C. R. Acad. Sci. Paris, t. 306, Série I, p. 663-666, 1988

Analyse harmonique/Statistiques/*Harmonic Analysis*

Formes de Toeplitz associées à une analyse multi-échelle

Paul DOUKHAN

Résumé — Nous donnons ici le comportement asymptotique de la mesure spectrale associée à une analyse multi-échelle par l'intermédiaire de sa matrice de Toeplitz. Nous montrons pour cela la convergence des moments non nuls de cette mesure. Lorsque l'ondelette admet un support compact, nous indiquons de plus une vitesse de convergence de ces moments et nous donnons un développement asymptotique du premier moment spectral. L'asymptotique négative est considérée elle aussi et, comme on peut le penser, sa limite est triviale.

Toeplitz forms associated to a multiscale analysis

Abstract — *We give here the behaviour of the spectral measure associated to a multiscale analysis with respect to Toeplitz forms. We show, for this, convergence of moments with no zero order for this measure; notice that generally the mass of the spectral measure goes to infinity which is unusual in those problems. For compactly supported wavelets we also give a rate of convergence and an asymptotic development of the first spectral moment. Negative asymptotic is also considered, the limit obtained is informationless.*

1. INTRODUCTION. — Le but de ce travail est l'étude des formes de Toeplitz associées à une analyse multi-échelle de $L^2(\mathbb{R}^d)$; une telle étude permet la mise en place d'estimateurs d'une densité par projections orthogonales (*voir* [2]). Tout en conservant la simplicité algorithmique des systèmes de Haar, les analyses multi-échelles possèdent les propriétés de régularité de bases orthonormales classiques, telles que la base d'Hermite, indispensables à l'étude du biais d'une estimation de densité. La théorie des ondelettes et des analyses multi-échelles est actuellement développée sous l'impulsion d'Yves Meyer (*voir* [1], [4] à [8]).

Nous nous intéressons ici aux problèmes de Szegö (*voir* [3], p. 123) concernant l'asymptotique des matrices de Toeplitz associées à une analyse multi-échelle. Lorsqu'aucune régularité n'est requise, le problème est celui d'une base de Haar; il est traité de façon différente par [3] [*voir* 7.9, p. 119 et (*d*) p. 131]. Notre motivation est issue d'un problème de statistique non paramétrique : l'estimation d'une densité basée sur une analyse multi-échelle. Dans ce cas, évaluer la vitesse de convergence du biais, sous des hypothèses de régularité, impose l'introduction d'ondelettes régulières. D'autre part, si $\hat{f}_n$ estime la densité f, la moyenne et la variance asymptotiques de $\int |\hat{f}_n(x)-f(x)|^2\,dx$ sont les deux premiers moments spectraux considérés plus bas (*voir* [2]); nous montrons en fait dans ce travail qu'une statistique de la forme $n\,2^{-dj/2}\|\hat{f}_n-f\|^2-2^{dj/2}\Delta_j$ admet un comportement asymptotiquement gaussien lorsque $n\,2^{-dj}\longrightarrow\infty$ et $j\longrightarrow\infty$ $(n\to\infty)$ et nous précisons aussi une vitesse de convergence de ces lois. Mais remarquons qu'ici nous requérons très peu de régularité pour φ. Plus précisément, soit φ une fonction d'ondelette associée et soit $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ l'analyse graduée qui lui est associée dans $\mathbb{R}^d$, une base inconditionnelle de V_j est $(\Phi_h^j)_{h\in\mathbb{Z}^d}$ où $\Phi^j_{(h_1,\,\ldots,\,h_d)}(x_1,\,\ldots,\,x_j)=2^{dj/2}\,\varphi(2^j x_1-h_1)\ldots\varphi(2^j x_j-h_j)$. En fait, si V_j désigne une analyse multi-échelle, il ressort clairement de [4] et [5] qu'il existe une telle fonction φ; la base obtenue est alors orthonormale. Soit $c^j_{h,\,l}=\int\Phi^j_h(x)\,\bar{\Phi}^j_l(x)\,f(x)\,dx$, la matrice de Toeplitz $T_j=(c^j_{h,\,l})_{|h|,\,|l|\leq k(j)}$ (où

Note présentée par Yves MEYER.

0249-6291/88/03060663 $ 2.00

$|h| = \mathrm{Max}\{|h_1|, \ldots, |h_d|\}$ si $h=(h_1, \ldots, h_d)$) est uniformément bornée lorsque $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Nous nous intéressons alors à la distribution asymptotique des valeurs propres $\{\lambda^j_h; |h| \leqq k(j)\}$ de T_j en considérant la mesure spectrale $\mu_j = 2^{-dj} \sum_{|h| \leqq k(j)} \delta_{\lambda^j_h}$.

Nous montrons le comportement limite des moments de μ_j quand j tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$; nous précisons, d'autre part, le comportement asymptotique du premier moment. Lorsque la fonction φ définit une base orthogonale, les mesures μ_j convergent vers $\lambda \circ f^{-1}$ relativement à la topologie induite par dualité avec un ensemble de fonctions continues et nulles en 0. La mise en œuvre de ce travail nécessite des lemmes concernant l'approximation de sommes de Riemann multidimensionnelles par des intégrales, montrés dans le paragraphe 2, et qui semblent être d'intérêt propre.

2. Lemmes fondamentaux. — Soit g une fonction $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, R fois différentiable, telle que $D^r g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour $0 \leqq r < R$ et $D^R g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, on s'intéresse aux sommes discrétisées : $S_{N,k}(g) = \sum_{|h| \leqq k} g(h/N) N^{-d}$ et on pose $C^N_\lambda = [-(\lambda/N), (\lambda+1/N)]^d$ pour $\lambda > 0$, $N > 0$.

Lemme 1 :

$$\int_{C^N_k} g(x)\,dx = \sum_{r=0}^{R-1} \frac{N^{-r}}{r!} S_{N,k}(g_r) + O(k^d N^{-d-R})$$

où $g_r(x) = \sum_{i_1+\ldots+i_d=r} [(i_1+1)!\ldots!(i_d+1)!]^{-1} (\partial^r g(x)/\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_d^{i_d})$.

Lemme 2. — *Pour tout* $r \in [0, R[$, *il existe une fonction* $\gamma_r \in L^1$ *telle que :*

$$S_{N,k}(g) = \sum_{r=0}^{R-1} N^{-r} \int_{C^N_k} \gamma_r(x)\,dx + O(k^d N^{-d-R}).$$

Ici γ_r *désigne une combinaison linéaire de dérivées partielles de* g *à l'ordre* r *dont les coefficients sont indépendants de la fonction* g; *ainsi* $\gamma_0 = g$, $\gamma_1 = -(1/2)\ d\ (g)$, $\gamma_2 = (1/8)\,d^2(g) - (1/12)\,\Delta g$, *l'opérateur différentiel* d *est défini ici par* $d(g) = 1 . \mathrm{grad}\, g$.

On montre par récurrence l'existence de fonctions γ^u_r de même forme que γ_r telles que :

$$S_{N,k}(g) = \sum_{r=0}^{u} N^{-r} \int_{C^N_k} \gamma_r(x)\,dx + \sum_{r=u+1}^{R-1} N^{-r} S_{N,k}(\gamma^u_r) + O(k^d N^{-d-r}).$$

Réinjecter la formule 1 associée à la fonction γ^u_{u+1} donne le résultat : $\gamma^0_r = -g_r$ si $r = 1, \ldots, R-1$ et $\gamma^v_r = 1/(r-v)!\,(\gamma^{v-1}_v)_{r-v} + \gamma^{v-1}_r$ pour $r = v+1, \ldots, R-2$ [la fonction $(h)_r$ est définie pour $h \in C^r$ au lemme 1] et $\gamma_r = \gamma^{r-1}_r$. Ces relations de récurrence permettent de calculer : $\gamma_0 = g$, $\gamma_1 = -g_1$, $\gamma_2 = (g_1)_1 - g_2/2$ et $\gamma_3 = -(1/6)\,g_3 - g_{1,1,1}$.

Lemme 3. — *Posons* $g_x(y) = g(x+y)$; *alors, il existe une constante* C_R *indépendante de* X :

$$\sup_{|x| \leqq X} \left| S_{N,k}(g_x) - \int \sum_{r=0}^{R-1} N^{-r} \gamma_r \right| \leqq C_R \left\{ \| D^k g \|_\infty k^d N^{-d-R} + \int_{(C^N_{k-XN})^c} \sum_{r=0}^{R-1} \| D^r g \| N^{-r} \right\}.$$

La constante C_R ne dépend que de R et d.

3. Étude des moments spectraux. — Nous écrivons

$$M^s_{j,k} = \sum_{|h| \leqq k} \sum_{|h_1|, \ldots, |h_{s-1}| \leqq k} C^j_{hh_1} \ldots C^j_{h_{s-1}h} 2^{-dj}.$$

Chaque terme étant une intégrale multiple, un changement de variables permet d'écrire

$$M^s_{j,k} = \sum_{|h|\le k} 2^{-dj} \int_{\mathbb{R}^{sd}} A^k_h(u)\, f^{[s]}_{2^{j}u}(2^{-j}h)\, du$$

où $f^{[s]}_v(x) = f(x+v_1) \ldots f(x+v_s)$ si $v=(v_1, \ldots, v_s)\in\mathbb{R}^{sd}$ et, $A^k_h(u) = \sum a_L(u)$ [somme étendue aux $L=(l_1, \ldots, l_{s-1})\in\mathbb{Z}^{(s-1)d}$ tels que $|l_i - h|\le k$, $i=1, \ldots, s-1$]; on a noté de plus $a_L(u) = \Phi(u_1)\bar\Phi(u_1+l_1)\ldots\Phi(u_{s-1}+l_{s-2})\bar\Phi(u_{s-1}+l_{s-1})\Phi(u_{s-1}+l_{s-1})\bar\Phi(u_s)$ si $u=(u_1, \ldots, u_s)\in\mathbb{R}^{sd}$ et $\Phi=\varphi^{\otimes d}$. Notons que si

$$b(h) = \int \Phi(x)\,\bar\Phi(x+h)\,dx \qquad \text{et} \qquad p(h) = \int |\Phi(x)\,\Phi(x+h)|\,dx,$$

alors sous l'hypothèse $|\varphi(x)|\le C(1+|x|)^{-(1+q)}$: $\int|\varphi(x)\,\varphi(x+\lambda)|\,dx \le O(|\lambda|^{\varepsilon-q})$ si $q>\varepsilon>0$. La fonction $A(u) = \sum_{L\in\mathbb{Z}^{(s-1)d}} a_L(u)$ est alors intégrable et $\int A(u)\,du = b^{*s}(0)$.

Notons que $\int|A^k_h(u) - A_h(u)|\,du \le \Sigma'_h \int|a_L(u)|\,du$, où la somme est étendue aux $L=(l_1, \ldots, l_{s-1})$ vérifiant $|l_1 - h|>k$. Si nous posons $\theta(v) = (1+|v|)^{\varepsilon-q}$, le calcul précédent montre que $\sum_{|h|\le k}\int|A(u) - A^k_h(u)|\,du \le \mathrm{Cte}\sum_{\lambda=0}^{k}\lambda^{d-1}\theta(\lambda-k)\le \mathrm{Cte}\,k^{d-1}$, et, si $s>1$ et $q>d/(s-1)$, $M^s_{d,k} - \int A(u)\,S_{2^j,k}(f^{[s]}_{2^{j}})\,du = O(k^{d-1}2^{-dj})$. D'autre part, pour $s=1$, $M^1_{jk} = \int\Phi(u)\,\bar\Phi(u)\,S_{2^j,k}(f_u)\,du$. Remarquant à présent que

$$\|f^{[s]}_v - f^s_{v_1}\|_\infty \le \|f\|^{s-1}_\infty\,\|Df\|_\infty\,\mathrm{Max}\{|v_1 - v_i|\},$$

il vient

$$M^s_{j,k} - \int A(u)\,S_{2^j,k}(f^s_{u_1})\,1_K(u)\,du = O\left(k^{d-1}2^{-dj} + 2^{-j} + \int 1_{K^c}(u)\,A(u)\,du\right),$$

si K est un compact arbitraire de $\mathbb{R}^{sd}$. Pour pouvoir appliquer le lemme 3, il reste à remarquer que la fonction $A\in L^1\cap L^\infty$.

Théorème 1. — *Supposons que* $|\varphi(x)|\le C(1+|x|)^{-q-1}$ *avec* $q>d$ *si* $s\ne 1$, $q>0$ *sinon, et* f, $Df\in L^1\cap L^\infty$, *alors, si* $k=k(j)$ *est tel que,* $\lim_{j\to+\infty} k\,2^{-j} = +\infty$, $\lim_{j\to\infty} k^d\,2^{-(1+d)j} = 0$, *on a :* $\lim_{j\to\infty} M^s_{j,k} = b^{*s}(0)\int f^s(x)\,dx$.

Remarques. — (*a*) Si l'ondelette φ est orthogonale : $b^{*s}(0)=1$.

(*b*) Si φ est à support compact de diamètre A, la vitesse de convergence dans le théorème 1 peut être évaluée par $O(k^d 2^{-(d+1)j} + Q_0(2^{-j}(k-A)))$.

(*c*) En aucun cas la fonction φ n'est astreinte à être une fonction d'ondelette associée, toutefois la forme du système (Φ^j_h) et les applications que nous avons en vue montrent l'inutilité d'élargir le cadre de notre étude.

Dans le cas $f\ge 0$, remarquons que $S_{N,k}(f^{[s]}_v) - S_{N,k}(f^s_v) = O(|v|)\,S_{N,k}(f_v)$; le lemme 3 appliqué avec $R=2$ montre les

Corollaire 1. — *Si* $f\ge 0$, f, $Df\in L^1\cap L^\infty$, $D^2 f\in L^\infty$ *et si* φ *est à support compact :*

$$M^s_{j,k} - b^{*s}(0)\int f^s(x)\,dx = O(2^{-j} + k^d\,2^{-(d+2)j} + Q_0(2^{-j}(k-A))).$$

PROPOSITION 1. — *Si $D^r f \in L^1$, $0 \leqq r < R$ f, $D^R f \in L^\infty$ et si φ est à support compact :*

$$M^1_{j,k} - \sum_{r=0}^{R-1} 2^{-rj} \int \gamma_r(x)\,dx = O\left(k^{d_2-(d+R)j} + \sum_{r=0}^{R-1} 2^{-rj} Q_r(2^{-j}(k-A))\right).$$

Exemples. — (*a*) Si $Q_0(B) \leqq \mathrm{Cte}\, e^{-aB}$, le choix $k=[A+a^{-1} j 2^j]$ donne lieu à une vitesse de convergence, dans le cas d'ondelette compacte, de l'ordre de j^{d_2-j} pour le théorème 1 et de l'ordre de 2^{-j} pour le corollaire 1. Si $Q_r(B) \leqq \mathrm{Cte}\, e^{-aB}$ pour $0 \leqq r < R$, la proposition 1 donne pour vitesse d'approximation $j^d 2^{-Rj}$ lorsque $k=[A+R\,a^{-1} j 2^j]$.

(*b*) Si f est à support compact, un choix $k=C\,2^j$ est autorisé; les vitesses de convergence obtenues dans le théorème 1 et la proposition 1 sont alors respectivement de l'ordre de 2^{-j} et 2^{-Rj}.

COROLLAIRE 2. — *Sous les hypothèses du théorème 1 et si φ est une ondelette associée orthogonale : $\lim_{j\to\infty} \mu_j(g) = \int g(f(x))\,dx$ si $g \in \Gamma$, où $\Gamma = \{ g \in C(\mathbb{R})$; h est à croissance polynomiale, $h(x)=x^{-1} g(x) \}$.*

Remarque. — Si μ_j est renormalisée pour être une probabilité, la suite obtenue converge vers 0, sauf si f est à support compact. Dans ce dernier cas μ_j converge étroitement vers $\lambda \circ f^{-1}$ sous les autres hypothèses du corollaire 2.

4. ASYMPTOTIQUE NÉGATIVE.

PROPOSITION 2. — *Si $|\varphi(x)| + |\varphi'(x)| \leqq C(1+|x|)^{-q-1}$ pour un $q > d-1$ et si $\int (|x|+1)\,|f(x)|\,dx < \infty$, alors $2^{dj}\,\mathrm{Tr}(T^s_{-j,k}) = \left(A \int f(x)\,dx\right)^s + O(2^{-j} + k^{s(d-2q-2)})$, où $A = \sum_{h \in \mathbb{Z}^d} |\Phi(h)|^2$.*

COROLLAIRE 3. — *Si $k(j) \xrightarrow[j\to\infty]{} \infty$ et $\nu_j = 2^{dj} \sum_{|h| \leqq k} \delta_{\Lambda_h^{-j}}$, alors, sous les hypothèses précédentes, $\nu_j(g) \xrightarrow[j\to\infty]{} g\left(A \int f(x)\,dx\right)$, lorsque $g \in \Gamma$.*

Remarque. — Il est aussi possible dans tout ce travail de considérer une base d'ondelettes $(\psi^j_{\varepsilon,k})$ de L^2 où $j \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon \in \{1, \ldots, 2^d-1\}$, $k \in \mathbb{Z}^d$. Le cas du moment d'ordre 1 est conséquence claire des corollaires 2 et 3.

Note reçue le 1^er^ février 1988, acceptée le 7 mars 1988.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] I. DAUBECHIES, A. GROSSMANN et Y. MEYER, Painless nonorthogonal expansions, *J. Math. Phys.*, 27, (5), 1986, p. 1271-1283.

[2] P. DOUKHAN et J. R. LEON, *Déviation quadratique d'estimateurs de densités par projections orthogonales* (à paraître).

[3] U. GRENANDER et G. SZEGÖ, *Toeplitz forms and their applications*, Univ. of Cal. Press. Berkeley, 1958.

[4] K. GRÖCHENIG, Analyse multi-échelles et bases d'ondelettes, *C. R. Acad. Sci.*, 305, série I, 1987, p. 13-15.

[5] P. G. LEMARIE et Y. MEYER, Ondelettes et bases hilbertiennes, *Rev. Mat. Iberoamericana*, 2, (1), 1986, p. 1-18.

[6] S. MALLAT, *Multiresolution approximations and wavelets*, Preprint C.R.A.S. Lab. Dept of Computer and Information Science, Univ. of Pensylvania, 1987.

[7] Y. MEYER, Ondelettes et fonctions splines, *Séminaire E.D.P.*, École Polytechnique, Palaiseau, Paris, 1986.

[8] Y. MEYER, S. JAFFARD et O. RIOUL, L'analyse par ondelettes, *Revue « Pour la Science »*, septembre 1987, p. 28-37.

Université de Paris-Sud, U.A. n° 743, C.N.R.S., Statistique appliquée, Mathématiques, Bât. n° 425, 91405 *Orsay Cedex.*