotros* | *Flop* | *Botón* |

En esta ocasión vamos perdiendo y no parece que nuestra situación vaya a mejorar mucho salvo que salga un improbable dos. Con las cartas que se nos han presentado, si conociésemos las cartas de nuestro rival, parece que la mejor estrategia es ir de farol y apostar. Es muy probable que nuestro rival piense que hemos ligado alguna pareja en el *flop* y que, por tanto, va perdiendo y tiene muy difícil ganar la mano.

## 8. La apuesta de continuación

La apuesta de continuación (*c-bet*) es un recurso muy utilizado que consiste en realizar una apuesta tras el *flop* por parte del jugador que ya ha llevado la iniciativa *preflop*. Esta situación es típica de un jugador situado en últimas posiciones o en la posición de botón, pues sabe que será el último en intervenir en la primera ronda de apuestas.

Supongamos que subimos en últimas posiciones y que nuestro adversario acepta con cualquier par de cartas diferentes (debido a su elevado *stack* o a que es un jugador novato). Supondremos que dicho jugador se retirará de la mano si no consigue conectar, al menos, una pareja. En estas condiciones, la probabilidad de que haga *fold* tras el *flop* es de $\frac{38}{47} \cdot \frac{37}{46} = 0.65$, un 65 %. Si estamos ante dos oponentes, la probabilidad de que ninguno conecte alguna pareja es de $\frac{38}{47} \cdot \frac{37}{46} \cdot \frac{36}{45} \cdot \frac{35}{44} = 0.41$, un 41 %. Si el número de oponentes es tres, dicha probabilidad baja hasta un 26 %. Para un estudio completo con más rivales puede verse [6].

Una apuesta de continuación estándar es la de $\frac{2}{3}$ del bote, $B$. Ante uno, dos y tres rivales, nuestra ganancia media será, respectivamente:

| Nº DE RIVALES | GANANCIA | Total |
|---|---|---|
| 1 | $0.65 \cdot B + 0.35 \cdot \frac{-2}{3} \cdot B$ | $\frac{5}{12} \cdot B$ |
| 2 | $0.41 \cdot B + 0.59 \cdot \frac{-2}{3} \cdot B$ | $\frac{1}{60} \cdot B$ |
| 3 | $0.26 \cdot B + 0.74 \cdot \frac{-2}{3} \cdot B$ | $\frac{-7}{30} \cdot B$ |

Luego realizar una apuesta de continuación estándar solo parece beneficioso cuando nos enfrentamos a uno o dos rivales.

## 9. ICM. El juego en la burbuja

El modelo independiente de fichas (*Independent Chip Model* o *ICM*) es un algoritmo que asigna a cada *stack* de fichas el valor en dinero real que le correspondería a cada jugador si el juego acabase en ese momento. Fue propuesto por M. Malmuth [10] siguiendo un razonamiento paralelo al de las fórmulas de D. A. Harville [8] diseñadas para las carreras de caballos. El ICM presupone las siguientes hipótesis:

- Cada ficha de nuestro *stack* representa una oportunidad de llegar a los premios.
- Todos los jugadores tienen la misma destreza.
- La posición del jugador y la proximidad de las ciegas no se tienen en cuenta.

Denotemos por $X_i^j$ = «El jugador $i$ queda en la posición $j$», $s_i$ el *stack* del jugador $i$ y $S = \sum s_i$. El modelo ICM asume que

$$P(X_i^1) = \frac{s_i}{S}, \qquad P(X_i^2 \mid X_k^1) = \frac{s_i}{S - s_k}$$

y, por tanto, utilizando el teorema de probabilidad total y la probabilidad condicionada, resulta

$$\begin{aligned} P(X_i^2) &= \sum_{k \neq i} P(X_i^2 \cap X_k^1) \\ &= \sum_{k \neq i} P(X_k^1) \cdot P(X_i^2 \mid X_k^1) \\ &= \sum_{k \neq i} \frac{s_k}{S} \cdot \frac{s_i}{S - s_k} = \frac{s_i}{S} \sum_{k \neq i} \frac{s_k}{S - s_k}. \end{aligned}$$

Siguiendo un razonamiento similar se puede calcular $P(X_i^j)$ para cualquier $j$. Estos datos, junto con el premio asignado a cada posición premiada, nos permiten calcular el dinero que le corresponde a cualquier jugador $X_i$ y que denotaremos por €$E[X_i]$.

Ejemplo. Supongamos que estamos en un *Sit and Go* de 6 participantes con una entrada de $3 + 0.30$€ (18€ destinados a premios) donde solo quedan tres jugadores y la estructura de premios es 70 %–30 %, es decir, el ganador se embolsa 12.6€ y el segundo clasificado 5.4€. Supongamos que los *stacks* son $s_1 = 5000$, $s_2 = 2700$ y $s_3 = 1300$. Si acabase el torneo ahora, ¿qué cantidad de dinero debería llevarse cada jugador?

Para el primer jugador, $P(X_1^1) = \frac{5000}{9000} = 0.55556$ y

$$P(X_1^2) = \frac{s_1}{S} \cdot \left( \frac{s_2}{s_1 + s_3} + \frac{s_3}{s_1 + s_2} \right) = \frac{5000}{9000} \cdot \left( \frac{2700}{6300} + \frac{1300}{7700} \right) = \frac{230}{693} = 0.33189,$$

de donde €$E[X_1] = 12.6 \cdot 0.55556 + 5.4 \cdot 0.33189 = 8.79$€, que es el dinero que le correspondería según el ICM al primer jugador. El razonamiento para los otros dos jugadores es similar, resultando €$E[X_2] = 6.08$€ y €$E[X_3] = 3.13$€. Existen numerosas calculadoras de ICM en la red que pueden usarse de manera gratuita, como la *ICM poker calculator* accesible desde la web `http://www.icmpoker.com`.

Un hecho destacable es la no linealidad del reparto. En particular, observemos que el líder del torneo posee más de la mitad de las fichas pero no le corresponde más de la mitad del dinero destinado a premios.

## 9.1. El juego en la burbuja

A medida que transcurre un torneo de póquer los jugadores se van eliminando y las ciegas van aumentando. Debido a esto, las fichas de los jugadores se van haciendo cada vez más pequeñas en relación al tamaño de las ciegas. En estas situaciones es común estar con menos de 20 ciegas grandes y en una situación de burbuja (el número de jugadores es superior en uno al número de puestos premiados). Por tanto, si quedamos eliminados en este momento, todo el trabajo previo no habrá servido para nada.

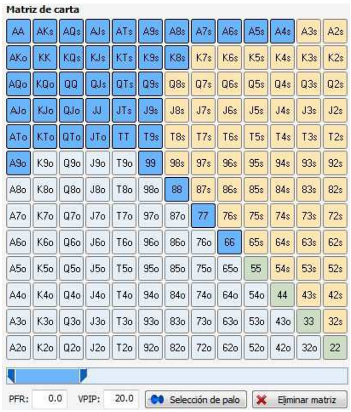
Llegados a este punto, el juego posterior al *flop* prácticamente no existe, pues nuestra capacidad para inducir una retirada del rival una vez que ya ha pagado para ver el *flop* es prácticamente nula (no hay *fold equity*). Por eso, los jugadores solo concebirán dos movimientos: *push* o *fold*.

En esta circunstancia, el modelo ICM nos ayuda a decidir qué movimiento es el correcto y si debemos aceptar o no el *push* de un rival. La idea es comparar el valor de las fichas antes y después de la opción elegida suponiendo que la mano del adversario se encuentra en un rango determinado. Para estimar correctamente dicho rango podemos apoyarnos en nuestro conocimiento del rival o, en el caso del juego online, en software especializado de captura de manos.

Estos programas capturan todas las manos que vamos jugando junto con el comportamiento de nuestros rivales y nos muestran un resumen estadístico junto a cada jugador (véase la imagen adjunta). Entre los datos más relevantes están el porcentaje de veces que el

jugador entra voluntariamente en una mano (*VPIP*) y el porcentaje de veces que lo hace resubiendo (*PFR*). Otros datos que hacen referencia al juego posterior al *flop* o a la agresividad del rival dependiendo de su posición en la mesa también pueden ser importantes en otras fases del juego.

EJEMPLO. Consideremos la situación de burbuja que hemos comentado anteriormente. Imaginemos que las ciegas están 150/300, somos $X_2$ y estamos en ciega grande. El jugador $X_3$ hace *fold* y $X_1$, que está en ciega pequeña, hace *push*. Pensamos que nuestro rival ha podido hacer ese movimiento con un rango de cartas del 20 % y nosotros tenemos 9♣9♥:




En el gráfico anterior, las mejores manos iniciales son las que aparecen en la parte superior izquierda; en concreto, el 20 % de las mejores son las que comparten color con AA. Según vemos en el siguiente gráfico, nuestra pareja nos ofrece una probabilidad de victoria del 54 % frente a ese rango de cartas, luego si se tratase de una partida de *cash* la decisión óptima sería hacer *call*:


Estudiaremos los tres escenarios posibles: hacer *fold*, hacer *call* y ganar la mano, y hacer *call* y perder la mano. Queda

| FOLD | Fichas | €$E[\cdot]$ |
|---|---|---|
| $X_1$ | 5300 | 9.11 |
| $\mathbf{X_2}$ | **2400** | **5.67** |
| $X_3$ | 1300 | 3.22 |

| Call + Win | Fichas | €$E[\cdot]$ |
|---|---|---|
| $X_1$ | 2300 | 5.52 |
| $\mathbf{X_2}$ | **5400** | **9.22** |
| $X_3$ | 1300 | 3.26 |

| Call + Lose | Fichas | €$E[\cdot]$ |
|---|---|---|
| $X_1$ | 7700 | 11.56 |
| $\mathbf{X_2}$ | **0** | **0** |
| $X_3$ | 1300 | 6.44 |

Podemos comparar la esperanza matemática del dinero que nos corresponde si hacemos *fold* con la esperanza matemática ponderada del dinero si hacemos *call*, resultando

$$€E_{fold}[X_2] = 5.67, \qquad €E_{call}[X_2] = 0.54 \cdot 9.22 + 0.46 \cdot 0 = 4.98.$$

Por tanto, la decisión correcta sería hacer *fold*, pues, en caso de aceptar la apuesta, el promedio del valor monetario de nuestras fichas disminuiría.

Es interesante saber a partir de qué probabilidad de victoria merecería la pena aceptar la apuesta. Si llamamos $\theta$ a esta probabilidad, se debe cumplir que $\theta \cdot 9.22 + (1-\theta)\cdot 0 > 5.67$ luego $\theta > 0.615$, es decir, necesitamos al menos un 61.5 % para hacer *call*. Analizando esta situación con *Equilab* sería necesario, al menos, una pareja de jotas o un as y un rey.

Realizar estos cálculos en una mano en vivo es prácticamente imposible. Existen programas que sirven para entrenar estas situaciones y responder así rápidamente en una situación real. También hay analizadores de ICM, como el *Sit and Go Wizard* o el *Holdem Resources* que sirven para estudiar a posteriori si nuestros movimientos fueron correctos.

## 10. El equilibrio de Nash. El sistema SAGE

El «equilibrio de Nash» [13] es un concepto central de la Teoría de Juegos que describe una situación en la que los jugadores alcanzan un equilibrio estratégico, al elegir cada uno la mejor respuesta a las estrategias de los demás jugadores. En este caso, nadie podrá aumentar sus ganancias si se desvía de su estrategia de forma unilateral.

El sistema SAGE (Sit And Go Endgame System), creado por L. Jones y J. Kittock [11], es un sistema para jugar *heads up* basado en una estrategia de equilibrio de Nash. Además de estar en *heads up*, para poder aplicar el sistema SAGE debemos encontrarnos en una fase avanzada donde los únicos movimientos posibles sean *push* o *fold* y el *shortstack* (jugador con menos fichas) de la mesa tenga 10 BB como máximo.

El sistema en sí es muy simple, se trata de asignar a cada mano un *índice de fuerza* (*Power index*, *PI*) y su comparación con el valor de las ciegas grandes que tiene el *shortstack*, $R$ = Tamaño del *shortstack*/Tamaño de las BB. Para calcular el *PI*, el valor de cada carta numérica representa su número de fuerza y para las figuras J, Q y K se asignan los valores 11, 12 y 13, respectivamente, mientras que al as se le asigna el 15. Se multiplica el *PI* de la carta más alta por dos y se le suma el *PI* de la otra carta. Además, si la mano de inicio es una pareja, se le suma 22 al resultado, y si son del mismo palo se le suma 2. Por ejemplo:

| A♦ 6♠ | 5♥ 5♣ | K♠ 10♠ |
|---|---|---|
| $PI = 2 \cdot 15 + 6 = 36$ | $PI = 2 \cdot 5 + 5 + 22 = 37$ | $PI = 2 \cdot 13 + 10 + 2 = 38$ |

Una vez tenemos el número de ciegas efectivas y el *PI*, utilizaremos la siguiente tabla para saber si debemos ir *all in* cuando estamos en la ciega pequeña (o en la grande y el rival ha hecho *call* en la pequeña) o hacer *call* cuando estamos en la ciega grande y nuestro rival ha ido *all in*:

| R | ALL IN (SB) | CALL ALL IN (BB) |
|---|---|---|
| 1 | 12 | siempre |
| 2 | 21 | 17 |
| 3 | 22 | 24 |
| 4 | 23 | 26 |
| 5 | 24 | 28 |

| R | ALL IN (SB) | CALL ALL IN (BB) |
|---|---|---|
| 6 | 25 | 29 |
| 7 | 26 | 30 |
| 8 | 27 | 32 |
| 9 | 28 | 34 |
| 10 | 30 | 36 |

Para cada $R$ concreto, si estamos en ciega pequeña y nuestro *PI* es mayor o igual al valor de la segunda columna, debemos ir *all in*. Si estamos en ciega grande y nos han hecho *all in*, veremos la apuesta si nuestro *PI* es mayor igual al valor de la tercera columna.

EJEMPLO. Estamos en ciega pequeña en un *heads up* con un nivel de ciegas de 400/800 (ante 50) y disponemos de 7400 fichas y nuestro adversario de 4800. Nuestras cartas son 10♥3♥. En este caso $R = 4800/800 = 6$ y nuestra mano tiene un índice de fuerza de 26. Observando la tabla, necesitamos al menos un índice de fuerza de 25, luego debemos ir *all in*.

## 11. GESTIÓN DEL BANKROLL. EL CRITERIO DE KELLY. ITM Y ROI

No solo en el póquer, sino en todos los juegos de apuestas tratamos de buscar situaciones donde la probabilidad de ganar sea mayor que la de perder. Lo mismo ocurre en Economía, los inversores buscan negocios rentables donde invertir su dinero. La pregunta natural que surge ante esta situación es la de cuánto dinero apostar para maximizar nuestra ganancia a largo plazo minimizando el riesgo de bancarrota. En una sucesión suficientemente larga de apuestas favorables no parece razonable apostar todo nuestro capital en cada intento pues, aunque esto podría proporcionarnos un crecimiento exponencial en unas pocas apuestas, nos conduciría con total seguridad a la ruina a largo plazo. Este estudio acerca del riesgo en un juego de azar tiene sus reminiscencias en los estudios realizados por Euler [4] y otros científicos empujados por la solución de D. Bernoulli a la paradoja de San Petersburgo [2] y que dio lugar a lo que hoy se conoce como *Teoría de la Utilidad*.

Kelly creó el sistema que lleva su nombre en 1956 [9] inspirándose en la teoría matemática de transmisión de información de Shannon. Su objetivo consiste en maximizar el crecimiento del *bankroll* del jugador a largo plazo estableciendo la cantidad adecuada para cada apuesta. La principal ventaja del sistema Kelly es que evita que el jugador llegue a la bancarrota cuando se producen malas rachas, al contrario de lo que ocurre en las martingalas. Esto se consigue gracias a que la fórmula de Kelly determina el porcentaje del *bankroll* que hay que apostar en base a la probabilidad de que el evento suceda y a la cuota que nos ofrezca la apuesta.

Supongamos que disponemos de un capital inicial $C_0$ y que la probabilidad que tenemos de ganar una determinada apuesta es $p > 1/2$ y la de perder es $q = 1 - p$. Nuestro capital después de $n$ apuestas será $C_n$. Consideremos $x$, con $0 < x < 1$, la fracción de nuestro dinero que apostaremos, $b$ el factor multiplicador de ganancia por cada euro y $w$, $l$ el número de éxitos y fracasos en las $n$ apuestas, respectivamente. El capital tras $n$ apuestas viene dado por

$$C_n = C_0(1 + bx)^w (1 - x)^l, \qquad \text{donde} \quad w + l = n.$$

Siguiendo el estudio realizado por Kelly [9], buscamos qué valor $x^*$ maximiza la media aritmética de los logaritmos neperianos del ratio $C_n/C_0$, pues la función logaritmo se toma para reflejar la *utilidad* del dinero. Así, como $\ln \frac{C_n}{C_0} = w \ln(1 + bx) + l \ln(1 - x)$, su media aritmética, que denotaremos por $G(x)$, viene dada por

$$G(x) = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{w}{n} \ln(1 + bx) + \frac{l}{n} \ln(1 - x) \right) = p \ln(1 + bx) + q \ln(1 - x).$$

Notemos que

$$G'(x) = \frac{bp}{1 + bx} - \frac{q}{1 - x} = \frac{bp - q - bx}{(1 + bx)(1 - x)} = 0 \quad \text{cuando} \quad x = x^* = \frac{bp - q}{b}.$$

Además, $G''(x) = -b^2p/(1 + bx)^2 - q/(1 - x)^2 < 0$, así que $x^*$ es un máximo local; y como $G(0) = 0$ y $\lim_{x\to 1^-} G(x) = -\infty$, también es máximo global. Pueden consultarse [3, Ch. 24], [15] y [18] para profundizar en los detalles de los argumentos que hemos utilizado.

El criterio de Kelly es muy utilizado en el mundo de las apuestas, donde $b$ es la cuota que ofrece la casa y $p$ es la probabilidad con la que pensamos que el evento puede ocurrir. Para trasladar esta fórmula al póquer de torneos o *Sits and Go* necesitamos introducir el concepto de ITM (*In The Money*), que es el porcentaje de veces que un jugador entra en premios, y el ROI (*Return Of Investment*), el retorno de inversión, que es la razón entre la diferencia entre las ganancias y las pérdidas respecto a la inversión realizada. Estos datos los podemos encontrar si utilizamos cualquier software de gestión de manos.

Podemos entender que $p$ en la fórmula de Kelly es el ITM expresado en tanto por uno y, si calculamos el ROI referido a una unidad de inversión, podemos establecer que $\mathrm{ROI} = b \cdot \mathrm{ITM} - (1 - \mathrm{ITM})$. Despejando $b$ y sustituyendo en la fórmula de Kelly, resulta que

$$x^* = \frac{\mathrm{ROI} \cdot \mathrm{ITM}}{\mathrm{ROI} + 1 - \mathrm{ITM}}.$$

Ejemplo. Supongamos que somos asiduos jugadores de *Sit and Go* de cualquier tipo y tenemos consolidado un 40 % de ITM y un 15 % de ROI. Si nuestro *bankroll* es de 50 €, según Kelly $x^* = 0.045$, lo que supone unos $x^* \cdot 50 = 2.25$ €. Esto quiere decir que no debemos pagar entradas de mayor cantidad si queremos mantener nuestro *bankroll* a salvo.

En el caso de que nuestro software pueda proporcionarnos información desglosada del ITM por posición premiada en un determinado tipo de *Sit and Go*, podemos afinar la fórmula de Kelly.

EJEMPLO. Supongamos que nuestra información está referida a *Sit and Go* de seis participantes y que disponemos de un ITM del 40 % desglosado en un 15 % para el primer puesto y un ITM para el segundo del 25 %. Independientemente de la entrada que paguemos, la estructura de premios suele ser 70 %–30 %. Si despreciamos las comisiones que recauda el casino y consideramos la misma notación que en el ejemplo anterior, nuestra ganancia neta (invirtiendo $xC_0$ de *buy in*) si quedamos en el primer puesto es $0.7 \cdot 6xC_0 - xC_0 = 3.2xC_0$ y de $0.3 \cdot 6xC_0 - xC_0 = 0.8xC_0$ para el segundo puesto. Nuestro capital después de $n$ torneos será

$$C_n = C_0(1+3.2x)^{w_1}(1+0.8x)^{w_2}(1-x)^l, \qquad \text{donde} \quad w_1+w_2+l=n,$$

siendo $w_1$, $w_2$ las veces que quedamos en el primer y segundo puesto, respectivamente, y $l$ las veces que quedamos fuera de premios. Realizando un razonamiento similar al expuesto anteriormente, la función $G(x)$ resulta ser

$$G(x) = 0.15 \cdot \ln(1+3.2x) + 0.25 \cdot \ln(1+0.8x) + 0.6 \cdot \ln(1-x),$$

de donde

$$G'(x) = \frac{0.48}{1+3.2x} + \frac{0.2}{1+0.8x} - \frac{0.6}{1-x} = 0.$$

Es decir, $-2.56x^2 - 2.056x + 0.08 = 0$, cuya única solución positiva es $x^* = 0.0372$. Si nuestro *bankroll* es de 50 €, deberíamos jugar torneos de entrada no superior a 1.86 €.

## REFERENCIAS

[1] B. ALSPACH, *7-Card Poker Hands*, 2000, `http://people.math.sfu.ca/~alspach/comp20/`.

[2] D. BERNOULLI, Exposition of a new theory on the measurement of risk, *Econometrica* **22** (1954 [1738]), 23–36.

[3] B. CHEN Y J. ANKENMAN, *The Mathematics of Poker*, Conjelco, 2006.

[4] L. EULER, Vera aestimatio sortis in ludis (E811), *Opera posthuma* **1** (1862), 315–318.

[5] M. FLYNN, S. MEHTA Y E. MILLER, *Professional No-Limit Hold'em: Volume One*, Two Plus Two Publishing, 2007.

[6] T. GUERRERA, *Killer Poker by the Numbers: the Mathematical Edge for Winning Play*, Kensington Publishing Corp., 2007.

[7] D. Harrington, *Harrington on Hold'em Expert Strategy for No Limit Tournaments, Vol. 1: Strategic Play*, Two Plus Two Publishing, 2004.

[8] D. A. Harville, Assigning Probabilities to the Outcomes of Multi-Entry Competitions, *J. Amer. Statist. Assoc.* **68:342** (1973), 312–316.

[9] J. L. Kelly, A new interpretation of information rate, *Bell System Tech. J.* **35** (1956), 917–926.

[10] M. Malmuth, *Gambling Theory and Other Topics*, Two Plus Two Publishing, 1999.

[11] J. McManus, Pump it or dump it? Ask the system, *New York Times*, 28 de enero de 2006.

[12] C. Moshman, *Sit'n go strategy*, Two Plus Two Publishing, 2007.

[13] J. F. Nash, *Non-cooperative games*, Ph. D. Dissertation, Princeton University, 1950.

[14] E. W. Packel, *The mathematics of games and gambling*, Math. Assoc. America Textbooks **28**, 1981.

[15] S. Skiena, Lecture 25: Money Management, CSE 510 - Computational Finance, 2008, `http://www.cs.sunysb.edu/~skiena/691/lectures/lecture25.pdf`.

[16] D. Sklansky, *Ganar al Poker*, La esfera de los libros, 2009.

[17] D. Sklansky y M. Malmuth, *Hold'em Poker for Advanced Players*, Two Plus Two Publishing, 1999.

[18] E. O. Thorp, The Kelly criterion in blackjack sports betting, and the stock market, *Handbook of Asset and Liability Management*, Vol. 1, Chap. 9, North Holland, 2006.



Pedro Ruymán García Díaz, Dpto. de Matemática Fundamental, Universidad de La Laguna, Tenerife

Correo electrónico: `prgdiaz@ull.edu.es`