Méthodes algébriques dans la musique et la musicologie du XXème siècle : aspects théoriques, analytiques et compositionnels

Moreno Andreatta

École des Hautes Etudes en Sciences Sociales

Formation Doctorale « Musique Histoire Société »

Thèse pour obtenir le grade de docteur de l'EHESS en musicologie

Méthodes algébriques en musique et musicologie du XX^{e} siècle : aspects théoriques, analytiques et compositionnels

Moreno ANDREATTA

sous la direction d'**Alain POIRIER**

Jury de thèse

Alain POIRIER (directeur)

Guerino MAZZOLA (rapporteur)

John RAHN (rapporteur)

Gérard ASSAYAG (examinateur)

Marc CHEMILLIER (examinateur)

Jean PETITOT (examinateur)

Date de soutenance : 12 décembre 2003

MÉTHODES ALGÉBRIQUES EN MUSIQUE ET MUSICOLOGIE DU XX^e SIÈCLE : ASPECTS THÉORIQUES, ANALYTIQUES ET COMPOSITIONNELS

Moreno ANDREATTA

Thèse de doctorat pour l'obtention du titre de *docteur en musicologie*

École des Hautes Etudes en Sciences Sociales

2003

RÉSUMÉ DE LA THÈSE

Mots clefs : formalisation, structures algébriques, théorie musicale, *Set Theory*, outils d'analyse musicale, procédures compositionnelles, musicologie computationnelle.

Résumé : L'application de méthodes algébriques en musique représente une démarche récente dans la recherche musicale. Une réflexion historique sur l'émergence du concept de structure algébrique en musique met en évidence la place centrale occupée par trois compositeurs/théoriciens du XX^e siècle : Milton Babbitt, Iannis Xenakis et Anatol Vieru. À partir de leurs propositions théoriques, cette étude développe une réflexion approfondie sur la notion de théorie musicale dans ses applications aussi bien analytiques que compositionnelles. Elle offre également une formalisation algébrique de la *Set Theory* et de ses développements transformationnels tout en discutant les rapports entre la tradition analytique américaine et la démarche théorique formelle en Europe. Les concepts abordés permettent de définir la place d'une démarche computationnelle en musicologie et ouvrent des questions philosophiques sur le rapport entre mathématiques et musique.

Laboratoire d'accueil : Equipe Représentations Musicales IRCAM/CNRS (U.M.R. 9912)

ALGEBRAIC METHODS IN TWENTIETH-CENTURY MUSIC AND MUSICOLOGY:

THEORETICAL, ANALYTICAL AND COMPOSITIONAL ASPECTS

Moreno ANDREATTA

PhD in Musicology

École des Hautes Etudes en Sciences Sociales

2003

ABSTRACT

Keywords: formalisation, algebraic structures, music theory, tools for music analysis, compositional process, computational musicology

Abstract: The application of algebraic methods to music is a relatively new approach in musical research. We analyse the problem of the emergence of algebraic structures in music by looking at three main figures of Twentieth-Century theorists/composers: Milton Babbitt, Iannis Xenakis and Anatol Vieru. Some of their music-theoretic constructions are the starting point for a discussion on the notion of music theory in some analytical as well as compositional applications. This work discusses an algebraic formalisation of Set Theory and its transformational developments from a perspective which includes an analysis of the relationships between American tradition and a formalised European approach. The concepts elaborated in this work lead to a definition of the place of a computational approach in musicology and open several philosophical questions on the relationships between mathematics and music.

Laboratory: Music Representation Team, IRCAM/CNRS (U.M.R 9912).

Remerciements

Je remercie tout d'abord mon directeur de recherche Alain POIRIER ainsi que mon codirecteur de recherche, Marc CHEMILLIER, pour leur encadrement et leur soutien dans ce travail de recherche.

Je remercie les membres du jury qui m'ont fait l'honneur d'être présents et de critiquer ce travail et en particulier John RAHN et Guerino MAZZOLA qui ont accepté la lourde charge d'être rapporteurs.

Je remercie Gérard ASSAYAG, responsable de l'Equipe Représentations Musicales de l'IRCAM, pour m'avoir accueilli au sein de l'équipe tout au long de ces années et pour m'avoir encouragé dans de nombreuses initiatives qui ont eu un rôle décisif dans la formation des idées discutées dans ce travail ainsi que pour l'amitié dont il a su m'entourer.

Je remercie les institutions qui m'ont soutenu financièrement pendant cette période de recherche, en particulier la Fondation Marcel Bleustein-Blanchet pour la vocation, le Ministère des Affaires Étrangères, le Collegio Ghislieri de Pavia et l'Université de Padua.

Je tiens à remercier tout particulièrement Hugues Vinet et le CNRS pour les aides ponctuelles et leur soutien dans toutes les initiatives concernant les rapports entre mathématiques et musique, en particulier le Séminaire *MaMuX* (Mathématiques/Musique et relations avec d'autres disciplines) et le colloque international *Autour de la Set Theory* qui ont influencé de façon décisive mes recherches.

Je suis également reconnaissant aux nombreuses personnes avec qui j'ai pu éclairer certains aspects de ce travail de recherche pendant ces années, entre autres les mathématiciens et théoriciens de la musique Guerino MAZZOLA, Thomas NOLL, Emmanuel AMIOT, Harald FRIPERTINGER, Franck JEDRZEJEWSKI, Vittorio CAFAGNA, Yves HELLEGOUARCH et Dan Tudor VUZA, les compositeurs Alain BANCQUART, Georges BLOCH, Jean-Marc CHOUVEL et Tom JOHNSON, les musicologues Jean-Pierre CHOLLETON, Nicolas MEEUS, Luigi VERDI et d'autres personnes qu'il n'est pas aussi aisé de faire entrer dans une typologie minimale des remerciements, comme André RIOTTE, Marcel MESNAGE, François NICOLAS….

Je remercie mes parents et tous mes amis, qui m'ont entouré de leur attention et de leur affection et qu'il n'est pas besoin de nommer. Un *grazie* a Marella pour le sourire qui m'a accompagné pendant ces dernières années. Merci également à Isabelle pour son soutien pendant les derniers jours.

Je tiens à remercier tout particulièrement deux amis, car sans eux cette thèse n'aurait tout simplement pas vu le jour : Carlos AGON et Jean CARRIVE. Je ne saurais pas trop remercier Carlos pour sa disponibilité et sa générosité inconditionnelle de laquelle il a su m'entourer à tout moment. Je n'aurais pas pu imaginer un meilleur guide pour avancer, chaque jour, dans la réalisation de ce projet. Mais il n'y aurait également pas eu de thèse sans la lecture attentive et patiente de Jean qui a accepté de poser momentanément son violon de et partir pour un voyage dans les orbites de la musicologie computationnelle.

Soyez sûrs que ces six petites lettres contiennent une immense reconnaissance :

G R A Z I E

Sommaire

INTRODUCTION

« Peut-on parler de musique avec les outils de l'algèbre ? », pourrait-on se demander en paraphrasant les propos d'un récent colloque d'épistémologie musicale[1]. Répondre positivement à cette question implique une démarche particulière reposant sur l'affirmation qu'il existe une relation pertinente entre musique et mathématiques. Définir le double caractère de cette pertinence, à la fois mathématique et musicale, semble être une condition nécessaire pour s'interroger sur la place des *méthodes algébriques* en musique et musicologie. Nous avions ainsi choisi, dans un précédent travail, d'introduire le concept de recherche *mathémusicale* pour exprimer le lien étroit que l'approche algébrique permet d'établir entre recherche musicale et recherche mathématique[2].

Si l'application d'outils mathématiques à la musique représente l'illustration la plus commune des relations entre mathématiques et musique, la musique peut à l'inverse constituer un objet de recherche en soit pour les mathématiques. Ce type de réversibilité est l'un des enjeux majeurs de l'approche algébrique, ce qui explique peut-être la quantité croissante de publications sur le sujet dans les dix dernières années, aussi bien dans des ouvrages de musicologie ou de théorie de la musique[3] que dans des revues spécialisées de mathématiques.

L'application des méthodes algébriques met en œuvre trois aspects qui sont souvent étroitement liés : aspects théoriques, analytiques et compositionnels. Dans notre travail, nous proposons de tenter de les séparer afin de mettre en évidence leurs propres modes de fonctionnement, à la fois musical et musicologique. Cependant, nous insisterons à plusieurs reprises sur le caractère très limitatif d'une telle catégorisation qui prétendrait définir les champs possibles d'application de toute méthode algébrique à la musique ou à la musicologie. Il est bien connu qu'au XX^{e} siècle, théorie musicale, analyse et composition sont des disciplines qui s'influencent mutuellement. Toute tentative de séparer ces trois domaines se

[1] « Observation, Analyse, modèle : peut-on parler d'art avec les outils de la science ? » (2^{e} colloque international d'épistémologie musicale, tenu sous l'égide de la SFAM, du Centre de recherche en psychologie, sociologie et didactique de la musique de l'Université de Nanterre et de l'Ircam).
[2] Ce sujet a fait l'objet de notre *tesi di laurea* en mathématiques appliquées à la musique à l'Université de Pavie [ANDREATTA 1996].
[3] Le terme « théorie de la musique » doit s'entendre, tout au long de ce travail, dans le sens de ce qu'on appelle, aux Etats-Unis, la *music theory*.

heurte à des difficultés qui sont particulièrement frappantes dans le cas de l'approche algébrique.

Un simple survol historique de l'émergence de l'approche algébrique en musique met en évidence la place centrale occupée par certains compositeurs/théoriciens qui n'ont pas hésité pas à proposer des applications analytiques de leurs démarches théoriques et compositionnelles. Nous concentrerons notre réflexion sur trois compositeurs/théoriciens qui sont emblématiques de la place de la réflexion théorique sur la musique, non seulement dans ses ramifications analytiques et compositionnelles, mais aussi dans son caractère éminemment algébrique, qui le distingue clairement d'autres propositions théoriques de la même période.

Milton Babbitt aux Etats-Unis, Iannis Xenakis en Europe et Anatol Vieru en Europe de l'Est représentent une « trinité » de compositeurs/théoriciens, l'algèbre étant l'élément unificateur de leur pensée théorique, analytique et compositionnelle. Tous les trois sont arrivés, presque au même moment et d'une façon indépendante, à la découverte du caractère algébrique du tempérament égal. Plus précisément, ils ont mis en évidence la notion mathématique de *groupe* en tant que concept unificateur de leur pensée théorique. Ces trois démarches théoriques ont par contre eu des influences différentes dans l'analyse musicale. Aux Etats-Unis, les idées de Milton Babbitt sont à la base de la *Set Theory*, une discipline analytique dont certains développements récents, notamment autour de la théorie transformationnelle de David Lewin, ont poussé la formalisation algébrique très loin des idées originaires. Dans le cas d'Anatol Vieru, les ressemblances avec la *Set Theory* ont été mises en évidence par le compositeur lui-même qui a donné une analyse très lucide de l'importance d'une démarche algébrique en théorie et analyse musicale. À la différence des deux compositeurs précédents, une application analytique des théories algébriques proposées par Iannis Xenakis, en particulier la *théorie des cribles*, change radicalement la notion d'analyse musicale en ouvrant le champ à ce qu'on appelle désormais l'analyse musicale assistée par ordinateur (AAO).

L'informatique musicale et l'analyse musicale assistée par ordinateur représentent un axe transversal dans ce travail sur les méthodes algébriques en musique. L'implémentation de nombreux outils théoriques d'aide à l'analyse musicale dans un langage de programmation visuelle tel qu'*OpenMusic*[4] ouvre le problème de la calculabilité d'une théorie musicale et

[4] Ce langage de programmation, développé par l'Equipe Représentations Musicales de l'Ircam [ASSAYAG et al. 1999], était initialement conçu pour la composition assistée par ordinateur mais il est de plus

transforme, progressivement, la nature même de la discipline musicologique. Un des enjeux de ce travail de thèse est de discuter les fondements d'une nouvelle approche en musicologie qui ajoute l'élément computationnel au caractère « systématique » de la discipline, telle qu'elle s'est constituée vers la fin du XIX^{e} siècle. Nous allons donc essayer de définir quelques éléments majeurs de ce qu'on appelle désormais la *musicologie computationnelle* à partir des propositions théoriques concernant l'approche algébrique en musique.

Les méthodes algébriques, de par leur nature, s'adaptent très bien à cette démarche computationnelle et permettent en même temps de résoudre, d'une façon très élégante, certains problèmes classiques concernant l'énumération et la classification des structures musicales. Bien que certaines techniques puissent se généraliser à d'autres paramètres que les hauteurs ou les rythmes, la démarche algébrique en musique reste ancrée dans la notion traditionnelle d'intervalle. De ce point de vue, notre travail a une portée limitée car il se concentre sur les propriétés d'organisation des hauteurs dans un espace tempéré dont on essaie de fournir une interprétation possible de certains énoncés dans le domaine rythmique. Cela correspond aussi à une préoccupation majeure des trois compositeurs/théoriciens qui ont tous proposé des lectures algébriques différentes de la relation existante entre l'espace des hauteurs et l'espace des rythmes.

Toutes ces approches reposent sur des cadres conceptuels relativement élémentaires d'un point de vue mathématique car la structure algébrique sous-jacente est fondamentalement une structure de *groupe*. Cependant, les méthodes algébriques plus récentes, et en particulier les méthodes développées par le mathématicien et théoricien suisse Guerino Mazzola à partir de la théorie mathématique des catégories, offrent à la musicologie computationnelle un énorme pouvoir d'abstraction et de formalisation.

Sans prétendre entrer dans les aspects techniques parfois extrêmement complexes de la démarche catégorielle appliquée à la musique, nous allons montrer comment la généralisation de la *Set Theory* américaine par David Lewin et le modèle théorique proposé par Guerino Mazzola se rejoignent en postulant la primauté de la notion de « transformation » sur celle d'« objet musical ». Ce changement de perspective, qui est implicite dans toute démarche algébrique, est riche de conséquences philosophiques, car il ouvre une question fondamentale sur le rapport entre objets mathématiques et structures musicales.

---

en plus employé comme outil analytique comme nous allons le montrer en présentant notre environnement algébrique d'aide à l'analyse musicale.

Ce travail est divisé en trois parties. La première partie est consacrée à certains *aspects théoriques* des méthodes algébriques en musique et musicologie. À partir des propositions théoriques de Milton Babbitt, Iannis Xenakis et AnatolVieru, nous plaçons le problème de la formalisation et représentation des structures musicales et à l'intérieur d'une discussion sur la musicologie systématique afin de mieux montrer la double portée musicale et musicologique de la démarche algébrique. Dans le cas des méthodes algébriques, la formalisation semble être, dans la plupart des cas, une étape préalable pour l'étude d'espaces de représentation « géométrique » des structures musicales. À la représentation circulaire, modèle privilégié de la pensée intervallique d'Anatol Vieru, on peut associer d'autres formes de représentation géométrique, en particulier la représentation toroïdale. Un *Interludium* autour d'un problème musical classique, notamment l'établissement des séries dodécaphoniques tous-intervalles, sera l'occasion de souligner la place occupée par certains théoriciens français et, dans le même temps, de montrer comment la formalisation algébrique peut parfois précéder la théorisation musicale.

La deuxième partie est consacrée aux *aspects analytiques* des méthodes algébriques en musicologie. Afin de mieux comprendre la place des méthodes algébriques en analyse musicale, nous allons d'abord essayer de définir une typologie minimale des approches analytiques formalisées au XX^{e} siècle. Cette typologie, qui ne prétend pas à l'exhaustivité, identifie quatre catégories de la pensée analytique ayant donné une place centrale à la notion de formalisation des structures musicales : approches informationnelles, sémiotiques, génératives et algébriques. À l'intérieur de l'approche algébrique en analyse musicale, deux théories ont acquis une place considérable dans la réflexion analytique contemporaine : la *Set Theory* et l'analyse transformationnelle. Une étude détaillée des principes théoriques de base de ces deux approches analytiques sera une condition préalable pour comprendre l'évolution éminemment algébrique de la *Set Theory* américaine par rapport à la formulation initialement donnée par Allen Forte. La *Set Theory* et, en général, l'application d'outils algébriques en analyse musicale ouvre le problème de la place occupée par l'ordinateur dans la recherche musicologique contemporaine. Le deuxième *Interludium* nous permettra de mieux préciser certains caractères computationnels de la musicologie telle que nous l'envisageons dans cette étude. Il présente en effet notre formalisation algébrique des concepts de base de la *Set Theory* ainsi que l'implémentation que nous en avons réalisée en *OpenMusic.*

La troisième partie examine quelques applications compositionnelles des méthodes algébriques. Nous nous concentrons en particulier sur les démarches des trois compositeurs dont nous aurons étudié quelques propositions théoriques au cours de la première partie. Nous analysons également une application compositionnelle récente de la théorie modale d'Anatol Vieru. Il s'agit du problème de la construction de canons rythmiques qui avait aussi intéressé Olivier Messiaen et qui a constitué le point de départ d'un travail de collaboration avec le compositeur George Bloch. Ce travail, mené dans le cadre d'une invitation comme « compositeur en recherche » auprès de l'Equipe Représentations Musicales de l'Ircam, a permis de suivre de près la « relation oblique » entre le travail de compositeur et la formalisation algébrique. L'analyse de cette démarche compositionnelle permet d'introduire la problématique de la composition assistée par ordinateur (CAO) comme conséquence du caractère calculable de certaines propositions théoriques. Un *Interludium* sur l'histoire d'une célèbre conjecture en théorie des nombres de la fin du XIX^{e} siècle (Conjecture de Minkowski) et de sa résolution algébrique par le mathématicien hongrois G. Hajós retrace les origines à la fois géométriques et algébriques du modèle des canons rythmiques dont nous aurons analysé les aspects théoriques et la portée compositionnelle.

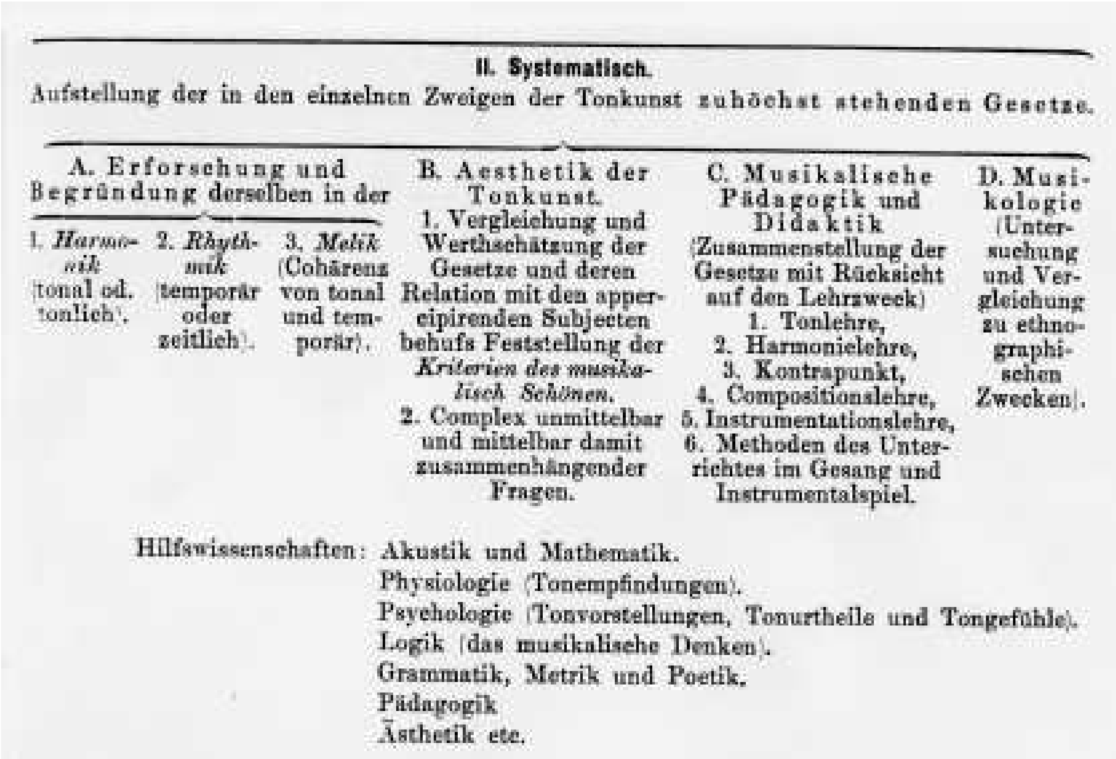
1 Aspects théoriques : Formalisation et représentation des structures musicales

L'étude des aspects théoriques des méthodes algébriques en musique et musicologie soulève une double question. Tout d'abord, d'un point de vue musicologique, une telle réflexion demande une enquête autour de la nature systématique de la discipline. Nous allons donc remonter aux sources d'une telle démarche en musicologie telle qu'elle s'est précisée tout d'abord en Europe et successivement aux Etats-Unis. Deuxièmement, nous discuterons l'articulation entre musicologie et réflexion théorique sur la musique, en particulier autour de la naissance, aux Etats-Unis, du concept de théorie de la musique au sens moderne (*music theory)*. Cette réflexion nous semble nécessaire pour comprendre la portée musicologique du problème de la formalisation algébrique des structures musicales et de leurs représentations. Une enquête parallèle autour de certaines étapes de la pensée algébrique en mathématiques permettra de mieux comprendre la place des trois compositeurs/théoriciens étudiés, par rapport au problème de l'émergence de l'idée de structure algébrique en musique. Une discussion sur certains développements récents en théorie de la musique ainsi qu'une analyse détaillée d'un problème théorique classique (à savoir la classification des séries dodécaphoniques tous-intervalles) offrent le point de départ pour suivre l'évolution du caractère systématique de la musicologique vers une discipline de type computationnel.

1.1 Musicologie et théorie de la musique : un survol historique

Pour comprendre la place de la théorie de la musique dans la recherche musicologique contemporaine, on doit reprendre un aspect du développement de la musicologie qui a marqué considérablement certains pays, tout en laissant (apparemment) la France en dehors de ce débat. Il s'agit de la division entre musicologie historique et musicologie systématique.

Cette division remonte à Guido Adler, théoricien autrichien qui, dans l'article « Umfang, Methode und Ziel der Musikwissenschaft » [ADLER 1885], présente les objets [*Umfang*], les méthodes [*Methode*] et les finalités [*Ziel*] de la musicologie en tant que discipline. Dans cet article, il considère la musicologie comme étant formée de deux branches : une branche *historique* et une branche *systématique*. Nous allons nous concentrer sur la partie systématique qui est définie comme « *la recherche* [Aufstellung] *des principes les plus* *généraux à la base de chaque branche du système musical* ». Elle se compose de quatre parties qui sont représentées dans la figure suivante[5] :



II. Systematisch.

Aufstellung der in den einzelnen Zweigen der Tonkunst zuhöchst stehenden Gesetze.

A. Erforschung und Begründung derselben in der
1. *Harmonik* (tonal od. tonlich).
2. *Rhythmik* (temporär oder zeitlich).
3. *Melik* (Cohärenz von tonal und temporär).

B. Aesthetik der Tonkunst.
1. Vergleichung und Werthschätzung der Gesetze und deren Relation mit den appercipirenden Subjecten behufs Feststellung der *Kriterien des musikalisch Schönen*.
2. Complex unmittelbar und mittelbar damit zusammenhängender Fragen.

C. Musikalische Pädagogik und Didaktik (Zusammenstellung der Gesetze mit Rücksicht auf den Lehrzweck)
1. Tonlehre,
2. Harmonielehre,
3. Kontrapunkt,
4. Compositionslehre,
5. Instrumentationslehre,
6. Methoden des Unterrichtes im Gesang und Instrumentalspiel.

D. Musikologie (Untersuchung und Vergleichung zu ethnographischen Zwecken).

Hilfswissenschaften: Akustik und Mathematik.
Physiologie (Tonempfindungen).
Psychologie (Tonvorstellungen, Tonurtheile und Tongefühle).
Logik (das musikalische Denken).
Grammatik, Metrik und Poetik.
Pädagogik
Ästhetik etc.

Figure 1: Les quatre branches de la musicologie systématique chez Guido Adler

Une analyse détaillée de ces quatre parties nous offre des éléments importants pour situer le problème de la formalisation des structures musicales dans une perspective musicologique.

Une première branche consiste dans la recherche [*Erforschung*] et les fondements [*Begründungen*] de ces lois ou principes du système musical dans l'harmonie [*Harmonik*], la rythmique [*Rhythmik*] et la mélodie [*Melik*]. Notons ici le double caractère à l'intérieur de chaque sous-discipline. L'harmonie n'est pas conçue uniquement dans ses aspects liés à la tonalité, mais elle concerne aussi tout ce qui est *tonlich*, c'est-à-dire tout ce qui a une quelconque relation avec le ton musical. De même, l'étude du rythme est envisagée dans une dimension temporelle [*temporär*] qui ne s'identifie pas avec le temps chronologique [*zeitlich*]. A coté de l'*Harmonik* et du *Rhythmik*, Adler propose une troisième sous-discipline, à savoir le *Melik*, qui se définie par rapport aux deux autres disciplines. Elle concerne, en fait, ce qu'il appelle la « cohérence » de la composante tonale et de celle temporelle. Cette typologie, qui se trouve explicitée pour la première fois à l'intérieur d'un essai de définition des objets,

[5] La figure est tirée du *Neues Handbuch der Musikwissenschaft*, une encyclopédie de la Musicologie en dix tomes éditée par Carl Dahlhaus et dont le dixième tome, co-édité Helga de la Motte-Haber, est consacré à la « Musicologie Systématique » [DALHAUS et DE LA MOTTE-HABER 1982].

méthodes et finalités de la recherche musicologique, pourra servir de cadre conceptuel dans la discussion que nous entamerons autour du concept de théorie de la musique, en particulier pour ce qui concerne la réception des idées d'Adler aux Etats-Unis.

Une deuxième partie de la branche systématique de la musicologie concerne l'esthétique du système musical. Ce domaine consiste principalement dans le fait d'établir dès critères du beau musical [*Kriterien des musikalisch Schönen*], en particulier du point de vue de l'aperception des sujets. L'influence de la pensée d'Eduard Hanslick sur Adler est ici particulièrement évidente, mais l'intérêt pour les liens entre le concept de beau dans la musique et le problème de l'aperception offre un élément intéressant pour comprendre la singularité de la vision musicologique d'Adler. Une conception dans laquelle l'enseignement de l'harmonie, du contrepoint et de la composition était inclus *de facto* dans la discipline musicologique, comme on peut le constater en regardant la troisième branche de la partie systématique : pédagogie et didactique musicale. La quatrième et dernière branche, *Musikologie*, se réfère à la discipline qu'on appellera ensuite l'ethnomusicologie.

Il nous semble important d'insister sur le fait qu'en marge de cette division générale en quatre branches, Adler propose une série de « disciplines auxiliaires » [*Hilfswissenschaften*] qui concernent plus directement les méthodes à utiliser dans la démarche systématique en musicologie. Parmi ces disciplines, Adler mentionne l'acoustique et les mathématiques, la physiologie (dans le sens de la *Tonempfindung*)[6], la psychologie, qui comprends l'étude de la représentation [*Tonvorstellung*], jugement [*Tonurtheile*] et appréciation du son [*Tongefühle*][7], la logique (dans le sens du *musikalisches Denken*) et ainsi de suite (grammaire, métrique, poétique…).

Il faut remarquer qu'ainsi présentée, la musicologie systématique n'est pas une simple extension de la *Musikwissenschaft* mais qu'il s'agit d'une réorientation complète de la discipline musicologique vers des questions fondamentales qui ne sont pas par nature des questions historiques. Comme affirment Claude V. Palisca et Ian D. Bent, l'approche systématique pourrait bien s'appliquer à toutes les branches qu'Adler avait classées dans la

---

[6] Est claire ici la référence à l'ouvrage sur la sensation du ton du théoricien allemand Hermann von Helmholtz [HELMHOLTZ 1863].

[7] Si l'on cherche une référence explicite à d'autres théoriciens de l'époque, on serait tenté de suggérer le traité *Tonpsychologie* de Carl Stumpf, qui date du début des années quatre-vingt du XIX[e] siècle, une hypothèse que nous nous limitons à avancer sans essayer de la justifier ultérieurement. De même nous n'essaierons pas de commenter l'interprétation du terme *Tonvorstellung* en tant que « Cognition » - comme le propose Helga de la Motte-Haber [DAHLHAUS et DE LA MOTTE-HABER 1982] - et qui suggère de considérer la réflexion d'Adler comme une première étape vers la constitution des sciences cognitives.

partie historique : par exemple une approche systématique vers le problème de la notation musicale ou bien vers la classification typologique des formes musicales ou des instruments de musique[8]. L'articulation des deux branches historiques et systématiques de la musicologie reste pourtant assez problématique chez un théoricien, Adler, qui n'avait peut être pas les moyens pour envisager une application réelle des « disciplines auxiliaires », en particulier des mathématiques, à la partie systématique qui venait d'être définie. Comme le fait remarquer Taylor Aitken Greer, le systématique reste subordonné à l'historique, car la notion de « système » en musicologie est définie par négation (à savoir comme le champ d'étude qui ne relève pas de l'histoire)[9].

La démarche d'Adler reste cependant fondamentale pour les développements successifs de la réflexion théorique, surtout aux Etats-Unis, autour du rapport entre musicologie historique et musicologie systématique. Aux Etats-Unis, les idées d'Adler ont trouvé un terrain très fertile, grâce à une personnalité qui a repris cette démarche et qui a eu une influence considérable dans l'établissement de la musicologie comme discipline universitaire bien structurée : il s'agit du musicologue Charles Seeger. Les premiers écrits de Seeger sur l'articulation entre musicologie historique et musicologie systématique datent de la fin des années trente[10]. Entre ces deux branches de la discipline musicologique il y a eu, selon Seeger, un schisme qui a conduit à abandonner l'approche systématique et à privilégier l'orientation historique. Il s'agit donc de restaurer la balance entre les deux approches en considérant « *l'histoire et le système comme deux orientations distinctes mais interdépendantes à l'intérieur de la discipline musicologique* » [GREER 1998, 196].

Au-delà de la différence dans les approches historiques et systématiques en musicologie, il existe selon le théoricien américain une unité profonde dans les principes de la connaissance musicale. Le caractère unitaire de la musicologie est souvent exprimé par Seeger avec la métaphore physique de la « théorie unifiée des champs » [*Unified field theory*], un concept qui vise à structurer l'univers de la musicologie dans ses rapports avec ce qu'Adler aurait appelé ses « disciplines auxiliaires ». La citation suivante exprime cette unité profonde entre

---

[8] Voir le paragraphe dédié au XX^e siècle dans l'entrée « Theory » du *New Grove Dictionary* [PALISCA et BENT 2001-2002].

[9] Voir l'ouvrage de Taylor Aitken Greer intitulé *A question of balance : Charles Seeger's philosophy of music* [GREER 1998, 191].

[10] Les contributions majeures de Charles Seeger ont été collectées dans - *Studies in Musicology 1935-1975*, un ouvrage qui a été rééditée en 1977 avec une introduction intitulée « Systematic (synchronic) and historical (diachronic) orientations in musicology » [SEEGER 1977, 1-15]. D'autres sources peuvent servir pour mieux comprendre l'influence de la pensée de Guido Adler sur le musicologue américain. On citera, en particulier, l'ouvrage de Taylor Aitken Greer [GREER 1998] et celle de Bell Yung et Helen Rees [YUNG et REES 1999].

des champs théoriques différents et elle exprime au même temps la vision organique et « omnivore » de la discipline musicologique chez le théoricien américain :

> « *La musicologie est (1) une étude linguistique [speech study], aussi bien systématique qu'historique, aussi bien critique que scientifique ou scientiste ; dont le champ est (2) toute la musique de l'être humain, pris en soi-même et dans ses relations avec le monde extérieur ; qui est cultivé par (3) des étudiants individuels qui peuvent voir ce champ aussi bien comme des musiciens que dans des termes définis par des spécialistes des domaines non musicaux prenant certains aspects de la musique comme objet ; dont l'objectif est de contribuer à la connaissance de l'homme, aussi bien (4) en termes culturels que (5) dans ses relations avec l'univers physique* » *[SEEGER 1977, 108].*

Cette double articulation entre une approche de type « historique/critique » et une autre approche qu'il qualifie de « systématique/scientifique » en musicologie, offre un cadre conceptuel pour comprendre la portée musicologique d'un phénomène qui n'a pas de précédent dans l'histoire de la musique, à savoir la naissance et le développement, en particulier aux Etats-Unis, d'une théorie de la musique qui n'a plus sa justification dans l'idée d'une réduction des lois de l'harmonie à ses principes naturels. Nous allons d'abord montrer comment les mathématiques ont favorisé la cristallisation de certaines idées théoriques en musique, en particulier autour du problème de la formalisation et de la représentation des structures musicales.

1.2 Les grandes étapes de la pensée algébrique en mathématiques et l'émergence du concept de groupe en musique

Nous avons fait remonter aux années 1880, avec le théoricien autrichien Guido Adler, le début d'une discussion autour de l'approche systématique en musicologie. L'histoire des mathématiques montre que, presque à la même époque, les mathématiciens ouvraient une réflexion qui dépassera largement le cadre de leur propre discipline. Notre regard rétrospectif sur les étapes de la pensée algébrique en mathématiques vise à mettre en évidence certains éléments qui ont représenté, historiquement, le point de départ d'une réflexion théorique sur les fondements algébriques de la musique, une réflexion qui s'articulera autour de la formalisation et des représentations des structures musicales. C'est donc à partir de l'idée de *structure* en mathématique, et plus précisément de structure de *groupe*, que nous proposerons ce court survol historique.

L'idée de groupe abstrait, comme Galois l'a définie au début du XIX^{e} siècle, représente, en effet, une des expressions les plus simples de structure algébrique et sans doute celle autour de laquelle s'est posé, historiquement, le problème de la formalisation des structures musicales. Nous préférons ne pas donner tout de suite la définition axiomatique de cette structure algébrique mais l'expliciter à travers les exemples musicaux qu'on retrouve dans les écrits théoriques de certains compositeurs.

Pour l'instant, on peut considérer un *groupe* comme un ensemble d'éléments muni d'une opération qui permet de combiner deux quelconques de ses éléments sans sortir de l'ensemble, le résultat de l'opération étant donc un élément de l'ensemble. Cette opération, qui prend aussi le nom de « loi de composition interne » et qui, comme on verra par la suite, doit respecter certaines propriétés formelles, peut être considérée à juste titre comme « *l'idée-mère de la notion de structure* » [VUILLEMIN 1962/1993, 260]. Mais le point de vue structurel en mathématiques ne commence à se préciser que dans la deuxième moitié du XIXe siècle, en particulier avec le « Programme d'Erlangen » de Felix Klein de 1872. Le programme, intitulé *Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes*, vise à dissocier l'étude de la géométrie de l'étude traditionnelle de l'espace. En d'autres termes, ce qui caractérise les différentes géométries ce n'est plus l'espace, qui est doté chaque fois de certaines propriétés, mais c'est la façon avec laquelle, une fois choisi un groupe de transformations sur un ensemble donné, des propriétés « *ne sont pas altérées par les transformations du groupe* » [KLEIN 1974, 7].

La multiplicité des géométries est donc une conséquence directe des propriétés des groupes de transformations. Autrement dit, une *géométrie* est définie par la donnée d'un groupe de transformations opérant sur un espace et les propriétés géométriques sont ainsi les propriétés qui ne changent pas par ce groupe. La donnée d'un groupe apparaît comme une *structuration* de la géométrie considérée, au point que deux géométries qui peuvent se déduire l'une de l'autre par rapport à une transformation bijective entre les deux groupes sont *de facto* équivalentes[11]. De tout théorème valable dans la première géométrie on pourra donc dériver un théorème dans la deuxième. Jean Dieudonné a vu dans cette démarche l'un des premiers exemples du concept de « transport de structure » [DIEUDONNE 1987, 114], une idée que les théoriciens de la musique ont souvent appliqué dans le processus de formalisation des structures musicales. Pour anticiper sur le contenu de la prochaine section, on peut considérer que la formalisation algébrique des espaces musicaux classiques, celui des hauteurs et celui

[11] Une « transformation bijective » est une correspondance qui associe à tout élément d'un ensemble un et un seul élément d'un autre ensemble. Dans une approche algébrique, ce concept est toujours utilisé par rapport au concept de *morphisme*, c'est-à-dire une application entre structures algébriques qui est compatible avec les définitions de « loi de composition interne ». Un morphisme bijectif est souvent appelé « isomorphisme ». Cette

des rythmes, utilise le concept de « transport de structure », dans le sens qu'il y a une correspondance bijective, ou *isomorphisme*, entre les deux espaces et par voie de conséquence tout théorème valable pour les hauteurs peut se *transférer* au domaine des rythmes[12].

Pour comprendre la portée théorique d'une telle démarche, on peut se référer à un concept qui est souvent associé, en mathématiques, à celui de « transport de structure » : le « transfert d'intuitions » [DIEUDONNE 1987, 178]. Une même structure se retrouve dans plusieurs théories et elle est souvent liée à des propriétés qu'on ne retrouve pas directement dans d'autres théories. C'est ainsi qu'« *en modifiant convenablement au besoin le langage de cette dernière, on peut aussi y introduire les particularités de la première et [que] cela engendre parfois de nouvelles "intuitions" très fécondes* » [DIEUDONNE 1987, 178]. C'est précisément en combinant la notion de « transfert d'intuitions » avec celle de « transport de structure » qu'on peut expliquer les différentes propositions théoriques autour de l'analogie entre espace des hauteurs et espace des rythmes. Dans le cas des propositions théoriques des trois compositeurs/théoriciens, le transfert se produit à partir de la formalisation algébrique de l'espace des hauteurs, mais les « transports de structure » ainsi obtenus ne sont pas équivalents d'un point de vue musical.

L'autre concept sur lequel se fonde la démarche géométrique de Klein, à savoir le concept d'*invariant*, sera également central dans le domaine de la formalisation des structures musicales, comme le montre, en particulier, la démarche théorique du compositeur auquel on doit une des premières utilisations du concept de groupe en musique : Milton Babbitt. Avec l'idée d'invariant, étroitement liée à la notion même de groupe, on touche une problématique qui dépasse largement les frontières de la réflexion théorique en musique. Des méthodes d'analyse musicale, comme la *Set Theory* d'Allen Forte ou la théorie transformationnelle de David Lewin, utilisent, même si parfois sans le formaliser, la notion d'invariant par rapport à un groupe donné de transformations. Dans ce sens, nous partageons entièrement l'avis du

---

première partie offrira plusieurs exemples d'isomorphismes entre structures algébriques ayant des lois de composition interne différentes.

[12] Cette affirmation, valable d'un point de vue strictement mathématique, soulève des questions dans une perspective compositionnelle, comme l'histoire de la musique du XXe siècle le montre. Il serait intéressant de reprendre, par exemple, l'écrit « Wie die Zeit vergeht » de Karlheinz Stockhausen [STOCKHAUSEN 1957] et essayer de l'analyser par rapport aux approches algébriques. Le théoricien américain David Lewin avait commencé une telle démarche dans son cours d'initiation aux théories mathématiques appliquées à la musique pour les étudiants en théorie de la musique de l'Université d'Harvard. Le onzième chapitre, intitulé « General discussion of extended serialism ; durational serialism » est dédie à une discussion sur les rapports entre hauteurs et rythmes à partir d'une analyse de l'écrit de Stockhausen. Je remercie Edward Gollin de m'avoir fait prendre connaissance du contenu de ce cours, qui n'a pas été publié jusqu'à présent. Pour une analyse des difficultés théoriques liées à l'isomorphisme hauteurs/rythmes à partir du concept de série tous-intervalles, voir l'écrit de François Nicolas intitulé « Le pli du sérialisme » [NICOLAS 1999].

musicologue italien Angelo Orcalli qui considère la théorie mathématique des groupes et la notion d'invariant comme les deux « guides conceptuels » ou *themata* [ORCALLI 2001, 136] de la notion même de théorie de la musique au XX^{e} siècle.

À ces deux concepts, on peut aisément ajouter celui de l'*axiomatique*, base conceptuelle sur laquelle se fonde la théorie des groupes au sens moderne. À la différence des mathématiques, dans lesquelles la structure de groupe est utilisée bien avant d'être formulée dans sa généralité à travers des axiomes, l'émergence du concept de groupe en musique est postérieure à la discussion sur la portée théorique de l'axiomatisation en musique. Le compositeur autrichien Ernst Krenek, dont la contribution théorique sera analysée comme point de départ du problème de la formalisation algébrique des structures musicales, discute dans les années trente le problème de l'axiomatique en musique et il le fait explicitement à partir des écrits de David Hilbert. Une analyse des thèses principales contenues dans les *Fondements de la Géométrie* [HILBERT 1899/1971], ouvrage qui prolonge le débat sur le point de vue structurel en mathématiques ouvert par le *Programme d'Erlangen* de Klein, permettra de mieux préciser les caractéristiques de ce qu'on appelle la « théorie de la musique » [*music theory*] au sens moderne.

Nous voulons insister ici sur deux aspects de la vision axiomatique hilbertienne dont la relation avec la formalisation en musique nous semble particulièrement significative. Tout d'abord, Hilbert dissocie clairement la pensée axiomatique de l'expérience sensible. La géométrie en tant qu'étude de trois systèmes d'objets (qu'une simple convention désigne comme « points », « droites » et « plans ») n'est pas concernée par la signification extérieure de ces objets. Mais à côté de cette position « formaliste », terme auquel on réduit souvent la pensée hilbertienne, il y a un deuxième caractère de la méthode axiomatique qu'il nous semble important de souligner. Il s'agit de la place réservée à l'intuition et à la tension qui se crée entre l'abstraction et la compréhension intuitive du monde. L'importance de l'articulation entre pensée axiomatique et intuition est claire dans l'un des premiers passages des *Fondements de la géométrie* :

> « *La géométrie […] n'a besoin pour être édifiée convenablement que de quelques principes, simples et peu nombreux. Ces principes s'appellent les axiomes de la géométrie. La détermination des axiomes […] et l'étude de leur interdépendance sont des tâches qui, depuis Euclide, ont été abordées dans de nombreux et excellents traités de la littérature mathématique. Cette étude se ramène à* ***l'analyse logique de notre intuition spatiale*** » *[HILBERT 1899/1971]*[13].

[13] C'est nous qui soulignons.

Dans cette perspective, la méthode axiomatique, qui offre un cadre rigoureux à certaines intuitions, « *est d'abord un procédé d'abstraction à partir d'une donnée sensible* » [PATRAS 2001, 83]. Hilbert est encore plus explicite dans un ouvrage de quelques années postérieur :

> « *En mathématique […] nous trouvons à présent deux tendances. D'une part, la tendance vers l'abstraction vise à cristalliser les relations logiques inhérentes dans le matériel […] étudié et à organiser ce matériel d'une façon systématique et ordonnée. D'autre part, il y a aussi une tendance vers la compréhension intuitive [intuitive understanding] qui encourage une prise plus immédiate des objets d'étude, un rapport vivant avec celles-ci, pour ainsi dire, qui insiste sur la* ***signification concrète de leurs relations*** *[concrete meaning of their relations]* » *[HILBERT et COHN-VOSSEN 1952, iii]*[14].

On touche ainsi un nœud central de la pensée mathématique contemporaine, c'est-à-dire celui de la tension entre une vision formaliste de l'activité mathématique et une pensée plus « phénoménologique » qui vise à articuler un discours entre le monde sensible et le monde symbolique. Analyser correctement cette articulation, tout d'abord au niveau de la pensée mathématique, nous offre la possibilité de comprendre un élément qui caractérisera toute application des méthodes algébriques en théorie de la musique, à partir des premières intuitions de Krenek sur la nature axiomatique du langage musicale de Schoenberg jusqu'à l'explicitation formelle, en termes de théorie de groupes, par Milton Babbitt et Iannis Xenakis. L'abstraction se fait, dans les deux cas, à partir d'une compréhension intuitive du caractère structurel de certains concepts musicaux. Mais c'est d'abord ce concept de structure en mathématiques qu'on doit essayer de mieux préciser en suivant le processus de « *désontologisation des objets mathématiques* » [BKOUCHE 2001] qui, à partir de l'axiomatique hilbertienne, conduit à la constitution de la dualité relations/objets dans la pensée mathématique contemporaine.

La pensée structurale en mathématiques commence véritablement dès le moment où l'on constate que *« ce qui joue le rôle primordial dans une théorie, ce sont les relations entre les objets mathématiques qui y figurent, plutôt que la nature de ces objets, et que dans deux théories très différentes, il se peut que les relations s'expriment de la même manière ; le système de ces relations et de leurs conséquences est une même structure "sous-jacente" aux deux théories »* [DIEUDONNE 1987, 114].

[14] C'est toujours nous qui soulignons.

Nous ne rentrerons pas dans une discussion du caractère souvent ambigu du terme « structure » en mathématiques[15]. Notre lecture vise à explorer l'importance de l'algèbre moderne dans la constitution de l'idée même de « structure mathématique » et son utilisation en théorie de la musique. Cette démarche structurelle en mathématiques, dont on a vu quelques précurseurs dans les approches géométriques de Klein et d'Hilbert, s'impose véritablement à partir des années trente. On retrouve une première formulation explicite de l'idée de structure algébrique dans le texte *Modern Algebra* du mathématicien hollandais Bartel Leendert van der Waerden [VAN DER WAERDEN 1930]. Ce texte, qui a eu une énorme influence en France sur le développement de la conception bourbakiste des mathématiques, est à la fois un travail technique de formalisation autour de certains concepts algébriques (groupes, anneaux, corps…) et une vision radicale de l'algèbre, en particulier pour ce qui concerne son architecture extrêmement hiérarchique.

La hiérarchie se fonde sur deux concepts majeurs : l'idée d'*extension* d'une structure algébrique donnée et la notion de *morphisme* au sens d'une transformation entre structures algébriques préservant certaines relations. Il s'agit de deux concepts qui ont traversé l'histoire des mathématiques au XXe siècle, comme le montre Frédéric Patras en analysant leur influence sur Bourbaki et sur la naissance de la théorie mathématique des catégories [PATRAS 2001, 115][16]. Nous avons déjà eu l'occasion de mentionner un aspect de l'idée d'extension à travers le concept de « transfert de structure », tel qu'on le retrouve, par exemple, dans les écrits de Jean Dieudonné. Au même concept de « transfert de structure » peut être liée la notion de morphisme, dont un cas particulier est l'équivalence formelle (ou *isomorphisme*) entre deux structures apparemment différentes. L'approche algébrique proposée par van der Waerden a eu une grande influence sur le courant structuraliste qui a intéressé, en particulier, la France à partir de la deuxième moitié des années trente. Ce courant est étroitement lié au nom de Bourbaki, un groupe qui a eu une grande importance dans l'histoire de la pensée mathématique, tout d'abord en tant que « *catalyseur des tendances épistémologiques nées de la méthode axiomatique* » [PATRAS 2001 118] et deuxièmement pour l'effort de réorganiser le corpus entier de la discipline mathématique dans une

[15] Pour une étude détaillée de l'idée de structure dans une perspective philosophique d'histoire des mathématiques voir l'ouvrage récent de Frédéric Patras [PATRAS, 2001].
[16] Cette analyse est développée également dans l'ouvrage de Leo Corry *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures* [CORRY 1996]. Pour les diverses acceptions du terme « structure », en particulier dans les rapports entre les mathématiques et les sciences humaines, voir le premier chapitre de l'ouvrage *Morphogenèse du sens* [PETITOT 1985].

architecture hiérarchisée autour de la notion de « structure »[17]. La grande évolution opérée par Bourbaki, par rapport au traité de van der Waerden, concerne l'établissement, à côté du concept de structure algébrique, de deux autres structures fondamentales : les structures ordonnées et les structures topologiques[18].

Pour différentier ces trois notions, Bourbaki introduit un point de vue ensembliste qui se précise autour de la notion formalisée et en même temps universelle de « structure ». Cette notion, qui « *engloberait toutes ces situations et, plus généralement, contiendrait en puissance toutes les définitions possibles d'objets mathématiques* » [PATRAS 2001, 130], n'intervient que très tard et dans un moment historique, les années cinquante, dans lequel la notion de « structure » avait trouvé une formulation tout à fait nouvelle à l'intérieur de la théorie mathématique des catégories. Résumer, en quelques lignes, les éléments qui constituent cette nouvelle démarche en mathématiques dépasse largement le cadre d'une telle introduction qui vise, nous le répétons, à dégager dans l'histoire de la pensée mathématique les éléments qui nous permettrons de mieux situer l'émergence et l'évolution des structures algébriques en théorie de la musique.

À la différence du courant structural en algèbre et, en particulier, de la position défendue par Bourbaki, la théorie des catégories n'est pas fondée sur une vision architecturale et hiérarchisée des mathématiques. Elle prend comme point de départ la notion de *morphisme* telle que van der Waerden l'avait introduite pour rendre compte du phénomène d'extension entre structures algébriques. Nous avons déjà mis en évidence comment la notion de

[17] L'idée du caractère architectural dans l'organisation des concepts en mathématiques est posée dans ce qui est considéré comme le manifeste programmatique du groupe, paru dans *Les grands courants de la pensée mathématique* [Le LIONNAIS 1948/1998] Cet ouvrage met en évidence également le rôle de l'algèbre abstraite dans plusieurs disciplines parmi lesquelles les arts. Curieusement, le chapitre intitulé *Les Mathématiques et la Musique*, écrit par Henri Martin, ne fait aucune mention d'un rapport possible entre outils algébriques et musique, ce qui témoigne assez bien, à notre avis, de la difficulté de la part des théoriciens de la musique à dégager la structure de groupe dans des domaines apparemment très éloignés de l'algèbre, comme la musique.

[18] Ces trois catégories permettraient aussi de créer une typologie des approches formalisées de la théorie de la musique. L'approche algébrique est sans doute celle qui a eu la plus grande fortune mais il ne faut pas oublier que le début d'une réflexion théorique sur les structures topologiques et les structures d'ordre en musique représente un moment important de la constitution de la théorie de la musique au sens moderne. La portée limitée de cette étude ne permet pas d'envisager une présentation des modèles topologiques dans la formalisation des structures musicales. Les premiers efforts dans cette direction semblent remonter aux années soixante-dix, dans les écrits du compositeur et chef d'orchestre Roumain Mihai Brediceanu [BREDICEANU 2002] autour de la topologie des formes sonores en musique. Plus récemment, les travaux de Thomas Noll sur la topologie du système tonal [NOLL 1995] ainsi que de Chantal Buteau [BUTEAU 2003] et de Franck Jedrzejewski [JEDRZEJEWSKI 2002] respectivement sur la structure topologique des profils mélodiques et sur la théorie des nœuds dans la classification des séries dodécaphoniques, ont ouvert un champ de recherche qui semble très prometteur. Nous reviendrons sur les structures d'ordre en musique, car la formalisation des gammes musicales et des structures rythmiques par Iannis Xenakis utilise précisément cette notion, bien qu'intégrée dans une formalisation de type algébrique.

morphisme vise à abstraire de l'objet d'étude des propriétés qui sont indépendantes de la nature particulière de l'objet même, l'importance étant focalisée sur les *transformations* entre objets. La théorie des catégories représente une abstraction « au second degré », pour reprendre une expression de Dieudonné, de cette idée qui est à la base de la notion même de structure au sens moderne, car « *les ensembles munis de structure et les applications entre ces ensembles disparaissent, ou plutôt sont "sublimés" en "objets" et "flèches" dépourvus de toute connexion avec les notions courantes de "collection" et de "loi"* » [DIEUDONNE 1987, 165].

Née au début des années quarante des réflexions d'Eilenberg et MacLane sur les relations[19] entre algèbre et topologie [EILENBERG et MacLANE 1942], la théorie des catégories est l'une des premières théories mathématiques à poser le problème de la « naturalité » de certaines constructions formelles, où le terme désigne les propriétés qui sont indépendantes des caractéristiques et des représentations particulières des objets. Nous laisserons de côté les aspects « fondationnels » de la théorie des catégories, vue parfois comme une alternative possible à la théorie des ensembles[20], et nous nous efforcerons de mettre en évidence le processus d'abstraction qui indique clairement une possibilité nouvelle de conceptualisation en théorie de la musique[21].

Le concept privilégié dans cette démarche d'abstraction sera celui de transformation, tout d'abord entre des objets (*morphismes*) mais aussi entre des catégories *(foncteurs*). Le processus d'abstraction peut ainsi continuer en considérant des transformations entre foncteurs (*transformations naturelles)* et la possibilité de récupérer, à partir de ces notions, des propriétés caractéristiques des objets de départ. Un exemple qui relève de la théorie de la musique est celui de la classification des structures musicales, en particulier des structures d'accords et des structures rythmiques. Prenons le cas des accords pour montrer le processus d'abstraction qui conduit du problème de leur classification en termes de théorie des groupes à celui fondé sur une approche catégorique. Dans le cas de la théorie des groupes, le problème

---

[19] MacLane parle, à ce propos, de « collision », en considérant ce processus comme exemplaire du développement des idées en mathématiques, bien au-delà du cas particulier de la théorie des catégories (et de la théorie des topoï). Voir, en particulier, l'article « The development of mathematical ideas by collision : The Case of Categories and Topos Theory » [MacLANE 1989].

[20] Cette question a été débattue, par exemple, par F. W. Lawvere [LAWVERE 1966].

[21] Comme dans le cas de la théorie des groupes, nous préférons introduire la définition formelle de *catégorie* à partir d'un problème de formalisation en musique. L'approche transformationnelle de David Lewin en analyse musicale, ainsi que la théorie du rythme périodique de Dan Tudor Vuza représentent deux exemples de propositions théoriques ouvertes à la formalisation catégorique.

se réduit à choisir une structure de groupe qui soit pertinente musicalement[22] et à étudier les *invariants* au sens que nous avons précisé dans notre présentation du programme de Klein. Les groupes opèrent directement sur les objets et le processus d'abstraction s'arrête au niveau d'une équivalence (i.e. *isomorphisme*) entre objets par rapport à une opération de groupe.

Dans un deuxième degré d'abstraction, les accords ne sont pas considérés en tant qu'objets mais en tant que « substrat » d'une collection de transformations possibles de ces objets. C'est donc en comparant les transformations (et les transformations entre transformations) qu'on peut arriver à établir des critères d'équivalence entre les objets de départ. Dans cette perspective, la théorie des catégories offre aux théoriciens de la musique un cadre conceptuel pour étudier les objets dans leur articulation réciproque. En adaptant à la musique une réflexion que Patras fait par rapport aux mathématiques, « *les objets existent rarement isolés. Ils prennent tout leur sens lorsqu'ils sont insérés dans un contexte précis […] et, réciproquement, c'est cette insertion qui leur confère un statut mathématique* » [PATRAS 2001, 144].

La portée philosophique d'une telle approche est l'aspect sur lequel nous insisterons le plus car, comme F. W. Lawvere l'a souligné récemment, les outils techniques développés par une telle approche, semblent donner « *une forme précise […] à des distinctions philosophiques très anciennes comme le général et le particulier, l'objectif et le subjectif, l'être et le devenir, l'espace et la quantité, l'égalité et la différence, le quantitatif et le qualitatif* » [LAWVERE 1992]. Notre propos est, peut être, plus modeste et nous essaierons de donner un aperçu de quelques ramifications philosophiques des méthodes algébriques en musique et musicologie et qui permettent d'insérer le problème du rapport entre mathématiques et musique dans une perspective plus large.

Au processus d'abstraction qu'on vient de décrire et qui conduit d'une classification des structures (musicales) fondées sur la théorie des groupes à une classification catégorique, on peut ajouter un ensemble de considérations topologiques sur la nature « géométrique » de l'objet étudié. On arrive ainsi à la théorie des topoï, développée autour des années soixante par celui qui est considéré comme la figure centrale des mathématiques contemporaine : Alexandre Grothendieck. Cette théorie donne le cadre de référence pour discuter, d'un point de vue mathématique, la théorie de la musique proposée par Guerino Mazzola [MAZZOLA

[22] La question de la pertinence d'outils algébriques en musique n'a pas fait l'unanimité dans le milieu musicologique et nous ne prétendons pas donner à ce problème une réponse définitive. Néanmoins, le choix des

2003]. La difficulté à traiter les notions topossiques sans rentrer dans des détails techniques ne nous permettra pas d'aborder cette approche d'un point de vue mathématique. Cependant, nous pouvons essayer de donner une idée intuitive de la théorie des topoï en la comparant avec la théorie des ensembles, point de départ, comme on l'a vu à travers l'analyse des positions bourbakistes, de l'édifice axiomatique des mathématiques[23].

La théorie des topoï est en fait une théorie généralisée des ensembles, ces derniers n'étant plus donnés dans leurs contours bien définis, mais étant paramétrés en termes topologiques. Le processus de « désontologisation » des objets mathématiques, dont nous avons précisé la nature à l'intérieur de l'axiomatique hilbertienne, est ici renversé dans une approche qui vise à récupérer le *sens*, à la fois topologique et algébrique, des constructions mathématiques. Mais la démarche topossique en musique ouvre un problème majeur, qui est précisément celui de la portée musicale d'une construction théorique qui dépasse largement, par son caractère abstrait, les pouvoirs de « transfert d'intuitions » du théoricien de la musique d'aujourd'hui. Cependant, avant d'essayer d'analyser quelques aspects de la démarche catégorielle en théorie de la musique, nous allons suivre l'émergence du concept de structure algébrique en musique. Cette analyse permettra, dans le même temps, de mieux comprendre l'évolution du concept de « théorie de la musique » au XX^{e} siècle.

1.3 Un précurseur : Ernst Krenek et le problème de l'axiomatique en musique

Nous avons vu comment l'axiomatique hilbertienne a fourni le cadre conceptuel autour duquel la notion de structure mathématique a pu se préciser dans toute sa portée algébrique, et cela en dépit du fait que la notion de groupe était déjà connue et employée dès la moitié du XIX^{e} siècle. En musique, la situation est diamétralement opposée, car le concept de « théorie de la musique » se précise d'abord par rapport au problème de l'axiomatisation et ce n'est que dans une deuxième étape de la pensée théorique qu'il y a une émergence de la pertinence musicale du concept de structure algébrique et en particulier de l'idée de groupe.

Le compositeur qui a reconnu le premier la portée musicale de l'axiomatique hilbertienne, tout en ouvrant le problème d'une théorisation de la musique et de son articulation avec la

---

structures algébriques que nous proposons pour modéliser un phénomène musical donné offre selon nous des critères pertinents pour poser ce problème dans sa portée musicologique.

[23] Alexandre Grothendieck a montré qu'on peut parfois arriver à donner une idée intuitive de certains concepts mathématiques parfois très profonds. Voir, en particulier, le fascicule 0_1 ou « Prélude en quatre mouvements » de l'ouvrage *Récoltes et semailles* [GROTHENDIECK 1986].

pratique musicale, est sans doute Ernst Krenek (1900-1991). L'analogie avec les *Fondements de la Géométrie* d'Hilbert est évidente à partir du sous-titre du premier ouvrage du compositeur autrichien : « Six leçons d'introduction aux principes théoriques » [*theoretische Grundlage*] dans la musique nouvelle [KRENEK 1937/1939]. Le texte a été immédiatement traduit et publié aux Etats-Unis dans une version qui, à la différence de l'ouvrage allemand, a l'avantage d'être organisée autour de chapitres et sous-chapitres qui montrent, d'une façon claire, les objets de la pensée théorique de ce compositeur. Nous allons nous pencher, en particulier, sur le huitième chapitre, intitulé « Musique et Mathématiques », chapitre dans lequel Krenek aborde le problème de la formalisation et de l'axiomatisation en musique. Les sections qui nous intéressent particulièrement sont les quatre parties suivantes :

1. La relativité des systèmes scientifiques
2. L'importance des axiomes
3. Les axiomes dans la musique
4. Théorie de la musique [*Musical Theory*] et pratique musicale

L'analyse de Krenek vise d'abord à définir une notion de relativité des systèmes musicaux à partir du caractère non-absolu des systèmes scientifiques.

> « *Physiciens et mathématiciens ont compris bien avant les musiciens que leurs sciences respectives n'ont pas comme utilité d'établir un concept de l'univers qui est conforme à une nature objective et préexistante. Au contraire, ils sont bien conscients du fait que leur tâche est celle de rendre une conception de l'univers […] compatible avec le plus grand nombre d'observations validées par des expériences scientifiques* » *[KRENEK 1937/1939, 202].*

Ce problème renvoie à l'un des caractères principaux de l'axiomatique hilbertienne, sur lequel nous avons beaucoup insisté, à savoir celui d'une dissociation radicale entre la pensée axiomatique et l'expérience sensible. Krenek s'appuie donc sur la relativité des systèmes scientifiques pour défendre la légitimité d'un système, la « méthode de composition avec douze sons » d'Arnold Schoenberg, qui rompt avec l'idée d'une « nature objective et préexistante » en composition musicale et affirme la primauté de la cohérence logique sur tout possible fondement naturel. Cette relativité, à la fois des systèmes scientifiques et musicaux, trouve une expression adéquate, selon Krenek, dans le processus d'*axiomatisation.* L'axiome est à la fois un outil de clarification formelle et un moyen d'exprimer les libres choix de la part de celui qui l'utilise. Comme il l'affirme :

> « *Pour axiome, on doit entendre une proposition qui ne peut pas être réduite à une autre à travers de déductions logiques, c'est-à-dire une proposition qui* ***ne peut pas être***

***prouvée**. (…) Les axiomes sont des **libres expressions de notre esprit** […]* » *[KRENEK 1937/1939, 203][24].*

Krenek voit donc dans l'axiomatique l'attitude la plus adéquate pour donner à toute expression de l'esprit humain, que ce soit en mathématiques ou en musique, un caractère de liberté par rapport au monde sensible. Cette interprétation est particulièrement claire dans l'extrait suivant :

> « *Les systèmes musicaux […] n'ont pas été crées par la nature […] mais ils ont été produits par l'être humain pour rendre possible la musique à l'intérieur d'un certain **contexte**. […] Comme l'approche axiomatique élimine l'idée que les axiomes sont quelque chose d'absolu, en les concevant plutôt comme des libres propositions de l'esprit humain, au même titre une **théorie musicale** pourrait nous libérer du concept majeur/mineur […] comme loi irrévocable de la nature* » *[KRENEK 1937/1939, 205][25].*

L'extrait précédent exprime la distance qui sépare la réflexion du compositeur autrichien de celle des théoriciens de la musique qui l'ont précédé et pour lesquels le phénomène acoustique de la résonance naturelle était le point de départ de toute discussion théorique sur la musique. Ainsi une démarche comme celle de Schenker, qui représente pourtant une étape importante dans le processus de constitution d'une méthodologie formelle en analyse musicale, n'a pas, à notre avis, le caractère théorique nouveau que la réflexion de Krenek ouvre en musique. L'axiomatique est un cadre de pensée qui n'admet pas de hiérarchie a priori sur les systèmes musicaux, à la différence des positions des théoriciens précédents qui postulaient un caractère de « naturalité » du système tonal par rapport à d'autres libres expressions de l'esprit, pour reprendre l'image de Krenek. Cependant, le compositeur autrichien est loin d'accepter une équivalence conceptuelle entre l'usage des axiomes en mathématiques et en musique. Comme il l'affirme dans l'extrait suivant, il y a une différence profonde entre la méthode axiomatique en géométrie et toute application du concept d'axiome en musique :

> « *Les axiomes de la géométrie trouvent une justification du moment qu'une de leur combinaison montre qu'ils sont indépendants et compatibles les uns les autres. La pertinence des axiomes musicaux ne peut être prouvée que par leur utilité pratique. […] Un système d'axiomes musicaux ne peut jamais être établi en théorie jusqu'au moment où il a été testé dans la pratique* » *[KRENEK 1937/1939, 207].*

Il y a donc une articulation nécessaire, dans tout système axiomatique en musique, entre le moment de la théorisation musicale et la pratique, seul critère pour établir la *pertinence* de la

[24] C'est nous qui soulignons.

formalisation[26]. Pour cette raison, il nous semble important de comparer les propositions théoriques de Krenek avec certaines de ses réflexions sur la pratique compositionnelle, d'autant plus que ces techniques ont eu une grande influence sur des compositeurs/théoriciens du XX[e] siècle, à partir de Milton Babbitt. Une des réflexions récurrentes du compositeur autrichien concerne la définition de l'*atonalité* en tant que moment privilégié de la technique dodécaphonique, en particulier dans ses rapports avec la notion ancienne de *modalité*.

L'intégration des techniques dodécaphoniques à des principes issus de la théorie modale ancienne est particulièrement claire dans une œuvre sur laquelle le compositeur revient plusieurs fois dans ses écrits. Il s'agit du *Lamentatio Jeremiae Prophetae* (1941), œuvre pour chœur dans laquelle Krenek utilise pour la première fois la technique des « rotations » de séries dodécaphoniques et leur subdivision en hexacordes[27]. L'étude de la possibilité de partager une série dodécaphonique dans ses hexacordes, ainsi que celle de certaines structures particulières (séries symétriques et séries tous-intervalles), est envisagée par Krenek dans une perspective théorique visant à établir un modèle contrapontique dans la pratique dodécaphonique. Ce modèle est explicité dans un court manuel de contrepoint[28] que Krenek élabore et publie à l'époque de la composition du *Lamentatio Jeremiae Prophetae.* Il s'agit donc d'un document particulièrement précieux pour analyser l'articulation entre pensée théorique et pratique compositionnelle chez Krenek.

Dans ce manuel Krenek analyse trois cas de « séries spéciales » : les séries symétriques, les séries tous-intervalles et les séries symétriques tous-intervalles. Nous analyserons en détail le concept des séries tous-intervalles, étant donnée la place importante que ces structures occupent dans la formalisation algébrique de la part des théoriciens et compositeurs de

---

[25] C'est nous qui soulignons à la fois l'aspect « contextuel », donc relatif, de la notion de « système musical » et aussi l'émergence du concept de « théorie de ma musique » qui n'est pourtant pas encore entièrement défini.

[26] Nous reviendrons à plusieurs reprises sur le concept de *pertinence* qui n'est pas facile à définir, surtout par rapport à certaines approches théoriques récentes en musique. Dans le cas de Krenek, le caractère de pertinence d'un système théorique concerne la « pratique » en tant qu'activité *compositionnelle.* Le problème s'est bientôt posé, historiquement, de généraliser cette notion à d'autres pratiques, comme la pratique *analytique.* C'est ainsi qu'on peut se poser la question d'une articulation possible entre moment théorique, démarche analytique et pratique compositionnelle, réflexion qui n'est pas abordée par Krenek et qui représente l'un des axes principaux de notre travail.

[27] L'origine de cette deuxième pratique, que nous analyserons par rapport au concept de « combinatorialité » chez Milton Babbitt, remonte à la théorie des « tropes » du théoricien autrichien Josef Mattias Hauer (1883-1959). Nous renvoyons à l'article de George Rochberg pour l'analyse comparée de cette pratique compositionnelle chez Hauer, Schoenberg et Babbitt [ROCHBERG 1959].

[28] *Studies in Conterpoint Based on the Twelve-Tone Technique* [KRENEK 1940].

traditions culturelles différentes[29]. En ce qui concerne les séries symétriques, une analyse de cette idée nous offre, comme nous l'avons déjà anticipé, une transition idéale vers la pensée théorique du compositeur américain Milton Babbitt qui saura, tout d'abord, remplacer la notation musicale tout à fait traditionnelle de Krenek par une représentation symbolique extrêmement puissante.

Les séries symétriques sont ainsi appelées par Krenek « *en vertu de la relation qui existe entre leurs moitiés* » [KRENEK 1940, 36]. Krenek n'utilise pas encore ici une notation numérique, ce qui ne facilite pas la lecture de ses exemples musicaux en, particulier quand il considère les relations entre la rétrogradation et l'inversion d'une série donnée[30]. La figure suivante montre le premier exemple discuté par Krenek. Il s'agit d'une série dont la deuxième moitié est une inversion de la première mais transposée d'un intervalle de septième majeure ascendante. Nous avons ajouté l'indication du nombre de demi-tons ascendants ou descendants entre les notes successives. Dans le cas d'intervalles descendants, la valeur numérique est précédée par le signe « - » :

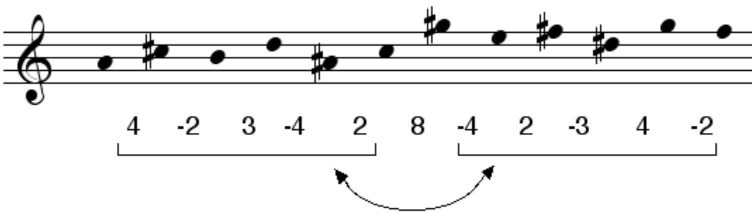


Figure 2 : série dodécaphonique dont la deuxième moitié est une inversion transposée de la première

Krenek considère également le cas de la série inverse, ayant la propriété que sa deuxième moitié est une transposition de la première moitié de la série de départ. L'exemple est illustré par la figure suivante[31] :

---

[29] Le problème de la classification exhaustive de ce type des structures pour toute division de l'octave en un nombre *n* de parties égales est l'un des problèmes « mathémusicaux » les plus célèbres en théorie de la musique. Pour cette raison, nous allons lui consacrer l'*Interludium* à la fin de ce premier chapitre.

[30] Il faut préciser que Krenek avait déjà utilisé quelques années auparavant la notation numérique dans la représentation d'une série tous-intervalles [KRENEK 1937/1939, 73]. Il faudra attendre une vingtaine d'années pour voir les premiers exemples de notation numérique des séries par le compositeur, en particulier comme outil analytique pour expliquer la technique des rotations des séries [KRENEK 1960, 213]. Cependant, bien que les notes d'une série soient représentées pas des nombres (de 1 à 12), il n'y a pas de formalisation algébrique à proprement parler, car les opérations traditionnelles sur la série, en particulier la transposition et l'inversion, ne sont jamais décrites, comme Milton Babbitt avait commencé à le faire, dans leur simple relation avec la structure de groupe cyclique.

[31] Krenek ne semble pas remarquer qu'il s'agit, en réalité, du même exemple, mais considéré selon deux perspectives différentes. On retrouvera ce type de relation, qui concerne d'un point de vue mathématique la

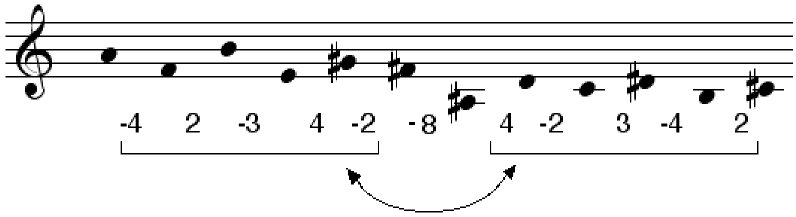


Figure 3 : Une deuxième interprétation de la figure précédente

L'analyse de Krenek continue en donnant des exemples de séries dans lesquelles la deuxième moitié est la transposition de la rétrogradation de la première. Sa conclusion explique assez bien l'articulation entre théorisation et pratique musicale :

> « *Plusieurs séries de ce type peuvent être établies. Le compositeur qui les utilise doit considérer le fait qu'étant donné que vingt-quatre patterns coïncideront avec leurs formes dérivées respectives, il n'aura à sa disposition que vingt-quatre patterns différents au lieu de quarante-huit* » *[KRENEK 1940, 36].*

Milton Babbitt saura réduire encore plus le nombre de formes possibles d'une série dodécaphonique en précisant davantage la nature algébrique de ce qu'il appellera la *combinatorialité* d'une structure musicale. Dans le même temps, son utilisation algébrique des techniques sérielles, appliquées à d'autres paramètres que les hauteurs dès la moitié des années quarante, ouvre le problème musicologique du rôle de la pensée théorique de ce compositeur dans la naissance et l'élaboration successive du sérialisme intégral.

Curieusement, Krenek ne semble faire aucune allusion aux applications des techniques sérielles au domaine rythmique par Milton Babbitt, ce qui est assez surprenant vu l'attention portée par le compositeur autrichien sur le phénomène de la série généralisée. Cette problématique est abordée, en particulier, dans une étude que nous avons déjà mentionnée à propos de la technique des rotations des séries [KRENEK 1960]. À partir de cette pratique compositionnelle, Krenek envisage une discussion sur celle qu'il appelle l'organisation « pan-parametrique » [*pan-parametrical organization*], c'est-à-dire l'application des techniques sérielles à d'autres paramètres que les hauteurs (en particulier le rythme et la densité).

Krenek cite Pierre Boulez et Karlheinz Stockhausen comme exemples de compositeurs ayant réfléchi sur le problème de l'organisation intégrale de la série. Dans sa réflexion sur la série généralisée, le compositeur autrichien insiste sur deux aspects qui nous semblent particulièrement significatifs dans le contexte de cette étude. Tout d'abord, il prend position

commutativité entre l'opération de transposition et l'opération d'inversion dans le cas d'un hexacorde, dans la deuxième partie de cette étude, consacrée aux aspects analytiques.

contre certaines objections envers la réduction de la musique à un « jeu abstrait des nombres », appellation que, selon Krenek, certains analystes ont réservé à des compositions telles que *Structures* pour deux piano de Pierre Boulez ou *Elektronische Studie I* de Karlheinz Stockhausen. Krenek défend la *pertinence musicale* dans l'utilisation des techniques arithmétiques dans la sérialisation des paramètres, comme dans l'extrait suivant :

> « *Les nombres utilisés dans l'organisation des paramètres dans la musique sérielle sont presque toujours dérivés des proportions et mesures de la substance de base musicale. Évidemment, ces nombres se détachent des objets auxquels ils étaient associés et commencent une vie autonome dans les différentes opérations utilisées [performed]. Mais les résultats de ces opérations sont réinterprétés [retranslated] en termes musicaux et appliqués au matériel sonore. Dans cette relation entre nombre et réalité on peut voir une analogie avec le rapport entre mathématiques et physique contemporaines* » *[KRENEK 1960, 219].*

Deuxièmement, Krenek renverse la position à laquelle le compositeur Iannis Xenakis était parvenu dans son écrit sur la crise de la musique sérielle [XENAKIS 1955/1994]. Xenakis avait mis en évidence le caractère contradictoire d'un processus compositionnel dans lequel l'organisation totale des paramètres réalise *de facto* une forme chaotique, mieux formalisable, selon l'auteur de *Metastasis*, en termes probabilistes. Au contraire, pour Krenek, l'élément chaotique issu de l'organisation totale des paramètres est le cœur du processus de sérialisation totale, car c'est grâce à ce processus que l'inattendu se crée d'une façon nécessaire[32].

En effet, *« ce qui se passe dans un instant donné est un produit de l'organisation sérielle préconçue mais, en même temps, est une occurrence imprévisible car il n'est pas anticipé par l'esprit qui a inventé et déclenché le mécanisme* » [KRENEK 1960, 228]. Nous allons voir maintenant comment ce mécanisme se précise, dans sa nature éminemment algébrique, chez le compositeur et théoricien américain Milton Babbitt.

1.4 Milton Babbitt et l'émergence du concept de groupe en musique et musicologie

Dans la section précédente, nous avons donné quelques éléments pour introduire la pensée théorique d'un compositeur, Milton Babbitt, qui a exercé une influence profonde sur une génération entière de théoriciens de la musique, en particulier aux Etats-Unis. Le point de départ de sa réflexion théorique est, comme dans le cas de Krenek, le dodécaphonisme schoenbergien, abordé dans sa dimension éminemment systématique.

---

[32] *« The unexpected happens by necessity* » [KRENEK 1960, 229].

La conception de la méthode dodécaphonique comme un « système », au sens mathématique du terme, se précise chez le compositeur américain dès les années quarante, comme le témoigne un document qui n'a été rendu publique que récemment. Il s'agit de sa thèse de doctorat intitulée *The function of Set Structure in the Twelve-Tone System*, complétée en 1946 mais approuvée par le département de musique de l'Université de Princeton seulement au début des années quatre-vingt-dix[33]. Ce travail académique représente un moment très important de l'histoire des méthodes algébriques en musique. Pour la première fois, la méthode dodécaphonique est décrite comme une « structure », ou, dans la terminologie de Babbitt, un « système » qui est constitué par un « *ensemble d'éléments, de* ***relations*** *entre ces éléments et d'****opérations*** *sur ces éléments* » [BABBITT 1946/1992, viii][34].

Le compositeur reconnaît que cette perspective structurale du dodécaphonisme n'abouti pas, dans son étude musicologique, à une formalisation algébrique explicite, car « *une vraie mathématisation aurait besoin d'une formulation et d'une présentation dictées par le fait que le système dodécaphonique est un* ***groupe de permutations*** *qui est façonné* [shaped] *par la structure de ce modèle mathématique* » [BABBITT 1946/1992, ii][35].

Il conclut alors cette discussion sur le caractère informel de sa démarche, d'un point de vue strictement mathématique, en affirmant qu'une approche de type algébrique « *représenterait la façon définitive d'aborder ce sujet, aussi bien d'un point de vue de la rigueur que d'une efficacité opérationnelle* » [BABBITT 1946/1992, ii]. En dépit de ces précautions, Milton Babbitt fait un pas décisif vers l'approche algébrique quand il utilise la notion de *congruence* (modulo 12) pour définir ce qu'il appelle les « nombres d'ensemble » [*set numbers*].

L'ensemble, dont la *structure* est étudiée dans sa fonction à l'intérieur du système dodécaphonique, pour reprendre le titre de sa dissertation, est donc bien le groupe cyclique d'ordre 12. Cela explique le choix terminologique de Babbitt de ne pas utiliser les termes employés traditionnellement pour indiquer la série dodécaphonique (*row* et *series*). Ces deux termes ont, selon Babbitt, une connotation « thématique » qui affirme la prédominance de la composante horizontale sur toute organisation harmonique du système dodécaphonique. Le

---

[33] L'épisode est significatif car il témoigne des difficultés, dans l'histoire de la pensée théorique en musique, à inscrire une démarche de formalisation dans une dimension véritablement musicologique.

[34] C'est nous qui soulignons. Pour expliquer le changement de perspective par rapport à d'autres formulations théoriques sur le système dodécaphonique, Babbitt se réfère à l'axiomatique hilbertienne et à l'utilisation que Krenek en fait dans son concept de « technique » compositionnelle. Cette utilisation de l'axiomatique reste, selon Babbitt, métaphorique, compte tenu du fait que le compositeur autrichien ne l'a jamais explicitée en termes mathématiques.

[35] C'est nous qui soulignons.

terme « ensemble » [*set*] dénote ainsi ce qu'il appelle un « agrégat » [*aggregate*], « *dont les éléments n'ont de caractéristiques que par rapport à un contexte donné* » [BABBITT 1946/1992, ix]. La structure algébrique de l'ensemble sous-jacent au système dodécaphonique est explicitée tout de suite par le compositeur, et cela à travers un concept théorique qui avait déjà trouvé une application en musique : la congruence modulo un nombre entier[36].

« Deux éléments sont congruents mod. 12 si leur différence est égale à un multiple de 12 » [BABBITT 1946/1992, 2].

La première conséquence de l'introduction de cette notion pour représenter la structure du *twelve-tone set* est le fait que toute opération sur ces éléments (les entiers de 0 jusqu'à 11) sera calculée modulo 12. L'ambiguïté entre une terminologie musicale et une formalisation mathématique est mise en évidence par le choix de Babbitt de désigner comme « transposition translation » l'opération qui représente l'une des transformations de base de la série dodécaphonique, transformation traditionnellement connue par les musiciens comme transposition[37]. Cependant, la difficulté à constituer un cadre terminologique précis sera surmontée à partir des années cinquante et, plus précisément, à partir d'un écrit théorique dans lequel on retrouve, selon les intentions de l'auteur, une « *version extrêmement condensée* » [BABBITT 1955/1972, 362] de certaines parties du travail universitaire cité précédemment.

Il s'agit d'un écrit qui a été republié une vingtaine d'années plus tard avec des *addenda* dont la fonction primaire est de rendre plus explicite une pensée théorique qui restait, nous

---

[36] La première application en musique du concept de *congruence modulaire* est probablement celle du théoricien français Camille Durutte (1803-1881) auteur de deux ouvrages dont on n'a commencé que récemment à mesurer l'importance dans l'histoire de la théorie musicale : *Technie, ou lois générales du système harmonique* [DURUTTE 1855] et *Résumé élémentaire de la Technie harmonique, et complément de cette Technie* [DURUTTE 1876]. Durutte, qui est souvent cité par Babbitt comme l'une des figures les plus intéressantes des théoriciens de la musique du XIX^e^ siècle, a travaillé à l'établissement de son système théorique en collaboration étroite avec le mathématicien et philosophe polonais Hoëne Wronski, dont on connaît l'influence sur de nombreux compositeurs du XX^e^ siècle. Edgar Varèse considère Wronski et Durutte comme les précurseurs du concept de musique comme « Art-Science », une idée qui est bien exprimée par la définition de la discipline comme « la corporification de l'intelligence dans les sons », adoptée par Varèse sous la forme de *« l'incarnation de l'intelligence qui se trouve contenue dans les sons* » [VARESE 1983, 102]. Iannis Xenakis ne pourra qu'approuver une telle vision dans sa conception de la musique considérée comme l'expression de *« l'intelligence humaine par des moyens sonores* » [XENAKIS 1963/1981, 211]. Une analyse de la pensée théorique de Durutte est contenue dans l'ouvrage de Laurent Fichet consacré aux théories scientifiques de la musique au XIX^e^ et XX^e^ siècle [FICHET 1996]. Un ouvrage sorti la même année en Italie analyse encore plus en détail l'esthétique musicale du théoricien français tout en ouvrant la réflexion sur le rapport philosophique entre mathématiques et musique [ORCALLI 1996].

[37] Nous préférons garder le terme « série dodécaphonique » au lieu d'essayer de traduire le concept de *twelve-tone set* avec « ensemble dodécaphonique », qui n'a jamais été utilisé à notre connaissance. La seule précaution à prendre consistera dans le fait que le terme « série dodécaphonique » tel que nous l'employons ne contient pas une notion d'ordre par rapport à ses éléments constituants. Nous utiliserons aussi, comme synonyme de série dodécaphonique, le terme d'« agrégat », qui est également employé systématiquement par le théoricien américain.

pouvons bien l'imaginer, trop hermétique pour le lecteur musicologue de l'époque[38]. Parmi les aspects du système dodécaphonique sur lesquels Babbitt insiste le plus dans cet article, on trouve la notion de « combinatorialité » qui généralise une technique compositionnelle souvent utilisée par Schoenberg et d'autres compositeurs, comme Josef Matthias Hauer et Ernst Krenek[39]. Babbitt arrive ainsi à l'établissement de six hexacordes ayant la propriété d'engendrer le total chromatique aussi bien par transposition que par inversion. Ces structures hexacordales sont appelées « omni-combinatoires » [*all-combinatorial*] et leur « combinatorialité » ne dépend pas de l'ordre particulier qu'on impose sur leurs éléments. Autrement dit, une permutation des éléments d'un tel hexacorde n'affecte pas la propriété d'engendrer le total chromatique par transposition et/ou inversion[40].

Les hexacordes « all-combinatorial » peuvent être classés en quatre catégories (ou *ordres*) différentes selon le nombre de transpositions qui relient chaque hexacorde à son complémentaire. Nous nous écartons de la présentation que Babbitt fait de ce sujet dans l'un de ses premiers écrits théoriques [BABBITT 1955/1972] pour utiliser la représentation numérique d'accords et d'opérations de transpositions/inversions telle qu'on la retrouve, en particulier, dans l'article « Twelve-Tone Invariants as Compositional Determinants » [BABBITT 1960]. Dans cet écrit, sur lequel nous reviendrons eu égard à son importance dans le processus de cristallisation de la pensée algébrique, tous les ensembles sont notés par des

[38] Curieusement, cet écrit ne fait aucune référence à la nature algébrique du système dodécaphonique. La notion de congruence (modulo 12) n'est presque pas utilisée, à la différence d'un écrit théorique de quelques années postérieur [BABBITT 1960], dans lequel le compositeur reprend de zéro la notion de congruence modulaire pour introduire la nature permutationnelle du système dodécaphonique dans le sens de la théorie des groupes de permutations.

[39] Dans la terminologie de Babbitt, l'utilisation chez Schoenberg des séries partagées en deux hexacordes dont l'un est une transposition de l'autre représente une forme élémentaire de « combinatorialité » qu'il appelle « sémi-combinatorialité » [BABBITT 1955/1972]. Un exemple de « combinatorialité » est l'utilisation par Schoenberg d'une série dodécaphonique partagée en deux hexacordes dont l'un est une transposition *et* une inversion de l'autre dans le *Concerto* pour violon et orchestre Op. 36 (1934/36). Notons aussi que la « combinatorialité » concerne également les tétracordes et les accords de trois notes (*trichords* ou triades, respectivement dans la terminologie anglaise et française), comme Babbitt observe dans le même écrit en citant le *Concerto pour neuf instruments* Op. 24 (1931/34) d'Anton Webern. Dans cette première partie, nous limiterons l'analyse à la combinatorialité de type hexacordale. D'autres formes de combinatorialité seront analysées dans la troisième partie (aspects compositionnels) par rapport à la notion mathématique de « partition » que Babbitt formalise et applique aux deux compositions pour piano *Partitions* (1957) et *Post-Partitions* (1966).

[40] Une série dodécaphonique qui est considérée exclusivement en termes de contenu de ses hexacordes et sans aucune considération d'ordre sur les éléments qui constituent ces hexacordes, est aussi appelée « ensemble source » [*source set*]. Comme nous l'avons déjà souligné, le fait qu'une propriété centrale comme celle de la combinatorialité totale soit indépendante de l'ordre imposé sur les éléments des structures hexacordales est un argument majeur, selon le compositeur américain, pour préférer le terme *set* à toute traduction traditionnelle du terme série.

entiers (entre 0 et 11), appelés aussi *pitch-numbers* [BABBITT 1960, 248][41]. Un hexacorde sera donc une collection de six entiers de classe de hauteurs et toute *transposition* de cet ensemble « *peut être représentée en additionnant (modulo 12) un entier, entre 0 et 11, à tout entier de classe de hauteurs de l'ensemble* » [BABBITT 1960, 249][42].

La définition d'*inversion* s'appuie également sur la représentation numérique d'un accord et elle est définie comme « *la complémentation, modulo 12, de tout entier de classes de hauteurs* [de l'ensemble] » [BABBITT 1960, 252][43]. Avec ces quatre notions (entiers de classe de hauteurs, transposition, inversion, complémentation), on peut donner le catalogue des six hexacordes « omni-combinatoires » dans la typologie discutée par Babbitt.

1.4.1 Omni-combinatorialité du premier ordre

Un hexacorde omni-combinatoire est du premier ordre s'il y a une seule valeur de transposition entre lui et son complémentaire. Cette famille est constituée des trois hexacordes qu'on notera H_1, H_2 et H_3. Leurs complémentaires sont notés respectivement h_1, h_2 et h_3. La (seule) transposition qui permet de passer d'un hexacorde H_i à son complémentaire h_i est celle de triton, c'est-à-dire de six demi-tons. En suivant l'usage traditionnel de l'école américaine[44], on notera T_6 cette transposition. On pourra donc écrire la condition qui caractérise tout hexacorde omni-combinatoire du premier ordre à l'aide de la simple équation : $T_6(H_\mathrm{i})=h_\mathrm{i}$ pour tout index i=1, 2, 3.

[41] Le terme *pitch-numbers* peut être traduit, en français, par « entiers de classe de hauteurs », une terminologie qui est employée, en particulier, dans la tradition analytique américaine de la *Set Theory*. Cette discussion terminologique sera reprise, avec une orientation différente, dans la deuxième partie de cette étude, dédiée précisément aux applications analytiques des méthodes algébriques.
[42] Babbitt appelle « nombre de transposition » [*transposition number*] l'entier que l'on additionne à tout entier de classe de hauteurs de l'ensemble de départ, une terminologie qui nous semble trop ambiguë, en français, pour être adoptée dans l'analyse des hexacordes « omni-combinatoires ».
[43] Faire la complémentation modulo 12 d'un entier *n* signifie faire la différence entre 12 et *n* modulo 12.
[44] Cette notation sera utilisée de façon systématique dans la deuxième partie de cette étude en suivant les développements de la *Set Theory* depuis les premières propositions théoriques d'Allen Forte jusqu'à l'*analyse transformationnelle* de David Lewin.

Figure 4 : Les trois hexacordes omni-combinatoires du premier ordre

1.4.2 Omni-combinatorialité du deuxième ordre

Il n'y a qu'un seul hexacorde omni-combinatoire du deuxième ordre, c'est-à-dire tel qu'il y a deux valeurs de transposition entre lui et son complémentaire. Il sera noté H_4 et les deux valeurs de transposition sont respectivement la tierce mineure et la sixte majeure, ce qui donne, dans la terminologie adoptée, les deux transpositions T_3 et T_9 respectivement. Formellement on obtient les deux relations : $T_3(H_4)=h_4$ et $T_9(H_4)=k_4$ où les deux hexacordes h_4 et k_4 sont le même hexacorde complémentaire de H_4 si la transposition est calculée modulo l'octave :

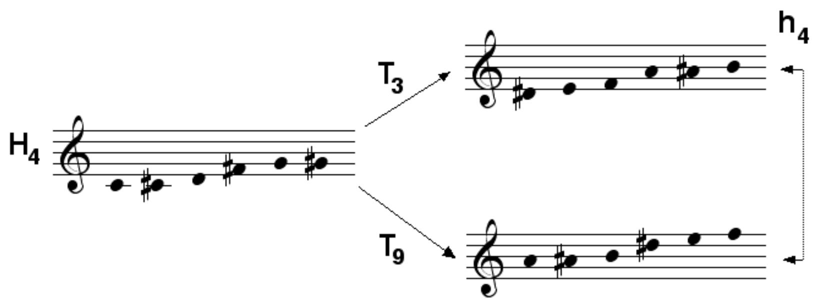


Figure 5 : L'hexacorde du deuxième ordre avec ses deux transpositions

1.4.3 Omni-combinatorialité du troisième ordre

Il n'y a qu'un seul hexacorde omni-combinatoire du troisième ordre, c'est-à-dire tel qu'il y a trois valeurs de transposition entre lui et son complémentaire. Il sera noté H_5 et ces trois valeurs de transposition sont respectivement la seconde majeure (T_2), le triton (T_6) et la septième mineure (T_{10}), comme le montre la figure suivante. Encore une fois, les trois hexacordes ainsi obtenus se réduisent (modulo l'octave) à un seul hexacorde h_5 complémentaire de H_5.

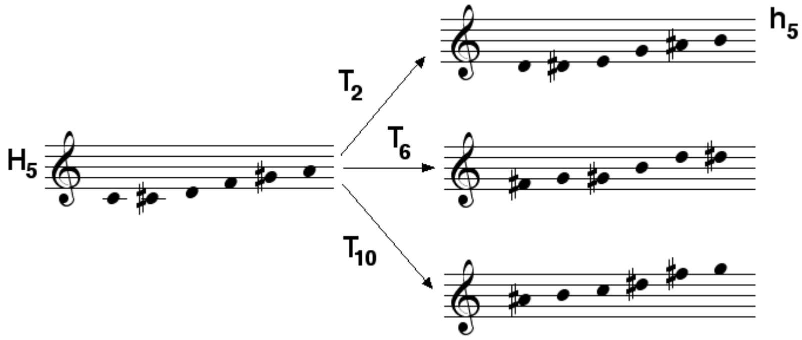


Figure 6 : L’hexacorde omni-combinatoire du troisième ordre

1.4.4 Omni-combinatorialité du quatrième ordre[45]

Finalement, il n’y a qu’un seul hexacorde omni-combinatoire tel qu’il admet six valeurs de transposition entre lui et son complémentaire. Il s’agit de la gamme par tons, notée H_6, et qui admet les six transpositions T_1, T_3, T_5, T_7, T_9 et T_{11}.

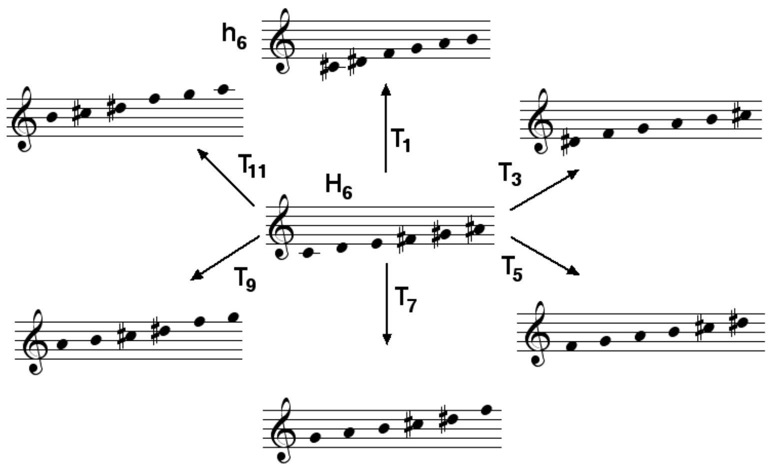


Figure 7 : L’hexacorde omni-combinatoire du quatrième ordre

Cependant, au-delà des considérations sur la combinatorialité, l’écrit théorique de 1955 est intéressant pour un autre aspect sur lequel nous allons nous concentrer dans la suite de cette étude. Ayant déjà défini le dodécaphonisme comme un « système » au sens mathématique [BABBITT 1946/1992], le théoricien américain peut s’appuyer sur ce concept pour discuter l’émergence historique du sérialisme intégrale. Selon Babbitt, « *une compréhension de la structuration dodécaphonique des composantes autres que les hauteurs ne peut que passer*

---

[45] C’est ainsi qu’il est indiqué par Babbitt dans [BABBITT 1955/1972]. En réalité, il serait plus cohérent de l’appeler hexacorde du sixième ordre, comme le compositeur le fait dans ses *Madison Lectures* à l’Université de Wisconsin [BABBITT 1987, 193].

par une définition correcte et rigoureuse de la ***nature*** *du système et des* ***opérations*** *qui lui sont associées* » [BABBITT 1955/1972, 367][46].

Cette nature permutationnelle du système, ancrée comme nous l'avons vu dans la structure algébrique de groupe, permet d'organiser les autres paramètres, et en particulier le rythme, « *exactement de la même manière, et avec les mêmes opérations, que le paramètre hauteur* » [BABBITT 1955/1972, 367]. La combinatoire des hauteurs, renforcée par la nature « structurale » du système dodécaphonique, est donc le point de départ pour une combinatoire des durées, une idée qui fait de Milton Babbitt l'un des pères fondateurs du sérialisme intégral[47]. L'idée d'une équivalence formelle entre une formalisation des hauteurs et une formalisation rythmique est un concept central de l'approche algébrique en théorie, analyse musicale et composition. C'est donc important d'arriver à préciser la nature « algébrique » du dodécaphonisme, et pour cela nous nous appuierons sur les concepts élaborés par Babbitt dans son écrit sur les invariants dodécaphoniques comme déterminants compositionnels[48].

Le point de départ de toute considération théorique sur le dodécaphonisme est, encore une fois, le fait qu'il s'agit d'un système au sens mathématique, c'est-à-dire une « structure » qui peut « *être caractérisée complètement en explicitant les éléments, les* ***relations*** *[…] entre ces éléments et les* ***opération****s sur les éléments ainsi reliés* » [BABBITT 1960, 247][49]. Le théoricien complète alors naturellement cette perspective structurelle en stipulant que « *toute considération sur les opérations du système doit procéder de la conscience de leur nature*

---

[46] C'est nous que soulignons. Il s'agit d'une nature qui est explicitée par les *opérations algébriques* qui peuvent être faites sur le système.

[47] Célestin Deliège semble hésiter sur la possibilité de parler, dans le cas du compositeur américain, des « combinatoires hauteurs-durées », le problème étant *« l'indépendance que [le compositeur] entend donner au processus des durées* » [DELIEGE 2003, 587]. Pourtant, comme nous avons déjà pu le constater, l'indépendance n'est qu'un épiphénomène par rapport à la nature algébrique qui sous-tend aussi bien l'univers des hauteurs que le domaine des rythmes. Ces idées avaient déjà trouvé une application dans la pratique compositionnelle de Babbitt dès la deuxième moitié des années quarante, en particulier dans les *Trois compositions pour piano* (1947-48). Il s'agit d'un moment important dans l'histoire de la musique du XXe siècle car, dans la même période, Olivier Messiaen « crée l'événement », pour reprendre une expression de Célestin Deliège, avec la pièce *Mode de valeurs et d'intensités* (1949). Cette pièce a eu une influence considérable sur toute une génération de compositeurs auxquels on doit le début de la réflexion en Europe sur la série généralisée. Nous reviendrons dans la troisième partie sur la réflexion rythmique de Messiaen ; cependant, nous pouvons déjà avancer une hypothèse sur une possible influence de Babbitt sur la conception même de cette troisième pièce des *Quatre études de rythme*, dont l'audace semble contredire le caractère pondéré du compositeur français [DELIEGE 2003, 101]. Cette hypothèse est corroborée par une conversation que nous avons eue récemment avec Milton Babbitt qui nous a confirmé avoir participé aux cours de composition tenus par Olivier Messiaen à Tanglewood en 1948, donc avant la réalisation de la pièce *Mode de valeurs et d'intensités*. En effet, les deux premières études de rythmes ont été composées aux Etats-Unis, comme le frontispice de la partition l'indique. L'indication « Darmstadt - 1949 » sur la partition de *Mode de valeurs et d'intensités* confirme que la pièce a été effectivement composée après la rencontre entre Messiaen et Babbitt.

[48] Voir « Twelve-Tone Invariants as Compositional Determinants » [BABBITT 1960].

permutationnelle » [BABBITT 1960, 248]. C'est le début d'une proposition théorique explicite, de la part d'un compositeur, sur l'approche algébrique en musique, ce qui justifie les explications détaillées de Babbitt sur la structure de groupe à la base du système. Cette nature algébrique est précisée d'abord par rapport à l'opération de transposition :

> « *La famille des douze transpositions d'un ensemble S donné constitue un groupe de permutations de 12 éléments* » *[BABBITT 1960, 249].*

Mais la nature algébrique du système dodécaphonique concerne, plus directement, les rapports entre les quatre formes classiques de la série : l'original S (ou *forme de base* de l'ensemble), l'inversion I, la rétrogradation R et la rétrogradation inverse RI.

À la différence d'autres propositions théoriques de l'époque, Babbitt introduit une double notation numérique pour indiquer une série dodécaphonique. Chaque élément de l'ensemble S est représenté par un couple (*a,b*) d'entiers compris entre 0 et 11, le premier élément [*order number*] indiquant la « position » de la note dans la série et le deuxième élément étant le nombre qui indique, cette fois, la « note » dont on décrit la position. Pour montrer comment la notation de Babbitt permet de rendre compte de certaines propriétés musicales, reprenons un exemple que nous avons utilisé dans la section précédente en analysant quelques aspects de la pensée théorique de Krenek. La figure suivante montre la série en notation musicale traditionnelle accompagnée par la double notation numérique introduite par Babbitt[50] :

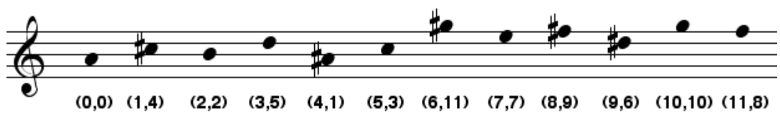


Figure 8 : série dodécaphonique dont la deuxième moitié est une inversion transposée de la première dans la notation de Babbitt

---

[49] C'est nous qui soulignons. Cette définition est tout à fait cohérente avec les concepts introduits par Babbitt dans sa thèse de doctorat [BABBITT 1946/1992].

[50] Notons que Babbitt utilise ce qu'on appelle un système à origine variable (*movable-DO systems*) à la différence de la tradition analytique américaine, comme la *Set Theory* d'Allen Forte, qui identifie le 0, par convention, avec la note *do*. Le problème de la construction d'un système musical indépendant de l'origine, et de ses conséquences sur la notion d'*intervalle* entre classes de hauteurs a été développé dans l'article théorique de David Lewin intitulé « A label-free development for 12-pitch-class systems » [LEWIN 1977a]. Remarquons que presque à la même époque des réflexions algébriques de Milton Babbitt, on retrouve en Europe les mêmes préoccupations chez Iannis Xenakis, dont la formalisation des échelles à travers la théorie des cribles permet de conserver l'indépendance du système musical vis-à-vis de toute origine. Voir, par exemple, l'article « La voie de la recherche et de la question » [XENAKIS 1965/1994]. Nous reviendrons sur ces convergences entre la pensée théorique de Milton Babbitt et de Iannis Xenakis dans la suite du présent chapitre.

Nous avons déjà défini l'opération d'inversion qui consiste à calculer le complémentaire (modulo 12) de tout entier de classe de hauteurs en laissant inchangé son nombre d'ordre[51]. La double notation numérique a l'avantage de mettre en évidence l'analogie entre l'opération d'inversion et de rétrogradation R, cette dernière étant définie par complémentation sur les « ordres » plutôt que sur les entiers de classe de hauteur[52]. L'opération de rétrogradation inverse RI se définit en composant les deux opérations précédentes, inversion et rétrogradation[53]. Les trois opérations dodécaphoniques sont explicitées, selon la notation numérique de Babbitt, par la figure suivante :

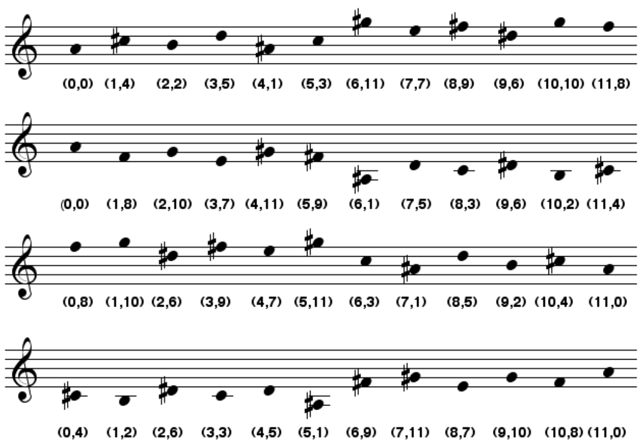


Figure 9 : Les trois opérations dodécaphoniques dans la notation de Babbitt

La structure de groupe à la base du sérialisme émerge lorsqu'on considère les quatre formes de la série, y compris la forme de base S, comme des *opérations* qu'on peut librement composer entre elles[54]. Ainsi une inversion d'une inversion (aussi bien qu'une rétrogradation

---

[51] Formellement, pour tout élément (a,b) de la série, l'inversion I est définie comme l'opération telle que $I(a,b)=(a, 12\text{-}b \text{ mod.}12)$.

[52] Formellement, tout élément (a, b) est transformé par l'opération R dans $(11\text{-}a, b)$, et on notera cela avec l'équation suivante : $R(a, b)=(11\text{-}a,b)$.

[53] En mathématiques, il n'y a pas d'unanimité dans la notation employée pour la composition entre opérations. Nous privilégions celle qui pourrait sembler la moins logique à un public non-mathématicien, c'est-à-dire celle qui renverse l'ordre dans la composition des opérations. Ainsi l'écriture RI signifie opérer d'abord une inversion I suivie par une rétrogradation R. La « logique » mathématique sous-jacente à une telle écriture devient plus claire si l'on explicite l'élément sur lequel les deux transformations opèrent, élément qu'on met d'habitude à droite des opérations. Ainsi la composition de deux opérations revient à enlever au fur et à mesure les parenthèses à partir de celles qui sont les plus proches à l'élément considéré. Dans le cas de la rétrogradation inverse RI appliqué à l'élément (a,b) on aura donc : $RI(a,b)=R(I(a,b))=R(a,12\text{-}b \text{ mod.}12)=(11\text{-}a,12\text{-}b \text{ mod.}12)$. Dans ce cas particulier, on aurait pu inverser l'ordre des opérations et calculer d'abord la rétrogradation R suivie par l'inversion I. On aurait en fait le même résultat car $IR(a,b)=I(R(a,b))=I(11\text{-}a,b)=(11\text{-}a,12\text{-}b \text{ mod.}12)$. Cette propriété est appelée *commutativité* et s'exprime à travers l'identité entre RI et IR, en équation : RI=IR. Ce n'est pas une propriété valable pour tout groupe, comme on verra en analysant les principes de base de la *Set Theory* d'Allen Forte, la structure de Système d'Intervalles Généralisés (GIS) de David Lewin ou, encore, le modèle algébrique sous-jacent à la pièce *Nomos Alpha* de Iannis Xenakis.

[54] L'ensemble S correspond à celle qu'on appelle une « identité » (ou « élément neutre ») pour le groupe, car il n'affecte en rien les autres opérations. Ainsi composer une inversion I avec S signifie simplement faire une inversion suivie (ou précédé) par une application identique. On voit bien apparaître ici le concept qui est à la

d'une rétrogradation ou encore une rétrogradation inverse d'une rétrogradation inverse) a l'effet de laisser inchangé tout élément (*a,b*) de la série initiale[55].

En composant deux opérations du système, on reste à l'intérieur du système, c'est-à-dire qu'on n'obtient pas une transformation nouvelle par rapport aux quatre opérations dodécaphoniques. La composition d'opérations est donc une « loi de composition interne » pour le système[56]. Cette loi de composition est associative[57], elle a un élément neutre[58] et tout opération admet une opération symétrique[59]. Ces résultats sont représentés à l'aide du tableau multiplicatif suivant, plus lisible que le tableau originaire de Babbitt [BABBITT 1960, 252]. Notons que les trois opérations sérielles (R, I et RI) se disposent dans le tableau de façon symétrique par rapport à la diagonale, qui est occupée par la série S de départ, interprétée comme élément identité du groupe.

base du concept même de structure algébrique, à savoir l'articulation dualiste entre l'*objet* et l'*opération*. Les quatre formes de la série sont à la fois des objets mais, en même temps, des opérations sur ces objets.

[55] Par exemple faire deux fois une inversion sur un élément (*a*,*b*) signifie calculer d'abord I(*a*,*b*)=(*a*,12-*b*) et faire encore une inversion sur le résultat ainsi obtenu, ce qui revient à calculer I(*a*,12-*b*)=(*a*,12-(12-*b*))=(*a*,*b*). De même pour le produit de deux rétrogradations ou de deux rétrogradations inverses.

[56] On a déjà vérifié un aspect particulier de cette loi quand elle concerne l'application réitérée de l'opération d'inversion, de rétrogradation ou de rétrogradation inverse. L'identité S n'étant pas un problème, car elle s'applique à toute opération en la laissant inchangée, restent deux compositions d'opérations à vérifier, c'est-à-dire respectivement la rétrogradation et l'inversion d'une rétrogradation inverse. Dans le premier cas, on obtient que l'élément (*a*,*b*) est d'abord transformé dans (11-*a*, 12-*b*) à travers RI pour être ensuite transformé dans (*a*, 12-*b*) à travers l'opération de rétrogradation. Formellement :
R(RI(*a*,*b*))=R(11-*a*,12-*b*)=(11-(11-*a*),12-*b*)=(a,12-b).
La rétrogradation d'une rétrogradation inverse n'est donc rien d'autre que l'opération d'inversion. De même, l'inversion de la rétrogradation inverse est équivalente à l'opération de rétrogradation. Le premier axiome, ou fermeture, de la loi de composition entre opérations est donc complètement vérifié.

[57] Pour avoir une idée intuitive de l'associativité, il suffit de considérer le cas de l'opération d'addition entre trois nombres entiers *a*, *b* et *c*. Le résultat est le même si l'on additionne l'élément *a* à la somme de *b* et de *c* ou si l'on fait d'abord l'addition de *a* et *b* et qu'ensuite on l'additionne à *c*. Formellement : $a+(b+c)=(a+b)+c$.
Dans le cas des quatre opérations dodécaphoniques, il s'agit de substituer l'addition avec l'opération de composition des opérations. Le résultat se vérifie aisément.

[58] Nous avons déjà proposé S comme candidat naturel pour être l'élément neutre par rapport aux opérations du système. On peut facilement vérifier que si un élément neutre existe, il est unique. Cette propriété est une conséquence de la « loi de simplification » valable dans tout groupe. Dans le cas de l'ensemble **Z** des entiers relatifs muni de l'opération d'addition, la loi de simplification s'exprime en disant que si $a+b$ est égale à $a+c$, alors nécessairement b est égal à c. Formellement : $a+b=a+c \Rightarrow b=c$ où le symbole « $\Rightarrow$ » est le symbole d'implication logique. L'unicité de l'élément neutre s'exprime à travers un processus démonstratif très courant en mathématiques : le raisonnement par l'absurde.

[59] Par définition, le symétrique d'un élément (ou d'une opération) *a* est l'élément qui, composé avec *a* (selon la loi de composition interne du groupe), restitue l'identité. Comme nous l'avons déjà montré, dans le cas du système dodécaphonique, chaque opération coïncide avec son propre symétrique. Une telle opération est aussi dite *involutive.*

	S	I	R	RI
S	S	I	R	RI
I	I	S	RI	R
R	R	RI	S	I
RI	RI	R	I	S

Figure 10 : Tableau multiplicatif du « **groupe dodécaphonique** »

Comme Babbitt l'observe, une telle structure en mathématiques prend le nom de « groupe de Klein » et le compositeur ne tardera pas à souligner la portée d'une telle découverte, à commencer par le fait qu'un « *large nombre de conséquences compositionnelles sont dérivables directement de théorèmes de théorie des groupes finis* » [BABBITT 1961/1972, 8]. Une partie de ces résultats s'applique pour établir des théorèmes des notes communes entre des transpositions et des inversions d'un sous-ensemble d'une série dodécaphonique. Ce genre de réflexions a eu une énorme importance dans le développement de la théorie de la musique aux Etats-Unis, en particulier vers l'établissement de certains principes qui sont à la base de la *Set Theory.* À titre d'exemple, et pour anticiper sur certains éléments que nous développerons dans la deuxième partie de cette étude, prenons un résultat qui révèle, selon Babbitt, la « *nature purement contextuelle des relations hiérarchiques d'une collection donnée* » [BABBITT 1961/1972, 8]. Ce résultat est exprimé sous la forme d'un théorème :

> « *Etant donnée une collection de hauteurs (ou de classes de hauteurs), la multiplicité de l'occurrence de chaque intervalle (un intervalle étant équivalent à son complément, car il n'y a pas de considération d'ordre) détermine le nombre de hauteurs en commun entre la collection originaire et sa transposition de la valeur de cette intervalle* » *[BABBITT 1961/1972, 8].*

La notion d'ensemble de classes de hauteurs [*pitch-class set*], qui est à la base la *Set Theory* d'Allen Forte, est ici introduite précisément dans son caractère d'équivalence formelle entre intervalles complémentaires, c'est-à-dire intervalles dont la somme (modulo 12) est égale à zéro. Allen Forte précisera cette notion en substituant le terme « complémentaire » à la notion d'inversion, au sens traditionnel. Deux intervalles seront donc équivalents si et seulement si l'un est une inversion de l'autre, ce qui permet de ne retenir que six classes (d'équivalence) d'intervalles (de l'intervalle 1 ou seconde mineure jusqu'à l'intervalle 6 de triton). La théorie transformationnelle de David Lewin saura, de son côté, établir un cadre formel dans lequel la notion de multiplicité d'occurrence d'un intervalle pourra se définir par rapport à une famille plus large d'opérations. Un tel discours s'applique également à l'un des plus célèbres théorèmes attribués à Babbitt : le théorème de l'hexacorde.

Ce théorème concerne la multiplicité d'occurrences d'un intervalle dans un hexacorde et dans son complémentaire. En utilisant une formulation analogue à celle du théorème précédent, on peut l'exprimer de la façon suivante :

Dans un hexacorde et dans son complémentaire, la multiplicité de l'occurrence de chaque intervalle (un intervalle étant toujours équivalent à son complémentaire) est la même[60].

Un tel résultat théorique permet, selon Babbitt, de mieux comprendre la structure et la fonction d'une théorie musicale, pour reprendre le titre d'un de ses écrits suivants [BABBITT 1965/1972]. Suivre la pensée théorique de ce compositeur signifie également suivre la naissance de la théorie de la musique [*music theory*] en tant que discipline autonome à l'intérieur du corpus musicologique.

1.4.5 Combinatoire hauteurs/durées

Nous avons déjà mentionné l'idée d'une combinatoire hauteurs/durées, dans le sens d'une possibilité de transférer les principes de base de l'organisation des hauteurs dans le domaine du rythme. Cette idée, qui parcoure un grand nombre d'écrits théoriques du compositeur, est formalisée pour la première fois dans un article du début des années soixante intitulé « Twelve-Tone rhyuthmic structures and the electronic medium » [BABBITT 1962].

Pour dégager les propriétés d'un phénomène, le rythme, qui n'est pas seulement « une préoccupation majeure dans la pensée compositionnelle contemporaine […] mais aussi l'un des problèmes parmi les plus réfractaires et mystérieux du point de vue de la perception »

[60] Le compositeur discute ce résultat dans plusieurs de ses écrits théoriques, à partire de l'écrit sur la structure d'ensemble comme déterminant compositionnel [BABBITT 1961, 80]. Dans un ouvrage plus récent, qui rassemble les leçons données par Babbitt à l'Ecole de Musique de l'Université de Wisconsin en 1983, le compositeur offre quelques éléments historiques qui nous permettent de mieux comprendre le contexte social dans lequel un tel résultat a pu émerger. C'était la période à laquelle David Lewin allait rejoindre Milton Babbitt, qui enseignait à Princeton et qui était à l'époque collègue d'Alonzo Church et Kurt Gödel, pour commencer un doctorat en mathématiques sous la direction d'Emil Artin. Cependant, la démonstration du théorème de l'hexacorde, qui semble avoir occupé les deux théoriciens pendant un certain temps, serait arrivée, selon Babbitt, d'une façon tout à fait inattendue, grâce à Ralph Fox, un mathématicien travaillant sur la théorie des nœuds. De plus, la démonstration du théorème de l'hexacorde aurait servi comme point de départ pour la résolution d'un célèbre problème de théories des nombres (problème de Waring). Malheureusement, le manque d'informations et de références précises sur cet épisode jette quelques ombres sur l'importance d'un tel résultat du point de vue mathématique. Néanmoins, en ce qui concerne la théorie de la musique, le théorème de l'hexacorde a inspiré le travail de nombreux théoriciens, comme David Lewin et Guerino Mazzola, qui ont généralisé le résultat pour d'autres structures algébriques. Cependant, l'épisode mentionné par Babbitt, si confirmé, offrirait un exemple d'une démarche qu'on peut retrouver, historiquement, dans d'autres problèmes concernant les approches

[BABBITT 1962, 150], Babbitt élabore deux concepts qui utilisent, d'une façon différente, la « nature éminemment temporelle du système dodécaphonique traditionnel [twelve-tone pitch class system] » [BABBITT 1962, 152]. Ces deux concepts expriment certaines propriétés axiomatiques[61] qui sont valables, selon Babbitt, pour toute relation temporelle entre évènements musicaux : la série des durées [durational row] et le système des attaques temporelles [time-point system].

1.4.5.1 La série de durées

La technique des séries des durées est utilisée déjà dans les *Trois compositions pour piano* (1947). La figure suivante montre le pattern rythmique P utilisé par Babbitt dans ses trois pièces et dont on a chiffré la série de durée en choisissant comme durée minimale la double-croche :

Figure 11 : Pattern rythmique des *Trois compositions pour piano*

On peut maintenant appliquer au pattern rythmique les trois transformations dodécaphoniques classiques : inversion, rétrogradation et rétrogradation inverse[62]. Les quatre formes rythmiques du pattern P sont représentées sur la figure suivante :

---

algébriques en musique. Nous reviendrons sur ce point, en discutant un exemple recent de problème « mathémusical » dans le troisième chapitre de cette étude.

[61] Plus exactement, Babbitt énonce onze propriétés qualitatives fondées sur la relation d'ordre « < ». À la différence de la congruence modulaire, cette relation n'est pas une équivalence au sens mathématique. En fait elle n'est pas *réflexive* (il n'y a pas d'événement musical x pour lequel $x<x$) ni *symétrique* (car la relation $x<y$ n'implique jamais $y<x$). La seule propriété en commun avec la relation d'équivalence est la propriété de *transitivité* (étant donnés trois évènements musicaux x, y, et z, les deux relations $x<y$ et $y<z$ entraînent $x<z$). L'axiomatique proposée par Babbitt, qui semble refléter une préoccupation majeure chez plusieurs théoriciens de la musique de l'époque (en particulier Michael Kassler [KASSLER 1967] et Benjamin Boretz [BORETZ 1969/1995]), n'est pas, à notre avis, un exemple particulièrement remarquable de pédagogie musicale. En outre, des onze axiomes, les quatre derniers sont une conséquence immédiate des quatre premiers. Cependant, au-delà d'un choix de notation qui finit par alourdir la présentation, il est significatif que Babbitt ait abandonné la notion d'équivalence mathématique pour introduire une relation d'ordre. Comme on verra dans ce chapitre, on retrouve la même idée chez Xenakis dans une axiomatique inspirée par celle de Peano sur les nombres naturels, qui conduit directement à la théorie des cribles. Pour une utilisation différente de la relation d'ordre en théorie de la musique, voir l'article de John Rahn intitulé « Logic, Set Theory, Music Theory » [RAHN 1979/2001].

[62] L'inversion rythmique de la série des durées est définie d'une façon analogue à l'inversion d'une série de hauteurs, avec la seule différence que, dans le cas du rythme, on considère le complément modulo 5 (au lieu du complément modulo 12). La série P=(1, 4, 3, 2) est donc transformée en la structure (n-1, n-4, n-3, n-2) avec n=5, soit la « forme inverse » I(P) = (4, 1, 2, 3). Comme dans le cas du « groupe dodécaphonique », P a fonction d'élément identité et l'on pourra donc écrire simplement I au lieu de I(P). De même, la rétrogradation R de la série de départ revient à renverser l'ordre de ses éléments. On aura donc R(P)=(2, 3, 4, 1), d'où la rétrogradation inverse RI(P) = (3, 2, 1, 4).

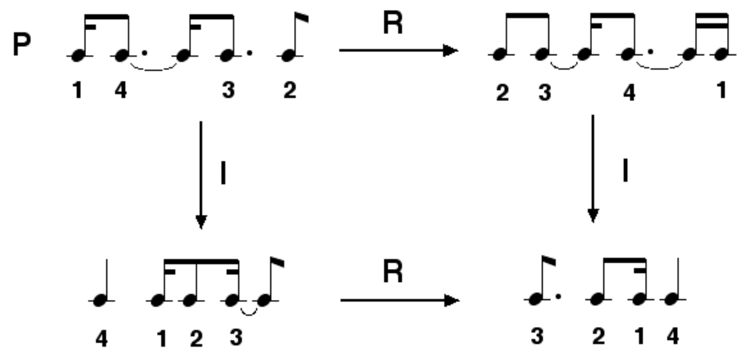


Figure 12 : Les quatre formes « dodécaphoniques » d’un pattern rythmique

Le groupe de Klein opère, comme dans le cas des hauteurs, en permutant les éléments du pattern d’origine. Il s’agit donc d’un mécanisme algébrique dont la portée structurale, par rapport à des techniques combinatoires que d’autres compositeurs étaient en train d’élaborer à la même époque, représente une avancée non négligeable dans la pensée théorique sur la musique[63].

Cependant, la technique des séries des durées n’est pas une réponse satisfaisante au problème d’une combinatoire hauteurs-durées. Les opérations dodécaphoniques traditionnelles (inversion, rétrogradation et rétrogradation inverse), ainsi que la simple transposition, permutent les durées et le résultat est un « *brouillage* [scrambling] *d’intervalles temporels perçus* » [MEAD 1994, 43]. Une telle considération suffit à justifier l’élaboration, de la part du théoricien, d’un concept qui restera sa méthode de référence pour le travail compositionnel sur le rythme : le *time-point system.*

1.4.5.2 Le système des time-*points*

Ce concept relève d’une interprétation des distances intervalliques entre hauteurs d’une série en termes de durées. Dans l’explication donnée par Babbitt, « *un entier de classe de hauteurs* [pitch number] *est interprété comme l’attaque* [point of initiation] *d’un événement temporel* » [BABBITT 1962, 162]. Pour « projeter » une série de hauteurs au domaine rythmique, Babbitt utilise le concept de *modulus*, un laps de temps divisé en 12 unités minimales représentant les douze classes d’attaques temporelles. Une juxtaposition de

[63] Nous partageons pleinement la lecture « structurale » que Lawrence Fritts propose de cette technique permutationnelle chez Babbitt [FRITTS 1997]. Cependant, nous n’irons pas jusqu’à affirmer qu’une perspective purement combinatoire, comme celle adoptée par Andrew Mead dans son introduction à la musique de Milton Babbitt [MEAD 1994], laisse le lecteur « *mal équipé pour pénétrer certaines parmi les plus intéressantes structures musicales de Babbitt* » [FRITT 1997, 94]. Une présentation de la pensée de Babbitt en termes combinatoires reste, probablement, une étape nécessaire pour tout lecteur qui n’a pas acquis les outils pour naviguer entre *cosets*, actions de groupes et produits semi-directs.

plusieurs *moduli* représente la grille temporelle sur laquelle les douze classes de hauteurs vont se projeter. Une série dodécaphonique peut se réaliser rythmiquement de plusieurs façons, car un entier de classe de hauteurs peut être projeté différemment à l'intérieur de la grille temporelle[64]. La figure suivante montre un exemple de réalisation rythmique d'une série décrite précédemment par rapport à un *modulus* ayant comme unité minimale la triple-croche.

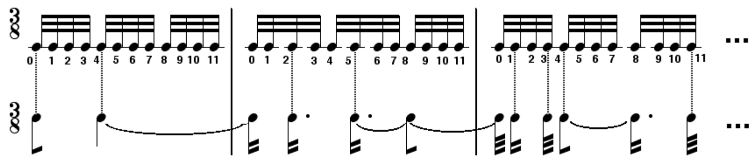


Figure 13 : Une réalisation rythmique d'une série dodécaphonique à travers la technique des *time-points*

Le *time-point system* permet selon le compositeur d'établir une correspondance plus naturelle, tout d'abord d'un point de vue perceptif, entre les opérations dodécaphoniques sur les hauteurs et sur les rythmes. À ces considérations, Babbitt ajoute une remarque concernant la combinatorialité qui, interprétée à l'intérieur du *time-point system*, permet de construire des agrégats temporels parfois extrêmement complexes, tels que les « canons rythmiques par inversion » [BABBITT 1962, 170][65].

1.4.6 Vers le concept de théorie de la musique

Cette brève présentation du double modèle rythmique de Babbitt nous permet de mettre encore mieux en évidence l'importance de la formalisation théorique dans la pensée compositionnelle de Milton Babbitt. En conclusion de ce bref parcours introductif sur certains de ses outils conceptuels, nous pouvons revenir à quelques questions plus générales autour du concept même de théorie de la musique et de ses articulations avec la pensée analytique et compositionnelle. Cette question est largement débattue par le compositeur dans un écrit dans lequel on peut également suivre le processus qui conduira, quelques années plus tard, à la constitution de la théorie de la musique en tant que discipline universitaire. Dans cet écrit, Babbitt oscille encore entre l'emploi du terme « théorie musicale » [*musical theory*], « théorie

---

[64] En outre, comme le souligne Andrew Mead, Babbitt s'offre la possibilité de répéter un élément particulier d'une série de hauteurs le nombre de fois souhaité avant de passer à l'élément suivant. Par conséquent, *« les séries dodécaphoniques de time-points n'ont pas de durée maximale. Néanmoins, elles ont une durée minimale qui est la somme des intervalles temporels entre les éléments adjacents d'une série* » [MEAD 1994, 46].

[65] Cet exemple a une remarquable affinité avec certaines idées que nous allons discuter dans la troisième partie, en particulier autour de la notion de « canon rythmique de pavage ». Il s'agit d'un canon qui réalise aussi un agrégat, dans un point de vue rythmique, mais avec des propriétés qui relèvent d'une autre correspondance algébrique entre l'univers des hauteurs et celui des rythmes.

de la musique » [*theory of music*] et *music theory*, un terme qu'il introduit à la fin de l'article pour indiquer explicitement la discipline en train de se constituer sur le plan académique[66].

Tout d'abord Babbitt précise la fonction centrale de la « théorie musicale », à savoir celle de « rendre possible d'un côté l'étude de la structure des systèmes musicaux […] et la formulation des contraintes de ces systèmes dans une perspective compositionnelle […] mais aussi, comme étape préalable, une terminologie adéquate […] pour rendre possible et établir un modèle qui autorise des énoncés bien déterminés et vérifiables [testable][67] sur les œuvres musicales » [BABBITT 1965/1972, 10].

La question d'une terminologie appropriée pour toute entreprise scientifique, telle que Babbitt la pose à partir d'une citation de Quine[68], sert de prétexte pour ouvrir la question de la nécessité pour une théorie de la musique [*theory of music*] d'être soumise aux critères méthodologiques de l'activité scientifique. Cette question ne concerne pas la nature de la théorie musicale mais plutôt celle de la « *méthode et du langage scientifique dont le domaine d'application [qui] est telle que si on le peut pas l'étendre à la théorie musicale, alors la théorie musicale n'est pas une théorie au vrai sens du terme* » [BABBITT 1965/1972, 12].

Comme exemple de base de « construction théorique », Babbitt considère la notion d'intervalle. Il s'agit tout d'abord d'un concept issu d'une observation [*observation concept*], mais cette observation laisse la place à une formalisation qui fait de cette notion « *non seulement un concept mais une* ***construction théorique*** » [BABBITT 1965/1972, 15][69]. Ce

---

[66] Ces concepts sont difficiles à rendre en français. Néanmoins, l'articulation entre « théorie de la musique » et « théorie musicale » pourrait conduire à établir une troisième catégorie qui n'est pas prise en compte dans la tradition américaine. Il s'agit de ce que François Nicolas appelle « théorie musicienne », un concept de la pensée théorique en musique qui considère l'œuvre comme le point de départ de toute formalisation. Nous renvoyons à l'article présenté par le compositeur à l'occasion du Séminaire MaMuX de l'Ircam [NICOLAS 2003].

[67] On pourrait traduire « falsifiables » ou « réfutables », dans le sens introduit par Popper dans la *Logique de la découverte scientifique* [POPPER 1934] vu la proximité de certaines positions de Babbitt sur la science avec la tradition analytique du cercle de Vienne. Mais Popper n'a probablement pas eu sur la pensée de Babbitt l'influence qu'a pu avoir la lecture et la fréquentation de philosophes tels que Rudolf Carnap, Nelson Goodman ou Willard Van Orman Quine. La proximité avec la pensée de l'auteur de la *Construction logique du monde* est particulièrement évidente dans ce passage : *« Il n'y a qu'un type de langage, qu'un type de méthode pour la formulation verbale des "concepts" et l'analyse verbale de ces ses formulations : le langage et la méthode "scientifiques"* » [BABBITT 1961/1972, 3]. En réalité, la position « philosophique » de Babbitt n'est que superficiellement proche de celle de Rudolf Carnap. Le logicisme comme seul critère pour structurer le monde ne pouvait pas suffire pour un théoricien de la musique ayant trouvé dans l'algèbre la discipline sur laquelle la théorie de la musique pouvait se fonder. La relecture des thèses du philosophe allemand par Gilles-Gaston Granger pourrait aider à mieux comprendre la distance conceptuelle qui sépare le logicisme de Carnap de la pensée théorique de Babbitt. Voir à ce propos le seizième chapitre de l'ouvrage *Formes, opérations, objets* intitulé « Le problème de la *Construction logique du monde* » [GRANGER 1994, 297-326].

[68] *« Moins une science est avancée, plus sa terminologie tend à se fonder sur une présomption peu critique d'une compréhension mutuelle* » [QUINE 1960].

[69] C'est nous qui soulignons. On peut affirmer que ce concept théorique occupe une place centrale dans les méthodes algébriques en musique et musicologie, aussi bien d'un point de vue analytique que compositionnel.

type de réflexion, dont la notion d'intervalle est l'exemple paradigmatique, s'inscrit dans une démarche qui considère composition et théorie musicale comme deux concepts à la base de la notion d'« intellectualité » en musique[70]. C'est le message qu'on peut tirer de la leçon inaugurale pour la formation doctorale en musique de la City University de New York [BABBITT 1972]. Dans cet écrit Babbitt considère la théorie de la musique comme une composante de ce qui deviendra « l'histoire intellectuelle » du XX^e siècle, au moins en ce qui concerne la tradition américaine. Cette remarque semble bien s'adapter à la réflexion que nous avons essayé de mener à partir d'un parallèle entre l'évolution de la pensée structurale en mathématiques et la naissance et la cristallisation, en Europe et surtout aux Etats-Unis, d'une musicologie systématique. Il s'agit d'une tendance de la musicologie qui ne s'est pas imposée en Europe avec les caractères institutionnels de la tradition américaine, mais qu'on retrouve, à partir des années soixante, chez un compositeur parmi les plus représentatifs de l'approche algébrique en musique : Iannis Xenakis.

1.5 Iannis Xenakis : théorie des cribles et formalisation algébrique[71]

Bien qu'apparemment très loin des préoccupations sérielles de Milton Babbitt, la pensée théorique de Iannis Xenakis a, dès ses débuts, plusieurs points de contact avec celle du théoricien américain. Comme pour Milton Babbitt, le point de départ de la réflexion théorique de Iannis Xenakis est le dodécaphonisme et, plus précisément, la musique sérielle, dont il met en évidence les nombreuses contradictions par rapport à la notion de polyphonie linéaire.

Les deux autres compositeurs qui constituent, avec Babbitt, ce qu'on a appelé une « Trinité de compositeurs/théoriciens » en ce qui concerne les méthodes algébriques en musique et musicologie du XX^e siècle, à savoir Anatol Vieru et Iannis Xenakis, ont pris comme point de départ de leurs constructions théoriques la notion d'intervalle. Le traité théorique d'Anatol Vieru, *Cartea Modurilor* [VIERU 1980] est un effort, comme le sous-titre l'indique, d'établir un « modèle de la pensée intervallique ». De même, la théorie des cribles de Iannis Xenakis, en tant que généralisation de la théorie traditionnelle des gammes et des rythmes, est une élaboration théorique qui prend comme point de départ la structure de groupe sur l'ensemble des intervalles. D'un point de vue analytique, la *Set Theory* d'Allen Forte et, encore plus, la théorie transformationnelle de David Lewin, avec le concept de Système d'Intervalles Généralisées (GIS), sont des élaborations théoriques parfois extrêmement complexes autour de l'idée centrale d'intervalle musical. L'exemple choisit par Babbitt, semble donc très pertinent pour montrer les différents niveaux d'articulation entre une théorie de la musique de nature algébrique et ses applications à la fois analytiques et compositionnelles.

[70] De ce point de vue, les préoccupations du compositeur et théoricien américain anticipe certains éléments de ce que François Nicolas appelle l'« intellectualité musicale » [NICOLAS 1991].

[71] Ce chapitre développe une communication intitulée « De la généralisation comme catégorie théorique et compositionnelle chez Iannis Xenakis ou l'au-delà de la musique symbolique » présentée à l'occasion de la journée d'étude sur le formalisable et le non formalisable en musique (La théorie et l'œuvre de Iannis Xenakis : Séminaire Mathématiques/Musique et relations avec d'autre disciplines, Ircam, 27 avril 2002). La journée d'étude, organisée en collaboration avec la Fondation Calouste Gulbenkian et *l'Institute for Fundamental Research* in Music de l'Université de Zürich, avait rassemblé de nombreux théoriciens et musicologues intéressés par les problèmes de la formalisation en musique. Les discussions avec Agostino Di Scipio, Benoît

Dans la conception de Xenakis, *la « série […] procède d'une "catégorie" linéaire de la pensée* » [XENAKIS 1955/1994, 120] et la complexité engendrée par l'application de ces principes à d'autres paramètres que les hauteurs pousse naturellement le compositeur sériel vers une organisation statistique de l'espace musical.

Nous avons vu comment la conception du dodécaphonisme de Babbitt vise notamment à surmonter le caractère linéaire de la pensée sérielle traditionnelle, au point que le terme même de « série » est remplacé par un concept, celui d'ensemble, qui ne contient plus aucune référence à l'ordre des éléments qui le compose. Les deux combinatoires ne sont qu'apparemment très lointaines, celle de Babbitt étant basée sur les structures algébriques de groupe et celle de Xenakis étant immergée dans un univers probabiliste. En réalité, la pensée théorique de Xenakis s'ouvre dès le début des années soixante à des considérations ensemblistes et algébriques qui représentent, dans notre lecture, l'une des contributions plus marquantes en ce qui concerne les méthodes algébriques en musique et musicologie.

L'articulation entre réflexion théorique, application analytique et démarche compositionnelle est, comme dans le cas du théoricien américain, un souci constant dans les écrits de Xenakis. Notre analyse cherche à suivre, comme pour Babbitt, l'émergence du concept de *structure algébrique* en musique et à décrire les outils conceptuels que le compositeur a proposés dans son parcours théorique. On retrouve les premières traces d'une pensée algébrique au début des années soixante dans un article qui est pourtant resté en marge des préoccupations des commentateurs de l'œuvre de Xenakis.

> « *La musique peut […] être définie comme une organisation d'***opération***s et de* **relation***s élémentaires entre des êtres ou entre des fonctions d'êtres sonores. Nous comprenons la place de choix qui revient à la* **théorie des ensembles***, non seulement pour la* **construction** *d'œuvres nouvelles, mais aussi pour l'***analyse** *et la meilleure compréhension des œuvres du passé. Ainsi, même une construction stochastique ou une investigation de l'histoire à l'aide de la stochastique ne peuvent être exploitées sans l'aide de la reine des sciences et même des arts, dirais-je, qu'est la logique ou sa forme mathématique l'***algèbre** » *[XENAKIS 1961][72].*

La proximité entre la réflexion de Xenakis et la pensée théorique de Babbitt est remarquable, si l'on considère l'insistance avec laquelle le théoricien américain parle du caractère à la fois ensembliste et algébrique des structures musicales. Comme dans le cas de Babbitt, Xenakis postule, dans ses écrits, une articulation de la pensée compositionnelle et de

---

Gibson, Stéphan Schaub et Makis Solomos ont beaucoup influencé l'élaboration de la communication dans la forme présente.

la pratique analytique, articulation qui repose sur la nature abstraite des mathématiques modernes. Cette réflexion commence à trouver une place bien définie dans *Musiques formelles* [XENAKIS 1963/1981], ouvrage dans lequel la recherche sur les « nouveaux principes formels de composition musicale » est étroitement liée aux concepts d'abstraction et de formalisation en mathématiques. Cependant, comme Xenakis l'explique dans l'avant-propos :

> « *Ce n'est pas tellement l'emploi fatal des mathématiques qui caractérise l'attitude de ces recherches, [mais] c'est surtout le besoin de considérer les sons, la musique, comme un vaste réservoir […] de moyens nouveaux, dans lesquels la connaissance* ***des lois de la pensée***[73] *et les créations structurées de la pensée peuvent trouver un médium de matérialisation (=communication) absolument nouveau* » *[XENAKIS 1963/1981, 9].*

Ces « créations structurées de la pensée » concernent directement le processus d' » algébrisation » [XENAKIS 1963/1981, 10] qui conduit, à travers l'axiomatisation hilbertienne, à la définition d'une catégorie nouvelle dans la pensée musicale contemporaine : celle de « musique symbolique ». En effet, selon le compositeur, « *la formalisation et l'axiomatisation constituent […] un guide processionnel plus adapté à la pensée moderne en général* » [XENAKIS 1963/1981, 212], une position qui est tout à fait proche de celle défendue à la même époque par Milton Babbitt[74].

La notion centrale autour de laquelle Xenakis envisage la démarche axiomatique est, comme dans le cas de Babbitt, celle d'intervalle ; cependant, à la différence du théoricien américain, Xenakis n'a pas besoin d'introduire comme concept de base pour une telle définition celui de congruence modulo 12. Le tempérament égal est, dans la conception de Xenakis, un cas particulier d'un phénomène beaucoup plus général qui concerne également d'autres dimensions comme les intensités et les durées[75]. Ces notions apparemment différentes sont unifiées, selon Xenakis, autour de la structure de *groupe additif abélien*

---

[72] C'est nous qui soulignons. Ce passage est cité dans un entretien de Daniel Durney et Dominique Jameux avec le compositeur [DURNEY et JAMEUX 1970].

[73] C'est nous qui soulignons une référence explicite à l'ouvrage *Les lois de la pensée* [BOOLE 1854] de George Boole, mathématicien qui semble avoir eu une grande influence sur l'élaboration du concept de musique symbolique par Xenakis. Pour ce sujet, voir en particulier la discussion sur les fonctions booléennes dans le chapitre 5 de *Musiques formelles* [XENAKIS 1963/1981].

[74] Voir, en particulier, la réflexion de Babbitt sur le rapport entre langage scientifique et théorie de la musique dans l'écrit « The Structure and the Function of Music Theory » [BABBITT 1965/1972].

[75] Cela explique aussi pourquoi la théorie des cribles, telle que Xenakis l'élabore quelques années plus tard, a une portée beaucoup plus générale que la théorie des intervalles chez Babbitt. Elle permet de représenter, à l'aide d'opérations ensemblistes, les structures de hauteurs traditionnelles, mais elle offre en même temps la possibilité de formaliser d'autres structures, comme les gammes micro-tonales ou celles non-octaviantes. On analysera cette approche dans la suite de cette section en montrant également comment l'intuition babbittienne d'un

[XENAKIS 1963/1971, 190]. Cependant, pour une analyse détaillée de la structure de groupe en musique et musicologie, il faut attendre un écrit postérieur dans lequel le compositeur envisage plusieurs démarches axiomatiques de la notion d'intervalle.

Comme chez Babbitt, l'intervalle a, selon Xenakis, une double nature dont les théoriciens n'ont pas encore une pleine « *conscience épistémologique* » [XENAKIS 1965, 69]. Une première nature relève du concept mathématique d'*ordre total*[76]. Ce concept permet d'établir une première axiomatique d'une gamme musicale qui n'est rien d'autre que la traduction, en musique, de la formalisation de Peano des nombres entiers. Cette axiomatique se fonde sur trois concepts premiers (l'origine, une note et la relation « successeur de ») et sur les cinq axiomes. Les quatre premiers axiomes se laissent traduire musicalement d'une façon très simple :

1. L'origine est une note
2. Le successeur d'une note est une note
3. Le successeur d'une note est unique[77]
4. Aucune note n'admet l'origine comme successeur

Le cinquième axiome, qui concerne le *principe d'induction*, est défini de la façon suivante :

5. Si une propriété appartient à l'origine et si, lorsqu'elle appartient à une note quelconque, elle appartient aussi à son successeur, alors elle appartient à toutes les notes[78].

---

isomorphisme entre domaine des hauteurs et domaine rythmique trouve dans la théorie des cribles un moyen d'expression nouveau.

[76] Nous avons déjà défini le concept de structure d'ordre chez Babbitt avec la relation « < ». Une structure d'ordre total est telle que pour tout élément a et b de l'ensemble, soit $a<b$ soit $b<a$. Tel est le cas, par exemple, de l'ensemble des nombres naturels **N**, des nombres entiers relatifs **Z**, des nombres rationnels **Q** ou de nombres réels **R** avec la relation « < » d'inférieur ou égal. Une théorie générale des relations d'ordre en musique n'a jamais été abordée par le compositeur, bien qu'il ait pourtant mentionné une généralisation possible de certains résultats à l'aide de structures d'ordres partiels, comme les arbres et les réseaux. À la différence de la version originale en français, l'édition anglaise de la thèse de doctorat d'état *Arts/Sciences Alliages* contient un passage extrêmement significatif à cet égard : *« La théorie des cribles est très générale et par voie de conséquence on peut l'appliquer à toute caractéristique qui est pourvue d'une structure d'ordre total, comme les intensités, les attaques, les densités, les degrés d'ordre, la vitesse, etc. […]. De plus, dans le futur immédiat nous assisterons à l'exploration de cette théorie et ses multiples utilisations à l'aide d'ordinateurs, car elle est complètement implémentable. À partir de cela, comme étape successive, il y aura une étude de structures partiellement ordonnées, comme celles qu'on peut trouver dans la classification des timbres, par exemple, à travers des treillis ou des techniques de réseaux* » [XENAKIS 1985, 108]. L'histoire semble avoir donné raison à Xenakis, vu le développement dans la dernière décennie des grammaires formelles appliquées à la musique. Voir, en particulier, la thèse de Marc Chemillier *Structure et méthode algébriques en informatique musicale* [CHEMILLIER 1990].

[77] Xenakis exprime le même concept d'une façon différente, en disant que « *plusieurs notes ne peuvent pas avoir le même successeur* » [XENAKIS 1965/1994, 70].

[78] On peut se demander quelle est, dans les intentions de Xenakis, la portée du principe d'induction par rapport au problème de formalisation de la gamme musicale. En fait, le compositeur était conscient de la nécessité d'attacher à la note d'autres composantes que sa simple position comme hauteur dans une structure ordonnée. C'est ainsi qu'il est conduit naturellement vers des structures d'*espaces vectoriels* à trois dimensions, l'une en correspondance de l'ensemble des intervalles et les deux autres relevant des intervalles d'intensité et de temps.

Cependant, au-delà de la structure d'ordre, il y a dans l'espace des hauteurs (ou, plus précisément, dans l'espace des intervalles mélodiques) une propriété de nature *algébrique* qui conduit à une approche axiomatique différente. Selon Xenakis, cette propriété permet d'obtenir une « *formulation universelle en ce qui concerne la perception des hauteurs* » [XENAKIS 1965/1994, 69]. Il s'agit de la structure de groupe, une propriété qui, selon Xenakis, « *n'est pas spécifique aux hauteurs, mais également aux durées, aux intensités, aux densités et à d'autres caractères des sons ou de la musique* » [XENAKIS 1965/1994, 70]. La « théorie des cribles », qui est esquissée dans cet écrit pour la première fois, offre au compositeur l'outil algébrique idéal pour discuter cette « *profonde identité de structure de nombreux caractères du son* » [XENAKIS 1965/1994, 70]. Nous ne rentrerons pas dans l'axiomatique proposée par Xenakis, car il s'agit fondamentalement de la même axiomatique que celle de Peano mais avec des termes premiers différents. Nous préférons plutôt partir des considérations de Xenakis pour fournir quelques exemples nouveaux qui montrent bien la portée à la fois théorique et musicologique d'une telle démarche.

Comme son nom l'indique, la théorie des cribles permet d'opérer une sélection sur un ensemble donné [79]. Cette sélection s'appuie sur les opérations ensemblistes classiques comme l'union, l'intersection et le complémentaire (ou bien, dans la terminologie de Xenakis, la disjonction, la conjonction et la négation)[80]. Pour rendre opérationnel le processus de sélection ensembliste, il faut préciser la nature de l'espace qu'on veut « cribler ». Xenakis utilise comme espace-support de sa théorie des cribles l'ensemble **Z** des nombres entiers relatifs, une structure qu'on peut représenter de la façon suivante[81] :

Nous reviendrons dans la suite de ce premier chapitre sur cette notion mathématique qui a trouvé récemment une place dans la théorie de la musique à travers la structure de *module*, qu'on peut considérer comme un cas général d'espace vectoriel [MAZZOLA 1990].

[79] L'une des premières utilisations du concept de « crible » est le célèbre processus attribué à Eratosthène de Cyrène pour le calcul des nombres premiers. Le crible d'Eratosthène consiste à « cribler » l'axe des entiers naturels en enlevant, au fur et à mesure, tous les multiples de 2, de 3 et des nombres qui restent (dans l'ordre) à chaque pas. Les nombres desquels on part pour faire un tel criblage sont ainsi des nombres premiers, car ils ne sont jamais égaux à un multiple d'un nombre plus petit (c'est-à-dire ils n'ont pas de diviseurs propres).

[80] L'élaboration de la théorie des cribles exprime assez bien l'influence que la pensée de George Boole a eue sur le compositeur. Nous rappelons que l'*union* des deux ensembles A et B est l'ensemble $A\cup B$ des éléments qui appartiennent à A ou à B tandis que l'intersection $A\cap B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B. Si l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B on peut définir la complémentaire de A comme l'ensemble de tous les éléments de B qui n'appartiennent pas à A. Cet ensemble sera noté A^c. Xenakis se limite à ces trois opérations ensemblistes mais on pourrait aisément considérer d'autres opérations telles que la différence et la différence symétrique. Pour une application de la théorie des cribles incluant ces deux autres opérations, voir l'article intitulé « Duration structure generation and recognition in music writing » [AMIOT *et al*. 1986]

[81] Il faut souligner que le compositeur ne choisit pas toujours la même notation pour indiquer l'espace-support. Par exemple, la notation introduite dans [XENAKIS 1965] contraste avec celle de [XENAKIS 1971], [XENAKIS 1988] et aussi de [XENAKIS 1992]. La notation utilisée dans ces trois dernières études semble avoir

$\mathbf{1_0} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Le symbole $\mathbf{1_0}$ signifie qu'on choisi une origine, dans ce cas le 0, et l'on se déplace (à droite et à gauche) sur une droite orientée par pas d'une unité. En associant à l'origine 0 une note de référence (par exemple le Do4) et à l'unité minimale un intervalle tempéré (par exemple le demi-ton), on peut exprimer toute gamme musicale traditionnelle à l'aide d'opérations ensemblistes sur des éléments génériques $\boldsymbol{a_b}$ où *a* représente le *modulo* ou nombre d'unités minimales et *b* représente la nouvelle origine[82]. Avec la convention précédente, l'ensemble $\mathbf{1_0}$ indique la gamme chromatique (infinie) dans le tempérament égal, gamme qui admet le *do* du milieu du piano (Do4) comme note de référence :

Figure 14 : Représentation musicale de l'ensemble $\mathbf{1_0}$

Pour représenter, par exemple, la gamme par tons à partir de la même note Do4, il suffit de considérer le crible $\mathbf{2_0}$ comme le montre la figure suivante :

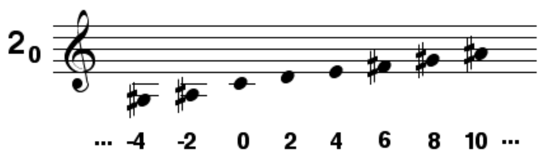


Figure 15 : La gamme par tons entiers

En changeant d'une unité l'origine, on obtient le nouveau crible $\mathbf{2_1}$ qui représente une gamme par tons mais à partir du Do#[83]

Figure 16 : La gamme par tons à partir du Do#

Le total chromatique $\mathbf{1_0}$ peut également être interprété comme l'union ensembliste de la gamme par ton $\mathbf{2_0}$ et de la même gamme mais à partir du Do#, ce qui peut s'écrire,

---

été adoptée par la plupart des commentateurs des théories xenakiennes, raison pour laquelle nous l'adopterons aussi.

[82] Formellement, on peut exprimer l' « élément générique » $\boldsymbol{a_b}$ à l'aide de la notion de *congruence* déjà introduite dans la présentation des outils algébriques chez Babbitt. Le crible $\boldsymbol{a_b}$ est défini par l'ensemble des entiers relatifs qui sont congruents à *b* modulo *a*.

formellement, avec l'expression logique $\mathbf{2_0} \cup \mathbf{2_1}$. Les deux cribles sont, en effet, complémentaires l'un de l'autre, ce qui peut s'exprimer également en disant que leur intersection est vide[84].

Nous avons ainsi tous les outils pour aborder une étude détaillée de certaines structures musicales à travers la théorie de cribles. On se concentrera, en particulier, sur une famille à laquelle le compositeur se réfère souvent pour montrer la généralité de cet outil technique : la famille des modes à transposition limitée de Messiaen[85].

1.5.1 Modes à transpositions limitées et théorie des cribles

Formellement, un mode à transposition limitée est un ensemble d'entiers de classes de hauteurs A pour lequel si l'on note T_m la transposition d'un nombre m de demi-tons différents de l'octave, on a la relation suivante : $T_m(A)=A$. Autrement dit, la transposition de l'ensemble coïncide avec le même ensemble au moins pour une valeur de transposition[86].

Notons que la réduction de l'octave modulo 12, qui définit une structure de groupe cyclique dans le tempérament égal, est une propriété implicite dans le concept de mode à transposition limitée tel que Messiaen le caractérise. La seule différence par rapport au concept théorique élaboré par le compositeur français relève du fait que nous ne posons aucune limitation sur le nombre de notes, tandis que Messiaen ne considère que des modes ayant au moins 6 éléments. Le problème est donc d'ordre musicologique plus que théorique car il touche à la définition même du concept de *mode*. Nous considérons cette notion dans un sens très large, comme suggéré par Anatol Vieru, qui inclut dans son ouvrage théorique

---

[83] Notons que les cribles $\mathbf{2_0}$, $\mathbf{2_2}$, $\mathbf{2_{2n}}$ correspondent tous au même sous-ensemble infini de $\mathbf{Z}$.

[84] C'est-à-dire $\mathbf{2_0} \cap \mathbf{2_1}=\varnothing$ ou bien que $(\mathbf{2_0})^c=\mathbf{2_1}$ et $(\mathbf{2_1})^c=\mathbf{2_0}$.

[85] Nous reviendrons plusieurs fois sur ce concept théorique que Messiaen a élaboré au début des années quarante et qu'on retrouve, formalisé d'une façon différente, chez d'autres théoriciens de la musique, et en particulier chez Anatol Vieru, duquel nous allons bientôt examiner les propositions théoriques majeures. Si l'on en croit ce que Xenakis écrit dans *Formalized Music*, la théorie des cribles aurait dû fournir une nouvelle interprétation des modes à transposition limitée de Messiaen [XENAKIS 1992, 377]. Cependant, le compositeur n'a jamais publié, à notre connaissance, le document auquel il se réfère. Le problème de représenter tout mode à transposition limitée de Messiaen en termes de cribles a été étudié par le compositeur et théoricien français André Riotte qui est l'un des représentants majeurs, en France, de l'approche algébrique en musique et musicologie. Cependant, le catalogue des modes à transposition limitée de Messiaen n'étant pas exhaustif [MAZZOLA 1990, 98], il nous semble important de donner ainsi le catalogue complet de tout mode ayant cette propriété à travers le formalisme proposé par Xenakis. Nous reviendrons sur les propriétés algébriques d'une telle structure dans l'analyse de la théorie modale du compositeur roumain Anatol Vieru et dans la généralisation au domaine rythmique proposée par le mathématicien Dan Tudor Vuza. Nous avons proposé récemment un regard théorique sur les modes à transposition limitée de Messiaen à partir de leur utilisation par le compositeur indien Param Vir dans l'opéra *Ion* [ANDREATTA 2003a].

l’étude des propriétés de certaines structures modales « défectives », ayant jusqu’à trois éléments.

De ce point de vue, l’exemple le plus simple de mode à transposition limitée, dans le tempérament classique, est constitué par deux notes à distance de triton. Dans le formalisme de Xenakis, une telle structure s’exprime par le crible $\mathbf{6_0}$. De même, le mode à transposition limitée ayant trois notes à distance d’une tierce majeure, s’exprime un utilisant un seul crible $\mathbf{4_0}$. Il existe trois modes à transposition limitée ayant quatre éléments. Un premier mode, formé par une superposition d’intervalles de tierce mineure, s’exprime à travers le crible simple $\mathbf{3_0}$. Les deux autres modes sont obtenus en considérant l’union ensembliste de deux intervalles de triton respectivement à la distance d’une seconde mineure et d’une seconde majeure. Leur expression en termes de cribles sont donc, respectivement : $\mathbf{6_0}\cup\mathbf{6_1}$ et $\mathbf{6_0} \cup \mathbf{6_2}$. La figure suivante montre ces deux cribles dans leur représentation musicale traditionnelle :

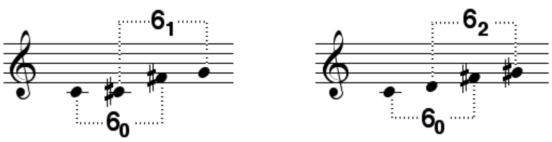


Figure 17 : Les deux cribles $6_0\cup 6_1$ et $6_0 \cup 6_2$ et leurs modes à transposition limitée associés

Dans les modes à transposition limitée ayant six éléments, Messiaen considère uniquement la gamme par tons entiers $\mathbf{2_0}$ et une gamme formée par l’union ensembliste de trois intervalles de triton à la distance d’une seconde mineure et d’une quarte juste, c’est-à-dire la gamme exprimée par le crible : $\mathbf{6_0} \cup \mathbf{6_1} \cup \mathbf{6_5}$. Cette dernière échelle est représentée par la figure suivante :

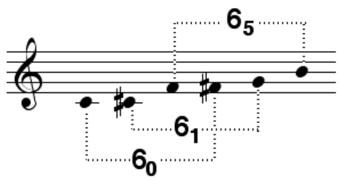


Figure 18 : Le cinquième mode de Messiaen ou mode représenté par le crible $6_0 \cup 6_1 \cup 6_5$

[86] La définition précédente s’exprime en langage algébrique en disant qu’un mode à transposition limitée est un sous-ensemble « périodique » du groupe cyclique **Z/nZ**, c’est-à-dire un sous-ensemble *A* pour lequel, si l’on note T_m la transposition de *m* demi-tons (avec *m* différent de 0 modulo 12), on a la relation suivante : $T_m(A)=A$.

On peut donc compléter le catalogue des modes à transposition de Messiaen ayant six éléments en ajoutant trois autres modes. Le premier mode « oublié » est donné par l'union ensembliste de deux accords augmentés à distance de demi-ton. Ce mode qui peut être représenté avec le crible $\mathbf{4_0} \cup \mathbf{4_1}$ est donné par la figure suivante :

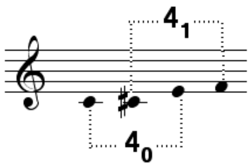


Figure 19 : le mode à transposition limitée $4_0 \cup 4_1$ dans sa représentation musicale

Les deux autres modes de six éléments que Messiaen n'a pas inclus dans son catalogue sont deux modes très intéressants, car ils sont l'inverse l'un de l'autre. Le premier est donné par l'union ensembliste de trois intervalles de triton à la distance d'une seconde mineure et d'une tierce mineure. Il s'écrit donc dans la forme : $\mathbf{6_0} \cup \mathbf{6_1} \cup \mathbf{6_3}$. Son « inverse » est donné par l'union ensembliste de trois intervalles de triton à la distance d'une tierce mineure et d'une quarte juste. Il s'écrit donc dans la forme : $\mathbf{6_0} \cup \mathbf{6_3} \cup \mathbf{6_5}$. Les deux modes sont représentés par la figure suivante :

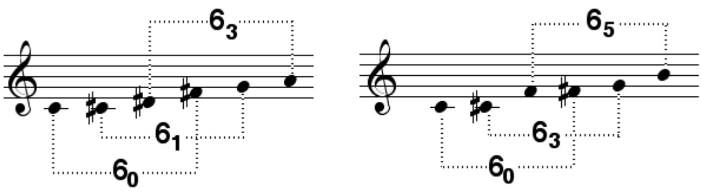


Figure 20 : Deux modes à transpositions limitée mutuellement inverses

Les autres modes à transposition limitée permettant d'obtenir un catalogue complet sont ceux répertoriés par Messiaen. Tout d'abord le deuxième mode ou gamme octotonique, qu'on peut formaliser en termes de crible comme l'union ensembliste de deux tétracordes diminués à distance d'un demi-ton. Cette gamme est représentée par la figure suivante[87] :

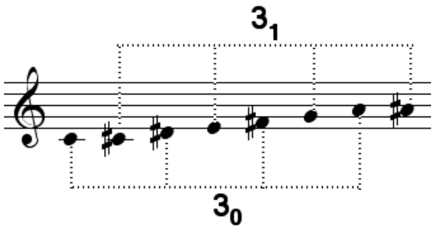


Figure 21 : La gamme octotonique ou crible $3_0 \cup 3_1$

[87] Notons que la gamme octotonique pourrait se représenter comme le crible $(\mathbf{3_2})^c$, ce qui indique qu'elle est le complément du tétracorde diminué.

Par analogie, on peut formaliser le troisième mode à transposition limitée de Messiaen comme une union de trois accords augmentés, précisément $\mathbf{4_0}$, $\mathbf{4_2}$ et $\mathbf{4_3}$, comme représenté par la figure suivante[88] :

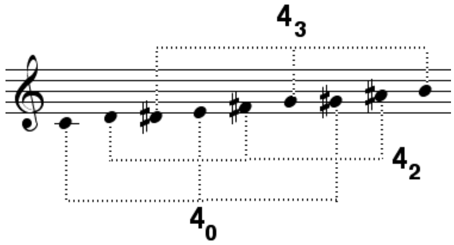


Figure 22 : Le troisième mode ou $4_0 \cup 4_2 \cup 4_3$

Le quatrième mode de Messiaen est le premier mode de huit éléments du catalogue qui admet six transpositions possibles[89]. Il est aussi le premier pour lequel il faut utiliser des modules différents afin de l'exprimer sur la forme d'une union ensembliste de cribles élémentaires. André Riotte [RIOTTE 1992, 92] propose de le représenter dans les deux formes équivalentes : $\mathbf{6_0} \cup \mathbf{6_1} \cup \mathbf{3_2}$ ou bien $(\mathbf{6_3} \cup \mathbf{6_4})^c$. La figure suivante montre le mode dans sa représentation musicale :

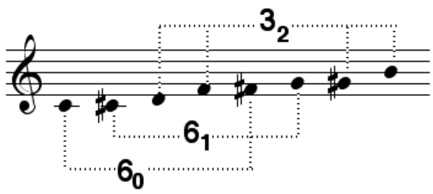


Figure 23 : Le quatrième mode à transposition limitée

Nous avons déjà mentionné le cinquième mode constitué par une union ensembliste de trois intervalles de triton. Ils ne restent que deux modes à formaliser. Le sixième mode est un « agrandissement » de la gamme par tons, à laquelle on a ajouté deux hauteurs à la distance de triton. Il peut également être vu comme le complémentaire de l'union ensembliste de deux

[88] Comme dans le cas précédent, la représentation du crible à travers son « complementaire » est plus économique. En fait, le mode peut s'écrire comme $(\mathbf{4_1})^c$, ce qui indique qu'elle est le complément de l'accord augmenté.

[89] Nous n'avons pas analysé ce concept qui est pourtant la motivation compositionnelle de la recherche théorique sur ces structures musicales de la part d'Olivier Messiaen. Comme Célestin Deliège le souligne, l'idée sous-jacente au concept de *charme des impossibilités* suggère *que « moins le mode comporte de transpositions possibles, plus il est intéressant* » [DELIEGE 2003, 29]. Ainsi la gamme par tons et le mode octotonique sont parmi les plus intéressants car ils n'admettent respectivement que deux et trois transpositions possibles. Messiaen inclus, dans ce calcul, la transposition T_0 de 0 demi-tons. Ainsi, la gamme par tons n'admet que les deux transpositions T_0 et T_1 car une transposition d'une seconde majeure de la gamme laisse inchangée la collection des hauteurs.

intervalles de triton à la distance d'une seconde majeure. La première représentation est donnée par la figure suivante :

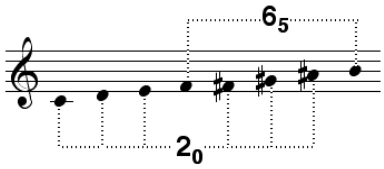


Figure 24 : Le sixième mode représenté avec les deux cribles $2_0 \cup 6_5$ ou bien $(6_1 \cup 6_3)^c$

Pour conclure[90], le septième mode ayant 10 éléments, le seul qui soit le complémentaire d'un intervalle de triton, précisément du crible $\mathbf{6_4}$. Il peut aussi être considéré comme un « agrandissement » de la gamme par tons, à laquelle on a ajouté deux intervalles de triton. Ce mode est représenté par la figure suivante :

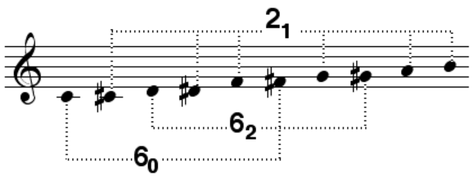


Figure 25 : Le crible $2_1 \cup 6_0 \cup 6_2$ ou $(6_4)^c$ est sa représentation musicale

Notons que les propriétés mathématiques d'un mode à transposition limitée sont beaucoup plus évidentes si l'on utilise la représentation circulaire et le concept de structure intervallique, deux idées qu'on ne retrouve pas chez Xenakis et sur lesquelles un compositeur comme Anatol Vieru a construit sa *théorie modale.* Avant de pouvoir entrer dans l'univers théorique de ce compositeur, nous allons compléter ce premier parcours de l'œuvre théorique de Xenakis en analysant comment la réflexion sur les hauteurs se transporte, comme dans le cas de Babbitt, au domaine du rythme. Cependant, à la différence de Babbitt, qui formalise et utilise ce modèle rythmique en composition déjà à partir de la deuxième moitié des années quarante, la réflexion théorique de Xenakis sur le temps ne se précise que dans les années quatre-vingt. Cela est assez surprenant car l'axiomatique hilbertienne, relue à travers la

[90] Au total, le catalogue exhaustif comprend donc seize modes à transposition limitée, si l'on inclut aussi le total chromatique $\mathbf{1_0}$. De même, on peut établir un catalogue exhaustif des modes à transposition limitée dans la division de l'octave en 24 quarts de tons. Le formalisme de la théorie des cribles reste inchangé, la seule différence étant la congruence modulaire qui sera calculée modulo 24. La combinatoire engendrée par le passage du groupe cyclique **Z/12Z** au groupe **Z/24Z** est cependant trop élevée pour permettre une utilisation efficace de la théorie des cribles dans l'établissement d'un catalogue exhaustif de ces structures musicales. Nous indiquerons dans la suite de cette étude comment le problème peut être envisagé en utilisant une véritable démarche algébrique qui reste, pour l'instant, en marge des préoccupations « ensemblistes » de la théorie des cribles.

psychologie génétique de Jean Piaget[91], avait permis au compositeur de dégager, dès les années soixante, une *algèbre temporelle* comme catégorie structurelle du temps métrique. Cependant, ce n'est que dans l'écrit sur le temps [XENAKIS 1988/1996] que Xenakis aborde le problème d'une axiomatisation des structures temporelles, fondement théorique qui justifie l'application de la théorie des cribles au niveau rythmique.

Notons que cette axiomatique engage la catégorie hors temps de la musique, autrement dit « *tout schéma temporel […] est une représentation hors temps du flux temporel dans lequel s'inscrivent les phénomènes, les entités* » [XENAKIS 1988/1996, 40][92]. L'axiomatique des structures temporelles engage une notion de séparabilité entre événements temporels qui peuvent ainsi « *être assimilés à des* ***points-repères*** *dans le flux du temps* » [XENAKIS 1988/1996, 41][93]. Une comparaison de ces points-repères conduit naturellement à la notion de distance qui devient opérationnelle, à travers les outils de la théorie des cribles, lorsqu'on identifie le crible $\mathbf{1_0}$ avec la notion la plus élémentaire du rythme : le rythme régulier. Comme dans le cas des hauteurs, à l'aide des trois opérations logiques de base (union, intersection, complémentarité), « *on peut construire […] des architectures rythmiques très complexes qui peuvent même aller jusqu'à la distribution simil-aléatoire de points sur une droite si la période est suffisamment longue* » [XENAKIS 1988/1996, 43].

Pour donner un exemple d'une telle architecture, nous revenons d'abord au domaine des hauteurs où cette même notion permet d'obtenir des gammes *non-octaviantes*, à savoir des structures dont la période n'est pas un multiple entier de l'octave. Un exemple d'une telle

---

[91] En particulier à travers l'étude de l'ouvrage *Le développement de la notion de temps chez l'enfant* [PIAGET 1946].

[92] Comme Xenakis l'avait souligné quelques années auparavant dans une note adressée à la *Revue Musicale*, la « typification de la musique », comme il appelle les deux catégories *hors temps* et *temporel,* postule *que « dans le "hors temps" est inclus le "temps" [et que] la temporelle est réduite à l'ordonnance* » [XENAKIS 1968a, 51]. Aux catégories de l'*hors temps* et de l'*en temps* (ou du *temporel*) on peut ajouter une troisième catégorie, celle du *temps logique*. Cette notion, qui a été introduite à partir de considérations plus générales sur l'informatique musicale et les langages de programmation [ASSAYAG 2000], se montre particulièrement pertinente dans une démarche de modélisation du processus compositionnel. Nous la discuterons dans la troisième partie en analysant l'utilisation, par Xenakis, des méthodes algébriques en composition, en particulier dans la pièce *Nomos Alpha* (1966) pour violoncelle solo. Pour une discussion sur l'articulation entre *hors temps*, *en temps* et *temps logique,* dans son évolution à partir de la pièce *Herma* (1960-61) jusqu'à *Nomos Alpha* voir notre article « Formal aspects of Iannis Xenakis's *Symbolic Music* : a computer-aided exploration of some compositional processes » [AGON *et al.* 2003].

[93] C'est nous qui soulignons. Les « points-repères » sont des attaques, ce qui montre la proximité de ce modèle théorique avec celui des *time-points* chez Milton Babbitt. La différence fondamentale relève du fait qu'il n'y a plus de primauté de l'octave, et donc du nombre 12, dans la démarche de Xenakis, ce qui fait de la théorie des cribles un outil théorique extrêmement puissant, non seulement pour la composition mais aussi pour l'analyse musicale. Nous reviendrons sur ce point dans la conclusion de cette section.

gamme est offert par l'un des cribles employés dans la pièce *Nomos Alpha* afin de gérer, selon les commentaires du compositeur, l'organisation des hauteurs[94].

La gamme que nous allons étudier dans sa structure de crible est constituée d'une série d'opérations logiques d'union, d'intersection et de complémentarité sur des cribles élémentaires ayant une périodicité de 11 et 13 unités. Les deux nombres étant premiers entre eux[95], le crible résultant aura une périodicité de 11×13=143 unités, ce qui ne correspond pas à un multiple de 12. Le crible, noté $\Lambda(11,13)$, peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\Lambda(11,13) = (A\cap B)\cup(C\cap D)\cup E$$

où :

$A = (\mathbf{13_3} \cup \mathbf{13_5} \cup \mathbf{13_7} \cup \mathbf{13_9})^c$

$B = \mathbf{11_2}$

$C = (\mathbf{11_4} \cup \mathbf{11_8})^c$

$D = \mathbf{13_9}$

$E = \mathbf{13_0} \cup \mathbf{13_1} \cup \mathbf{13_6}$.

La figure suivante montre la réalisation de la gamme une fois fixée une origine (par simplicité le Do4) et une unité minimale (par exemple le quart de ton)[96].

[94] Plusieurs analystes qui se sont penchés sur cette œuvre ont mis en évidence les contradictions entre le modèle abstrait du crible et l'application compositionnelle souvent très libre de la part du compositeur. La question est sans doute pertinente dans une analyse qui vise à montrer le degré de précision avec lequel Xenakis a appliqué un modèle formel dans ses œuvres. Cependant, une telle analyse n'est pas le but de cette étude qui vise à dégager des éléments théoriques de la pensée de Xenakis, plutôt que des résultats statistiques sur les écarts (conscients ou inconscients) entre modèle théorique et application compositionnelle. Cette dernière, comme on le verra dans la troisième partie, implique toujours un certain degré de « bricolage », pour reprendre un terme introduit par Lévy-Strauss dans la *Pensée sauvage* [LEVY-STRAUSS 1962]. Ce concept est, paraît-il, au cœur des préoccupations du compositeur quand il s'exprime ainsi : *« Une seule de mes œuvres, "S.T.", est issue de programmes informatiques. Toutes les autres sont du bricolage, au sens biologique : des ajustements que l'on ne peut contrôler dans leur tonalité.* » [XENAKIS 1980, 96-97]. Je remercie Marc Chemillier et Stéphan Schaub de m'avoir orienté vers cet aspect important de la pensée du compositeur.

[95] Deux nombres entiers sont premiers entre eux s'ils n'ont pas de diviseur commun, c'est-à-dire si leur PGCD (plus grand commun diviseur) est 1.

[96] Il s'agit donc d'une gamme micro-tonale et non-octaviante, ce qui montre clairement la distance qui sépare cette approche théorique de la formalisation des hauteurs chez Milton Babbitt et la tradition analytique américaine.

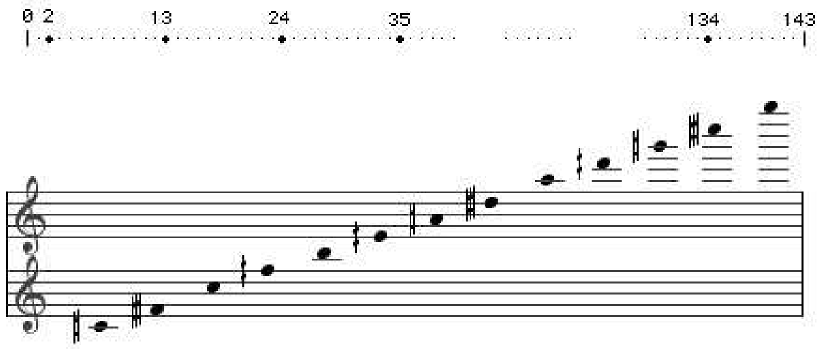


Figure 26 : Une réalisation musicale du crible $\Lambda(11,13)$

Le processus « ensembliste » est explicité par le diagramme suivant :

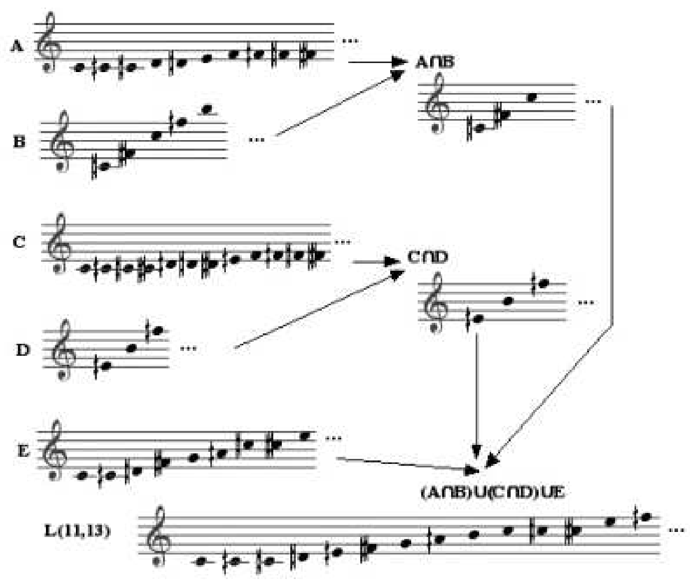


Figure 27 : Explicitation du processus « ensembliste » dans la construction de la gamme non octaviante

Si l'on interprète le crible au niveau rythmique, par exemple en choisissant comme durée minimale la triple croche, on obtient un pattern rythmique n'ayant pas de régularités locales. Ce pattern est montré sur la figure suivante :

Figure 28 : Une interprétation rythmique du crible Λ(11,13)

1.5.2 Vers une musicologie computationnelle

Avec la théorie des cribles, dont nous avons montré le double visage algébrique, aussi bien en ce qui concerne les hauteurs que les rythmes, Xenakis introduit dans la réflexion théorique en musique un outil particulièrement adapté à une démarche formelle dans l'analyse musicale et, en particulier, dans l'analyse musicale assistée par ordinateur. L'implémentation, comme le compositeur le souligne plusieurs fois dans ses écrits[97], devient alors une étape nécessaire pour une théorie qui est, à la base, éminemment *computationnelle.* C'est peut être à partir d'une application des outils issus de la théorie des cribles en analyse musicale assistée par ordinateur qu'on a pu envisager un *transfert* du caractère computationnel au domaine, plus général, de la musicologie. On peut donc affirmer que l'idée d'une *musicologie computationnelle* remonte aux recherches sur la modélisation informatique des partitions, telle qu'André Riotte et Marcel Mesnage l'ont introduite à partir des années quatre-vingt.

La contribution de Xenakis à l'établissement d'une telle démarche en musicologie a donc été fondamentale, d'autant plus que le compositeur n'a jamais renoncé à essayer d'analyser la portée véritablement musicologique de sa propre réflexion théorique. À partir en particulier de la deuxième moitié des années soixante, les références aux ramifications musicologiques de la formalisation algébrique semblent s'intensifier, sans doute grâce à la création de l'E.M.A.Mu (Equipe de Mathématique et d'Automatique Musicales). Reprendre les objectifs que cette équipe s'était donnés à l'acte de sa fondation, à la fin de 1967, est plus qu'une simple curiosité historique, surtout si l'on cherche à rapprocher le débat de celui que certains

[97] Les aspects algorithmiques de la théorie des cribles sont traités, en particulier, dans les chapitres XI et XII de *Formalized Music* [XENAKIS 1992]. Pour une perspective récente sur le sujet, voir l'article « Residue-Class Sets in the Music of Iannis Xenakis: An Analytical Algorithm and a General Intervallic Expression » [JONES 2001].

théoriciens de la musique, tels que Milton Babbitt, engageaient à la même époque aux Etats-Unis[98].

L'E.M.A.Mu se fonde « sur le postulat que seule l'association de la science (art) musicale avec celle des mathématiques, de l'informatique, de la technologie électronique, des sciences sociales etc. peut déterminer des **constantes universelles** applicables à l'interprétation du passé, au développement du présent et à l'orientation du futur » [XENAKIS 1968, 55][99].

Une conséquence de cette hypothèse est que « *l'on ne peut créer la musique […] sinon en s'appuyant sur des bases solides tirées des disciplines telles que les mathématiques, l'acoustique, l'électronique, la physique, la théorie des langages, la théorie musicale, la musicologie, l'ethnomusicologie, etc.* » [XENAKIS 1968, 56]. Olivier Revault d'Allonnes semble bien cerner ce point quand il affirme que « *la formalisation telle que la conçoit Xenakis est à la fois une condition de la musicologie scientifique et moderne, et une condition du renouvellement de la composition* » [REVAUL D'ALLONNES 1973, 20]. Il y a donc une relation étroite entre aspects théoriques, analytiques et compositionnels et cette relation passe, de façon naturelle, par la formalisation algébrique. Et si la réflexion sur le rapport entre musicologie historique et systématique avait permis, aux Etats-Unis, d'ouvrir un champ de recherche nouveau autour du concept de théorie de la musique, pour Xenakis ces deux branches de la musicologie sont destinées à se rejoindre, précisément « *en raison de l'universalité de la structure de groupe* » [XENAKIS 1965/1994, 73]. Une analyse des propositions théoriques avancées, presque à la même époque, par le compositeur roumain Anatol Vieru nous permettra de mieux préciser, d'un point de vue musicologique, certains aspects fondamentaux de l'approche algébrique.

1.6 Anatol Vieru : algèbre et théorie modale

À la différence des propositions théoriques de Milton Babbitt et de Iannis Xenakis, dont l'importance a été largement débattue, aussi bien d'un point de vue musicologique que compositionnel, les théories du compositeur et théoricien roumain Anatol Vieru (1926-1998)

[98] Il n'y a pas eu, à notre connaissance, de contacts directs entre Xenakis et Babbitt. Pourtant, les influences de la pensée de Xenakis sur la réflexion autour de la théorie de la musique aux Etats-Unis semblent assez importantes, comme le témoigne les efforts de publication d'articles de Xenakis dans les revues de musicologie américaines. Cependant, le discours pourrait aussi se renverser, car la période que Xenakis a passée dans l'Université d'Indiana à Bloomongton - couronnée par la publication en anglais de *Formalized Music* [XENAKIS 1971] - a sans doute aidé le compositeur à mieux expliciter certaines idées qui étaient restées *in nuce* dans ses écrits antérieurs.

[99] C'est nous qui soulignons.

restent, malheureusement, assez méconnues. Pourtant, s'il y a une formulation rigoureuse de certaines propriétés musicales du système tempéré, dans une perspective qui recherche explicitement les dialogues entre des approches théoriques et des démarches compositionnelles apparemment très différentes, c'est bien celle proposée par Antol Vieru qu'il faudrait retenir et cela pour plusieurs raisons.

1.6.1 Vers un modèle de la pensée intervallique

La théorie modale élaborée par le compositeur dès la moitié des années soixante offre d'abord un exemple remarquable de modèle algébrique de la pensée intervallique. Le fondement algébrique de cette approche, explicitement reconnu par l'auteur dès ses premiers écrits sur le sujet, est devenu encore plus évident grâce à la formalisation du mathématicien Dan Tudor Vuza, un travail qui, comme on le verra, a ouvert la théorie des modes à des applications compositionnelles tout à fait nouvelles. Dans le même temps, la formalisation a mis encore plus en évidence la proximité entre les principes théoriques élaborés par l'auteur du *Livre des Modes* et les techniques analytiques de la *Set Theory* américaine, à tel point qu'on peut se poser la question, comme le fait Vieru, du degré de « synonymie » entre les deux approches. L'intérêt du compositeur pour d'autres théories élaborées à partir d'une même démarche de type algébrique, aussi bien dans l'analyse que dans la composition, est amplement documenté, en particulier dans ses écrits les plus récents, dans lesquels Anatol Vieru jette un regard rétrospectif sur les fondements de sa démarche de théorisation. Un écrit en particulier, publié l'année de sa mort et resté inédit en français, permet de tracer les grandes étapes de cette aventure qui représente, comme celle de Iannis Xenakis et de Milton Babbitt, une des démarches les plus intéressantes en ce qui concerne les méthodes algébriques en musique et musicologie du XXe siècle[100]. Dans cet article, qui s'intitule « Rétrospective sur la théorie des modes », Anatol Vieru décrit les grandes étapes de la théorie modale telle qu'on la retrouve, systématisée, dans le traité *Cartea Modurilor* [Le livre des modes], publié en anglais dans une édition considérablement augmentée (*The Book of Modes*)[101].

---

[100] Je remercie Luana Stan et Mariana Unguranu pour l'aide indispensable dans la traduction en français de nombreux passages d'écrits du compositeur.

[101] Bien que la traduction anglaise *The Book of Modes* [VIERU 1993] présente de nombreux éléments d'ambiguïté, surtout stylistiques, par rapport à l'édition roumaine originaire, elle est particulièrement précieuse surtout pour la nouvelle partie intitulée *From Modes to Musical Time* et contenant la transposition de la théorie modale classique dans le domaine du rythme. Dans le quatrième chapitre, *Music and Mathematics*, Vieru fait aussi référence à la formalisation algébrique proposée par Dan Tudor Vuza. L'édition roumaine a cependant l'avantage de contenir une section en français (« Des modes, vers un modèle de la pensée musicale intervallique », pp. 191-204) dans laquelle le compositeur reprend les points essentiels de la théorie modale qu'il a développée en intégrant le calcul des différences finies qui est à la base de la technique des suites modales,

Comme le compositeur le souligne, à la base de la théorie des modes il y a l'idée du mode comme un « ***ensemble** de sons ordonnés de manière ascendante* » [VIERU 1998a, 47]. Le terme « ensemble », que nous avons souligné, est ici utilisé au sens mathématique, à savoir comme une collection d'objets qu'on peut transformer à l'aide, par exemple, des opérations « ensemblistes » utilisées par Xenakis dans sa théorie des cribles (union, intersection, complémentaire…). Ces opérations, selon Vieru, sont pertinentes du point de vue de la perception, car « *l'oreille musicale perçoit les éléments communs à deux modes et […] réunit spontanément deux modes ayant peu de sons dans un mode plus grand, contenant tous les sons des modes réunis* » [VIERU 1998a, 47].

Cependant, à la différence de Xenakis, qui voit dans les cribles un outils pour explorer des matériaux nouveaux (comme les gammes microtonales et non-octaviantes), Vieru est amené à reconsidérer certaines structures traditionnelles qui trouvent maintenant une justification nouvelle grâce à la démarche ensembliste. En particulier, la relation d'inclusion met en évidence l'intérêt à la fois théorique et compositionnel de certains modes ayant trois, quatre, cinq ou six éléments, par rapport à des structures apparemment bien plus complexes. Les modes ayant un petit nombre d'éléments, ou modes « pauvres » dans la terminologie de Vieru, ont un degré d'ambiguïté supérieur à d'autres modes. En effet, « *tandis que les modes riches ont la qualité d'inclure plusieurs modes pauvres, un mode pauvre a la qualité d'être inclus dans plusieurs modes riches* » [VIERU 1998a, 48]. Un mode pauvre possède donc une ambiguïté qui est due, tout d'abord, au nombre de sons qu'il contient, d'où une « réhabilitation », pour reprendre le titre d'un autre étude de Vieru, des configurations modales qui étaient considérées, traditionnellement, comme « défectives » [VIERU 1978][102]. Comme il le dira dans un autre écrit récent :

> « *Regardée comme un mode, toute série dodécaphonique est stérile ; sa réunion avec n'importe laquelle de ses transpositions produira toujours le même mode de 12 sons ; l'intersection (le nombre de notes communes) est elle aussi 12. Tout autre mode avec moins d'éléments a des possibilités plus riches. Sa transposition amènera presque toujours des sons nouveaux aussi (la seule exception étant les modes à transposition limitée). La réunion de deux tonalités produira un nombre variable d'éléments ; leur intersection est elle aussi variable, en fonction de l'intervalle auquel s'opère la transposition. Cette variété résultant des opérations modales représente un réservoir de possibilités expressives dont la technique sérielle se prive* » *[VIERU 1998b, 41].*

---

telle que nous allons l'aborder dans le troisième chapitre. Ce texte, tout comme le texte retrospectif sur la théorie des modes, sera donc le point de départ pour retracer une brève histoire de la démarche modale du compositeur et envisager l'analyse de quelques outils théoriques.

[102] La traduction anglaise de l'article, « The rehabilitation of the "defective" modes », a été publiée comme *Addenda* dans *The book of modes* [VIERU 1993, 137-141].

C'est ainsi qu'une technique compositionnelle comme celle de « partitionner » une série dodécaphonique dans ses sous-ensembles (en particulier de 3 et de 4 éléments), démarche qui commence à s'imposer avec Anton Webern mais qui est largement employée, comme on l'a vu, par Milton Babbitt, se trouve incluse naturellement dans la théorie modale. Le « modalisme » est donc un concept très large, capable à la fois de subsumer l'univers tonal et celui de la musique atonale[103].

Cependant, pour comprendre la portée théorique de la démarche modale proposée par Vieru, la perspective ensembliste s'avère insuffisante. Tel était déjà le sentiment du compositeur dans les années soixante et sans doute cela explique-t-il pourquoi le texte de 1966 n'a jamais été publié. Il était, selon l'auteur, « lacunaire » et cette lacune était une faiblesse structurelle, que le théoricien résume ainsi : « *[…] si les échelles ont vraiment un statut ensembliste, où sont les intervalles ? Quel est leur statut ?* » [VIERU 1998b, 47]. La réponse à cette question devient la base sur laquelle l'édifice de la théorie modale repose et, comme dans le cas de Babbitt et Xenakis, il s'agit d'une découverte qui voit le jour dans « *le laboratoire d'une pratique compositionnelle plus qu'à l'intérieur d'une activité purement théorique* » [VIERU 1998a, 49].

Pratique compositionnelle et formalisation, tout comme pour les deux compositeurs/théoriciens que nous avons déjà analysés, restent indissociables dans une démarche qui vise à établir un modèle général de la pensée modale intervallique. Ce modèle est fondé sur le statut algébrique de l'intervalle, comme Vieru le précise dans l'étude « Des modes vers un modèle de la pensée modale intervallique » [VIERU 1977]. Une élaboration ultérieure de cette étude donnera lieu à *Cartea Modurilor* [VIERU 1980], ouvrage publié quelques années plus tard et dans lequel l'approche algébrique permet de donner une première réponse à « *l'une des questions les plus spécifiques, délicates et mystérieuses de la musique : la dualité sons/intervalles* » [VIERU 1994b, 24]. Cette réponse, qui dans *Cartea Modurilor* est celle d'un compositeur fasciné par la formalisation mais pour lequel « *les mathématiques étaient une plante poussée spontanément de la terre de la musique* » [VIERU 1983], se précisera mieux dès qu'un mathématicien saura apporter à la démarche de Vieru toute la

103 Ce concept d'intégration est bien exprimé par le premier article du compositeur paru dans une revue américaine et intitulé, de façon très symbolique, « Modalism - A "Third World" » [VIERU 1985]. Cet article, qui représente une élaboration d'une conférence donnée par Vieru aux *Ferienkurses* de Darmstadt la même année, a commencé à attirer l'attention des théoriciens américains sur les théories, jusqu'à ce moment-là presque complètement inconnues, du compositeur roumain, tout en ouvrant la discussion sur les nombreux points de

rigueur des mathématiques modernes[104]. Cependant, avant de montrer dans quelle mesure la formalisation algébrique de Vuza modifie le modèle originaire, nous allons analyser quelques concepts majeurs de la théorie modale d'Anatol Vieru. Le premier aspect concerne la définition même de mode qui est radicalement différente de la définition « ensembliste » que nous avons rappelée précédemment :

« *Nous appelons mode tout ensemble de classes de résidus* » *[VIERU 1993, 192].*

Notons que, par rapport à la définition de 1966, le caractère « ascendant » plus un élément nécessaire pour la définition d'un mode. Autrement dit, un mode est tout d'abord un ensemble *non-ordonné*, c'est-à-dire un ensemble dans lequel seuls les éléments comptent, pas leur ordre ni leurs éventuelles répétitions. Les classes de résidus sont les éléments du groupe cyclique **Z/12Z**, que nous avions aussi indiqués comme « entiers de classes de hauteurs » dans la terminologie introduite par Milton Babbitt. On a donc un premier degré de ressemblance entre la notion de mode chez Vieru et le concept d'ensemble de classes de hauteurs [*pitch-class set*] au sens de la tradition analytique américaine.

Une première conséquence de la définition d'un mode comme un « ensemble de classes de résidus » concerne la possibilité de représenter tout mode à l'aide d'un cadran d'horloge. Nous reviendrons dans le deuxième chapitre sur l'utilité d'une telle représentation pour étudier les principes de base de la *Set Theory* américaine, aussi bien dans la version classique d'Allen Forte que dans la démarche transformationnelle de David Lewin et cela en dépit du fait qui ni le théoricien de Yale ni celui d'Harvard n'ont jamais explicitement utilisé cette représentation. Dans le cas d'Anatol Vieru, la *représentation circulaire* est celle qui permet de rendre compte de la nature à la fois algébrique et géométrique des opérations de base de la théorie modale[105]. Cependant, pour expliciter le concept central de la théorie, à savoir celui de

---

contact entre les deux approches. Nous partirons de l'analyse que Vieru fait de ces « ressemblances » pour essayer d'ouvrir une discussion sur la portée générale de certaines propositions théoriques.

[104] La formalisation rigoureuse du modèle théorique d'Anatol Vieru par son « collaborateur » Dan Tudor Vuza a été publiée dans une série d'articles parus dans plusieurs numéros de la *Revue Roumaine des mathématiques théoriques et appliquées* [VUZA 1982-1986]. J'exprime ma reconnaissance à Dan Tudor Vuza pour m'avoir mis à disposition l'intégralité de ses publications et des écrits théoriques cosignés avec le compositeur et souvent très difficiles à repérer.

[105] Dans la partie conclusive de ce chapitre, dédiée à certains développements théoriques récents, nous discuterons un deuxième type de représentation à la fois algébrique et géométrique : la représentation toroïdale. Cette représentation est à la fois une conséquence directe d'un théorème d'algèbre (théorème de Sylow) mais aussi une conquête théorique et analytique qui est indépendante de toute formalisation algébrique préalable. C'est à partir de cet exemple que nous essaierons de discuter l'articulation entre *formalisation* et *représentation* dans le cadre des méthodes algébriques en musique.

la dualité sons/intervalles, Vieru élabore un outil technique qui s'avère extrêmement puissant, d'un point de vue théorique, analytique et compositionnel : le concept de structure modale[106].

Une structure intervallique décrit un mode (ou bien un accord)[107] à travers les intervalles consécutifs qui séparent ses différents éléments[108]. Formellement, une structure d'intervalles permet de représenter tout mode (et donc tout accord d'un système tempéré divisé en 12 parties) avec un m-tuplet (a_1, a_2, …, a_m), tel que a_1 soit le nombre de demi-tons entre la première et la deuxième note et ainsi de suite, avec la convention que la somme a_1+ a_2+…+ a_m soit égale à 12 (plus généralement à n si l'octave est divisée en n partie égales). Par exemple l'accord de *do* majeur peut être représenté par la structure intervallique (4 3 5), comme le montre la figure suivante :

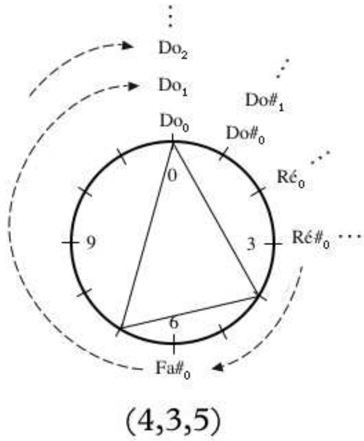


Figure 29: Représentation circulaire et structure intervallique de l'accord de do majeur

---

[106] Au lieu de « structure modale », nous préférons utiliser le terme « structure intervallique » qui montre la grande généralité des outils théoriques proposés par Vieru, et qui ne sont pas nécessairement liés à la musique modale telle que la musicologie l'entend traditionnellement. Comme Vieru le souligne [VIERU 1998a, 50], le concept de « structure intervallique » est formellement équivalent à celui d'*interval array* [CHRISMAN 1971], un outil théorique qui ne semble pas avoir eu une grande fortune dans la tradition américaine. Cela s'explique probablement en considérant la place que d'autres outils conceptuels, en particulier le *vecteur d'intervalles* d'Allen Forte [FORTE 1973] ou la fonction intervallique de David Lewin [LEWIN 1987], ont fini par avoir dans les développements successifs de la *Set Theory*. Nous analyserons ces concepts, dans leur similitude et différence avec la théorie modale d'Anatol Vieru, dans le deuxième chapitre.

[107] À ce degré d'abstraction, une gamme musicale (et donc un mode) est « formellement équivalent » à un accord. En effet, tout accord peut être considéré comme une « interprétation » particulière d'une gamme musicale, interprétation dans laquelle tous les éléments sont considérés comme ayant lieu « au même moment ». Vice-versa, à tout accord on peut associer une gamme simplement en disposant les éléments dans un ordre donné, par exemple ascendant, à partir d'une note donnée. Le terme « ensemble », tel que Babbitt l'avait introduit en musique pour indiquer toute série dodécaphonique considérée à la fois comme suite ordonnée de notes que comme collection d'éléments sans aucune considération sur leur ordre d'apparition, est probablement le terme que résume le mieux cette équivalence conceptuelle entre une théorie algébrique d'accords et une théorie des gammes.

[108] Par convention Vieru propose d'ajouter un intervalle qui sépare « idéalement » la dernière note d'un mode de la première. Cette convention permet d'expliquer, par exemple, la pertinence musicale de l'opération de permutation circulaire sur les structures intervalliques (Cf. *infra*).

Comme nous l'avons déjà mentionné, la représentation intervallique offre quelques avantages remarquables. Par exemple, elle permet de caractériser les renversements d'un accord par simple permutation circulaire. Dans le cas de l'accord de *do* majeur, on aura donc les deux permutations circulaires (3 5 4) et (5 4 3), exprimant ses deux renversements :

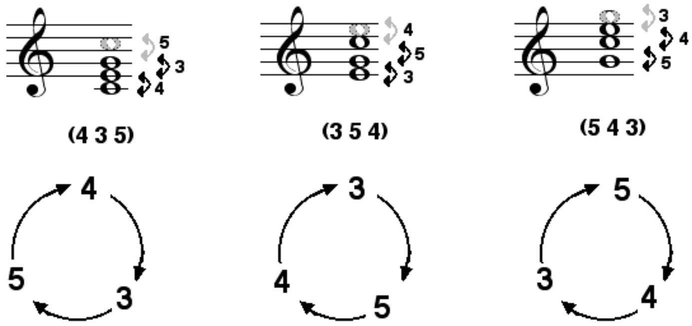


Figure 30 : Renversement d'accords et structure intervallique

La structure intervallique permet également de mettre en évidence la symétrie interne d'un accord. Par exemple, tout mode à transposition limitée de Messiaen est donné par une structure intervallique ayant des périodicités internes, i.e. des sous-structures intervalliques qui se répètent (et vice-versa, toute structure intervallique ayant des sous-périodes correspondant musicalement à des modes à transposition limitée de Messiaen). Cela permet donc d'obtenir facilement un catalogue exhaustif des modes à transposition limitée pour toute division de l'octave en *n* parties égales[109]. La figure suivante montre deux modes à transposition limitée qui avaient échappé à Messiaen dans leur représentation intervallique :

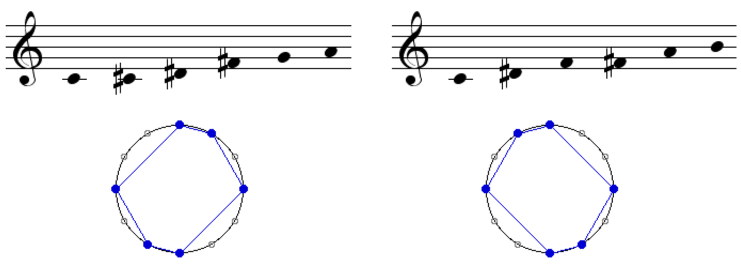


Figure 31 : Deux modes à transposition limitée et leurs représentations circulaires et intervalliques

[109] À la différence de l'approche « descriptive » basée sur la théorie des cribles de Xenakis, cette démarche est « constructive », car elle permet de produire un mode à transposition limitée par manipulation formelle de la structure intervallique. On verra aussi, au cours de cette section, comment, à partir du même concept de structure intervallique, on peut formaliser un algorithme algébrique capable de restituer toutes les solutions pour un groupe cyclique quelconque.

Comme on le constate aisément, les structures intervalliques correspondant aux deux modes à transposition limitée ne sont pas en rapport de permutation circulaire l'une par rapport à l'autre[110]. Cette remarque est suffisante pour pouvoir tirer des conclusions sur les relations entre les deux modes, précisément en ce qui concerne l'opération de transposition. En fait deux modes sont liés par un rapport de transposition si et seulement si ils ont la même structure intervallique[111]. Cependant, un simple regard sur les deux structures intervalliques permet d'affirmer que chacune est la lecture rétrograde de l'autre. Musicalement, cela s'exprime à travers l'opération d'inversion, en disant, par exemple, que le deuxième mode est une inversion du premier par rapport à une note fixe (dans ce cas-là le do=0 ou bien le fa#=6)[112]. À partir de ces simples considérations sur les propriétés formelles de la structure intervallique, Vieru établit un catalogue qui contient toutes les 352 structures intervalliques possibles (y compris la structure « vide » qui ne contient pas d'éléments et la structure qui contient les douze éléments du total chromatique).

Les structures sont présentées dans un ordre lexicographique pour favoriser la lecture, avec un commentaire en correspondance de certaines structures particulièrement significatives d'un point de vue musical (modes à transposition limitée, structures auto-inverses, etc.)[113]. Du point de vue de l'historique des méthodes algébriques en musicologie, il s'agit probablement de l'un des premiers essais de classer, d'une façon exhaustive, les accords à une opération

[110] En général, une structure intervallique de *n* éléments (a_1 a_2 …a_n) admet n-1 permutations circulaires, à savoir : (a_2 a_3 …a_n a_1), (a_3 a_4 …a_n a_1 a_2), …, (a_n a_1 …a_{n-1}).

[111] Toujours à une permutation circulaire près. L'expression *si et seulement si*, qu'on retrouve ici pour la première fois, indique ce qu'en mathématique on appelle une « condition nécessaire et suffisante ». Avoir la même structure intervallique est condition *nécessaire* pour deux modes liés par un rapport de transposition. Cela correspond à la partie « si » de la condition. Autrement dit, si deux modes sont en rapport de transposition, alors ils ont la même structure intervallique. Cette propriété est évidente dès qu'on interprète une transposition d'un point de vue géométrique, en s'appuyant précisément sur la représentation circulaire d'un mode. Toute transposition induit une rotation du polygone inscrit dans le cercle et il est assez évident qu'une telle rotation ne change pas les rapports intervalliques entre les notes qui constituent le mode. Réciproquement, pour montrer que le fait d'avoir la même structure intervallique est condition *suffisante* pour que deux modes soient liés par un rapport de transposition, il faut introduire une opération qui représente l'un des outils parmi les plus intéressants de la théorie modale : l'opération de *composition* (cfr. *Infra*). L'interprétation géométrique de l'opération musicale de transposition en termes de *rotation* (ainsi que celle d'inversion comme un *miroir*) sera commentée dans la prochaine section, eu égard à l'importance que ces deux opérations ont dans la *Set Theory* américaine.

[112] Comme on verra dans le troisième chapitre, l'opération d'inversion est à la base de la relation d'équivalence entre accords proposée par Allen Forte. Dans son catalogue, deux accords sont équivalents si l'un est une transposition ou une inversion de l'autre.

[113] Notons que dans le cas de structures intervalliques, pour obtenir un ordre lexicographique il suffit de les permuter cycliquement jusqu'à ce qu'on trouve la structure qui est le plus compactée à sa gauche ou bien à sa droite. Vieru choisit le compactage à droite, ce qui correspond, par exemple, à retenir la structure (4 4 1 1 1 1) au lieu de la structure (1 1 1 1 4 4), plus compactée vers la gauche. Allen Forte utilisera en revanche ce deuxième critère d'ordonnancement, en ajoutant une relation d'équivalence qui tient compte également des lectures rétrogrades d'une structure intervallique.

musicale près[114]. Mais pour utiliser correctement un tel catalogue, il faut définir les outils qui permettent d'obtenir un « ensemble de classes de résidus » (c'est-à-dire un *mode*) à partir de sa structure intervallique. Pour cela, Vieru propose d'utiliser un concept qui se révélera extrêmement fécond, aussi bien d'un point de vue théorique que compositionnel. Il s'agit de l'opération de *composition*, une opération qui est définie à plusieurs niveaux d'abstraction et qui permet d'appliquer sur une structure intervallique une note, un mode, ou bien une autre structure intervallique.

Ces trois étapes rendent encore plus explicite l'idée centrale de la démarche algébrique de Vieru, à savoir celle de bâtir *une* « *théorie des relations entre les sons et les intervalles* » [VIERU 1998a, 51]. De plus, l'opération de « composition » permet de comprendre la distance qui sépare l'approche algébrique de Vieru de celle d'autres compositeurs et théoriciens qui ont souvent utilisé des concepts très proches mais sans probablement une conscience précise de la portée théorique de tels outils[115]. Une première définition de l'opération de « composition » concerne le rapport entre une structure intervallique et une note. « Composer » une structure intervallique et une note signifie tout simplement obtenir la gamme représentée par une telle structure, gamme qui a la note choisie comme première note. En modifiant légèrement la notation introduite par Vieru, nous noterons l'opération de « composition » par le symbole « • ». La figure suivante montre la composition entre la structure (1 2 3 1 2 3) et la note *do*, représentée, par simple convention, par l'entier de classe de hauteurs 0 (entre accolades). Notons que le résultat de cette opération est l'ensemble des classes de hauteurs qui correspond à l'un des deux modes à transposition limitée de Messiaen discutés dans la section précédente :

[114] On a déjà vu deux autres exemples de démarches « computationnelles » en musicologie mais ni le classement des hexacordes « all-combinatorial » chez Milton Babbitt ni l'essai de formaliser tout mode à transposition limitée de Messiaen à l'aide de la théorie des cribles de Xenakis n'avaient les proportions de l'entreprise menée par Vieru. Notons que le même catalogue des structures d'accords à une transposition près a été établi, à la même époque mais d'une façon tout à fait indépendante par le théoricien polonais Maciej Zalewski [ZALEWSKI 1972] qui s'est fondé sur des considérations algébriques très proches de celles de Vieru. La « théorie des structures » de Zalewski a par la suite été formalisée rigoureusement à travers les concepts de l'algèbre universelle par Anna Romanowska [ROMANOWSKA 1974]. Comme dans le cas de Vieru, les outils développés par Zalewski sont très proches de la démarche analytique de la *Set Theory* américaine. Le problème des rapports entre la théorie de Zalewski et celle de Forte a été analysé par Carmine Moscariello [MOSCARIELLO 1995].

[115] Par exemple, la technique de « multiplication d'accords » que Boulez décrit comme processus sériel pour faire proliférer le matériau tout en gardant une cohérence « intervallique » dans les séries dérivées [BOULEZ 1963] peut s'analyser comme un cas particulier de l'opération de « composition » dans la théorie modale. De même, cette opération est formellement équivalente au concept de « combinaison transpositionnelle » [*transpositional combination*] proposé par Richard Cohn comme outil très général pour l'analyse musicale [COHN 1986].

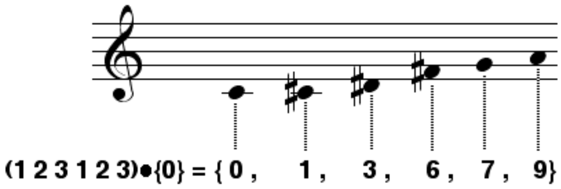


Figure 32 : Une composition entre une structure intervallique et une classe de hauteur

Un degré d'abstraction supérieur consiste à « composer » une structure intervallique avec un mode, c'est-à-dire un ensemble de classes de résidus ayant plus d'un élément. Il suffit de composer la structure intervallique avec les éléments qui constituent le mode et de prendre enfin l'union des résultats obtenus. La figure suivante montre la structure intervallique (6 6) correspondant à deux note distantes d'un triton « composée » avec le mode {0, 1, 3}. Formellement, on obtient :

$$
\begin{aligned}
&(6\ 6) \bullet \{0, 1, 3\}= \\
&=((6\ 6) \bullet \{0\})\cup((6\ 6) \bullet \{1\})\cup((6\ 6) \bullet \{3\})= \\
&=\{0,6\}\cup\{1,7\}\cup\{3,9\}= \\
&=\{0,1,3,6,7,9\}.
\end{aligned}
$$

Le résultat de la « composition » est donc le mode à transposition limitée de la figure précédente :

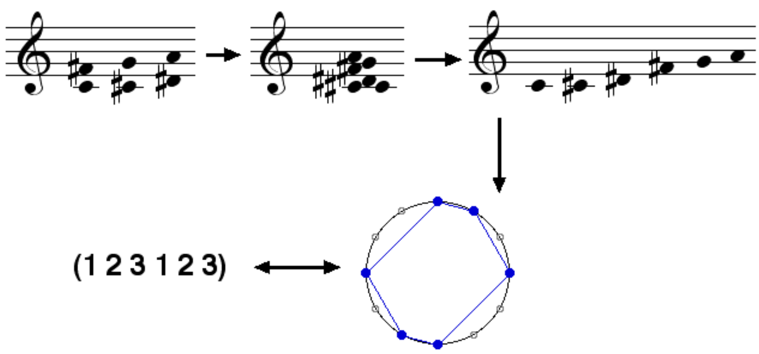


Figure 33 : Le même mode à transposition limitée de la figure précédente mais obtenu à partir d'un intervalle de triton

La troisième étape dans la définition de l'opération de « composition » consiste à la définir directement sur les structures intervalliques. À la différence des cas précédents, le résultat sera cette fois une structure intervallique, ce qui exprime très bien la volonté, de la part du théoricien roumain, d'entrer plus profondément dans la dualité sons/intervalles qui caractérise la théorie modale. Dans le même temps, cette opération permet de comprendre où commence la véritable formalisation algébrique de la théorie modale.

Par définition, composer deux structures intervalliques signifie faire la « composition » entre une des deux structures et n'importe quel mode représenté par l'autre structure. Par exemple, composer la structure (6 6) avec la structure (1 2 9) consiste à prendre d'abord un mode représenté par l'une des deux structures (par exemple le mode {0, 1, 3} représenté par la deuxième structure intervallique) et composer la première structure avec ce mode. Le mode ainsi obtenu est ensuite transformé en sa structure intervallique correspondante. Dans l'exemple choisi, on est ramené simplement à calculer la structure intervallique du mode {0, 1, 3, 6, 7, 9}, c'est-à-dire (1 2 3 1 2 3). On peut donc écrire formellement :

(6 6) • (1 2 9)= (1 2 3 1 2 3).

Ainsi définie, l'opération de « composition » entre deux structures intervalliques soulève un problème d'unicité qui a poussé le mathématicien Dan Tudor Vuza à chercher une formalisation algébrique plus profonde. Que passe-t-il si au lieu de prendre le mode {0, 1, 3} on considère un autre mode, par exemple {1, 2, 4}, représenté par la même structure intervallique (1 2 9) ? La figure suivante montre qu'on obtient le même résultat :

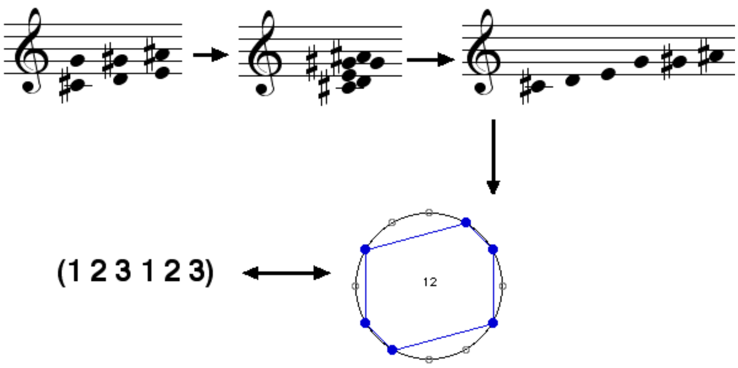


Figure 34 : Une « autre » composition des deux structures intervalliques (6 6) et (1 2 9)

Montrer que l'opération de « composition » est bien définie, non seulement dans ce cas particulier mais aussi dans le cas général, demande une formalisation précise de ce phénomène et une étude de ses propriétés algébriques. C'est le point de départ de la *mathématisation* proposée par Vuza qui restitue à l'opération musicale de « composition » son vrai caractère algébrique.

Tout d'abord, l'opération de « composition » est une « loi de composition interne » dans l'ensemble de toutes les structures intervalliques. Elle permet de munir la collection des structures intervalliques d'une propriété algébrique particulière car elle définit sur cet ensemble une structure de *monoïde commutatif* avec élément unitaire[116]. Il s'agit d'une structure plus faible que celle de *groupe*, car elle n'admet pas l'axiome du symétrique[117]. Ne pouvant pas entrer, ici, dans les aspects formels de cette opération de « composition », nous nous limiterons à donner un exemple d'application pour approfondir un sujet que nous avons déjà abordé dans le cas de la théorie des cribles de Xenakis.

Nous avions montré comment la théorie des cribles permettait de *représenter*, en termes ensemblistes, tout mode à transposition limitée de Messiaen. Mais la théorie des cribles, telle qu'on l'a utilisée, reste une théorie *descriptive*. Elle ne permet pas *a priori* de calculer explicitement un catalogue de modes à transposition limitée pour une division donnée de l'octave. Au contraire, la « composition » définie par Vieru est un outil opérationnel extrêmement puissant pour calculer, d'une façon très élégante, tous les modes à transposition limitée. Pour cela il faut d'abord introduire une famille très particulière de structures intervalliques, qu'on retrouve dans la littérature sous des noms différents.

Maciej Zalewski les appelle « structures monomorphes » [ZALEWSKI 1972], tandis que Vuza utilise le terme « idempotentes « qui mieux exprime le comportement vis-à-vis de l'opération de « composition »[118]. Il s'agit des structures qu'on peut exprimer à l'aide d'un seul intervalle ou bien, en utilisant une terminologie plus mathématique, qui sont « engendrées » par un élément du groupe cyclique **Z/12Z**. Elles sont donc de la forme $A=(a, a, a, \ldots, a)$, où l'élément a est répété un nombre fini de fois (au plus 12 dans le cas de la division de l'octave en 12 parties égales). Toute structure « idempotente » correspond à des modes ou à des accords bien connus en musique, comme le montre l'énumération suivante :

A_1=(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1) ou total chromatique

A_2=(2,2,2,2,2,2) ou gamme par tons

A_3=(3,3,3,3) ou accord diminué

A_4=(4,4,4) ou accord augmenté

---

116 La « composition » est associative, commutative et l'élément unitaire est la structure intervallique correspondant à un mode ayant une seule classe de hauteurs.

117 Autrement dit, étant donné une structure intervallique, on ne peut pas trouver la structure qui « composée » à celle de départ restitue l'élément identité, c'est-à-dire la structure correspondant à la note simple. La formalisation algébrique décrite par Vuza est un exemple remarquable de *transport de structure*, dans le sens discuté dans le premier chapitre. Un processus analogue sera à la base de l'interprétation d'une telle opération au domaine des rythmes, étape préalable pour établir le modèle algébrique des « canons rythmiques de pavage », un remarquable outil compositionnel, comme nous allons montrer dans le troisième chapitre.

118 Une structure intervallique A est idempotente par rapport à l'opération de composition « $\bullet$ » si et seulement si la composée de A avec elle même est égale à A, autrement dit $A \bullet A = A$.

A_6=(6, 6) ou triton

A_7=(0) ou la « classe de hauteur ».

Intuitivement, les structures idempotentes jouent dans la construction des modes à transposition limitée le rôle joué par les nombres premiers dans la construction des nombres entiers. Tout nombre entier est décomposable, d'une façon unique, dans le produit de (puissances de) nombres premiers. Ainsi, tout mode à transposition limitée s'obtient en faisant la « composition » d'un mode quelconque avec une structure idempotente[119]. Le processus se généralise à tout groupe cyclique **Z/nZ** et permet donc d'établir un catalogue complet de tous les modes de Messiaen à transposition limitée pour toute division de l'octave en *n* parties égales[120].

En conclusion de cette partie consacrée à la pensée théorique d'Anatol Vieru, et comme transition vers le prochain chapitre dédié aux théories analytiques de la tradition américaine, il nous semble intéressant d'approfondir les réflexions du compositeur sur quelques aspects de ces points de rencontres. Il faut préciser qu'à cause de l'isolement dans lequel le compositeur vivait, la découverte des théories américaines par Vieru est très tardive. Cela explique pourquoi il n'y a pas de référence à la *Set Theory* dans la première édition du *Livre des modes*, un ouvrage qui, comme le souligne Vieru, a l'étrange caractéristique d'avoir une bibliographie presque inexistante : « *Ce manque de bibliographie témoigne de l'isolation dans laquelle cette œuvre a été conçue* », ses sources étant « *les textes musicaux ainsi que l'expérience de composition et d'analyse de son auteur* » [VIERU 1983/1994, 58].

Les écrits des années quatre-vingt commencent à contenir une référence explicite à la notion de *pitch-class set* ou ensemble des classes de hauteurs. Il s'agit d'un concept, dit Vieru, que les théoriciens américains « *ont découvert […] comme un outil de travail pour l'analyse de la musique atonale* » [VIERU 1983/1994, 59], à la différence du concept de *mode* qui est

[119] Les exemples précédents, dans lesquels on composait des structures intervalliques et des modes pour obtenir le mode à transposition limitée {0, 1, 3, 6, 7, 9} ou bien sa structure intervallique (1 2 3 1 2 3), utilisent donc la propriété qu'on vient d'énoncer. D'autres théoriciens sont arrivés à la même conclusion mais avec des stratégies différentes. Citons, en particulier, l'article « Gruppentheoretische Methoden in der Musiktheorie » [HALSEY et HEWITT 1978], écrit par les deux mathématiciens américains D. Halsey et H. Hewitt et sur lequel on reviendra dans notre analyse « mathémusicale » de la Conjecture de Minkowski/Hajós (voir l'*Interludium* du troisième chapitre). Dans la terminologie utilisée par Halsey et Hewitt, les structures idempotentes sont simplement les « sous-groupes » du groupe cyclique **Z/12Z**, c'est-à-dire les sous-ensembles qui sont eux-mêmes des groupes. Un argument similaire à celui utilisé par Vuza d'après les théories de Vieru est employé par Richard Cohn à l'aide de la notion de « combinaison transpositionnelle » [COHN 1986]. Nous avons beaucoup insisté sur le rapport entre formalisation théorique et démarche algorithmique car la « calculabilité » est précisément la notion à partir de laquelle on peut poser les fondements d'une démarche computationnelle en musicologie.

né « *comme un reflet de la technique de composition modale moderne* » [VIERU 1983/1994, 60]. Cependant, « *dans un cas ou dans l'autre […] les deux sources de recherche concurrent à recréer la théorie de la musique fondée sur le total chromatique et pour construire un modèle mathématique de la pensée musicale intervallique* » [VIERU 1983/1994, 60].

Selon le compositeur roumain, on peut parler de « synonymie » entre la théorie modale et les théories américaines, non seulement au point de vue du vocabulaire employé mais surtout quant au caractère « universel » qui a amené « *chacune de ces théories à transgresser son domaine, en arrivant au même modèle de pensée musicale intervallique, et cela à l'intérieur du système tempéré* » [VIERU 1994b, 23][121]. Une compréhension correcte du statut « algébrique » des intervalles a conduit, selon Vieru, à des convergences remarquables entre la théorie modale et la *Set Theory* américaine. Un aspect de cette convergence est sans doute la place que le problème du « diatonisme » occupe dans les deux approches[122].

1.6.2 Diatonisme vs chromatisme dans la théorie modale

Vieru s'appuie sur son modèle algébrique de la pensée musicale intervallique pour mettre en cause ce qu'il appelle une vision « *pseudo-progressiste sur l'évolution de la musique comme une perpétuelle complexification, comme une transition du diatonique au chromatisme, puis à l'hyper-chromatisme* » [VIERU 1994b, 23]. Comme il l'affirme dans un autre écrit théorique :

> « *On réalise aujourd'hui que la diatonie, qui avait paru représenter la simplicité dans la musique, est en fait un phénomène complexe. [...] Le diatonisme et le chromatisme ne peuvent pas être envisagés en termes de simplicité ou de complexité, comme on le pensait jadis. Il s'agit plutôt d'une question d'unité des contraires dans le groupe* ***Z****/12****Z*** » *[VIERU 1995, 64].*

---

[120] Nous renvoyons à *l'Interludium* qui conclut la deuxième partie pour une présentation de quelques aspects informatiques des outils algébriques en analyse musicale.

[121] Pour une analyse technique des correspondances entre les outils de la *Set Theory* et ceux de la théorie modale, on peut se référer à l'article « La théorie moderne des modes et l'atonalisme (autour d'un livre) » [VIERU 1987]. Dans cet écrit, Vieru analyse en détail un des textes de référence de la tradition analytique américaine, *Basic Atonal Theory* de John Rahn. On pourra compléter ces commentaires du compositeur roumain avec le compte rendu de l'ouvrage fondamentale de David Lewin, *Generalized Musical Intervals and Transformations* [LEWIN 1987], signée cette fois par Dan Tudor Vuza et paru dans *Perspectives of New Music* [VUZA 1988].

[122] Aux Etats-Unis, la théorie du diatonisme [*diatonic theory*] représente l'une des ramifications algébriques parmi les plus intéressantes de la *Set Theory*. Il s'agit d'une théorie qui est née dans les années quatre-vingt et qui s'est développée grâce aux recherches d'un groupe de théoriciens de l'université de New York à Buffalo. Le contact entre Anatol Vieru et certains de ces théoriciens, en particulier John Clough, est amplement documenté par les articles parus dans la revue roumaine *Muzica* à la suite d'un Colloque International sur « Musique et Mathématique » organisé par le compositeur roumain à Bucarest en 1995.

Vieru élabore une technique pour quantifier le degré de diatonisme et de chromatisme d'un mode. Le degré de diatonisme est donné par le nombre de quintes justes consécutives à l'intérieur d'un mode tandis que le degré de chromatisme est donné par le nombre de demi-tons consécutifs. Certaines structures modales sont parfaitement diatoniques car elles sont formées d'une seule suite de quintes connexes. D'autres structures, au contraire, sont parfaitement chromatiques, car elles sont constituées par une seule suite de demi-tons connexes.

La représentation circulaire traditionnelle est sans doute mieux adaptée pour mettre en évidence la « composante chromatique » d'un mode. En effet, il suffit de compter le nombre de notes consécutives à distance d'un demi-ton dans le cercle chromatique. Pour avoir une représentation adaptée à la visualisation de la « composante diatonique », Vieru propose d'utiliser un isomorphisme du groupe cyclique **Z/12Z** qui transforme une suite de demi-tons dans une suite de quintes. C'est dans cela que réside, selon Vieru, la pertinence musicale de l'opération de multiplication, plus précisément, dans ce cas particulier, de la multiplication par 7. La figure suivante montre le mode parfaitement diatonique {0,2,4,7,9} représenté à la fois dans le cercle chromatique et aussi dans le cercle obtenu en multipliant par 7 tout élément. La composante diatonique émerge, clairement, dans cette deuxième représentation :

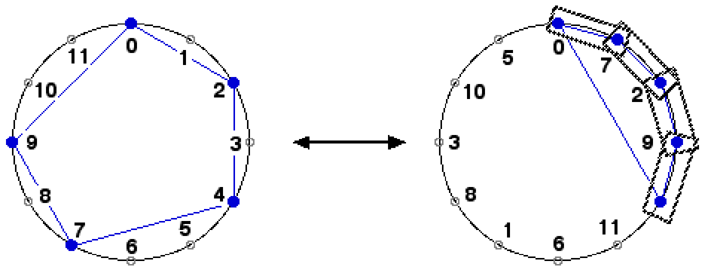


Figure 35 : Deux représentations circulaires équivalentes d'un même mode

Cependant, entre ces deux extrêmes, il y a toute une série de degrés de chromatisme et de diatonisme différents, y compris le cas des structures dans lesquelles la composante diatonique est égale à la composante chromatique. C'est précisément à cette famille qu'appartiennent les modes à transposition limitée de Messiaen. La figure suivante montre, par exemple, l'égalité entre composante chromatique et diatonique du mode octotonique :

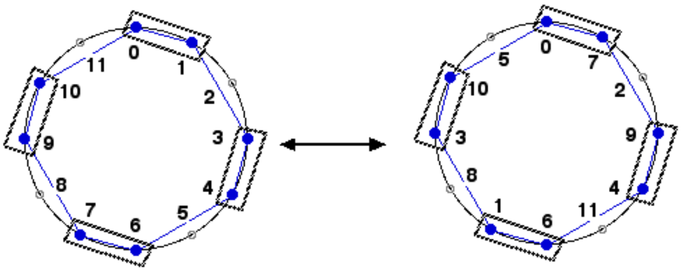


Figure 36 : Equilibre entre diatonisme et chromatisme dans le deuxième mode à transposition limitée de Messiaen (mode octotonique)

La réflexion sur le « diatonisme » et le « chromatisme » montre le lien étroit, dans la pensée du compositeur roumain, entre une attitude « ensembliste » et une démarche plus algébrique qui vise, comme dans le cas de multiplication, à se concentrer sur les « opérations » plus que sur les « objets ». C'est un point central qui est bien explicité par le compositeur quand il dit qu'« *en général, la théorie des modes […] met en premier plan les opérations modales* » et représente, en ce sens, une étape récente de la pensée théorique sur la musique, une pensée dans laquelle « *l'intérêt vers les opérations prend la place d'une démarche classificatoire* » [VIERU 1998a, 50][123]. Une analyse de quelques aspects de la théorie mathématique de la musique de Guerino Mazzola, ainsi que des concepts de base de la *Set Theory* et de l'analyse transformationnelle, saura confirmer l'actualité de la conclusion du compositeur roumain.

1.7 *Développements récents en théorie de la musique : la voie européenne vers une approche transformationnelle en musique*

Dans cette section, nous allons discuter quelques aspects d'une approche théorique qui représente l'un des cadres conceptuels les plus abstraits de la formalisation algébrique en musique. Nous avons vu comment les méthodes algébriques changent radicalement la vision des objets musicaux en privilégiant le concept de *structure* à celui d'ensemble vu comme simple collection d'éléments. Pour reprendre une belle expression de Milton Babbitt, la *structure algébrique* est une collection d'objets, de *relations* entre les objets, et d'*opérations*

[123] Sylvia Grmela, membre du groupe de travail sur le système diatonique dirigé par John Clough, a proposé récemment une généralisation de la technique de calcul des composantes diatoniques et chromatiques d'un mode afin de pouvoir appliquer ces concepts dans l'analyse d'un répertoire de la musique du XX^{e} siècle fondée sur la polarité diatonique/chromatique [GRMELA 1997]. Nous renvoyons à notre étude théorique sur les modes à transposition limitée [ANDREATTA 2003a] pour une discussion sur une utilisation récente du cercle chromatique et du cercle des quintes par rapport aux concepts introduits par Messiaen.

sur les objets, ce qui offre à la « théorie de la musique » du XX^{e} siècle un caractère de généralité et d'universalité par rapport à toutes les propositions théoriques du passé.

1.7.1 Du côté des mathématiques

Dans ce processus d'« algébrisation », la « théorie de la musique » a été influencée par certains développements récents des mathématiques. Nous avons mentionné, parmi les grandes étapes de la pensée algébrique en mathématiques, la naissance autour des années quarante d'une approche qui prolonge, par certains aspects, le Programme d'Erlangen de Felix Klein. Nous rappelons qu'un des buts de ce programme était de caractériser les espaces géométriques par des *groupes* associés de *transformations*. Il y a donc, dans l'approche de Klein, un lien étroit entre géométrie et algèbre. Les évolutions de la pensée géométrique au XX^{e} siècle ont conduit d'abord à la nécessité pour les mathématiciens d'expliciter le concept général de *distance* dans un espace abstrait, en s'appuyant uniquement sur quelques axiomes et sur les propriétés de l'ensemble **R** des nombres réels. Ce concept trouve sa formulation dans la notion d'*espace métrique* qui signe, selon certains, l'acte de naissance de la démarche *topologique* en mathématiques[124].

D'une « collision » entre topologie et algèbre est née, au début des années quarante, la théorie mathématique des catégories. Saunders Mac Lane, l'un des pères fondateurs, avec Samuel Eilenberg (1913-1998), de la théorie des catégories propose d'utiliser ce concept de comme source du développement des idées mathématiques. Selon le mathématicien américain, l'idée de « collision » s'applique aussi bien à la théorie des catégories qu'à la théorie des topoï, cette dernière étant le résultat de la « collision » entre l'approche

---

[124] Jean Dieudonné a mis en évidence cet aspect dans plusieurs de ses écrits (voir, par exemple, le chapitre consacré aux « Nouveaux objets et nouvelles méthodes » de l'ouvrage *Pour l'honneur de l'esprit humain* [DIEUDONNÉ 1987, 152-153]). La notion d'*espace métrique* a été précisée en 1906 par le mathématicien français Maurice Fréchet auquel on doit aussi la définition ensembliste de fonction (ou application) f d'un ensemble A vers un ensemble B, opération notée par $f: A \rightarrow B$. Formellement, un espace métrique est un ensemble E muni d'une application d de $E \times E$ dans **R** appelée « distance ». Une distance doit respecter trois conditions. La première affirme que la distance entre deux points est toujours supérieure à 0, sauf quand les deux points coïncident (dans ce cas la distance est nulle). Le deuxième axiome exprime la propriété de « symétrie » dans le sens que la distance entre le point x et le point y est égale à la distance entre y et x. Enfin, le troisième axiome, ou « propriété triangulaire », affirme que la distance entre deux points x et z est toujours inférieure ou égale à la somme de la distance entre x et y et de la distance entre y et z pour tout point y de l'espace E. Plusieurs théoriciens ont essayé de définir un espace métrique qui soit pertinent musicalement. Cependant, la propriété triangulaire semble limiter considérablement la portée musicale d'une telle construction théorique. Un modèle d'espace topologique qui n'est pas métrique a été proposé récemment par Chantal Buteau et Guerino Mazzola dans le cas de la généralisation du concept de « motif musical » [BUTEAU 2003]. Pour une discussion sur la notion de *distance* dans la perspective de la tradition analytique américaine, voir les articles récents de Robert Morris [MORRIS 1998] et d'Eytan Agmon [AGMON 2002].

topologique d'Alexandre Grothendieck et une branche particulière de l'algèbre qui constitue la théorie de Galois.

Dans le cas de la théorie des catégories, il y a eu une « collision » entre l'approche topologique d'Eilenberg et l'approche algébrique de Mac Lane à partir du concept de « naturalité » des transformations entre des espaces mathématiques. En particulier, l'étude de la propriété de « naturalité » d'un *isomorphisme* en théorie des groupes [EILENBERG et MacLANE 1942] a été le point de départ pour établir une théorie générale de l'équivalence « naturelle » entre structures algébriques, ce qui a conduit à la définition de *foncteur* et à la formalisation du concept fondamental de *catégorie* [EILENBERG et MacLANE 1945]. La « naturalité » des transformations entre structures algébriques, en particulier des isomorphismes, concerne la possibilité de définir de telles relations indépendamment de la *présentation* particulière d'une structure. Il s'agit donc d'une notion technique, de même qu'un autre concept à partir duquel la théorie des catégories s'est constitué : le concept d'« universalité ».

À la différence du concept de transformation naturelle, qui est trop technique pour être discuté ici, la propriété d'« universalité » de certaines constructions mathématiques est beaucoup plus intuitive et nous allons la discuter à partir d'un problème de théorie de la musique. Mais pour cela il faut d'abord préciser que c'est qu'une *catégorie* dans la pensée mathématique contemporaine. Intuitivement, une *catégorie* est une structure comportant des *objets* et des *applications* entre ces objets. Ces applications, également appelées *morphismes* (ou, plus couramment, *flèches*), correspondent chacune à un objet *source* et à un objet *but*. Par exemple, l'écriture $f : a \longrightarrow b$ s'interprète en disant que l'objet source a est transformé par l'application f en l'objet but b. Les flèches se composent entre elles et la combinaison, qu'on notera encore une fois par le symbole « • », est réglée par les trois axiomes suivants[125] :

1 Si $f : a \longrightarrow b$ et $g : b \longrightarrow c$ alors $g \bullet f : a \longrightarrow c$ (quand la composition $g \bullet f$ entre les deux morphismes f et g est bien définie).

2 Pour tout objet a de la catégorie, il existe un morphisme i_a appelé « identité de a » qui a la fonction d'élément neutre par rapport à la composition entre morphismes.

[125] Nous avons décidé d'utiliser cette notation peu courante dans les textes de mathématiques pour mettre en évidence une relation étroite entre la définition formelle de catégorie et les axiomes que nous avons employés dans la définition de la « multiplication d'accords » dans la théorie modale du compositeur Anatol Vieru. Nous rappelons que cette opération, que nous avions notée avec le même symbole « • », permet de définir sur l'ensemble des structures intervalliques un *monoïde* avec élément *identité* ayant les mêmes axiomes catégoriques.

Autrement dit $i_a \bullet f = f$ et $g \bullet i_a = g$ pour tous morphismes f et g pour lesquels l'application de composition est définie.

3 La composition est associative, c'est-à-dire $g \bullet (f \bullet h) = (g \bullet f) \bullet h$. Cela permet donc d'enlever les parenthèses et d'écrire $g \bullet f \bullet h$ sans qu'il y ait aucune ambiguïté.

Pour montrer comment la théorie des catégories permet de changer radicalement la formalisation des structures musicales, on peut considérer l'exemple de la « multiplication d'accords » telle que nous l'avons discutée dans la théorie modale. Rappelons que, si l'on note $(S, \bullet)$ l'ensemble des structures intervalliques d'un un espace tempéré muni de l'opération de « composition », on obtient une structure algébrique de *monoïde commutatif* avec élément identité, donné par la structure intervallique « (0) » correspondant à une classe de hauteur quelconque, interprétée comme classe d'équivalence par rapport à l'opération musicale de transposition[126].

Notons qu'une telle structure peut aussi s'interpréter comme une *catégorie*, selon la définition donnée précédemment. Il s'agit d'une catégorie particulière qui est constituée par un seul objet (l'application « $\bullet$ ») et dont les morphismes sont tous les éléments de S. La composition entre morphismes a et b est définie comme la composition $a \bullet b$ et l'application identique est donc la flèche associée à l'élément (0).

Au-delà du caractère exotique d'une telle catégorie, l'exemple est intéressant car il permet de comprendre le changement de perspective que la théorie des catégories introduit dans la formalisation musicale. Ainsi, certaines notions mathématiques qui ont trouvé une application naturelle en musique peuvent se définir uniquement à l'aide des morphismes et de leurs propriétés formelles. Prenons, par exemple, le cas du produit cartésien de deux ensembles A et B. Selon une première définition ensembliste, le *produit cartésien* $A \times B$ est défini comme l'ensemble des couples ordonnés (a, b), les éléments a et b étant respectivement dans les ensembles A et B. Formellement, on peut écrire[127] :

$$A \times B = \{ (a, b) : a \in A, b \in B \}$$

---

[126] Il s'agit d'une abstraction du concept traditionnel d'intervalle, comme nous l'avons défini dans le catalogue des structures *monomorphes* inspiré par les travaux de Zalewski [ZALEWSKI 1972].

[127] Le symbole « $\in$ », que nous avons évité jusqu'à maintenant, indique l'appartenance d'un élément à un ensemble. De même, on écrit $a \notin B$ pour signifier que l'élément a n'appartient pas à l'ensemble B.

La définition du « produit cartésien » indépendamment de la nature des ensembles A et B, afin de mettre en évidence son caractère d'« universalité », a été historiquement l'un des problèmes qui ont mis en évidence l'utilité d'une approche catégorielle. La notion de produit peut, en effet, être établie sans aucune référence explicite aux éléments appartenant aux ensembles mais simplement en imposant une propriété de cohérence formelle dans un diagramme de flèches. La définition « catégorielle » (ou fonctorielle)[128] d'un produit cartésien est donc la suivante.

Un objet T avec deux morphismes $p : T \rightarrow A$ et $q : T \rightarrow B$ est le produit de A et B si pour toutes flèches f et g ayant pour objets but respectivement A et B, il existe une et une seule flèche h ayant le même objet source que f et g mais ayant T comme objet but, et telle que $p \bullet h = f$ et $q \bullet h = g$ où « $\bullet$ » indique la loi de composition des flèches.

La situation est résumée par le diagramme suivant, diagramme dans lequel on note Y l'objet qui est la source des flèches f, g et h. Une autre façon d'exprimer les deux conditions $p \bullet h = f$ et $q \bullet h = g$ c'est de dire qu'un tel diagramme « commute » (ou est « commutatif »)[129].

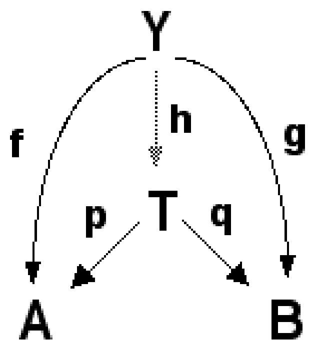


Figure 37 : Diagramme catégoriel pour le produit cartésien

L'interprétation musicale d'une telle démarche nous offre la possibilité de discuter une représentation géométrique alternative de l'espace tempéré à douze degrés. Il s'agit de la représentation toroïdale, qui utilise la décomposition du groupe cyclique **Z/12Z** dans le

---

[128] Nous utiliserons d'une façon équivalente le terme « catégorielle » et « fonctorielle » pour indiquer toute approche qui relève de la théorie mathématique des catégories. Nous réserverons l'appellation « topossique » à une démarche qui relève d'une partie bien définie de la théorie des catégories, connue comme « théorie des topoï ». Un exemple d'une telle démarche en mathématiques est la célèbre démonstration topossique de l'indépendance de l'hypothèse du continuum de l'axiome de Zermelo-Fraenkel dans la théorie des ensembles. Pour une description de cette stratégie démonstrative, voir l'ouvrage de Saunders Mac Lane et Ieke Moerdijk *Sheaves in Geometry and Logic* [MacLANE et MOERDIJK 1992].

[129] Notons que la « commutativité » d'un diagramme n'a rien à voir avec la propriété commutative (ou « abélianité ») d'une structure algébrique. Une structure algébrique (S, $\bullet$) est commutative (ou abélienne) si pour tous ses éléments a et b, les compositions $a \bullet b$ et $b \bullet a$ donnent le même résultat.

produit du groupe **Z/3Z** d'ordre 3 et du groupe **Z/4Z** ayant quatre éléments[130]. La construction de la représentation toroïdale du tempérament est décrite dans la figure suivante :

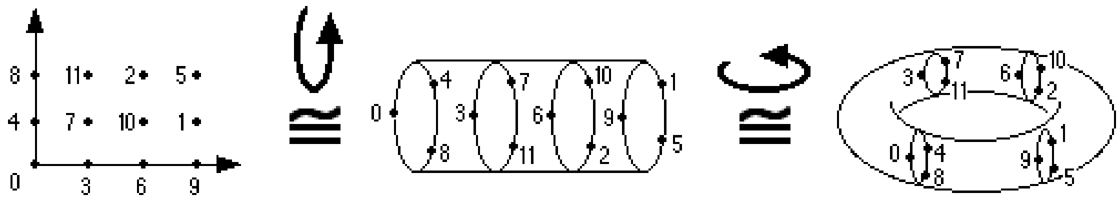


Figure 38 : Représentation toroïdale de Z/12Z

Voyons comment la représentation toroïdale est décrite en termes de flèches. Si l'on note *T* le tore, il suffit de prendre comme morphismes $p : T \rightarrow \mathbf{Z/3Z}$ défini par $p(a, b)=a$ et $q : T \rightarrow \mathbf{Z/4Z}$ défini par $q(a, b)=b$ pour tout élément (a,b) du tore. En outre, l'application (unique) du cercle **Z/12Z** dans le tore *T* est définie comme la flèche $h : x \rightarrow (a, b)$ où *a* est la réduction de la classe de hauteur *x* modulo 3 et *b* est la réduction modulo 4 de la multiplication de la classe de hauteur *x* par 11. Si l'on note $f=[x]_3$ et $g=[x]_4$ les opérations de réduction modulo 3 et 4 d'une classe de hauteur *x*, on peut écrire le morphisme *h* de **Z/12Z** dans le tore comme $h : x \rightarrow ([x]_3 , [11x]_4)$ pour toute classe de hauteur *x*. Le diagramme est montré par la figure suivante :

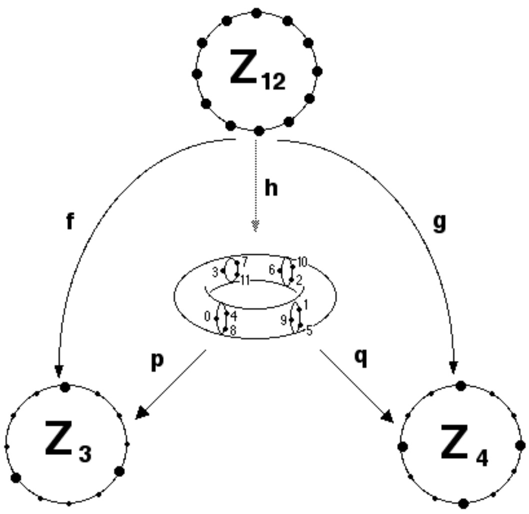


Figure 39 : Le tore dans un diagramme catégoriel

[130] Il s'agit d'un des théorèmes d'algèbre établis par le mathématicien norvégien Ludwig Sylow, théorèmes qui garantissent pour certains diviseurs de l'ordre d'un groupe *G* l'existence d'un sous-groupe d'ordre correspondant.

1.7.2 Formalisation et représentation dans l’approche algébrique

La structure toroïdale du tempérament ouvre une question cruciale sur le rapport entre le problème de la *formalisation* et celui de la *représentation* en théorie de la musique. Du point de vue des méthodes algébriques, la représentation semble être une étape postérieure à celle de la formalisation. Cela est particulièrement clair si l’on suit les différentes représentations géométriques de l’espace des hauteurs à partir des premières réflexions théoriques d’Hugo Riemann au début du XXe siècle. Dans son article intitulé « Ideen zu einer ‘Lehre von den Tonvorstellungen’ » [RIEMANN 1914], le théoricien allemand discute un modèle géométrique bidimensionnel de l’espace des hauteurs dans le tempérament naturel[131]. L’espace est construit à partir d’une note (ici le *do* ou *C* en notation allemande) en ajoutant sur deux axes obliques des intervalles de quinte juste et de tierce majeure.

[131] Ce réseau géométrique a été proposé pour la première fois en théorie de la musique par Leonard Euler, d’où l’appellation courante de « réseau eulerien » (ou « réseau d’Euler »). Les propriétés formelles du réseau eulerien ont été étudiées par la suite, en particulier par deux théoriciens allemands, Martin Vogel [VOGEL 1975] et Rudolf Wille [WILLE 1976]. Guerino Mazzola a proposé un modèle algébrique tridimensionnel du réseau d’Euler (qui inclut l’axe des octaves) en le formalisant en termes de *module* sur l’anneau **Q** des nombres rationnels [MAZZOLA 1990]. En France, une formalisation algébrique différente du réseau d’Euler à été proposée au début des années quatre-vingt par le mathématicien Yves Hellegouarch en utilisant des éléments de théorie des nombres dans deux études intitulées « Un aspect de la théorie des hauteurs » [HELLEGOUARCH 1980] et « Gammes Naturelles « [HELLEGOUARCH 1983]. Récemment, le mathématicien caennais a proposé dans le cadre des Séminaires *MaMuX* de l’Ircam une définition de topologie harmonique sur le réseau d’Euler à travers des outils diophantiens [HELLEGOUARCH 2002]. Il faut souligner que dans cette courte présentation historique du réseau d’Euler, nous n’avons cité que les approches qui relèvent d’une formalisation algébrique. Cependant, nous voudrions également mentionner l’intérêt « computationnel » d’une telle représentation des hauteurs, en particulier en ce qui concerne l’analyse musicale assistée par ordinateur. Un des pionniers de cette approche est sans doute H. Christopher Longuet-Higgins qui a proposé à partir dès les années 70 un modèle computationnel de la perception de la musique basée sur le réseau d’Euler. Ces écrits sur la musique sont réunis dans l’ouvrage *Mental Processes* [LONGUET-HIGGINS 1987]. Nous reviendrons au début du prochain chapitre sur certaines idées introduites par Longuet-Higgins dans le domaine de l’analyse musicale assistée par ordinateur.

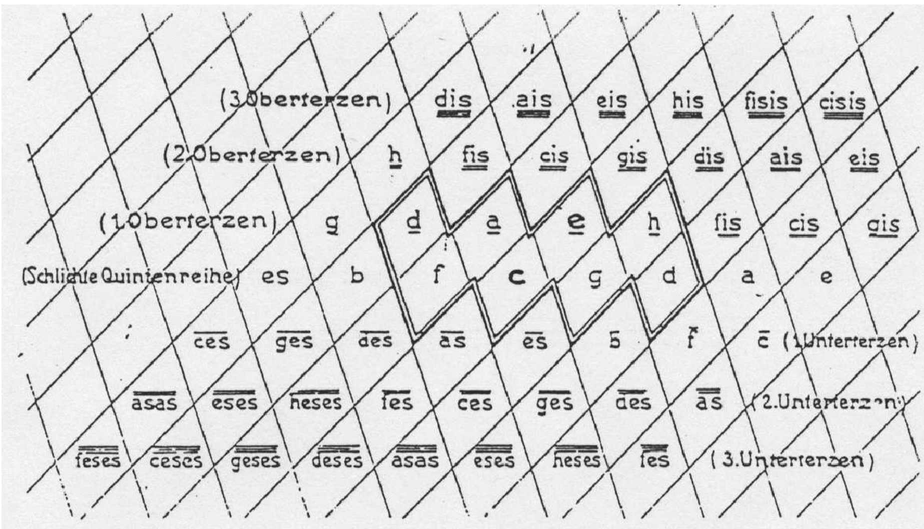


Figure 40 : modèle géométrique bidimensionnel de l'espace de hauteurs d'après Riemann

Notons que cet espace est virtuellement infini, car aucune identification enharmonique ne permet de retrouver des relations d'octave entre deux ou plusieurs éléments du treillis. Un tel modèle met en évidence la propriété géométrique singulière de la gamme diatonique d'être un sous-ensemble *connexe*[132] qui s'étend d'une façon régulière dans l'espace. La propriété de connexité de l'échelle diatonique est préservée si l'on introduit dans le modèle géométrique d'Euler l'équivalence modulo l'octave. On obtient ainsi le modèle toroïdal dont on a vu une première caractérisation en termes de produit cartésien de deux groupes **Z/3Z** et **Z/4Z**.

En ce qui concerne la formalisation des structures musicales, le modèle toroïdal du tempérament à été introduit, de façon indépendante, par Gerald Balzano et Guerino Mazzola[133]. Dans les deux cas, le groupe d'ordre trois **Z/3Z** est engendré par l'intervalle de tierce majeure (M3) et le groupe d'ordre quatre **Z/4Z** est engendré par l'intervalle de tierce mineure (m3). La figure suivante montre une portion de l'espace musical qu'on obtient en enchaînant des intervalles de tierce majeure (axe horizontal) et des intervalles de tierce mineure (axe vertical). On remarquera que la gamme diatonique est ici représentée par une portion connexe de l'espace des hauteurs.

---

[132] Intuitivement, un ensemble est *connexe* s'il n'est pas constitué de deux (ou plus) parties disjointes. Cependant, pour établir correctement une telle propriété, il faudrait d'abord définir une « topologie » sur l'espace des hauteurs, ce qui a été fait successivement par plusieurs théoriciens travaillants dans ce qu'on appelle désormais la « théorie néo-riemannienne ». Il s'agit d'une approche qui a intéressé aussi bien l'évolution de la théorie de la musique en Europe qu'aux Etats-Unis. En Europe, une formalisation algébrique de certains concepts d'Hugo Riemann a été proposée en particulier par Thomas Noll à partir du principe riemannien d'*aperception* [NOLL et NESTKE 2003].

[133] Voir l'article « The group-theoretic description of 12-fold and microtonal pitch systems » [BALZANO 1980] et la *lecture note* « Die gruppentheoretische methodes in der Musik » [MAZZOLA 1980].

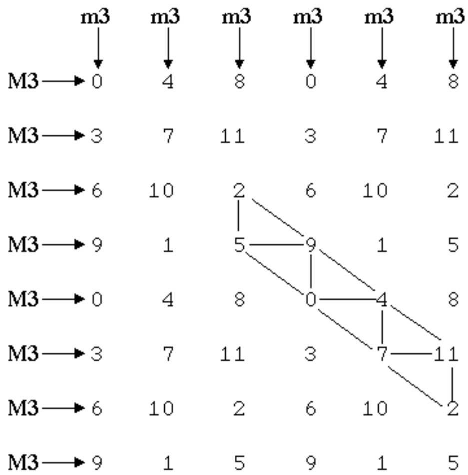


Figure 41 : La gamme diatonique dans le modèle géométrique plan de l'espace tempéré

La gamme diatonique définit les extrêmes d'un rectangle à partir duquel on peut construire le tore[134] par simple transformation topologique consistant à identifier les côtés opposés, comme nous l'avons montré précédemment.

Comme Balzano l'observe, la propriété de « connexité » de la gamme diatonique n'est pas une caractéristique de l'espace géométrique bidimensionnel, car on la retrouve dans la représentation circulaire, pourvu qu'on considère le cercle des quintes au lieu du cercle chromatique traditionnel. La gamme diatonique est donc « *une région connexe dans l'espace des quintes, un ensemble de points qui sont rassemblés au maximum l'un par rapport à l'autre […]* » [BALZANO 1980, 71][135].

Le caractère d'« unicité » de la gamme diatonique, par rapport à d'autres organisations possibles des hauteurs dans l'espace tempéré à 12 degrés est le point de départ, selon le théoricien américain, d'une généralisation de la notion de « diatonicité » et, plus généralement, de tonalité à tempéraments microtonaux. C'est ainsi, selon Balzano, que « *nous sommes invités à penser à la "tonalité" comme correspondant à une région* ***perceptible*** *dans un espace engendré par des représentations des groupes* » [BALZANO 1980, 83][136].

[134] Compte tenu du rôle « structurale » des intervalles de tierce dans la construction d'un tel modèle géométrique, l'appellation de « tore des tierces » proposée par Guerino Mazzola nous semble parfaitement cohérente, et nous allons donc l'adopter. Guerino Mazzola utilise le « tore des tierces » en particulier pour établir une théorie mathématique du contrepoint. À ce problème est dédiée la huitième partie de l'ouvrage *Topos of Music* [MAZZOLA 2003, 615-659].

[135] Cette propriété correspond à ce que Vieru appelle le degré maximal de « diatonicité » d'un mode, une mesure qui est basée précisément sur le nombre de segments connexes dans le cercle des quintes.

[136] C'est nous qui soulignons le rapport que Balzano établit entre formalisation algébrique et perception musicale. Il s'agit d'une question sur laquelle nous reviendrons dans la partie conclusive de cette étude car elle ouvre une réflexion sur la portée cognitive des méthodes algébriques en musique et musicologie.

Balzano est probablement l'un des premiers à mettre en évidence le lien entre théorie des groupes et perception musicale, en particulier quand il affirme que « *les groupes qui caractérisent les espaces des relations entre les hauteurs potentiellement audibles sont assez différents* [de ceux qui concernent la vision, N.d.T.], *mais là aussi une description fondée sur la théorie des groupes promet d'être un cadre valable pour traiter des problèmes en perception musicale. De façon spéculative, peut être que le caractère singulier* [uniqueness] *de l'expérience musicale est dû en partie aux structures particulières de groupe que la musique rend accessible à l'auditeur* » [BALZANO 1980, 83]. Comme nous l'avons souligné, la formalisation à l'aide de la théorie de groupes est, dans le cas général des méthodes algébriques appliqués à la musique, une étape préalable pour discuter le problème de la représentation des structures musicales. Cela est d'autant plus vrai si l'on abandonne le cadre relativement élémentaire de l'algèbre pour aborder le problème de la représentation *fonctorielle* de certaines propriétés musicales[137].

Nous allons nous concentrer encore une fois sur les modes à transposition limitée de Messiaen, car nous voudrions ajouter aux représentations données jusqu'ici une nouvelle conceptualisation fondée cette fois sur la théorie mathématique des catégories[138]. Cette conceptualisation fournit, de plus, un exemple de démarche « transformationnelle » en théorie

[137] La théorie des catégories est apparue en musique d'abord de façon ésotérique, dans un article de John M. Peel consacré à l'analyse de cinq mesures du *Trio* (Op. 45) d'Arnold Schoenberg [PEEL 1975]. L'auteur cite de nombreux passages d'ouvrages de Bourbaki et de Grothendieck pour montrer comment certaines transpositions musicales peuvent s'interpréter comme des *morphismes* dans une *catégorie* dont les objets sont des diagrammes commutatifs sur des tétracordes ayant (1 5 1 5) comme structure intevallique. L'article est intéressant d'un point de vue historique, comme un premier essai d'introduire des concepts fonctoriels en musique, mais l'auteur n'arrive pas, à notre avis, à montrer comment la théorie des catégories permet d'éclairer certaines propriétés musicales. L'approche catégorielle en théorie de la musique commence véritablement vers la moitié des années 1980, avec la dissertation de Guerino Mazzola intitulée « Gruppen und Kategorien in der Musik » [MAZZOLA 1985] et, par la suite, avec l'ouvrage *Geometrie der Töne* du même auteur [MAZZOLA 1990]. L'évolution de la démarche catégorielle en théorie de la musique dans la dernière décennie a été accompagnée par une intensification à la fois de son caractère *computationnel* et aussi de sa composante abstraite. Ces deux aspects ont trouvé une formulation cohérente dans l'ouvrage *The Topos of Music* [MAZZOLA 2003], qui propose la théorie mathématique des topoï comme cadre conceptuel le plus général pour aborder le problème de la formalisation et de la représentation des structures musicales. Ne pouvant pas entrer dans les détails techniques d'une telle approche, nous nous contenterons de discuter ici un exemple musical très simple d'utilisation d'éléments relevant de la théorie des catégories. Pour une présentation beaucoup plus détaillée de l'approche fonctorielle en musique, nous renvoyons à notre étude introductive à la théorie mathématique de la musique de Guerino Mazzola [ANDREATTA 1999].

[138] Cet exemple développe une observation faite par Thomas Noll lors de la séance des Séminaires *MaMuX* de l'Ircam consacrée aux aspects algébrico-sémiotiques en musique et musicologie (9 novembre 2002). Pour montrer les ramifications analytiques du *système des dénotateurs* proposé par Guerino Mazzola [MAZZOLA 1999], Thomas Noll propose d'interpréter les modes à transposition limitée de Messiaen à travers la notion fonctorielle de *limite* et de *colimite* d'un diagramme. N'ayant pas analyse le modèle sémiotique proposé par Mazzola, notre démarche pourra paraître quelque peu obscure. Cependant, l'exemple devrait donner une idée suffisamment claire du changement de « perspective » que la théorie des catégories offre dans la formalisation des structures musicales.

de la musique, un aspect que nous approfondirons dans le chapitre suivant à travers la présentation des éléments de base de l'approche analytique de David Lewin.

L'exemple des modes à transposition limitée est paradigmatique pour deux concepts fondamentaux en théorie des catégories : la *limite* et la *colimite* d'un diagramme de flèches. Ces deux concepts mettent en évidence le rôle « structural » des flèches dans le processus de description d'un concept mathématique. Comme René Lavendhomme l'affirme, la théorie des catégories permet d'obtenir une « *définition extensionnelle et opératoire d'un concept mathématique qui est bien rendu d'une part par l'ensemble de tous les objets mathématiques répondant à ce concept et, d'autre part, par l'ensemble des transformations compatibles avec ce concept* » [LAVENDHOMME 2001, 265]. Une telle description opératoire s'appuie sur une utilisation systématique des *diagrammes*, c'est-à-dire d'ensembles d'objets et de flèches d'une catégorie. La figure suivante montre trois exemples de diagrammes ayant, respectivement, un objet et une flèche, deux objets et deux flèches, trois objets et deux flèches.

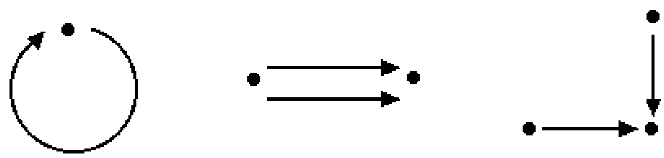


Figure 42 : Trois exemples de diagramme dans une catégorie

Pour donner une définition suffisamment générale de limite et de colimite, nous allons utiliser le troisième type de diagramme. Il faut tout d'abord introduire le concept de *cône* (ou « point de vue ») sur un diagramme. Un cône est défini par un objet *S* de la catégorie et par une collection $\{s_i\}$ de morphismes partant de *S* et aboutissant aux divers objets du diagramme de telle façon que les flèches s_i commutent avec les flèches du diagramme[139]. Prenons, par exemple, le cas d'un diagramme constitué de trois objets *A*, *B* et *C* et deux flèches : c_1 de l'objet C vers l'objet *A* et c_2 de l'objet *C* vers l'objet *B*. La figure suivante illustre le cône *S* d'un tel diagramme :

[139] Formellement, si on indique avec c_1 et c_2 les deux flèches du diagramme, la commutativité s'exprime en disant que $c_1 \bullet s_3 = s_1$ et $c_2 \bullet s_3 = s_2$ où le symbole « • » indique, comme d'habitude, la composition entre les morphismes.

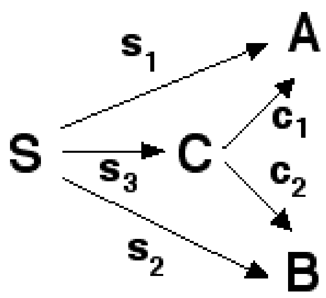


Figure 43 : Exemple d'un cône d'un diagramme de flèches

Par « dualité », on peut construire le *cocône* T en considérant la collection $\{t_i\}$ de morphismes partant des divers objets du diagramme et aboutissant à T, toujours avec la propriété de *commutativité* entre les flèches t_i et celles du diagramme. La figure suivante montre un exemple de co-cône dans le cas du même diagramme précédent (trois objets A, B, C et deux flèches c_1 et c_2) :

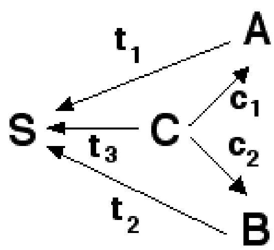


Figure 44 : Exemple d'un co-cône d'un diagramme de flèches

Pour définir la notion de *limite* d'un diagramme à partir du concept de cône, on procède comme dans la définition catégorielle du produit cartésien[140]. On considère ce qu'on peut appeler la meilleure « perspective » sur le diagramme de départ[141], c'est-à-dire le cône S tel que pour tout autre cône X sur le même diagramme, avec $\{x_i\}$ comme collection de morphismes, il existe une et une seule flèche σ de X dans S telle que pour tout index i l'équation suivante est vérifiée : $x_i = s_i \bullet \sigma$. Autrement dit, tout diagramme entre les objets X, S, A, B, C et flèches $\{x_i\}$, $\{s_i\}$ et σ est *commutatif*. La figure suivante montre le diagramme ainsi obtenu :

---

[140] En effet, la notion de *produit cartésien* entre deux ensembles est un cas particulier de limite d'un diagramme ayant trois objets et deux flèches, mais dans lequel les morphismes α et β ont C comme objet « initial » et respectivement A et B comme objets « buts ».

[141] En jargon mathématique, une telle propriété est dite « universelle ».

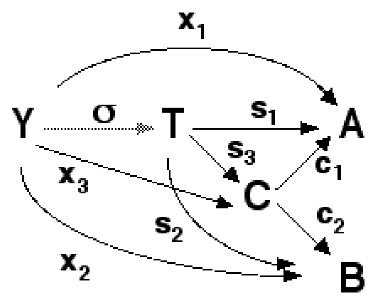


Figure 45 : Diagramme dans le cas de la limite

Le concept de *colimite* est le diagramme dual du précédent, dans le sens qu'on demande le meilleur *cocône*, c'est-à-dire l'objet T « but » des morphismes $\{t_i\}$ tel que pour tout autre *cocône* Y ayant $\{y_i\}$ comme collection de morphismes, le diagramme global commute comme le montre la figure suivante[142] :

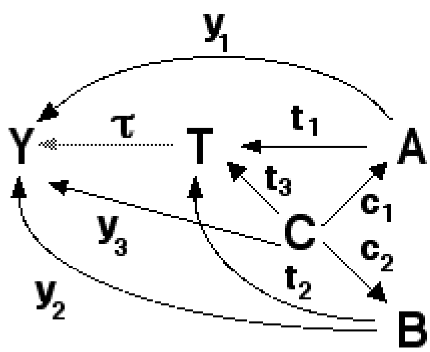


Figure 46 : Diagramme dans le cas de la colimite

Nous avons maintenant tous les éléments pour donner la représentation d'un mode à transposition limitée de Messiaen en termes de diagramme de flèches. Dans ce qu'on appelle le point de vue « objectif » de l'approche proposée par Guerino Mazzola en théorie de la musique, un mode à transposition limitée et, plus en général, toute gamme et tout accord dans une division de l'octave en douze parties égales, est une *composition locale*, c'est-à-dire un sous-ensemble non vide du **Z**-module **Z/12Z**. Comme nous l'avons mentionné, la structure de module généralise le cas d'un espace vectoriel en remplaçant la structure de « corps » **R** par celle d'« anneau »[143].

[142] On indique avec « τ » la flèche ayant l'objet T comme source et Y comme but.

[143] Un anneau est un ensemble A muni de deux lois de composition interne que l'on notera, par convention, par les symboles « + » et « × ». Par rapport à la première loi de composition, A est une structure algébrique de groupe commutatif. En outre, la multiplication « × » est associative et distributive par rapport à l'addition. Cette dernière propriété s'exprime en disant que pour tous les éléments a, b, c de l'ensemble A, les deux relations suivantes sont vérifiées : $a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$ et $(b+c)\times a=(b\times a)+(c\times a)$.

Un premier pas vers le point de vue fonctoriel consiste à considérer la *catégorie* $\mathrm{Mod}_{\mathbf{Z}}$ dont les objets sont les **Z**-modules et les morphismes sont les applications affines[144]. Dans un mode à transposition limitée, l'application affine représente un cas trop général de transformation musicale. Le concept se base, en effet, sur la transposition, cas particulier de l'application affine quand le facteur multiplicatif est égal à 1. On peut donc considérer les diagrammes dans la catégorie $\mathrm{Mod}_{\mathbf{Z}}$ formés par un objet *A* et une flèche ayant cet objet comme « objet source » et « objet but ».

Si l'on considère cette flèche comme la transposition T_n de n demi-tons, on peut essayer de calculer la *limite* d'un tel diagramme. Puisqu'un mode à transposition limitée, dans le formalisme précédent, est un objet *S* de $\mathrm{Mod}_{\mathbf{Z}}$ pour lequel il existe une transposition T_n vérifiant l'équation $T_n(S) = S$, on obtient qu'une telle propriété est vérifiée précisément par l'objet *limite S* du diagramme en correspondance du morphisme « identité » *i* entre *S* et *A*. Cette propriété est illustrée par la figure suivante[145] :

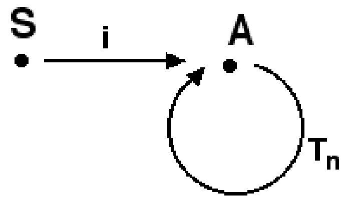


Figure 47 : Un mode à transposition limitée comme limite d'un diagramme à un seul objet et une seule flèche dans la catégorie des Z-module $\mathrm{Mod}_{\mathbf{Z}}$

On peut résumer le résultat ainsi obtenu de la façon suivante :

Tout mode à transposition limitée est la limite d'un diagramme ayant un objet et un morphisme (la transposition) qui admet cet objet comme « objet source » et « objet but »[146].

[144] Nous avons déjà rencontré un cas particulier d'application affine en musique par rapport au degré de diatonicité et de chromatisme d'un accord dans la théorie modale d'Anatol Vieru. Ce concept était étroitement lié à la notion de multiplication par 7 dans le groupe cyclique **Z/12Z**. En général, une application affine de **Z/nZ** est une fonction *f* qui transforme un élément *x* de **Z/nZ** dans $ax+b$ (modulo *n*) où *a* est relativement premier avec *n* et *b* appartient à **Z/nZ**. Dans le cas de $n=12$, le facteur multiplicatif *a* appartient à l'ensemble $U=\{1,5,7,11\}$. Une transformation affine se réduit à une simple transposition en prenant $a=1$. De même, les inversions sont des applications affines avec $a=11$.

[145] Comme Thomas Noll l'a remarqué, le diagramme dual (ou co-limite) permet de définir le concept de mode à transposition de Messiaen comme *classe d'équivalence* par rapport à la transposition.

[146] Une présentation plus détaillée aurait demandé d'introduire des concepts techniques qui dépassent largement le cadre « élémentaire » des méthodes algébriques en musique et musicologie. L'idée principale est celle de considérer le *foncteur* (contravariant) @ **Z/12Z** de la catégorie des **Z**-modules dans la catégorie des ensembles. Le foncteur @ **Z/12Z** étant un foncteur représentable, on peut appliquer le Lemme de Yoneda et réduire le problème de la classification d'accords à l'étude des foncteurs représentables. Pour une description de ces

Cette représentation a tout d'abord l'avantage de formaliser d'une façon très économique une propriété musicale uniquement en termes de transformations entre des objets dans un espace abstrait qui définit l'univers à l'intérieur duquel structures algébriques et structures musicales peuvent être analysées dans leurs liens « conceptuels ». En effet, comme le dit Lavendhomme, « *si une catégorie est une description en extension d'une structure en ce qu'elle consiste en tous les objets munis de cette structure et toutes les transformations compatibles, on peut la penser comme une sorte d'univers à l'intérieur duquel certains concepts prennent sens* » [LAVENDHOMME 2001, 296].

On pourrait prendre cette conclusion comme point de départ de toute approche transformationnelle en théorie de la musique, analyse et composition, indépendamment du fait que la théorie des catégories soit ou non le cadre mathématique de référence. Le prochain chapitre montre en effet comment certains développements analytiques récents de la *Set Theory*, en particulier l'analyse transformationnelle de David Lewin, qui semblent bien s'intégrer dans le paradigme catégorique. En outre, la possibilité d'interpréter les concepts majeurs de cette approche musicologique à l'aide de la théorie des catégories soulève le problème, d'une part, du pouvoir d'abstractions de certains outils mathématiques dans la théorisation musicale et, d'une autre part, de la portée philosophique profonde de certaines méthodes algébriques en musique et musicologie.

techniques fonctorielles dans la classification des structures musicales, on renvoie à notre étude *La théorie mathématique de la musique de Guerino Mazzola et les canons rythmiques* [ANDREATTA 1999].

1.8 *Interludium. Enquête historique sur un problème algébrique en théorie de la musique : les séries tous-intervalles*

Un des problèmes musicaux qui a le plus fasciné à la fois théoriciens de la musique, compositeurs et mathématiciens est sans doute celui de la classification des séries dodécaphoniques tous-intervalles. Ces séries ont la propriété remarquable de contenir tous les intervalles entre les notes successives (sauf l'intervalle 0 qui n'est pas permis car une série dodécaphonique n'admet pas de répétition de notes).

L'exemple plus connu d'une telle structure est probablement la série tous-intervalles employée par Alban Berg dans le premier mouvement (Allegretto gioviale) de la *Suite lyrique* pour quatuor à cordes (1926). Cette série est représentée par la figure suivante :

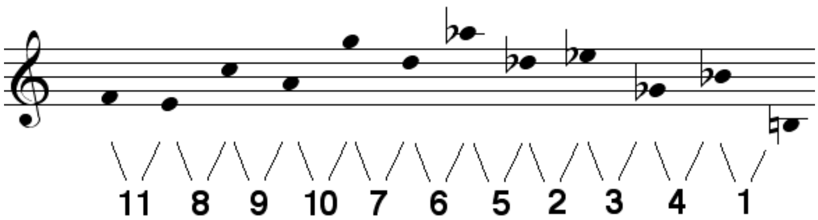


Figure 48 : La série tous-intervalles de la *Suite Lyrique* d'Alban Berg

Cependant dans ce cas, comme pour beaucoup d'autres compositeurs, l'utilisation de ce type de structure musicale ne s'accompagne pas d'une étude systématique des propriétés formelles que la série possède. Généralement, on considère l'ouvrage *Grundlagen der musikalischen Reihentechnik* d'Herbert Eimert [EIMERT 1964] comme la première étude systématique des propriétés des séries dodécaphoniques tous-intervalles, car il contient le catalogue complet des 1928 séries ayant cette propriété remarquable[147]. Cependant, au-delà de l'exhaustivité, la démarche d'Eimert ne semble pas donner une indication précise sur la stratégie employée dans l'établissement d'un tel catalogue. Les recherches menées presque à la même époque par André Riotte en France puis par Robert Morris et Daniel Starr aux Etats-Unis ont permis de mieux comprendre le caractère algébrique sous-jacent à un tel problème

[147] Le problème des séries tous-intervalles est traité dans le quatrième chapitre de l'ouvrage, avec une introduction historique qui met en évidence la difficulté de la part des théoriciens de l'époque d'étudier ces structures au-delà du cas relativement simple des séries symétriques (i.e. partagées en deux hexacordes à distance de triton). Eimert attribue au compositeur autrichien Fritz Heinrich Klein la première utilisation d'une série tous-intervalles dans une composition pour piano à quatre mains intitulée *Die Machine* (Op.1, 1921). Ernst Krenek est également cité comme l'un des premiers compositeurs à avoir étudié de façon systématique le cas des séries symétriques tous-intervalles, mais aucune référence ne concerne les outils techniques employés dans une telle démarche.

théorique, tout en gardant l'aspect « computationnel » de la démarche telle que Eimert l'avait envisagée.

André Riotte est sans doute l'un de premiers théoriciens à avoir implémenté un algorithme de calcul exhaustif des séries tous-intervalles et à avoir en même temps analysé le rapport étroit entre formalisation algébrique et composition musicale[148]. Ce passage tiré du cours « Formalisation des structures musicales » exprime très bien le point de départ du compositeur pour la recherche des séries dodécaphoniques tous-intervalles :

> « *Schoenberg lui-même avait baptisé sa méthode "composition avec douze sons qui n'ont d'autres parentés que celles de chaque son avec chaque autre". Je recherchais plutôt à l'époque (1958-1960) une organisation plus radicale, qui pût donner un sens indiscutable à la volonté de Schoenberg […]. Pour ce faire, il fallait qu'une série ne fût pas caractérisée seulement par un ordre des éléments de l'ensemble, qui revient en fait à un ordre de la totalité des intervalles vis-à-vis d'une note de référence, mais également à un ordre continûment varié de la proximité entre ces sons, c'est-à-dire à une série d'intervalles.* » *[RIOTTE 1978/1990].*

Le terme « cycle équilibré » pour indiquer une succession de hauteurs qui est à la fois une série dodécaphonique et une série d'intervalles différents est bien choisi car, à la différence des séries dodécaphoniques traditionnelles, les séries tous-intervalles ont un comportement cyclique, le douzième intervalle refermant le cycle sur la première note de la série. Cet intervalle est toujours égal au triton, comme on peut le montrer facilement en considérant la somme des onze intervalles (1+2+…+11) et en remarquant que le nombre ainsi obtenu, 66, est congruent à 6 modulo 12. D'autres propriétés ont été mises en évidence, indépendamment, par le théoricien français et les deux théoriciens américains. Par exemple, toute série tous-intervalles a deux tritons, l'un à l'intérieur de la série et l'autre « à l'extérieur » (entre la dernière et la première note de la série). En outre, une série tous-intervalles peut se transformer en une autre série par la permutation circulaire de ses intervalles qui échange le triton interne avec le triton externe[149]. Cependant, la propriété peut-être la plus intéressante des séries tous-intervalles concerne leur comportement par rapport aux opérations sérielles traditionnelles (transposition, inversion et rétrogradation) ainsi que d'autres opérations plus

---

[148] Les propriétés formelles d'une série tous-intervalles (ou *cycle équilibré* dans la terminologie proposée par Riotte) sont analysées dans deux écrits théoriques qui datent de l'époque où le compositeur était ingénieur-chercheur à l'Euratom en Italie (voir le rapport interne « Calcul des séries équilibrées » [RIOTTE 1963] et l'article « Il nanosecondo ben temperato » [RIOTTE 1969]). Pour un compte-rendu plus détaillé on pourra se référer à son cours « Formalisation des structures musicales » [RIOTTE 1978/1990] dispensé par André Riotte à l'Université Paris 8 de 1978 à 1990..

[149] Il s'agit d'un cas particulier de l'opération de « rotation » telle qu'Ernst Krenek l'a employée dans son *Lamentatio Jeremiae Prophetae* (1941). Morris appelle une telle rotation une Q-transformation [MORRIS 2001a, 152].

complexes, comme la multiplication M_5 et M_7 par les entiers 5 et 7 respectivement). On peut donc introduire une relation d'*équivalence* dans l'espace des 1928 séries tous-intervalles en considérant deux séries comme formellement équivalentes si l'une est une transformation de l'autre par une (ou une combinaison) des opérations précédentes. Cela permet de réduire le catalogue des cycles équilibrés à 267 classes d'équivalence que Morris appelle « constellations » [MORRIS 2001a, 152].

Cependant, contrairement à ce qu'on pense habituellement, le problème d'établir des séries tous-intervalles n'est pas lié à l'origine à la technique dodécaphonique. Le traité de modulation du compositeur danois Thorvald Otterström [OTTERSTRÖM 1935] offre en effet un catalogue exhaustif des séries tous-intervalles établies à partir de considérations sur la nature combinatoire du système tempéré, mais sans aucune référence à la technique sérielle[150]. Nous analyserons brièvement cet ouvrage car il offre un bon exemple de formalisation algébrique d'un problème théorique qui a émergé de considérations musicales différentes de celles qui s'imposeront par la suite dans la recherche musicale.

Le traité de Otterström, comme l'auteur le dit dans la préface, est un essai d'établissement d'une « *théorie des accords et de modulations sur des bases mathématiques* » [OTTERSTRÖM 1935, v]. Un des problèmes posés par l'auteur est le suivant : « *comment moduler dans toutes les tonalités sans répéter aucune d'entre elles et sans répéter la distance entre deux tonalités successives* » [OTTERSTRÖM 1935, 20]. Pour traiter formellement ce problème, l'auteur propose d'utiliser les nombres de 0 à 11 et de travailler avec « *comme base d'addition le nombre 12, comme en ajoutant les heures* » [OTTERSTRÖM 1935, 21][151]. Tout d'abord les nombres de 1 à 11 sont disposés dans un ordre précis appelé « forme tonale » (*key-form*). Cet ordre correspond à la suite d'intervalles à partir desquels on pourra engendrer la suite de valeurs correspondantes. Otterström propose d'utiliser la forme suivante :

1 4 3 2 5 6 7 10 9 8 11

[150] Nous avons pris connaissance de cet ouvrage à l'occasion d'une Rencontre Internationale sur l'Analyse Transformationnelle (Mannes Institute de New York, 21-24 juin 2003). Je remercie Thomas Noll de m'avoir orienté vers cet ouvrage qui est resté presque inconnu dans la communauté des théoriciens de la musique.

[151] Il s'agit donc de l'une des premières utilisations explicites de l'opération de congruence modulo 12 associée à la représentation circulaire.

Par un processus d'additions successives (modulo 12) à partir du nombre 0, on peut construire une suite de nombres qui aura la suite précédente comme série d'intervalles. Le processus est montré par la figure suivante[152] :

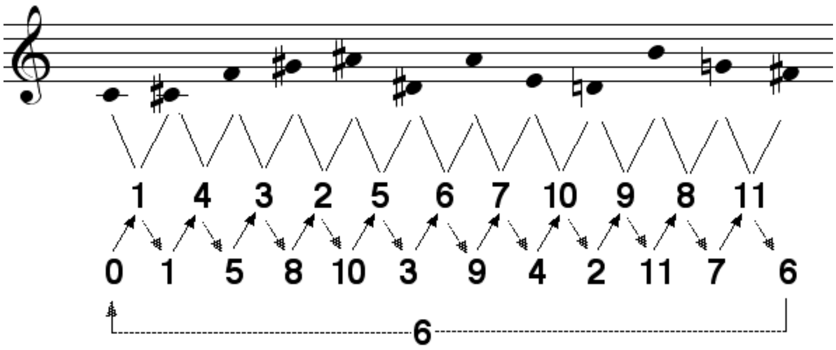


Figure 49 : Le passage entre série de hauteurs et suites d'intervalles

On a ainsi obtenu une série de valeurs de 0 à 11 dont les différences successives (soit les intervalles) sont à leur tour une suite de nombres tous différents. La série de valeurs obtenue à partir d'une *key-form* s'appelle *work-form*. D'un point de vue de la théorie de la musique, une telle suite correspond donc à une série dodécaphonique tous-intervalles. Le compositeur observe que toute *key-form* engendre quatre *work-forms.* On peut d'abord renverser l'ordre des intervalles (donc faire une rétrogradation de la *key-form*) et calculer la nouvelle suite toujours à partir de 0. On obtient, dans ce cas, une permutation de la *work-form* précédente, et donc une nouvelle série tous-intervalles :

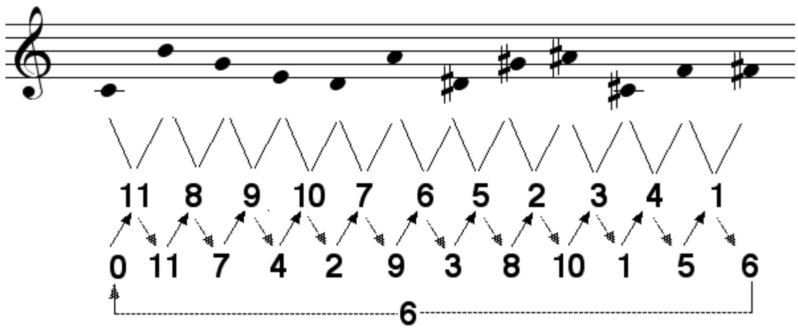


Figure 50 : Production d'une nouvelle série tous-intervalles par rétrogradation

L'addition peut se faire aussi bien à droite qu'à gauche, ce qui permet d'obtenir, toujours à partir de la même forme tonale, deux autres séries tous-intervalles .

[152] Ce processus rappelle, d'une façon étroite, la technique d'engendrement des suites modales périodiques par additions ou soustractions successives, une pratique compositionnelle proposée par Anatol Vieru et sur laquelle nous reviendrons dans la troisième partie.

Avec cette méthode, le compositeur montre qu'on peut obtenir 7708 *work-forms* différentes. Cependant, si l'on considère que les quatre formes d'une série dodécaphonique représentent, *de facto*, la même structure musicale, on peut diviser le résultat ainsi obtenu par quatre. On trouve donc 1927 séries dodécaphoniques tous-intervalles, ce qui correspond au catalogue établi par Herbert Eimert et André Riotte une trentaine d'années plus tard.

L'intérêt de la démarche du compositeur danois consiste dans le fait que la recherche des *key-forms* est menée dans le cas général du groupe cyclique **Z/nZ**. Le processus d'engendrement des *key-forms*, décrit en annexe par le mathématicien Ernest Bloomfield Zeisler, est accompagné d'une série de considérations qui montrent l'utilité de l'approche algébrique pour formaliser et résoudre un tel problème musical. Une première conséquence de la théorie, donnée sous la forme d'un théorème, est un résultat négatif.

Il n'y a pas de key-forms dans le groupe cyclique **Z/nZ** quand l'ordre du groupe est impair [OTTERSTRÖM 1935, 157].

En outre, le théoricien distingue les séries selon qu'elles peuvent être ou non partagées en deux hexacordes à distance de triton[153]. Une *key-form* dans **Z/nZ** peut être « centrale » ou « non-centrale » selon que son élément central est ou non égal à $n/2$. Les *key-forms* centrales dans le cas classique $n=12$ sont donc celles qui ont comme sixième élément le nombre 6. Elles sont 140 sur un total, comme on l'a dit, de 1927[154]. L'ouvrage contient donc la classification exhaustive des *key-forms*, soit des séries tous-intervalles, pour tout groupe cyclique d'ordre inférieur ou égal à 12. Cependant, le problème de calculer le nombre exact de *key-forms* pour un groupe cyclique d'ordre quelconque reste ouvert. Il s'agit, dit l'auteur en conclusion, « *d'un problème de partition qui n'admet probablement pas de formule* » [OTTERSTRÖM 1935, 162]. L'histoire n'a pas donné raison au théoricien danois car le problème a été résolu, plus d'un demi-siècle après, par le mathématicien autrichien Harald Fripertinger qui a utilisé les outils d'algèbre combinatoire de la théorie de Polya pour établir une formule d'énumération des séries tous-intervalles pour tout groupe cyclique[155].

---

[153] Ce concept correspond à celui de série symétrique ou non symétrique chez Ernst Krenek.

[154] Paradoxalement, les séries tous-intervalles qui ont été historiquement les plus difficiles à établir à la main sont plus de dix fois plus nombreuses que les cycles équilibrés symétriques (c'est-à-dire partageables en deux hexacordes à distance d'un triton).

[155] Ce résultat, ainsi que d'autres formules d'énumération en théorie de la musique est donné dans le mémoire intitulé *Enumeration in Musical Theory* [FRIPERTINGER 1992] et repris dans une perspective plus générale incluant aussi bien l'énumération des *partitions* que celle des *mosaïques* dans l'article « Enumeration and construction in music theory » [FRIPERTINGER 1999]. Pour une autre approche algébrique recente autour de l'énumération et de la combinatoire en théorie de la musique, voir l'article de R. C. Read intitulé « Combinatorial problems in the theory of music » [READ 1996]. Read est également le co-auteur, ensemble

Récemment, le mathématicien Franck Jedrzejewski a proposé d'utiliser la théorie des nœuds[156] pour catégoriser certaines structures musicales, en particulier les séries dodécaphoniques. Cette approche est particulièrement intéressante car elle concerne les liens entre algèbre, géométrie et topologie. À toute série dodécaphonique on peut associer un « diagramme de cordes », c'est-à-dire un cercle orienté sur lequel on a placé les notes de la série selon l'ordre d'orientation que l'on a choisi et les notes à distance de triton ayant alors été reliées La figure suivante montre le diagramme de cordes correspondant à l'un des exemples de *work-forms* que nous avons déjà discutés précédemment[157] :

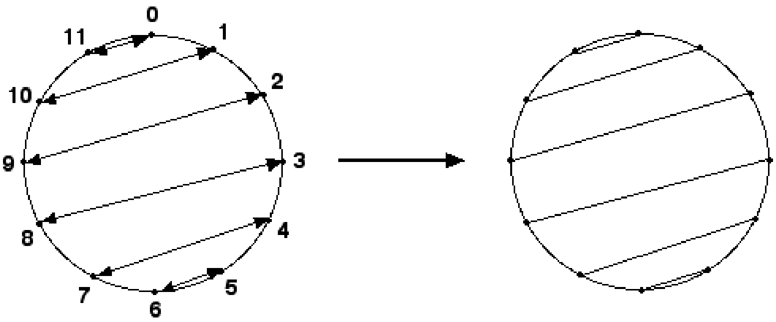


Figure 51 : Diagramme des cordes d'une séries tous-intervalles

Un des avantages d'utiliser cette représentation géométrique de la série est le fait qu'un tel diagramme identifie une série et toutes ses 48 formes possibles (transpositions, inversions et rétrogradations). En effet :

> « *La rétrogradation de la série se lit en orientant le cercle dans le sens inverse, les transpositions ayant le même diagramme de cordes puisque les relations tritoniques sont inchangées, et le renversement conduit à un diagramme de cordes obtenu par réflexion* » *[JEDRZEJEWSKI 2002b, 13].*

Ces outils permettent de donner une caractérisation structurale des séries tous-intervalles qu'on peut classer selon 63 diagrammes de cordes différents. Notons que l'ensemble de toutes séries dodécaphoniques constitue une famille de 554 diagrammes de cordes. Les séries tous-

---

avec G. Polya, de l'une des ouvrages de référence sur l'énumération en algèbre combinatoire [POLYA et READ 1987].

[156] Intuitivement un *nœud* est *« un entrelacement d'une cordelette à un seul brin fermé sur lui même »* [JEDRZEJEWSKI 2002b, 5]. Pour une introduction historique à la théorie mathématique des nœuds, voir l'ouvrage intitulé *Nœuds, genèse d'une théorie mathématique* [SOSSINSKY 1999].

[157] Notons que d'après la théorie établie par Jedrzejewski, on peut toujours effacer les chiffres et les notes et garder les liens « abstraits » entre les points du cercle, comme nous avons fait sur la figure. Le diagramme de cordes met en évidence le caractère symétrique de cette série dodécaphonique qui correspond au nœud 358 dans la table des nœuds dodécaphoniques établie par Franck Jedrzejewski [JEDRZEJEWSKI 2002b].

intervalles représentent donc plus du 10% du total, un nombre très élevé si l'on considère qu'elles ne sont que 1928 sur un total de 9.985.920 possibilités[158].

Nous ne pouvons qu'avancer des hypothèses sur les interprétations musicales de ces résultats mathématiques. Le pourcentage élevé des diagrammes de cordes des séries tous-intervalles, par rapport au nombre total de diagrammes, pourrait s'expliquer musicalement en considérant les propriétés structurelles très singulières de ces objets. Autrement dit, plus le nombre de diagrammes de cordes est élevé en correspondance d'une famille d'objets musicaux, plus la structure interne de ces objets est forte, car elle ne se laisse pas « détruire » par la relation d'équivalence imposée par le diagramme de cordes.

On touche ainsi un problème majeur en ce qui concerne la portée analytique de certaines théories musicales, à savoir la possibilité de définir une *relation d'équivalence* formelle selon les propriétés musicales qu'on veut mettre en évidence. L'utilisation des diagrammes de cordes pour la classification des séries dodécaphoniques est extrêmement prometteuse car elle tient compte des propriétés structurelles des opérations sérielles tout en réduisant la combinatoire sous-jacente à de telles transformations. La réduction de la combinatoire est « structurale », au sens précisé tout au long de ce premier chapitre. La structure algébrique de groupe de Klein, qui est cachée dans la pratique dodécaphonique, est prise en compte par le modèle qui est censé décrire formellement une propriété remarquable, comme celle des séries tous-intervalles. À partir de cet exemple, on peut souligner une caractéristique centrale des outils théoriques de type algébrique. Ils permettent de réduire la combinatoire sous-jacente à tout système tempéré en introduisant une relation d'équivalence formelle qui dépendra explicitement du groupe qu'on utilisera pour la définir.

D'un point de vue analytique, une telle démarche est riche de conséquences, car elle permet d'adapter des outils théoriques extrêmement généraux à des contextes et de propriétés musicales très particuliers. La *Set Theory* américaine, et certains développements récents, comme l'analyse transformationnelle de David Lewin ou la théorie des réseaux d'Henri Klumpenhouwer, reposent finalement sur une telle hypothèse, c'est-à-dire la possibilité d'appliquer une définition abstraite d'*équivalence* à un contexte musical bien défini. C'est donc à partir des formes algébriques possibles de cette relation d'équivalence que nous

---

[158] Le nombre de séries dodécaphoniques possibles (à une transposition, inversion et rétrogradation près) a été établi par David Reiner en utilisant le Lemme de Burnside [REINER 1984, 53]. Notons que ce nombre est inférieur au nombre (erroné) de séries dodécaphoniques différentes souvent dans cité la littérature, c'est-à-dire 479.001.600, correspondant à 12! possibilités.

aborderons dans le chapitre suivant les aspects analytiques des méthodes algébriques en musique et musicologie.

2 Aspects analytiques : la place des méthodes algébriques dans l'analyse musicale au XX^{e} siècle

Dans cette deuxième partie, nous abordons la question du rapport entre théorie de la musique et analyse musicale dans le cas d'une démarche algébrique. Nous allons d'abord situer l'approche algébrique à l'intérieur des grandes courantes analytiques du XX^{e} siècle. Pour qu'une telle entreprise puisse offrir des éléments significatifs de comparaison, il nous faudra d'abord restreindre la discussion des méthodes analytiques aux approches qui partagent, avec les outils algébriques, le caractère formel dans la description des concepts théoriques et dans l'utilisation des techniques analytiques. À partir d'une telle hypothèse, nous voulons proposer une typologie minimale dans l'utilisation des méthodes formelles en analyse musicale. Au-delà du caractère limitatif d'une telle typologie, qui ne prétend pas recenser toutes les approches formelles en analyse musicale, cela présente néanmoins l'avantage de dégager certaines catégories majeures de la pensée analytique au XX^{e} siècle et d'offrir quelques éléments pour comprendre la *singularité* d'une démarche analytique de type algébrique.

Une fois établies les caractéristiques principales des méthodes algébriques à l'intérieur des approches analytiques formelles au XX^{e} siècle, nous approfondirons l'étude d'une théorie qui a subi des développements considérables dans les dernières années tout en laissant apparemment la France en dehors de cet intéressant débat. Il s'agit de ce qu'on appelle, aux Etats-Unis, la *Set Theory*, dont nous avons mentionné dans la première partie quelques aspects majeurs en nous appuyant sur les propositions théoriques de Milton Babbitt. À la différence des présentations traditionnelles de la *Set Theory*, comme celle d'Allen Forte, la théorie des ensembles de classes de hauteurs se prête très bien à être intégrée dans une approche algébrique qui utilise pleinement les potentialités de la représentation circulaire du tempérament égal. Cette démarche nous permettra d'introduire également les concepts de base de l'analyse transformationnelle, telle que David Lewin l'a conçue à partir notamment d'une « algébrisation » des outils de base de la *Set Theory*. Nous suivrons ce processus qui a conduit à la définition d'une nouvelle méthodologie en analyse musicale, dont les ramifications mathématiques sont loin d'être épuisées. Nous consacrerons l'*Interludium* conclusif à une présentation de notre modélisation informatique des principes de base de la *Set Theory* américaine, démarche qui nous permettra de mieux préciser l'articulation complexe entre théorie algébrique et analyse musicale et de souligner ainsi le caractère computationnel de l'approche algébrique en musicologie.

2.1 Le rapport « réciproque » entre théorie et analyse musicale au XX^e siècle

Un regard rétrospectif sur les propositions théoriques majeures en matière de méthodes algébriques en musique et musicologie, montre que les démarches des trois compositeurs-théoriciens autour desquels nous avons concentré la première partie de cette étude ouvrent des problématiques qui dépassent largement le cadre de la théorie de la musique. En effet, la structure algébrique du tempérament égal, telle que Milton Babbitt, Iannis Xenakis et Anatol Vieru l'ont mise en évidence, offre un outil théorique extrêmement général et ouvert à des applications analytiques très diverses. Notre discussion sur les modes à transposition limitée de Messiaen, dont nous avons donné plusieurs formalisations algébriques, nous a permis d'offrir un exemple d'application analytique naturelle d'une proposition théorique. En particulier, la théorie des cribles de Xenakis a largement dépassé la fonction d'outil théorique et elle est devenue, à partir des recherches d'André Riotte et Marcel Mesnage, le point de départ pour une modélisation informatique en analyse musicale. Cependant, au-delà du caractère particulier des méthodes algébriques en théorie musicale, dont nous discuterons amplement l'applicabilité au domaine analytique, il est important d'envisager une discussion plus générale entre proposition théorique et démarche analytique. Nous partirons d'observations faites par Ian Bent à l'occasion de la publication d'un recueil d'écrits du musicologue allemand Ernst Kurth :

> « *Théorie et analyse sont pour certains aspects réciproques. L'analyse permet d'aborder une structure musicale ou un style à travers l'exploration [inspection], l'inventaire de ses composants et l'identification de ses forces connectives, tout en donnant une description adéquate d'une expérience vécue. La théorie permet de tirer des généralisations à partir de ces données en prévoyant ce que l'analyste trouvera dans d'autres cas à l'intérieur d'une orbite structurelle ou stylistique et en inventant [devising] des systèmes à travers lesquels d'autres œuvres, même celles qui n'ont pas encore été écrites, peuvent être générées. Inversement, si la théorie a l'intuition de comment des systèmes musicaux opèrent, alors l'analyse offre de répercussions [feedbacks] à ces intuitions imaginatives en les rendant plus pénétrants [insightful]* » [KURTH 1991, xi].

Ian Bent propose ici un double parcours entre théorie et analyse musicale. Dans un premier cas, l'analyse a une fonction exploratoire par rapport à un phénomène musical donné, serait-ce une structure, de laquelle on cherche à répertorier les composantes, ou bien un style musical, dont on essaie d'identifier les forces connectives entre les différentes structures.

Depuis cette première perspective, la théorie généralise les données analytiques tout en créant un système qui pourra aussi avoir, selon Ian Bent, un pouvoir « synthétique », dans le sens qu'il permettra d'établir une réversibilité entre proposition théorique et application compositionnelle[159]. Soulignons, au passage, l'une des caractéristiques majeures, selon le musicologue anglais, de toute démarche analytique, à savoir celle d'offrir une « description adéquate » par rapport à une « expérience vécue ». L'analyse a donc tout d'abord un caractère « descriptif », à la différence d'une théorisation, dont le caractère « prédictif » mis en évidence par Bent se mêle aussi à l'aspect « prescriptif », surtout quand elle concerne l'activité compositionnelle[160].

Au XX^e^ siècle, l'exemple paradigmatique de la réversibilité entre démarche « descriptive » en analyse musicale et caractère « prescriptif/prédictif » d'une proposition théorique est offert par Heinrich Schenker, « *le plus original et celui qui a le plus influencé la théorie analytique du XX^e^ siècle* »[161]. Sans vouloir entrer dans une analyse de la théorie schenkerienne, qui reste en marge de nos préoccupations « algébriques », nous pouvons partir de certains éléments majeurs de cette approche analytique pour offrir un premier exemple historique qui va dans le sens d'une articulation profonde entre proposition théorique, démarche analytique et application compositionnelle[162]. La réversibilité est une conséquence du caractère hiérarchique de l'approche schenkerienne, qui prend en compte plusieurs niveaux d'analyse, de l'*avant-plan* de l'œuvre [*Vordergrund*], qui représente la surface de la partition, jusqu'à la structure fondamentale ou *Ursatz*. En réalité, cet ordre, qui exprime le caractère « analytique » de l'approche schenkerienne, est « réversible » grâce à des techniques particulières dites *prolongations*, qui permettent notamment de remonter à la surface musicale à partir de la structure fondamentale. Il s'agit, donc, de la réversibilité entre approche analytique (du *Vordergrund* à l'*Ursatz*) et approche compositionnelle (de la structure fondamentale à la

---

[159] Nous discuterons ce deuxième type de « réversibilité » dans le prochain chapitre, qui sera donc dédié à certaines applications compositionnelles de quelques outils théoriques présentés jusqu'ici.

[160] Célestin Deliège a explicité en détail l'articulation entre le « descriptif », le « prescriptif » et le « normatif » en musique dans l'ouvrage *Invention musicale et idéologies* [DELIÈGE 1986]. Pour une discussion plus récente sur cette articulation, voir aussi l'essai du même auteur sur la « relation entre l'invention musicale et ses théories » [DELIÈGE 1995].

[161] C'est ainsi que s'exprime Ian Bent, toujours dans la section « Théorie » du *New Grove* [PALISCA et BENT 2001-2002].

[162] Les écrits de Schenker ont connu aux Etats-Unis un énorme succès à partir des années trente, à la différence de la tiède réaction de la musicologie européenne. En France, en particulier, on peut dire que l'approche schenkerienne a commencé à intéresser les musicologues vers la moitié des années quatre-vingt. L'ouvrage de référence est le livre de Célestin Déliège intitulé *Les fondements de la musique tonale : Une perspective post-schenkerienne* [DELIÈGE1984]. Pour une introduction à la théorie analytique d'Heinrich Schenker, voir aussi l'ouvrage de Nicolas Meeùs [MEEÙS 1993].

surface de l'œuvre), l'articulation étant possible grâce à la *formalisation* et *représentation* graphique des niveaux intermédiaires[163].

Nous avons, à vrai dire, employé le terme *formalisation* dans un sens bien différent de celui utilisé jusqu'ici dans le cas des méthodes algébriques. Cependant, en analysant l'influence que cette démarche théorique a eu sur l'évolution de certaines approches analytiques au XXe siècle, on peut constater que la « formalisation » est précisément le moteur qui a permis d'articuler analyse et théorie musicale comme initialement suggéré par Ian Bent[164].

Cependant, si l'on reprend la deuxième partie de la réflexion du musicologue anglais, on peut considérer que la théorie est préexistante à l'analyse, dans le sens que l'analyse offre des retours à des intuitions théoriques sur la nature et la structure des objets musicaux. Nous voulons ici développer cette deuxième perspective sur l'articulation entre théorie musicale et analyse, en essayant de dégager une typologie minimale en ce qui concerne les « intuitions théoriques » qui ont été rendues plus « pénétrantes », pour reprendre la formule d'Ian Bent, à travers leur consolidation en tant que pratique analytique. Cet essai de typologie minimale en analyse musicale relève de notre insatisfaction des catégories théoriques et analytiques qu'on retrouve dans les ouvrages de références sur l'analyse musicale au XXe siècle. Nous procéderons par étapes, en discutant d'abord deux exemples de catégorisation des démarches théoriques au XXe siècle et leur application en analyse musicale. Le premier exemple concerne la typologie « historique » proposée par Ian Bent dans son ouvrage *Analysis* [BENT et DRABKIN 1987][165]. Cette typologie est basée sur les quatre périodes suivantes :

---

[163] Le problème de la représentation en analyse musicale, explicité peut-être pour la première fois grâce aux travaux de Schenker, mérite également d'être souligné. En effet, le postulat sur lequel la méthode schenkerienne se fonde concerne la possibilité d'abstraire une structure profonde à partir d'une partition tout en gardant une trace graphique des transformations analytiques employées.

[164] Pour comprendre la place de la formalisation dans la théorie schenkerienne, il faudrait analyser les écrits des théoriciens américains des années soixante. En particulier, Michael Kassler a le premier proposé d'étudier la théorie schenkerienne comme un modèle formel qui pouvait être implémenté et servir de point de départ pour une analyse musicale assistée par ordinateur [KASSLER 1967]. Curieusement, l'ouvrage de Schenker, qui reste ancré dans l'analyse de la musique tonale, a eu une influence considérable sur la naissance et le développement de la *Set Theory,* une approche analytique consacrée, principalement, au répertoire atonal de la musique du XXe siècle. Une analyse comparée des deux traités théoriques d'Allen Forte, *The Structure of Atonal Music* [FORTE 1973] et *Introduction to Schenkerian Analysis* [FORTE 1982], montre les ramifications profondes de la pensée schenkerienne dans l'établissement des principes de base de la théorie des ensembles de classes de hauteurs.

[165] Le livre a été traduit récemment en français avec une « mise à jour » des références bibliographiques qui est extrêmement utile pour comprendre les développements très importants de certaines idées en théorie et analyse musicale dans les dix dernières années. Une partie importante de ces développements concerne directement certains théoriciens français, en particulier André Riotte et Marcel Mesnage, qui ont essayé de formuler les principes de base d'une démarche analytique formelle assistée par ordinateur.

1 1920 - 1945 : théorie de la tension et niveaux structurels (Kurth/théorie de la *Gestalt* et Heinrich Schenker)

2 1945 - 1960 : linguistique, cybernétique et unité thématique (Chomsky, Moles et Meyer, Réti)

3 1960 - 1975 : *Set Theory*, ordinateurs et d'autres développements (phénoménologie, Xenakis, sémiologie musicale)

4 Après 1975 : grammaires de la musique (Lerdahl et Jackendoff, Baroni).

Une telle démarche, ancrée dans la subdivision de la discipline musicologique en tranches historiques hétérogènes, ne permet pas, à notre avis, de comprendre les liens parfois très étroits entre des propositions théoriques appartenant à des périodes historiques différentes. Cette démarche méthodologique est également assez problématique dans un autre ouvrage de référence, publié la même année que le texte précédent. Il s'agit du guide à l'analyse musicale de Nicholas Cook [COOK 1987] selon lequel les différentes méthodes en analyse musicale peuvent se regrouper de la façon suivante :

1. Méthodes traditionnelles dans l'analyse (Donald Tovey, A. B. Marx, C. Rosen)
2. Analyse schenkerienne
3. Approches psychologiques de l'analyse (Thomas Clifton, Leonard Meyer, Rudolph Reti)
4. Approches formelles de l'analyse
5. Set Theory : Allen Forte
6. Sémiotique : Nattiez
7. Techniques d'analyse comparative (par ordinateur : Michael Kassler)
8. Analyse mélodique en ethnomusicologie : Charles Adams
9. Approche fonctionnaliste en ethnomusicologie (travail sur le terrain) : John Blacking.

Avant de discuter notre proposition de typologie minimale en analyse musicale, précisons encore une fois que cette catégorisation concerne l'articulation entre des propositions théoriques et des démarches analytiques ayant, dans les deux cas, une forte composante formelle. En outre, cette typologie permet de situer correctement la démarche algébrique par rapport à d'autres approches analytiques qui relèvent également, pour reprendre la formulation initiale d'Ian Bent, d'un même caractère formel de l'« intuition théorique » initiale. Cette typologie comprend les quatre « catégories » théoriques suivantes :

- Théories informationnelles

- Théories sémiotiques
- Théories génératives et grammaires
- Théories algébriques

Nous allons maintenant développer, de façon assez succincte, chacune de ces catégories, simplement pour dégager quelques éléments conceptuels qui nous permettrons de comprendre la place des méthodes algébriques dans les propositions théoriques et analytiques du XX^{e} siècle.

2.1.1 Théories Informationnelles

Le point de départ de cette approche théorique est une discipline mathématique qui s'est développée d'abord aux Etats-Unis et ensuite en Europe autour des années cinquante. Il s'agit d'une théorie qui est née d'abord pour résoudre un problème technique concernant la quantité d'information qui est censée être transmise par un support matériel de communication, comme le téléphone ou le télégraphe. Cependant, la dimension artistique, et musicale en particulier, est déjà présente dans l'écrit fondateur de la théorie, à savoir le livre de Claude E. Shannon et Warren Weaver intitulé *The Mathematical Theory of Communication*. Le passage suivant est tiré de la partie conclusive du livre, partie écrite par Weaver et qui concerne certaines « *contributions récentes de la théorie de l'information* » :

> « *Cette théorie est si générale, qu'on n'a pas besoin de dire quelles sortes de symboles sont considérés - que ce soient des mots ou des lettres écrites, ou des notes de musique, ou des mots parlés, ou de la musique symphonique ou des images* » [SHANNON et WEAVER 1949, 114].

C'est ainsi que la notion technique *d'information* (d'un message) devient « mesure de la structure de la musique », pour reprendre le titre de l'un des premiers articles d'analyse musicale s'aidant de la théorie de la communication[166].

Ce qui permet d'interpréter l'information d'un message en termes d'information musicale est un concept technique que le mathématicien George Birkhoff avait déjà essayé de formaliser et d'appliquer au domaine artistique, non sans des difficultés majeures[167]. Ce concept, qui s'est révélé particulièrement adapté pour une description de la structure musicale,

[166] Voir « Information as a measure of structure in Music » [COONS et KRAEHENBUEH 1958].

[167] George Birkhoff avait proposé au début des années trente une théorie mathématique de la perception esthétique ayant comme cas particulier celui de la perception musicale. L'ouvrage, qui contient les thèses de Birkhoff sur le caractère computationnel de la dimension esthétique, s'intitule *Aesthetic Measure* [BIRKHOFF 1933]. La mesure esthétique d'un objet d'art est ici définie comme le rapport entre l'« ordre » de l'objet (en tant que symétrie, harmonie de sa forme etc.) et sa « complexité ». D'où tous les efforts du mathématicien pour définir la « complexité » d'un objet artistique et adapter cette définition universelle à la musique.

est celui de *redondance*, qu'on pourrait définir de façon informelle comme le degré de répétition à l'intérieur d'un flux d'information. Le concept de *redondance*, qui est donc avant tout une notion technique, devient l'un des paramètres privilégiés permettant de caractériser le style musical. Pour résumer en une phrase la philosophie qui soutient toute approche informationnelle en musique, on pourrait dire que plus la *redondance* est grande, moins d'« information » est véhiculée par un style musical, plus le style est « répétitif »[168].

Cette philosophie anime la réflexion théorique et esthétique de Leonard Meyer, qui a proposé à partir de la fin des années cinquante une théorie de la signification musicale [*musical meaning*] comme une transposition des thèses de la théorie de l'information au domaine de l'esthétique musicale. Ce *transfert d'intuitions*, pour reprendre un concept qui a été central dans la première partie de cette étude, est bien explicité par le passage suivant :

> « *Dans l'analyse de l'expérience musicale, plusieurs concepts que j'ai proposés […] trouvent une analogie directe, et parfois une véritable équivalence, avec la théorie de l'information. En particulier, l'importance de l'incertitude [uncertainty] dans la communication musicale et la* ***nature probabiliste du style musical*** *[…]* » [MEYER 1957/1967][169].

Autrement dit, un *style musical* est un système d'atteintes [*expectations*] et la signification découle par un processus de frustration et d'accomplissement qui peut être quantifié, comme plusieurs théoriciens l'ont proposé par la suite. Parmi les modèles « computationnels » de l'approche informationnelle en analyse musicale ouverte par Leonard Meyer, nous citerons simplement celui de l'*implication-réalisation* proposé par Eugene Narmour à la fois comme un développement des idées de Meyer mais aussi comme l'une des premières constructions théoriques qui s'opposent explicitement à la démarche schenkerienne[170].

---

[168] Il serait intéressant d'analyser la panoplie d'articles qui ont vu le jour à partir des années soixante. On pourrait probablement montrer comment les analyses musicales souffrent, en général, d'un grand défaut qui est, avant tout, un défaut technique. Il y a des hypothèses sous lesquelles les formules mathématiques de la théorie de l'information peuvent s'appliquer, et ces hypothèses n'ont jamais été véritablement considérées par les analystes. Nous avons traité ce problème dans un travail académique précédent, auquel nous renvoyons pour une discussion plus approfondie de la démarche informationnelle en analyse musicale dans ses rapports avec la perception esthétique [ANDREATTA 1997b].

[169] C'est nous qui soulignons un aspect qui inaugure une démarche computationnelle dans l'analyse du style musical. D'où l'importance du concept de *redondance* qui est présent dans tout style de musique et qui peut être calculé à travers la théorie des probabilités. Notons qu'on retrouve la même approche dans le traité *Théorie de l'information et perception esthétique* du théoricien français Abraham Moles [MOLES 1958].

[170] La critique du modèle de Schenker est développée par Narmour dans l'ouvrage *Beyond Schenkerism* [NARMOUR 1977] qui ouvre le débat sur la portée cognitive d'une théorie analytique et anticipe, dans ce sens, les thèses contenues dans les deux ouvrages de référence sur le modèle de l'*implication-réalisation* en analyse musicale : *The Analysis and Cognition of Basic Melodic Structure* [NARMOUR 1989] et *The Analysis and Cognition of Melodic Complexity* [NARMOUR 1992].

2.1.2 Théories sémiotiques

Le début d'une approche sémiotique en musicologie date de la moitié des années soixante. On peut considérer l'article de Nicolas Ruwet comme le premier essai de définition de la musique en tant que système sémiotique « *partageant un certain nombre de traits communs - tels que l'existence d'une syntaxe - avec le langage et d'autres systèmes de signes* » [RUWET 1966/1972, 100]. En suivant une démarche qui est sans doute influencée par la théorie de l'information, la musique est ici conçue comme la donnée d'un *code* et d'un *message*. De plus, comme dans le cas de la théorie de l'information, l'hypothèse de la théorie sémiotique appliquée à la musique repose sur une double articulation, une première allant du message au code et une deuxième du code au message. La démarche analytique concerne la première partie de cette articulation (du message au code), tandis que partir du code pour aller vers le message est caractéristique d'une démarche synthétique. L'analyse est la décomposition et la manipulation du message de façon à « *dégager les unités, classes d'unités et règles de leurs combinaisons, qui constituent le code* » [RUWET 1966/1972, 100].

Comme dans le cas de l'approche informationnelle, la démarche sémiotique envisage le *code* sous un double aspect : un aspect « taxinomique » qui concerne l'inventaire des éléments qui le constituent et un aspect « fonctionnel » qui vise à repérer les règles de combinaison et de transformation de ces éléments. Ces deux aspects du code musical sont étroitement liés, car la procédure de segmentation s'appuie directement sur le critère de « répétition » et sur celui de « transformation »[171]. L'étude de Ruwet est fondatrice d'une démarche qui est sous-jacente à toute application analytique des méthodes algébriques. Cette démarche, qui prendra ensuite l'appellation d'analyse *paradigmatique*, vise à constituer une segmentation sur des critères paramétriques d'équivalence. Comme il l'affirme dans la partie conclusive de son étude, « *la syntaxe musicale est une syntaxe d'équivalence* » [RUWET 1966/1972, 133] et cette équivalence, qui n'est pas traitée d'un point de vue mathématique, s'appuie néanmoins sur la notion de « paramètre » et de « transformation ». Les diverses unités ne sont pas des entités statiques, comme le voudrait une conception purement taxinomique de la forme musicale, mais sont plutôt des structures variables qui se transforment tout au long de la pièce. D'où la nécessité, de la part de l'analyste, d'« *inventer*

---

[171] Le concept de « répétition » comme critère de base de l'application des méthodes linguistiques en analyse musicale est approfondi dans un écrit postérieur intitulé « Quelques remarques sur le rôle de la répétition dans la syntaxe musicale » (1967), republié dans *Langage, musique, poésie* [RUWET 1972, 135-148]. Pour une analyse récente du concept de répétition à la base de la technique musicale de l'*ostinato*, voir aussi l'ouvrage de Laure Schnapper intitulé *L'Ostinato, procédé musical universel* [SCHNAPPER 1998].

des procédures de découverte destinées à reconnaître, précisément, les rapports de transformation entre éléments » [RUWET 1966/1972, 133].

Notons que cette démarche « transformationnelle », qui reste une hypothèse à explorer dans l'écrit de Ruwet, a été reprise, de façon très différente, par deux des représentants majeurs de l'approche sémiologique et sémiotique en musique : Jean-Jacques Nattiez et David Osmond-Smith. Dans son écrit sur la situation de la sémiologie musicale pour le numéro spécial de la revue *Musique en jeu* consacré à la sémiologie de la musique (1971), Jean-Jacques Nattiez reprend explicitement l'articulation code/message introduite par Ruwet quand il affirme qu'il faut « *partir de l'analyse empirique des éléments constitutifs du texte pour remonter vers le "système"* » et puisque l'activité analytique consiste dans le fait « *d'inventorier toutes les récurrences de traits stylistiques et d'en établir la combinatoire, les modèles formels essentiels seront fournis par la théorie de l'information, l'informatique, les statistiques et les mathématiques* » [NATTIEZ 1971, 15]. Ces indications n'ont peut être pas été suffisamment suivies par les sémioticiens et sémiologues de la musique, ce qui explique probablement le fait qu'il n'y a pas eu, comme on peut le constater de nos jours, une « *constitution cohérente et systématique d'une sémiologie musicale* », telle que Nattiez l'avait prévue.

En effet, une des difficultés majeures de l'approche sémiotique en analyse musicale reste liée au concept de transformation, dont le caractère formel demande une formulation rigoureuse en termes mathématiques. Pourtant, un regard rétrospectif sur les écrits théoriques de l'époque montre que cette notion a été à la base de ce qu'on pourrait appeler une démarche sémiotique formelle en analyse musicale. Cette approche a été introduite par David Osmond-Smith dans un article intitulé « Iconic relations within formal transformation » [OSMOND-SMITH 1973]. Le concept de transformation est défini à travers une analyse d'opérations musicales qui sont susceptibles d'être explicitées dans un langage formel. L'intérêt de cette démarche est lié au fait qu'elle s'applique aussi bien au domaine des hauteurs qu'au domaine rythmique.

En ce qui concerne le domaine des hauteurs, à côté d'opérations classiques comme la transposition et l'inversion, D. Osmond-Smith considère d'autres transformations parmi lesquelles nous citerons l'*expansion* (c'est-à-dire l'addition de sous-unités), la *contraction* (en tant que soustraction de sous-unités), le *déplacement mélodique* (qui consiste à transposer un profil mélodique sans respecter exactement le contenu d'intervalles, mais en l'adaptant au nouveau contexte tonal), l'*augmentation* et la *diminution* (en tant que multiplication ou division par une valeur numérique constante). Les opérations précédentes, à l'exception du déplacement mélodique, s'appliquent également au domaine des rythmes, ce qui permet selon l'auteur de mettre en évidence le caractère général d'une telle approche formelle. Un aspect particulier de cette approche « transformationnelle » nous semble très proche de la démarche analytique de type algébrique, démarche que nous allons bientôt discuter. En effet, dans toutes les transformations formelles utilisées, nous dit l'auteur,

> « *il y a une tension entre le fait de préserver l'identité d'un tout et de ses composantes. Un extrême est offert par l'opération de réordonnance et de rétrogradation, dans laquelle l'identité des sous-unités est entièrement conservée mais l'unité globale est co mpromise […]. À l'autre extrême, on peut considérer les opérations d'augmentation et de diminution, dans lesquelles les sous-unités individuelles sont modifiées de façon systématique mais l'identité du tout est préservée* » [OSMOND-SMITH 1973, 49].

Les méthodes algébriques sauront formaliser cette intuition à travers le concept d'*action* d'un groupe sur un ensemble, une notion qui est centrale dans la démarche analytique transformationnelle introduite par David Lewin dans sa généralisation de la *Set Theory* d'Allen Forte. Une observation faite par D. Osmond-Smith dans un écrit postérieur à propos de la démarche de Forte nous permet d'anticiper sur un élément central de l'approche transformationnelle de David Lewin. Dans l'écrit « Introduction générale à une méthode d'analyse sémiotique formelle de la musique », le théoricien anglais discute le problème du rôle de la mémoire (à court et à long terme) dans la perception d'une structure musicale par rapport à une démarche analytique. Il cite les techniques d'imbrication développées par Allen Forte dans *The Structure of Atonal Music* pour analyser les contenus intervalliques d'une série de segments imbriqués les uns dans les autres. À partir de cette idée, D. Osmond-Smith propose de « *définir le module d'imbrication d'après une estimation […] de la quantité d'information musicale que la mémoire à court terme peut retenir, tout en notant […] la matière musicale associée avec toute unité déjà apparue* » [OSMOND-SMITH 1975, 183]. Une discussion approfondie de cette position aurait sans doute besoin de mieux préciser la notion d'« information musicale », que D. Osmond-Smith ne semble aucunement lier à l'approche informationnelle que nous avons présentée. Cependant, le fait d'établir une analyse musicale sur des bases cognitives et de prendre en compte les effets de la segmentation et de l'imbrication sur la mémoire à court terme est une démarche assez proche de celle envisagée par Narmour à partir de la lecture des thèses de la théorie de l'information par L. Meyer. Nous n'irons pas plus loin, dans cette discussion, sur l'articulation entre théorie et analyse dans l'approche sémiotique. Il nous semble cependant intéressant de souligner le fait que c'est précisément à partir de la notion d'imbrication dans le processus de segmentation et du rôle de la mémoire au sein d'une démarche analytique que David Lewin bâtira son approche transformationnelle de la *Set Theory*.

Dans les deux approches analytiques discutées jusqu'à maintenant (approche informationnelle et approche sémiotique), nous avons privilégié l'étude sur le parcours allant du *message* musical au *code*. Cependant, à partir de la théorie de l'information, ou même auparavant si l'on croit à une possibilité de formaliser de façon rigoureuse la théorie schenkerienne, l'articulation entre *message* et *code* se fait dans les deux directions. Ruwet a explicité le problème en disant que dans la démarche allant du code au message, le processus d'engendrement est mené en utilisant des « *règles de dérivation qui peuvent […] être explicitées rigoureusement* » [RUWET 1966/1972, 101]. Cela nous conduit à la troisième et dernière catégorie de notre typologie minimale en analyse musicale formalisée : l'approche générative et les grammaires musicales.

2.1.3 Théories génératives et grammaires

Bien que l'élaboration de grammaires génératives et transformationnelles puisse être considérée, selon certains musicologues, comme « *la deuxième école de la sémiologie musicale* »[172], cette approche formelle relève d'une articulation entre théorie et analyse différente des deux autres catégories analytiques. L'idée de grammaire générative remonte à Noam Chomsky qui a développé cette notion dans deux textes principaux : *Structures syntaxiques* [CHOMSKI 1956] et, une dizaine d'années plus tard, dans *Aspects de la théorie syntaxique* [CHOMSKY 1965]. L'un des premiers qui a essayé de transposer les idées de Chomsky en musique a été Christopher Longuet-Higgins, dont nous avons déjà mentionné l'aspect visionnaire en ce qui concerne l'étude de la représentation de l'espace musical.

Dans la perspective de Longuet-Higgins, le problème d'une grammaire générative pour la musique est lié, intrinsèquement, au problème de la perception musicale. Les deux écrits qui inaugurent l'application des théories chomskiennes à la musique sont « The Perception of melodies » [LONGUET-HIGGINS 1976/1987] et « The Grammar of Music » [LONGUET-HIGGINS 1978/1987]. Dans ce dernier écrit, les concepts de la théorie générative de Chomsky sont appliqués aussi bien à la perception des relations tonales qu'à la perception du

[172] Voir, par exemple, l'article de François-Bernard Mâche intitulé « Les procédures d'analyse sémiologique » [MÂCHE 1986/2000, 242]. Nous préférons cependant considérer les grammaires génératives comme une approche indépendante de toute démarche sémiotique et donc constituant une catégorie à part entière. Notons également que le concept de « grammaire transformationnelle » n'est aucunement lié à la notion de

rythme. L’écrit contient plusieurs éléments novateurs dans le discours théorique sur la musique et la prise en compte du caractère cognitif de l’expérience musicale inaugure en même temps une nouvelle discipline, la « Psychologie cognitive de la musique ». Le problème d’une grammaire générative est lié, selon C. Longuet-Higgins, aux mécanismes perceptifs, un aspect qui sera l’hypothèse de départ de Fred Lerdahl et Ray Jackendoff dans leur approche générative de la musique tonale [LERDAHL et JACKENDOFF 1983]. Cependant, à la différence de la démarche analytique des deux théoriciens américains, l’application des théories de Chomsky à la musique par C. Longuet-Higgins relève d’une perspective qui considère la *formalisation* comme une étape privilégiée du processus de théorisation.

C. Longuet-Higgins est aussi l’un des premiers théoriciens à avoir envisagé une réflexion sur l’intelligence artificielle et la cognition musicale à partir d’une étude computationnelle des grammaires génératives. Comme il l’affirme dans un article récent intitulé « Artificial intelligence and musical cognition », une étape préalable à toute représentation des structures musicales en termes computationnels réside dans la construction d’une « *théorie formelle précise de la structure musicale et pour cela des analogies peuvent être établies entre la musique et le langage naturel* » [LONGUET-HIGGINS 1994, 103-113]. Ces analogies concernent aussi bien les structures métriques, qui « *ressemblent aux structures syntaxiques en étant générées par des grammaires de structure de phrases* [phrase-structure grammars] » [LONGUET-HIGGINS 1994, 103]. En ce qui concerne le domaine des hauteurs, Longuet-Higgins met en évidence le fait que les intervalles dans la musique occidentale forment une structure de *groupe* qui est engendrée par l’octave, la quinte et la tierce. Cette structure est donc le point de départ de toute application computationnelle, pourvu qu’elle ne soit pas identifiée avec le cas particulier du groupe cyclique, valable exclusivement pour un tempérament égal.

Nous voudrions terminer cette présentation de l’application de la théorie des grammaires génératives à la musique par une discussion sur la démarche computationnelle en analyse musicale proposée par le musicologue italien Mario Baroni qui, à la différence de C. Longuet-Higgins, ne prend pas comme point de départ la nature algébrique de l’organisation des hauteurs et des rythmes. La publication récente de l’ouvrage *Le regole della musica* [BARONI *et al.* 1999] permet de suivre l’élaboration théorique du concept de grammaire

---

transformation formelle telle que nous l’avons esquissée à partir des deux études de David Osmond-Smith ni à celle d’analyse transformationnelle au sens de David Lewin.

transformationnelle à partir des idées de Chomsky et l'articulation entre théorie de la musique et analyse musicale. Par rapport à la typologie présentée par Ruwet, qui voyait la théorie des grammaires génératives comme des approches « compositionnelles » allant du code au message, Baroni inscrit sa démarche dans une perspective computationnelle qui est à la base analytique. Comme il affirme,

> « *la tradition de la théorie de la musique en occident […] est un essai constant de conjuguer la compétence intuitive et la connaissance rationnelle des règles. […] Le but de notre approche n'est pas de générer de la musique avec l'ordinateur ; s'il est vrai que la production musicale était nécessaire, l'objectif était simplement de vérifier si l'ensemble des règles était véritablement explicite, complet et non-contradictoire* » [BARONI *et al.* 1999, xi].

L'articulation entre théorie et analyse est développée en particulier dans le chapitre qui considère le problème du style comme l'un des champs d'application des grammaires génératives à l'analyse musicale. L'analyse est donc, avant tout, analyse d'un répertoire donné, ce qui relève d'une position épistémologique très différente de celle, par exemple, de l'approche informationnelle ou de l'approche sémiotique. Dans le cas de la théorie de l'information, comme nous avons essayé de le montrer, la théorie constitue un cadre général qui peut s'appliquer, a priori sans aucune restriction, à tout *message*. Autrement dit, le répertoire change mais cela ne met pas en cause la théorie formelle. Dans le cas des théories génératives, chaque répertoire défini un ensemble de conventions grammaticales dont l'analyse permet de tirer les *règles* spécifiques au corpus choisit. L'aspect computationnel est à la fois une conséquence du caractère formel des grammaires transformationnelles, mais aussi une condition nécessaire pour comparer des analyses sur différents *messages* appartenant au même répertoire.

On pourrait partir de cette modalité d'articulation entre théorie et analyse pour mettre en évidence deux des enjeux fondamentaux de l'approche algébrique : créer une théorie formelle suffisamment générale pour être adaptée à plusieurs répertoires sans changement de ses principes de base et rendre calculable le processus de codification des outils théoriques comme étape préliminaire d'une application analytique.

Il nous semble que ces deux caractéristiques sont présentes dans toutes les approches analytiques qu'on peut qualifier d'« algébriques ». Mis à part le cas de la *Set Theory* américaine et de ses ramifications transformationnelles, l'approche algébrique anime également les travaux d'André Riotte et Marcel Mesnage sur la modélisation informatique de partitions, les approches néo-riemanniennes, l'application de la théorie mathématique de la musique à l'analyse assistée par ordinateur et certains travaux d'ethnomusicologie de Marc Chemillier[173]. Ne pouvant pas détailler chaque approche analytique précédente, nous avons choisit de nous concentrer sur la relation entre outils théoriques et application analytique dans la *Set Theory* américaine, aussi bien dans sa forme classique que dans ses ramifications transformationnelles plus récentes. Cela nous offrira la possibilité de mettre encore plus en évidence le caractère computationnel d'une approche algébrique dans la musicologie du XX^e^ siècle.

---

[173] Nous avons déjà mentionné à plusieurs reprises l'approche computationnelle introduit en analyse musicale par André Riotte et Marcel Mesnage. En ce qui concerne les théories néo-riemanniennes, nous renvoyons à la thèse d'Eduard Gollin intitulée *Representations of space and conceptions of distance in transformational music theories* [GOLLIN 2001], sans doute une des meilleures discussions du fondement algébrique de l'approche néo-riemannienne en analyse musicale. En ce qui concerne les applications analytiques de la théorie mathématique de la musique, en particulier par le logiciel *Rubato*, voir *The Topos of Music* [MAZZOLA 2003]. La voie algébrique en ethnomusicologie a été ouverte par Marc Chemillier avec une étude systématique des structures de hauteurs dans le répertoire de harpe de la tribu Nzakara ainsi que de certaines propriétés d'imparité rythmique de la tribu des Pygmés Aka d'Afrique centrale. Pour une étude introductive aux aspects formels dans la recherche ethnomusicologique, voir l'article « Ethnomusicology, Ethnomathematics. The Logic Underlying Orally Transmitted Artistic Practices » [CHEMILLIER 2002]. L'énumération des structures ayant les propriétés d'imparité rythmique est décrite à l'aide d'outils d'algèbre combinatoire dans l'article « Computation of words satisfying the "rhythmic oddity property" (after Simha Arom's works) » [CHEMILLIER et TRUCHET 2003].

2.2 *Une introduction analytique à la Set Theory d'Allen Forte et à la théorie transformationnelle de David Lewin*[174]

Nous avons montré, au cours du premier chapitre, comment depuis les années soixante la recherche théorique en musique s'est penchée sur des questions de formalisation des structures musicales. Les idées et les outils proposés par les compositeurs-théoriciens dont nous avons d'étudié quelques aspects théoriques ont trouvé leur véritable dimension musicologique à l'intérieur d'une démarche analytique qui a pris le nom, aux États-Unis, de *Set Theory*. Dans son expression la plus élémentaire, la *Set Theory* propose un protocole d'écriture sous forme symbolique des collections de notes (accords, agrégats, profils mélodiques, etc.) considérées par l'analyste comme formant des unités pertinentes au sein de l'œuvre étudiée. Cette écriture facilite par la suite la mise en relation de ces collections via des concepts ensemblistes (comme l'inclusion et la complémentarité) et algébriques (en particulier autour de la notion de transformation)[175]. Au-delà des similitudes de surface, essentiellement liées à la dimension formelle commune à l'approche « classique » et à l'approche « transformationnelle », certaines différences fondamentales séparent la démarche analytique d'Allen Forte de celle inaugurée par David Lewin et prolongée aujourd'hui par une communauté très active de théoriciens et d'analystes[176]. Ces différences relèvent, précisément, de la place occupée par l'algèbre dans les deux approches. Bien que la *Set Theory* d'Allen Forte puisse être interprétée à l'intérieur d'un paradigme algébrique[177], l'approche

---

[174] Cette section se veut une introduction « analytique » à quelques concepts théoriques à la base de la *Set-Theory*, aussi bien dans sa forme « classique » (Allen Forte) que dans ses versants « transformationnels » récents (David Lewin). Elle développe de façon systématique le contenu d'un article introductif à cette approche analytique, écrit avec la complicité du théoricien Stéphan Schaub [ANDREATTA et SCHAUB 2003]. L'étude avait un caractère pédagogique et était destinée à préparer le lecteur sur les sujets du Colloque International *Autour de la Set Theory* (Ircam 15-16 octobre 2003).

[175] Remarquons tout de suite que la « théorie des ensembles » (*Set Theory*) en musique, bien qu'empruntant certains éléments conceptuels et terminologiques à la théorie homonyme en mathématiques, ne doit pas être confondue avec cette dernière. De même, le terme « transformationnel » n'est, dans ce contexte, aucunement lié à la théorie proposée par Noam Chomsky en linguistique. Cependant, comme le logicien Oren Kolman l'a récemment montré [KOLMAN 2003], certaines constructions théoriques issues de l'approche transformationnelle de David Lewin, ont une interprétation naturelle à l'intérieur de la *théorie des modèles*, discipline mathématique née autour des années cinquante d'une « collision » entre la logique et l'algèbre (pour reprendre une heureuse expression du mathématicien S. MacLane). Une perspective philosophique sur le rapport entre théorie des modèles et musique a été récemment proposée par F. Nicolas à partir des thèses du philosophe A. Badiou [BADIOU 1969]. Nous renvoyons en particulier à l'article « Qu'espérer des logiques musicales mises en œuvre au XX^e^ siècle » [NICOLAS 2000].

[176] Le dernier *Transformational Institut*, qui s'est déroulé récemment au *Mannes Institute for Advanced Studies in Music Theory* de New York (21-24 juin 2003), a contribué à définir la place de cette nouvelle discipline théorique et analytique à l'intérieur de la communauté des théoriciens de la musique et des musicologues.

[177] Cette discussion du caractère algébrique de la *Set Theory* sera envisagée dans l'*Interludium* qui conclut ce deuxième chapitre.

« classique » reste attachée à la primauté de la notion d'« ensemble » sur celle de « structure ». Ce n'est donc qu'avec la théorie transformationnelle de David Lewin qu'on peut commencer à parler du caractère algébrique de l'application analytique de la *Set Theory*. Cependant, avant de discuter la place de l'approche de Lewin dans l'analyse musicale, nous allons reprendre quelques concepts théoriques communs à la démarche de Forte et à celle de Lewin, à partir de l'écriture symbolique et la représentation d'éléments musicaux. Nous retrouvons ainsi, d'un point de vue analytique, le concept de classe de hauteurs dont nous avons montré les propriétés algébriques de base au cours de la première partie.

2.2.1 De la notion de classe de hauteurs au concept de contenu intervallique

Toute analyse appliquant les principes de la *Set Theory* se fonde sur la notion de « classe de hauteurs » (*pitch class*) telle que Milton Babbitt l'a introduite en musique à partir de la notion mathématique de « congruence ». Rappelons que les classes de hauteurs permettent de représenter les hauteurs de la gamme chromatique via une double simplification : d'une part l'identification enharmonique, qui permet de réduire à douze le nombre d'éléments distincts à l'intérieur d'une octave, et d'autre part la réduction à l'octave, permettant d'identifier des notes ayant entre elles un rapport d'octave (ou de multiple d'octaves). Comme nous l'avons montré, la notation numérique introduite par Milton Babbitt[178] permet de représenter l'espace tempéré avec les douze *entiers des classes de hauteurs*, sans établir de relation privilégiée entre la note *do* et l'entier 0. Autrement dit, le choix de l'emplacement de l'origine est tout à fait arbitraire. D'autres théoriciens que Milton Babbitt, en particulier George Perle et David Lewin, ont traité cet aspect et proposé des systèmes à origine variable [*movable-DO systems*]. David Lewin est probablement l'un de premiers théoriciens à avoir formalisé le processus de construction d'un système musical indépendant de l'origine, et à avoir analysé ses conséquences sur la notion d'*intervalle* entre classes de hauteurs[179]. Cependant, pour des raisons de commodité, les analyses basées sur la *Set Theory* identifient de façon conventionnelle le *do* avec l'entier de classe de hauteurs 0. En outre, toujours par une convention inspirée par la réflexion de Babbitt sur le dodécaphonisme, une collection de

---

[178] Ou par Camille Durutte, si l'on veut remonter aux sources de l'application du concept de congruence modulaire en théorie de la musique, comme nous l'avons vu dans la première partie (voir également notre discussion sur les séries tous-intervalles dans l'*Interludium* qui conclut la partie théorique et qui montre une utilisation consciente des méthodes algébriques en théorie de la musique à partir de années trente par le théoricien danois Thorvald Otterström).
[179] Cette analyse est développée, en particulier, dans l'article « A label-free development for 12-pitch-class systems » [LEWIN 1977]. Rappelons qu'en Europe on retrouve les mêmes préoccupations chez Iannis Xenakis,

classes de hauteurs ou *pitch-class set*, ne tient compte ni de l'ordre ni de la fréquence d'apparition de ses éléments. Ainsi, les diverses écritures {0, 4, 7}, {0, 7, 4}, {0, 4, 4, 7} etc. représentent, *de facto*, la même organisation de hauteurs, dans ce cas particulier l'accord de *do* majeur.

Il faut souligner que la notation que nous adoptons diffère quelque peu de celle utilisée dans la *Set Theory*. Selon la convention introduite par Forte dans son ouvrage de référence *The Structure of Atonal Music* [FORTE 1973], les ensembles de classes de hauteurs sont généralement notés entre crochets, notation que nous introduirons plus bas avec la notion d'ensemble de classes de hauteurs « abstrait ». Pour ce qui concerne la terminologie en général, nous nous conformerons aux traductions proposées dans les articles parus dans la revue *Analyse Musicale* et au glossaire des termes analytiques contenus dans la version française de l'ouvrage *Analysis* d'Ian Bent et Willian Drabkin [BENT et DRABKIN 1987/1998].

Une analyse appliquant les principes de la *Set Theory* commence donc typiquement par la transcription sous forme d'ensemble de classes de hauteurs des groupes de notes considérés comme formant des unités au sein de l'œuvre étudiée. À la différence d'autres approches analytiques, comme la théorie générative de la musique tonale de Fred Lerdhal et Ray Jackendoff dont nous avons souligné dans la section introductive de ce deuxième chapitre le caractère « prescriptif », la *Set Theory* n'établit pas de critères généraux de « segmentation », qui sont donc laissés au soin de l'analyste. Il s'agit d'une des difficultés majeures dans l'application d'outils formels à l'analyse musicale, un problème qui nous encourage à proposer une première distinction entre la *Set Theory* « classique » et l'approche transformationnelle. La généralité des concepts théoriques de la *Set Theory* contraste avec le caractère « contextuel » d'une démarche analytique qui vise à rendre compte des spécificités de l'œuvre.

Allen Forte discute la notion de critère « contextuel » en ce qui concerne le processus de segmentation à propos de sa courte analyse des *Cinq pièces pour Orchestre* Op. 10/4 d'Anton Webern. Dans sa démarche analytique, Forte introduit la notion de « segment composé » [*composite segment*], à savoir une partie (horizontale ou verticale) de la partition constituée de l'interaction de plusieurs unités élémentaires, c'est-à-dire de plusieurs « segments primaires » [*primary segment*], dans la terminologie de Forte. Autrement dit, « *un segment composé est*

---

dont la formalisation des échelles à travers la théorie des cribles, que nous avons discutée dans la première *un segment formé par des segments ou des sous-segments qui sont contigus ou qui sont imbriqués en quelque mesure* » [FORTE 1973, 84]. Dans le cas de l'analyse de la pièce de Webern, le processus de segmentation tient compte de la relation étroite entre les composantes horizontales et verticales des segments. En général, comme Forte le met en évidence à partir de l'exemple particulier de cette pièce, « *le processus de segmentation conduit a une stratification temporelle [layering] dans laquelle certaines composantes sont en dessous (ou au dessus) d'autres, pendant que d'autres peuvent toujours avoir des intersections dans des sous-segments communs* » [FORTE 1973, 91]. La nature plus ou moins profonde d'une stratification donne une mesure, selon Forte, de la « complexité » d'un passage analysé. En outre, la segmentation par des segments composés met en évidence le rôle « contextuel » de certaines relations qui ont une validité « locale », par rapport à un critère de segmentation choisi. Un des critères que Forte évoque le plus souvent est celui de la récurrence, c'est-à-dire de la réapparition d'un même segment élémentaire ou composite dans une analyse visant à établir le rôle structural (non simplement contextuelle) d'un segment donné. L'hypothèse sur laquelle repose le processus de segmentation de la *Set Theory* proposée par Forte est bien résumée dans le passage qui conclut la discussion sur la pièce de Webern :

> « *Si un segment particulier forme un ensemble [de classe de hauteurs] qui est représenté ailleurs dans la musique, il est probablement un candidat légitime pour être une composante structurelle. D'autre part, un segment qui forme un ensemble qui a une seule occurrence peut avoir sa raison d'être* » *[FORTE 1973, 91]*[180].

Nous reviendrons sur le caractère « contextuel » du processus de segmentation dans une analyse basée sur la *Set Theory* lorsqu'on discutera, à partir du même exemple musical, la démarche transformationnelle de David Lewin. En fait, l'analyse de l'Op. 10/4 d'Anton Webern par David Lewin [LEWIN 1993] est à la fois un hommage à Allen Forte mais aussi un exemple pédagogique des difficultés qu'on rencontre dès qu'on cherche des interactions

---

partie, permet de conserver l'indépendance du système musical par rapport à toute origine.

[180] Cette hypothèse guide Allen Forte dans sa célèbre analyse du *Sacre du Printemps* de Stravinsky [FORTE 1978]. Pour discuter l'organisation harmonique, un catalogue des « nouvelles sonorités » est établi avec une analyse détaillée des occurrences des ensembles de classes de hauteurs dans les quatorze mouvements qui constituent l'œuvre. On peut remarquer, comme le fait Forte, que *« l'œuvre utilise 35 des 50 hexacordes possibles. Tous les 38 pentacordes (ou les heptacordes complémentaires) sont présents, ainsi que tous les tétracordes et les ensembles de huit notes* » [FORTE 1978, 19]. Pour compléter la statistique de Forte, ajoutons que le seul tétracorde qui soit absent dans le *Sacre*, selon la segmentation proposée par Forte, est l'ensemble {0, 2, 4, 8}. Cette démarche a été fortement critiquée par certains analystes qui ont soulevé la question de la pertinence de la relation d'équivalence à la base de la *Set Theory* pour aborder un répertoire qui ne s'apparente pas à la musique atonale de Schoenberg et Webern, pour qui avait été bâtie la théorie à l'origine. Voir en

entre l'approche transformationnelle et l'approche classique. Nous allons donc tout d'abord présenter les éléments de base de l'approche d'Allen Forte, en nous appuyant sur la représentation circulaire que nous avons abondamment discutée dans la partie précédente. Comme nous allons le voir plus loin, cette représentation facilite l'assimilation de certaines transformations qui sont couramment appliquées aux ensembles de classes de hauteurs. Notons que cette démarche, privilégiant la représentation graphique au simple calcul numérique, est entièrement absente des ouvrages de référence de la *Set Theory* d'Allen Forte (*The Structure of Atonal Music*), John Rahn (*Basic Atonal Theory*), Robert Morris (*Composition with Pitch-Classes*) ou Joseph Straus (*Introduction to Post-Tonal Theory*), ainsi que des textes plus avancés de théorie de la musique, comme les *Class Notes for advanced Atonal Music Theory* de Robert Morris. Elle est en revanche couramment employée par les théoriciens des systèmes diatoniques [*diatonic theory*], dont nous avons mentionné dans la première partie la proximité avec les théories d'Anatol Vieru, et cela à partir de l'un des articles fondateurs de cette approche [CLOUGH et MYERSON 1985]. Remarquons également qu'en France, des théoriciens tels qu'André Riotte et Marcel Mesnage ont montré son utilité pour la formalisation des structures musicales ainsi que pour la modélisation informatique de partition [RIOTTE et MESNAGE, 2003][181].

La représentation circulaire, comme nous l'avons souvent fait remarquer, est aussi utile pour représenter les relations entre hauteurs que les relations entre intervalles. En effet, le concept de « classe d'intervalles » découle directement de la définition de « classe de hauteurs » que nous avons donnée précédemment. Les classes d'intervalles ne sont pas autre chose que les intervalles musicaux classiques représentés numériquement par le nombre de demi-tons qu'ils contiennent. Ainsi, la seconde mineure est représentée par 1, la seconde majeure par 2, la tierce mineure par 3 et ainsi de suite. Comme pour les hauteurs, les intervalles sont exprimés modulo l'octave : le 7 représente donc autant la quinte juste que ce même intervalle augmenté d'un multiple entier d'octaves. C'est pour cette raison qu'on parle de « classes » d'intervalles et non simplement d'intervalles et que ces classes sont au nombre restreint de douze, de la seconde mineure à l'octave. Dans la théorie Forte, une équivalence formelle est établie entre un intervalle et son inverse : les deux font donc partie de la même « classe ». Ainsi, l'intervalle de seconde mineure et son inverse, la septième majeure, sont

particulier l'échange très animé entre Richard Taruskin et Allen Forte publié dans le double numéro 5 (2-3) de la revue *Music Analysis* (1986, pp. 313-320 et pp. 321-337).

tous deux représentés par 1, celui de seconde majeure et de septième mineure par 2 et ainsi de suite. Nous n'entrerons pas ici dans une discussion sur la légitimité d'une telle écriture, question qui a été débattue dans nombre d'articles[182]. Cependant, l'équivalence par inversion découle directement de l'idée de réduction à l'octave et sera explicitée lorsqu'on abordera la discussion sur le concept de « vecteur d'intervalles ». Tout ensemble de hauteurs, dès lors qu'il contient au moins deux éléments, délimite un certain nombre d'intervalles auxquels la *Set Theory* s'intéresse particulièrement.

Il existe plusieurs formes de description des intervalles contenus dans un ensemble reposant sur la notion de structure intervallique telle que nous l'avons discutée dans notre présentation de la théorie modale d'Anatol Vieru. Dans la *Set Theory* américaine, deux formes de représentations intervalliques se sont imposées, l'une dans le cadre de l'approche classique, l'autre dans celui de la démarche transformationnelle : le vecteur d'intervalles de Forte et la fonction intervallique de Lewin. Paradoxalement, la fonction intervallique a été le premier concept qui a été formalisé et cela à une époque antérieure aux premières formulations de la *Set Theory* par Allen Forte. Nous allons donc commencer par ce concept qui représente une première généralisation de la structure intervallique d'Anatol Vieru.

2.2.2 La fonction intervallique IFUNC

La « fonction intervallique » IFUNC a été proposée par Lewin dans un article paru à la fin des années cinquante [LEWIN 1959]. Il s'agit donc, comme nous l'avons souligné, d'un concept antérieur à la parution de l'ouvrage *The Structure of Atonal Music* d'Allen Forte ainsi que de l'article qui fonde la théorie des ensembles (complexes) en musique [FORTE 1964][183].

La fonction intervallique peut être définie pour un ensemble de classes de hauteurs ou bien pour des ensembles différents. Dans le premier cas, les classes d'intervalles recensées sont toutes celles définies entre une classe de hauteurs donnée et les autres classes de hauteurs

[181] Nous avons également discuté les liens entre représentation circulaire, *Set Theory* et informatique, dans un article intitulé « Formalisation algébrique des structures musicales à l'aide de la *Set-Theory* : aspects théoriques et analytiques « [ANDREATTA et AGON 2003].

[182] Voir par exemple les critiques de Célestin Deliège [DELIEGE 1989] et la réponse d'Allen Forte [FORTE 1989] lors du premier Colloque Européen d'Analyse Musicale ainsi que l'évaluation de la *Set Theory* par le compositeur et théoricien américain George Perle [PERLE 1990].

[183] Ajoutons aussi qu'à la différence du concept de « vecteur d'intervalles », qui semble avoir été suffisamment exploré d'un point de vue théorique, l'étude de la fonction intervallique est loin d'être achevée, comme le montre l'un des derniers articles de David Lewin [LEWIN 2001]. Cette observation a été corroborée par les récents travaux du *Transformational Institut* auxquels nous avons pu participer et qui ont mis en évidence la généralité de cet outil théorique qui trouve des applications analytiques qui vont bien au-delà de la musique atonale (par exemple qui touchent des traditions de musique non-écrite, comme l'a montré Robert Morris à propos de la musique *Hindustani* et *Carnatique* respectivement du nord et du sud de l'Inde).

contenues dans l'ensemble. Ainsi, l'ensemble de classes de hauteurs {0, 4, 7}, correspondant à l'accord de *do* majeur, délimite six classes intervallque : 4, 7, 3, 8, 5 et 9 (respectivement de 0 à 4, de 0 à 7, de 4 à 7, de 4 à 0, de 7 à 0 et enfin, de 7 à 4). On remarquera que deux classes de hauteurs délimitent entre elles deux classes d'intervalles dont l'une est l'inverse de l'autre. En effet, l'intervalle allant de 0 à 4 correspond à la classe d'intervalle 4, celui entre 4 et 0 à la classe d'intervalle 8. À la différence de l'équivalence formelle introduite par Forte entre une classe d'intervalles et son inverse, la fonction IFUNC recense les deux occurrences séparément.

Le résultat de ce « recensement » est ensuite écrit sous la forme d'un vecteur contenant douze entrées. La première, notée IFUNC(0), indique le nombre de classes d'intervalles 0 (c'est-à-dire le nombre d'unissons)[184]. La seconde, IFUNC(1), indique le nombre de secondes mineures et ainsi de suite jusqu'à la dernière entrée, IFUNC(11), qui indique le nombre de classes d'intervalles 11 (septièmes majeures). Dans le cas de l'accord de *do* majeur, on aura donc le résultat suivant :

IFUNC = [3 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0 0].

La définition précédente se généralise facilement dans le cas de deux ensemble de classes de hauteurs différentes. Soient *A* et *B* deux collections de notes. Pour tout intervalle *i* entre 0 et 11, IFUNC (*A*, *B*)(*i*) détermine le nombre de couples de notes (*a*, *b*), avec *a* et *b* respectivement dans *A* et *B*, pour lesquelles l'intervalle entre *a* et *b* est égal à *i*. Par exemple, considérons les deux hexacordes mutuellement complémentaires H={0, 1, 2, 5, 6, 8} et H'={3, 4, 7, 9, 10, 11}. Si l'on calcule IFUNC dans le cas des deux ensembles de classes de hauteurs précédents H et H', on obtient le résultat suivant :

IFUNC (H,H') = [0 3 4 4 3 3 2 3 3 4 4 3].

Ce vecteur restitue, sous une forme compacte, les douze valeurs obtenues par IFUNC (H, H')(i) pour i = 0, 1, …11. Par exemple, IFUNC (H, H')(0) est égale à 0 car les deux hexacordes n'ont aucune note commune (il n'y a aucun « unisson » entre les éléments des ensembles). Par contre, il est possible de trouver quatre paires d'éléments, le premier élément dans H, le second dans H', qui sont à distance d'une seconde majeure. La valeur apparaissant dans la troisième entrée de la fonction IFUNC est donc de quatre, comme le montre la figure suivante :

[184] Notons que cette valeur correspond à la cardinalité de l'ensemble, c'est-à-dire au nombre de ses éléments.

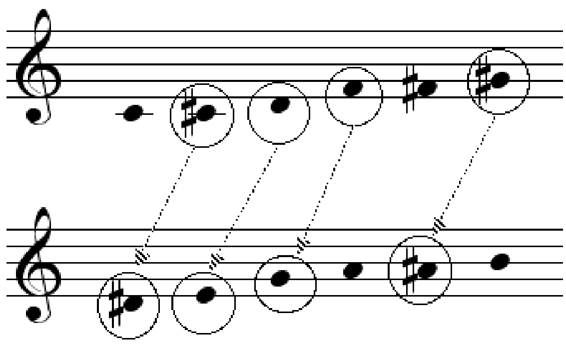


Figure 52 : Deux hexacordes mutuellement complémentaires et leur fonction intervallique IFUNC(2) = 4

2.2.3 Le vecteur d'intervalles

Le *vecteur intervallique* (*interval vector*) de Forte recense les six classes d'intervalles (à une inversion près). Il est en tout point similaire à la fonction intervallique IFUNC de Lewin, à ceci près que le vecteur utilisé n'a que six entrées allant de la classe d'intervalles 1 à la classe d'intervalles 6. En outre, dans le cas où les deux classes d'intervalles sont inverses l'une de l'autre, une seule valeur est recensée. Dans le cas de l'ensemble de classes de hauteurs correspondant à l'accord de *do* majeur, le vecteur d'intervalles sera donc [0 0 1 1 1 0]. On remarquera la correspondance entre cette représentation du contenu d'intervalles et la fonction intervallique. En effet, les six entrées du vecteur d'intervalles de Forte ne sont pas autre chose que les entrées 2 à 7 de la IFUNC de Lewin.

La figure suivante exprime le contenu intervallique dans le cas de trois pentacordes présents dans le *Klavierstück III* de Karlheinz Stockhausen. Il s'agit des ensembles de classes de hauteurs suivants :

A = {3, 8, 9, 10, 11},

B = {5, 8, 9, 10, 11}

C = {2, 3, 4, 5, 11}.

Nous avons ajouté à la fonction intervallique IFUNC et au vecteur d'intervalles VI la structure intervallique (SI) de Vieru. Ces trois représentations du contenu intervallique d'un ensemble de classes de hauteurs reflètent trois degrés d'abstraction différents. Leur « comportement » se clarifiera dès que seront abordées les transformations élémentaires d'ensembles de classes de hauteurs.

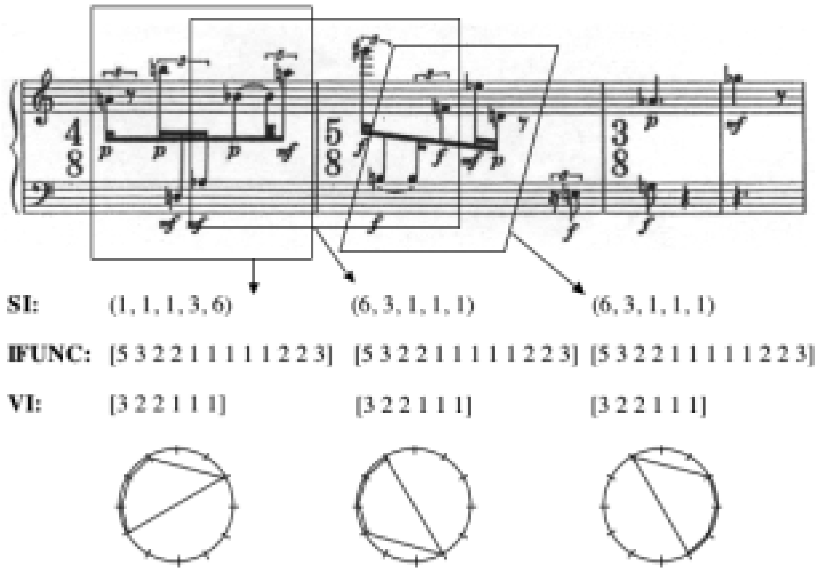


Figure 53 : Trois pentacordes, leur contenu intervallique et leur représentation circulaire

Comme l'observe Anatol Vieru dans sa (re)lecture de la *Set Theory* américaine à travers les concepts de base de la théorie modale, le vecteur d'intervalles de Forte peut être obtenu directement à partir de la structure intervallique[185]. En effet, il suffit de repérer combien d'éléments de la structure intervallique sont égaux à 1. Le résultat sera la première entrée du vecteur d'intervalles de Forte. De même, le nombre de possibilités d'obtenir la valeur 2 par addition d'éléments contigus de la structure intervallique donne la deuxième entrée du vecteur de Forte et ainsi de suite. Le processus est montré par la figure suivante dans le cas du premier des trois pentacordes de l'exemple précédent :

	1	2	3	4	5	6	(entrées du vecteur)
(1, 1, 1, 3, 6)	3						
(1, 1, 1, 3, 6)		2					
(1, 1, 1, 3, 6)			2				
(1, 1, 1, 3, 6)				1			
(1, 1, 1, 3, 6)					1		
(1, 1, 1, 3, 6)						1	

Figure 54 : Relation entre structure intervallique et vecteur d'intervalles

La technique suggérée par Vieru peut s'appliquer aussi dans le cas de la structure intervallique de David Lewin. Pour cela, il faut d'abord introduire la valeur i=0 de la structure intervallique, valeur qui correspond au nombre d'éléments de l'ensemble. Pour cela il suffit

[185] Voir la revue de l'ouvrage *Basic Atonal Theory* de John Rahn par Anatol Vieru, publié dans le « Bulletin d'Informations de l'Union des Compositeurs de la République Socialiste de Roumanie » [VIERU 1987].

de compter le nombre d'entrées de la structure intervallique (dans ce cas 5) et l'on obtient la valeur cherchée. Notons que pour les entrées de la structure intervallique supérieures à la sixième, les valeurs se disposent de façon symétrique par rapport à l'intervalle de triton. Autrement dit, la fonction intervallique (une fois enlevée sa première valeur) est toujours palindromique. Cela offre à la théorie de Forte un argument majeur pour restreindre l'étude des classes d'intervalles aux seules valeurs comprises entre 1 et 6.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(1, 1, 1, 3, 6)	5									
(1, 1, 1, 3, 6)		3								
(1, 1, 1, 3, 6)			2							
(1, 1, 1, 3, 6)				2						2
(1, 1, 1, 3, 6)					1				1	
(1, 1, 1, 3, 6)						1		1		
(1, 1, 1, 3, 6)							1			

Figure 55 : Relation entre structure intervallique et fonction intervallique

Mis à part le cas de la fonction intervallique entre deux ensembles, nous nous sommes concentrés jusqu'à maintenant sur l'étude de la structure interne d'un ensemble de classes de hauteurs. Nous allons maintenant étudier quels sont les critères de base pour mettre en relation des ensembles de classes de hauteurs différentes.

2.2.4 Les transformations élémentaires d'un ensemble de classes de hauteurs

Le premier niveau de relation entre ensembles de classes de hauteurs différents se définit via le concept de *transformation* dont les trois formes principales sont la *transposition*, l'*inversion* et la *multiplication*[186]. Deux ensembles de classes de hauteurs sont alors considérés comme apparentés lorsque l'un est le résultat de l'autre par l'une ou plusieurs de ces transformations.

---

[186] Ou *application affine*. À la différence de la transposition et de l'inversion, la définition de la multiplication est inséparable de la représentation numérique des classes de hauteurs. En effet, la multiplication d'un ensemble de classes de hauteurs est l'ensemble résultant de la multiplication par une des constantes 1, 5, 7 ou 11 de chaque classe de hauteurs de l'ensemble, la multiplication par 1 reflétant l'identité et la multiplication par 11 l'inversion. Nous avons mentionné la signification musicale de la multiplication par 5 ou par 7 dans la théorie modale (degré de diatonicisme et de chromatisme d'un mode) ainsi que dans la théorie mathématique de la musique de Guerino Mazzola. Nous n'allons pas discuter le catalogue des ensembles de classes de hauteurs à une transformation affine près, car il s'agit d'un sujet qui n'a pas été abordé dans ses ramifications analytiques par Allen Forte et David Lewin. Cependant, une discussion sur l'opération de multiplication d'un point de vue théorique est contenue dans l'ouvrage de John Rahn *Basic Atonal Theory* [RAHN 1980] ainsi que dans le traité compositionnel de Robert Morris, *Composition with Pitch-Classes* [MORRIS 1987]. Ce dernier ouvrage contient également le catalogue exhaustif des ensembles de classes de hauteurs à une multiplication près.

Le concept de transposition utilisé par la *Set Theory* est, dans ses grandes lignes, le même que pour la plupart des techniques analytiques traditionnelles. Le transposé *A*' de *n* demi-tons d'un ensemble de classes de hauteurs *A* est en effet obtenu en ajoutant *n* demi-tons à chacune des classes de hauteurs contenues dans *A*. La transposition est généralement définie en termes de demi-tons ascendants. Cette convention est due au fait que toute transposition d'un ensemble de classes de hauteurs est exprimable, du fait de la réduction à l'octave, en termes d'intervalles ascendants. On peut vérifier aisément que la transposition de *n* demi-tons descendants d'un ensemble de classes de hauteurs est formellement équivalente à la transposition de (12-*n*) demi-tons ascendants. Nous pouvons continuer à noter la transposition d'un ensemble de classes de hauteurs avec le symbole « T_i », comme nous l'avons fait dans le chapitre précédent, l'indice « i » indiquant le nombre de demi-tons de l'opération.

Rappelons que, géométriquement, cette transformation s'exprime sur la représentation circulaire par une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre (ou anti-trigonométrique) d'un nombre d'unités égal au nombre de demi-tons utilisés pour la transposition.

En reprenant l'exemple du *Klavierstück III* de Stockhausen, on vérifie que le troisième pentacorde n'est rien d'autre que le transposé de six demi-tons du deuxième. On remarque que les trois formes de contenu intervallique sont laissées invariantes sous l'effet de cette opération. Il s'agit d'une propriété générale :

La transposition laisse toujours le contenu intervallique d'un ensemble de classes de hauteurs inchangé.

Ce n'est pas le cas de l'opération d'inversion, qui correspond d'un point de vue géométrique à un miroir par rapport à l'un des 12 diamètres du cercle[187]. Si l'on note toujours « *I* » l'inversion par rapport au diamètre passant par les points 0 et 6, toute inversion par rapport à un axe de symétrie quelconque sera une combinaison de cette inversion « élémentaire » avec une transposition « T_n » de *n* demi-tons. La figure suivante montre comment le premier pentacorde du *Klavierstück III* peut être transformé en le deuxième via la transformation T_7I :

[187] Aux six diamètres différents passant par les couples de classes de hauteurs, il faut ajouter les six diamètres qui représentent des axes de symétries « entre » deux notes.

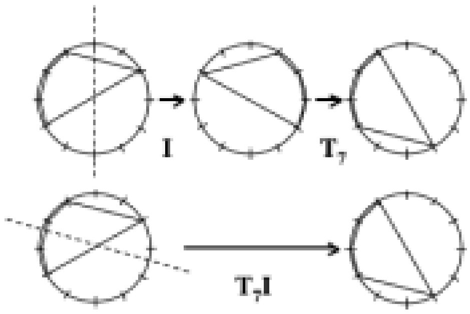


Figure 56 : Composition des deux transformations (une inversion suivie par une transposition)

En ce qui concerne le contenu intervallique, cette opération laisse inchangés aussi bien la fonction intervallique IFUNC que le vecteur d'intervalles. Cette observation est vraie en général :

Une combinaison d'inversions et de transpositions laisse toujours la fonction intervallique IFUNC et le vecteur d'intervalles d'un ensemble de classes de hauteurs inchangé.

La structure intervallique par contre est transformée dans son rétrograde, comme nous l'avons observé dans la présentation de la théorie modale. Les observations précédentes concernant le contenu intervallique des transformations d'un ensemble de classes de hauteurs ont été à la base des diverses tentatives de classification des collections de hauteurs. Une première approche, comme nous l'avons vu dans notre présentation de la théorie modale d'Anatol Vieru, a consisté à considérer exclusivement la structure intervallique, menant à une catégorisation des ensembles de classes de hauteurs par rapport à l'opération de transposition[188]. Deux ensembles appartiennent à une même « famille » lorsque l'un est la

[188] Pour reprendre une belle image poétique d'Anatol Vieru, la structure intervallique (ou structure modale, selon sa terminologie), est l'expression la plus directe, simple, laconique et complète d'un ensemble car dans une structure intervallique *« les traces du particulier s'effacent, seul le général demeure et l'idée de représentation est absente* » [VIERU 1987, 45]. Nous partageons l'avis du théoricien roumain en ce qui concerne la généralité de la notion de « structure intervallique » par rapport au cas particulier de l'« ensemble de classes de hauteurs ». Il s'agit d'un aspect sur lequel nous reviendrons dans la partie finale de ce travail, car on touche là des problèmes philosophiques concernant les méthodes algébriques en musique et musicologie. La démarche algébrique relève, en effet, d'une approche qu'on peut qualifier d'*opératoire*, à la différence du caractère *objectal* des notions de bases de la *Set Theory* classique. Cependant, le passage cité nous semble être ambigu quant à la nature de la notion de « représentation » appliquée à la structure intervallique. La notion de *représentation* est, nous semble-t-il, centrale, aussi bien pour le concept d'ensemble de classes de hauteurs que pour celui de structure intervallique. En effet, les deux notions utilisent la représentation des hauteurs (ou des intervalles) en termes de classes de congruence (modulo un nombre entier). Cependant, comme le souligne Vieru, le choix de la structure intervallique comme moyen de représentation des structure musicales n'est pas une simple convention. La théorie modale, affirme-t-il, vise à *« remplacer toutes les opérations modales […] par des structures modales [ou intervalliques]* [VIERU 1987, 45]. D'où la possibilité, que le compositeur considère comme l'une des abstractions majeures de son approche, d'établir des *« procédés permettant d'opérer la complémentarité, les inclusions, la multiplication, etc., directement sur la structure modale* » [VIERU 1987, 45-46].

transposition de l’autre. Il est alors aisé de vérifier que deux ensembles de classes de hauteurs font partie de la même « famille » en comparant leurs structures intervalliques respectives. Cette première démarche considère donc comme distincts deux ensembles liés par la transformation d’inversion. Forte va pour sa part définir des « familles « via les opérations d’inversion et de transposition. Deux ensembles de classes de hauteurs font partie de la même « famille » lorsqu’ils sont identiques à une transposition ou inversion près[189].

Dans le catalogue défini par Forte chaque famille d’ensemble de classes de hauteurs est notée par deux entiers séparés par un tiret. Le premier indique la cardinalité de l’ensemble, le second la position au sein du catalogue. À la différence de la classification basée sur la structure intervallique, ni le vecteur d’intervalles ni la fonction intervallique IFUNC ne permettent de caractériser de façon univoque un ensemble. En effet, deux ensembles de classes de hauteurs peuvent avoir le même vecteur d’intervalles sans que l’un soit une transposition ou une inversion de l’autre. La notion de *forme primaire* [*prime form*] d’un ensemble de classes de hauteurs a pour fonction de faciliter la comparaison entre ensembles et leur appartenance à l’une ou l’autre des familles définies. Tout ensemble de classes de hauteurs peut être réduit par une série d’inversions et de transpositions à une forme compacte unique commune à tous les ensembles d’une même famille. La comparaison de deux ensembles peut donc se faire en confrontant leurs formes primaires respectives, car deux ensembles de classes de hauteurs appartenant à des familles différentes ont des formes primaires distinctes.

Si le vecteur d’intervalles n’est pas suffisant pour associer un ensemble de classes de hauteurs à une entrée du catalogue, le fait que deux ensembles partagent un même vecteur n’en constitue pas moins une relation entre ces deux ensembles. Dans la terminologie de Forte, cette relation est appelée « relation Z » [*Z-relation*]. Notons que dans ses premières tentatives de classification, Forte a envisagé la possibilité d’utiliser le vecteur d’intervalles comme seul critère. Les raisons motivant son rejet de cette voie sont discutées en détail dans

[189] Formellement, le fait qu’on identifie des ensembles de classes de hauteurs à une transformation près (afin d’établir un catalogue exhaustif et cohérent) est lié à la notion de *relation d’équivalence* au sens mathématique, telle que nous l’avons discutée dans la première partie. En outre, d’un point de vue mathématique, on peut considérer les transformations musicales (transposition, inversion, multiplication) comme constituant un groupe qui *opère* sur la collection des hauteurs. On peut ainsi envisager la recherche d’un catalogue exhaustif d’accords (à une transformation musicale près) dans une perspective algébrique, comme *action* d’un groupe sur un ensemble. Les classes d’équivalences d’accords (à une transformation musicale près) sont donc les *orbites* d’un ensemble par rapport à l’action d’un groupe de transformations. On obtient les différents catalogues simplement en changeant le groupe qui opère sur l’ensemble des classes de hauteurs. Nous renvoyons à l’*Interludium* qui conclut ce deuxième chapitre pour une présentation de cette démarche à l’intérieur d’un travail d’implémentation des méthodes algébriques en musicologie computationnelle.

The Structure of Atonal Music[190]. Notons également que Forte a défini d'autres relations (Rp, R0, R1 etc.) pour établir des comparaisons entre des ensembles de classes de hauteurs différentes. Elles n'ont cependant pas eu le développement théorique d'autres concepts, et pour cette raison elles ne seront pas abordées ici.

2.2.5 Relations ensemblistes « littérales » et « abstraites » entre ensembles de classes de hauteurs

Outre la transposition, l'inversion et la multiplication, les relations entre ensembles de classes de hauteurs les plus élémentaires sont celles d'*inclusion* et de c*omplémentarité.* Ces relations sont de deux natures : *littérales* et *abstraites.* Nous avons déjà discuté le concept d'inclusion et de complémentarité littérale dans la première partie, en soulignant comment ces notions sont directement empruntées à la théorie élémentaire des ensembles.

Rappelons qu'un ensemble de classes de hauteurs *A* est dit inclus (littéralement) dans un ensemble de classes de hauteurs *B* si tous les éléments de *A* sont également éléments de *B.* Par exemple, l'intervalle de quinte, correspondant à l'ensemble {0, 7} est inclus dans l'accord parfait majeur, qui est représenté par l'ensemble de classes de hauteurs {0, 4, 7}.

De même pour le complémentaire : un ensemble *A* est le complémentaire (littéral) de l'ensemble de classes de hauteurs *B* si *A* et *B* n'ont aucun élément en commun et si tous les éléments qui ne sont pas dans *A* sont élément de *B* (et vice-versa). Par exemple, la gamme octotonique, {0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10}, est le complémentaire (littéral) de l'accord diminué qui est représenté par l'ensemble de classes de hauteurs {2, 5, 8, 11}. Nous retrouvons ainsi un résultat que nous avons discuté au cours du chapitre précédent, en particulier en analysant la théorie des cribles de Xenakis. Ces mêmes notions peuvent être définies au niveau plus abstrait des « classes d'équivalence » d'un accord par rapport à une transformation musicale particulière. Dans la *Set Theory* de Forte, un ensemble de classes de hauteurs *A* est alors dit inclus (de façon abstraite) dans un ensemble *B* s'il existe une relation d'inclusion littérale entre *A* et une transposition et / ou une inversion de *B.* De même pour la relation de complémentarité abstraite. Un ensemble de classes de hauteurs *A* est le complémentaire (abstrait) de *B* si cette relation est vraie dans le sens littéral entre *A* et une transposition et / ou une inversion de *B.*

Dans ce contexte abstrait, il est donc tout à fait possible que *A* soit inclus dans *B* alors que sur la partition étudiée les collections de notes représentées respectivement par *A* et par *B*

[190] Voir, en particulier, pp. 21-24.

n’ont aucun élément en commun. Il est également possible qu’un ensemble de classe de hauteurs soit inclus, au sens abstrait, dans son complémentaire[191].

Comme pour les transpositions et inversions, les relations ensemblistes qui viennent d’être définies renvoient également à des relations entre les vecteurs d’intervalles. Le cas de l’inclusion est relativement évident : lorsqu’un ensemble de classes de hauteurs *A* est inclus dans un autre ensemble *B* un certain nombre de classes d’intervalles seront nécessairement communes aux deux ensembles. La relation est moins évidente dans le cas du complémentaire. Comme nous l’avons vu dans la première partie, il existe cependant un théorème dû à Milton Babbitt stipulant qu’un hexacorde aura le même vecteur d’intervalles que son complémentaire. Une version généralisée montre qu’une relation forte existe toujours entre le vecteur d’intervalles d’un ensemble de classes de hauteurs et celui de son complémentaire[192]. Notons aussi que l’approche classique de la *Set Theory* donne un poids particulièrement important aux relations d’inclusion et de complémentarité. En effet, la combinaison de ces relations est à la base du concept de « complexe d’ensembles » [*set complex*] proposé par Forte au début des années soixante[193] et qui relie dans des réseaux relationnels toute une série d’ensembles de classes de hauteurs. L’ensemble des classes de hauteurs au « centre » de ce réseau est appelé le « nexus » du complexe. Forte définit deux formes de complexes : le complexe K et le complexe Kh.

---

[191] Certains ont cru voir là une contradiction logique au sein de la *Set Theory.* Tel n’est pas le cas puisque la relation (abstraite) d’inclusion opère entre l’ensemble considéré et une *transformation* de son complémentaire. Notons d’ailleurs que ce type de relation se rencontre fréquemment. Comme le souligne Peter Castine dans son ouvrage *Set Theory Objects*, toutes les triades, tétracordes et pentacordes (sauf un) sont inclus de façon abstraite dans leurs complémentaires [CASTINE 1994, 48]. Notons aussi que les relations abstraites d’inclusion et de complémentarité ont été également étudiées par Anatol Vieru et cela dans un paradigme théorique différent de celui de la *Set Theory* américaine. Pour une définition des concepts d’inclusion et de complémentarité à partir de la structure intervallique, voir le troisième chapitre de *The Book of Modes* [VIERU 1993, 52-81].

[192] Voir, en particulier l’article d’Howard J. Wilcox qui développe une généralisation du théorème de l’hexacorde à partir des tables de groupe [WILCOX 1983]. Nous présenterons par la suite une « version transformationnelle » du théorème de l’hexacorde de Babbitt qui généralise la formulation initiale à l’aide des outils théoriques introduits par David Lewin.

[193] La théorie des complexes d’ensembles est envisagée par Forte dans l’article «A Theory of Set-Complexes for Music » [FORTE 1964] et traitée, en détails, dans la deuxième partie de l’ouvrage *The Structure of Atonal Music* [FORTE 1973]. Selon les intentions de l’auteur, la théorie des complexes d’ensembles *« offre un modèle complet » des relations entre ensembles de classes de hauteurs en général et établit un cadre pour la description, l’interprétation, et l’explication de toute composition atonale* » [FORTE 1973, 93]. Cette approche est appliquée, de façon systématique, dans l’analyse du *Sacre du Printemps*, qui s’achève notamment avec un sommaire « statistique » des relations harmoniques dans la pièce. Nous n’entrerons pas dans une discussion épistémologique d’une telle approche. Cependant, le caractère taxinomique de la théorie des complexes d’ensembles met en évidence les différences profondes entre l’approche d’Allen Forte et la théorie transformationnelle de David Lewin. Cet élément sera plus clair une fois abordés les éléments majeurs de la démarche de David Lewin. Pour les développements plus récents autour de la théorie des complexes et sous-complexes d’ensembles, voir l’article de Robert Morris « K- Kh- and Beyond » [MORRIS 1997].

Pour le premier, un ensemble de classes de hauteurs *A* fait partie du *complexe* K autour de l'ensemble *A* (*A* est par définition le *nexus* du complexe) si *B* est en relation d'inclusion (abstraite) stricte soit avec *A* soit avec son complémentaire *A'*. Notons que « relation d'inclusion » signifie à la fois « inclure » et « être inclus ». En ce sens *A* « est en relation d'inclusion » avec *B* si *A* est inclus dans *B* ou *B* est inclus dans *A*. La notion plus restrictive de *sous-complexe* Kh stipule que la relation d'inclusion doit être vraie autant avec *A* qu'avec son complémentaire *A'*.

Une approche différente consiste à mettre en évidence des relations entre des objets en s'appuyant directement sur la notion de transformation. La place centrale que l'idée de transformation va prendre dans le processus analytique motive l'appellation de « théorie transformationnelle »[194]. À la différence de l'approche de Forte, celle-ci vise à recouvrir entièrement la partition étudiée à travers un enchaînement de transformations d'un ou d'un nombre restreint d'ensembles de classes de hauteurs. Cette forme d'analyse nécessite un outillage formel beaucoup plus abstrait et général. Cependant, le grand mérite de l'approche de Lewin est d'avoir su conjuguer le pouvoir d'abstraction des méthodes algébriques avec la prise en compte du « contexte » à travers lequel émerge la spécificité de l'œuvre analysée.

2.2.6 Les éléments de base de l'approche transformationnelle

Le point de départ adopté par Lewin consiste à définir un cadre conceptuel suffisamment large pour inclure les concepts de base de la *Set Theory* classique et proposer une généralisation à l'aide d'outils algébriques. Formellement, cette généralisation est obtenue à travers le concept de Système d'Intervalles Généralisés (*Generalized Interval System*, ci-après GIS)[195]. Formellement, un GIS est un ensemble d'objets musicaux *S*, avec un *groupe* d'intervalles généralisés (que Lewin note IVLS pour InterVaLS) et avec une fonction

---

[194] Les prémisses de cette approche peuvent être trouvées dans un article de David Lewin qui date du début des années quatre-vingt [LEWIN 1982-83].

[195] John Rahn suggère la traduction « Système Généralisé d'Intervalles », qui explicite le caractère généralisé du système théorique proposé par Lewin. Cependant, notre lecture vise à souligner l'effet de la généralisation sur le concept d'intervalle qui est, comme on l'a vu, le point de départ de la formalisation algébrique de Milton Babbitt, Iannis Xenakis et Anatol Vieru. En outre, le titre de l'ouvrage de Lewin, *Generalized Musical Intervals and Transformations*, semble aller vers la lecture que nous proposons. On pourrait montrer que les deux points de vue - système généralisé *vs* intervalles généralisés - sont équivalents du point de vue de l'approche transformationnelle car la notion de système est généralisée précisément grâce à la généralisation du concept d'intervalle.

« intervalle » *int* qui associe à deux objets *a* et *b* dans l'espace *S* un intervalle i*nt*(*a*,*b*) dans IVLS vérifiant les deux propriétés suivantes[196] :

1. Pour tous objets *a*, *b*, *c* dans *S* : *int*(*a*,*b*)• *int*(*b*,*c*) =*int*(*a*,*c*).
2. Pour tout objet *a* dans *S* et tout intervalle *i* dans IVLS, il y a un seul objet *b* dans *S* tel que *int*(*a*,*b*)=*i* .

Le deuxième chapitre du traité *Generalized Musical Intervals and Transformations*, offre plusieurs exemples démontrant la flexibilité du concept de GIS, aussi bien dans les domaines des hauteurs et des rythmes que dans des « espaces » musicaux plus généraux, tels que celui des profils mélodiques, des fonctions tonales ou encore des transformations néo-riemanniennes[197]. Nous aborderons uniquement quelques aspects de cette construction formelle dans le domaine de hauteurs, car il s'agit du cadre qui offre les plus de points de contacts avec la théorie de Forte.

La première partie du principal ouvrage théorique de Lewin est dédiée à l'étude systématique de la structure de GIS. La seconde développe l'analyse transformationnelle en montrant comment des réseaux de transformations construits lors du processus analytique peuvent être formellement ramenés à cette structure abstraite.

Afin de donner un aperçu du degré de généralité du volet théorique de cette approche, voyons tout d'abord comment se généralisent les notions d'inclusion et de complémentaire. Par la suite, deux exemples d'analyse seront brièvement commentés afin d'illustrer les deux principales formes de réseaux utilisées.

La relation d'inclusion, telle qu'elle a été abordée précédemment, peut être assouplie en considérant des degrés d'inclusion plus ou moins forts entre ensembles de classes de hauteurs. La fonction d'injection INJ [*injection fonction*] mesure précisément le degré d'inclusion d'un ensemble des classes de hauteurs dans un autre et généralise cette relation aussi bien dans le sens abstrait que littéral[198]. Par définition, la fonction d'injection INJ d'un ensemble de classes de hauteurs *A* dans un ensemble *B* par rapport à une transformation *f* calcule le nombre

---

[196] Pour rendre la notation homogène, on indiquera la loi de composition interne du groupe avec le symbole « • ».

[197] Pour une application de l'approche transformationnelle dans l'analyse des profils mélodiques, voir également l'article de John Roeder intitulé « Voice leading as transformation « [ROEDER 1994]. L'analyse transformationnelle des fonctions tonales et des opérations néo-riemanniennes est développée par Edward Gollin dans sa thèse de doctorat intitulée *Representations of Space and Conceptions of Distance in Transformational Music Theories* [GOLLIN 2000].

[198] Ce type de question est abordé traditionnellement dans la littérature américaine sous l'appellation de « théorèmes des notes communes » [*common tone theorems*]. Voir notamment le chapitre 5 de l'ouvrage théorique de John Rahn, *Basic Atonal Theory* pour un traitement détaillé de ce sujet.

d'éléments communs entre *B* et le transformé de *A* par *f*. Formellement, on note la fonction d'injection de l'ECH *A* dans *B* (par rapport à une transformation *f*) de la façon suivante : INJ(*A*,*B*)(*f*).

Dans le cas particulier où *f* est la transposition on retrouve les relations d'inclusion littérale et abstraite. En effet, un ensemble *A* de cardinalité *m* est inclus *littéralement* dans un ensemble *B* si la fonction d'injection de l'ensemble *A* dans *B*, par rapport à la transposition de zéro demi-ton est égale à *m*. On note INJ(*A*, *B*)(T_0) = *m*.

Une simple généralisation permet également d'exprimer la relation d'inclusion abstraite en termes de fonction d'injection. Il suffit de remplacer T_0 dans la définition précédente par une transposition T_n, une inversion *I*, ou une combinaison des deux transformations[199].

Par voie de conséquence, un ensemble *A* de cardinalité *m* est inclus de façon *abstraite* dans un ensemble *B* s'il existe une transformation *f* (transposition, inversion ou une combinaison des deux) pour laquelle la fonction INJ est égale à *m*. On note INJ(*A*, *B*)(*f*) = *m*.

La figure suivante montre un exemple d'application de la fonction d'injection dans le cas de trois hexacordes « complémentaires » de l'Op. 10 n° 4 d'Anton Webern. Trivialement, les deux premiers hexacordes H et H' étant littéralement complémentaires, la valeur de INJ(H, H')(T_0) est égale à zéro. De même, le troisième hexacorde H'' étant une transformation du premier par l'opération T_4I, H' et H'' sont complémentaires au sens abstrait. Par contre, quatre éléments sont communs à H' et à la transposition de 2 demi-tons de H. On a donc INJ(H,H')(T_2) = 4, ce qui signifie que les deux hexacordes partagent (au sens abstrait) un même tétracorde. Autrement dit, le tétracorde {4, 5, 7, 10} du premier hexacorde est inclus de façon abstraite dans le second.

[199] D'autres transformations, telle que la multiplication, peuvent également être considérées, comme Lewin le montre dans le chapitre 6 de *Generalized Musical Intervals and Transformations*. Par exemple, il démontre le résultat suivant qui est valable pour toute transformation bijective *f*, donc en particulier pour les multiplications M_5 et M_7. Etant donnés deux ensembles de classes de hauteurs *A* et *B*, la fonction d'injection INJ(*A*,*B*) de la transformation *f* est égale à la fonction d'injection INJ(*B*,*A*) de la fonction inverse *f*'.

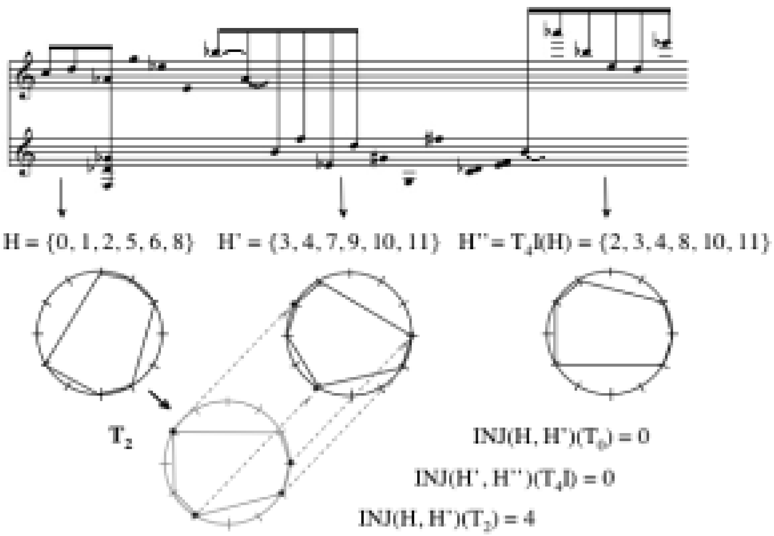


Figure 57 : La fonction d’injection INJ dans le cas des transpositions ou des combinaisons de transpositions et d’inversions

Nous avons déjà montré comment le processus de généralisation entamé avec la fonction intervallique s’applique également à la notion de contenu intervallique entre deux ensembles quelconques. Voyons maintenant quels sont les liens qu’on peut établir entre la fonction d’injection INJ défini ci-dessus et la fonction intervallique généralisée IFUNC.

Nous avions précédemment utilisé les deux hexacordes H et H’ pour calculer leur fonction intervallique IFUNC, le résultat étant un vecteur [0 3 4 4 3 3 2 3 3 4 4 3] qui restituait, sous une forme compacte, les douze valeurs obtenues par IFUNC(H, H’)(i) pour i = 0, 1, …11.

Par exemple, IFUNC(H, H’)(2) est égale à 4 car il est possible de trouver quatre paires d’éléments, le premier élément dans H, le second dans H’, qui sont à distance d’une seconde majeure (c’est-à-dire en correspondance de la valeur i=2).

On observera que la fonction INJ entre les deux hexacordes par rapport à la transposition T_2 était également de quatre. Cette observation est vraie dans le cas général. Autrement dit, la fonction d’injection de l’ensemble A dans l’ensemble B pour une transposition T_i est égale à la fonction intervallique généralisée entre A et B pour la valeur i. En suivant la notation proposée par Lewin [LEWIN 1987, 147], on pourra donc écrire :

IFUNC(A,B)(i) = INJ(A,B)(T_i).

Le résultat précédent, exprimé sous la forme d’un théorème valide pour toute forme de GIS, a des conséquences dans le processus d’abstraction conduisant de l’approche classique à l’approche transformationnelle. Comme le souligne Lewin, « *on peut remplacer entièrement le concept d’intervalle […] par celui de transposition dans un espace* »[200]. Plus généralement, on peut remplacer le concept d’intervalle par celui d’espace musical abstrait sur lequel « opèrent » certaines transformations.

Cette observation constitue le point de départ d’un véritable changement de paradigme par rapport à la démarche taxinomique de Forte, dans laquelle l’analyse déploie un réseau de relations ensemblistes entre classes de hauteurs. L’analyse acquiert un caractère « opérationnel » qui consiste à mettre en évidence des propriétés structurelles (et structurales) entre ensembles de classes de hauteurs uniquement en termes de transformation[201]. Le changement de perspective par rapport à l’analyse ensembliste de Forte sera encore plus évident une fois étudiée la manière dont les transformations musicales sont organisées dans le processus analytique. Pour cela, on peut distinguer deux stratégies qualitativement différentes. Dans une première approche, les transformations sont organisées dans un ordre qui reflète le déroulement temporel de la pièce. Cette vision « chronologique » de l’organisation des transformations est appelée « progression transformationnelle ». Dans une approche plus abstraite, les transformations constituent un réseau relationnel au sein duquel il est possible de définir plusieurs parcours distincts. On parlera alors de « réseau transformationnel ». Une analyse transformationnelle est donc une perspective « dialectique » entre la notion de progression et celle de réseau transformationnel. Précisons tout de suite qu’il ne s’agit pas de deux étapes qui se déroulent dans un ordre préétabli. Au contraire, l’intérêt de la démarche transformationnelle ouverte par Lewin réside dans les poids différents que les deux stratégies peuvent avoir dans le processus analytique. Nous allons donc étudier ces deux étapes tout d’abord séparément pour ensuite essayer de comprendre quelles formes d’interactions peuvent avoir lieu pendant l’analyse d’une pièce.

---

[200] *Ibid.*, p. 157.

[201] Comme l’a remarqué Umberto Eco à propos des rapports entre structuralisme et sérialisme, la langue française permet de distinguer le caractère « structural » du caractère « structurel » d’une démarche théorique. En se référant à la célèbre analyse de la pensée sérielle par Claude Lévy-Strauss dans *Le Cru et le Cuit* [LEVY-STRAUSS 1963], Eco souligne comment le terme « structural », dans l’utilisation de Lévy-Strauss, *« se réfère à la question philosophique implicite qui sous-tend la méthode de recherche structuraliste dans les sciences humaines* » [ECO 1971, 45]. On peut ainsi établir une différence entre relations ou propriétés « structurales » et « structurelles », comme Eco le propose en reprenant les propos de Jean Pouillon dans sa présentation d’un numéro spécial de la revue *Temps modernes* consacré au structuralisme : *« Une relation est “structurelle” quand on la considère dans sa fonction déterminante au sein d’une organisation donnée ; et la même relation est “structurale” quand elle est susceptible de se réaliser en plusieurs modes différents et en plusieurs organisations également déterminantes* » [POUILLON 1966].

2.2.6.1 Progressions et réseaux transformationnels

La figure suivante se réfère de nouveau à l'analyse par Lewin du *Klavierstück III* de Stockhausen.

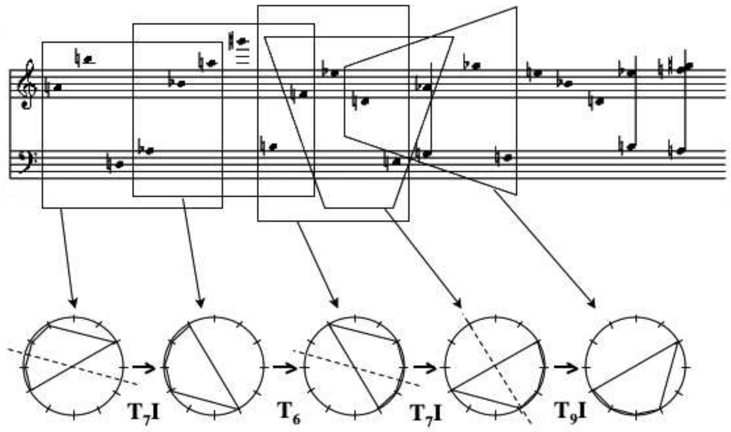


Figure 58 : Segmentation de la pièce par des transformations d'un même pentacorde

La segmentation est obtenue en considérant les différentes transformations d'un pentacorde de base. Notons que ces transformations ne changent pas la nature « ensembliste » du pentacorde, car les cinq formes sont « équivalentes » par rapport à une transposition ou une inversion (ou une combinaison des deux opérations). La segmentation suit le déroulement temporel de la pièce. On parlera donc de « progression transformationnelle ».

Une telle progression donne à chacune des transformations une position bien déterminée dans le déroulement temporel de la pièce. L'analyse reflète ainsi la progression chronologique du pentacorde au cours des premières mesures. À cause des imbrications entre les différentes formes des pentacordes, une telle structuration impose à chacune des transformations un poids (ou « présence », pour utiliser une expression de Lewin) qui semble être contredit par la réception de l'œuvre[202].

Une stratégie différente considère les transformations comme une structuration possible d'un espace abstrait des formes du pentacorde. C'est dans cet espace abstrait qu'on peut

[202] Pour reprendre la formulation de Lewin : *« À cause précisément de la forte temporalité narrative, chaque transformation* [arrow] *doit porter un poids énorme pour affirmer une sorte de présence phénoménologique* » [LEWIN 1993, 23]. La pris en compte d'une dimension phénoménologique dans l'analyse musicale mérite également d'être soulignée car elle montre la distance qui sépare la théorie transformationnelle d'une approche « structuraliste » au sens philosophique. Remarquons également que les concepts de base de la phénoménologie husserlienne sont abordés par Lewin dans un article qui adresse la question du lien entre théorie de la musique et perception [LEWIN 1986] Nous reviendrons dans les conclusions sur cet aspect « philosophique » de la formalisation théorique, car la question du rapport entre formalisation algébrique et phénoménologie représente un des enjeux majeurs d'une lecture des thèses de David Lewin à travers la théorie des catégories.

envisager d'analyser le déroulement atemporel de la pièce. On désignera un tel espace abstrait avec le terme de « réseau transformationnel ».

Pour prendre un cas relativement simple, considérons un réseau dans lequel on cherche à mettre en relation le premier pentacorde de la pièce, qu'on notera *P*, avec trois de ses transformations[203] : $I\,(P)$, $T_6(P)$ et $I\,(T_6(P))$. Ce réseau est représenté par le diagramme de la figure suivante :

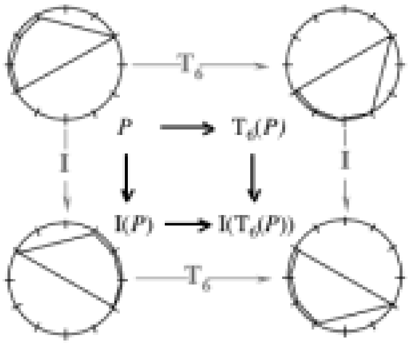


Figure 59 : Un premier réseau transformationnel entre un pentacorde et trois de ses formes

La cohérence formelle du diagramme provient du fait que les relations entre les deux formes *P* et $T_6(P)$ sont préservées entre leurs inversions respectives. Autrement dit, $T_6I\,(P)$ est à la fois la transposition au triton de l'ensemble $I\,(P)$ et l'inversion de l'ensemble $T_6(P)$. Le lien perceptible entre les différentes formes du pentacorde se reflète ainsi dans la cohérence du réseau.

Cependant, l'opération d'inversion, selon sa définition traditionnelle, ne permet pas en général de garantir cette cohérence dans tous les cas. Pour s'en persuader il suffit de considérer la transposition du pentacorde *P* de 8 demi-tons, c'est-à-dire l'ensemble $T_8(P) = \{4,\ 5, 6, 7, 10\}$ et son inversion $I\,(T_8(P)) = \{2, 5, 6, 7, 8\}$. Dans le réseau obtenu, représenté sur la figure suivante, les deux inversions $I\,(P)$ et $I\,(T_8(P))$ ne conservent pas entre elles la même relation de transposition de 8 demi-tons.

[203] Lewin propose d'utiliser une notation abrégée pour indiquer les transpositions et les inversions de *P*. Nous préférons garder la notation utilisée jusqu'à présent pour des raisons d'homogénéité.

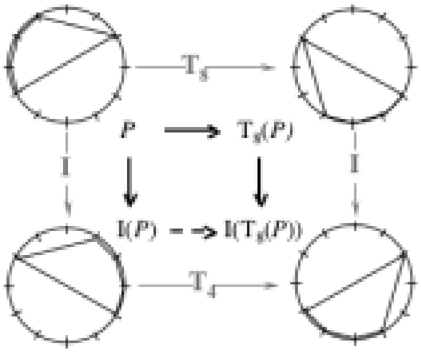


Figure 60 : Un deuxième réseau transformationnel entre le pentacorde et trois de ses différentes formes

Lewin propose donc d'élargir le concept d'inversion en considérant une famille d'opérations « sensibles » à des aspects spécifiques de l'œuvre analysée. De telles opérations sont dites *contextuelles*[204].

Un exemple d'une telle transformation est l'opération d'inversion *J* transformant un pentacorde (ou ses transpositions) en son inverse tout en gardant inchangées (au sens littéral) les quatre notes qui forment le tétracorde chromatique inclus dans le pentacorde *P*. La figure suivante montre l'effet de l'opération *J* sur le pentacorde *P*={2, 8, 9, 10, 11} qui est donc transformé en son « inverse contextuel » *p*={5, 8, 9, 10, 11}, et garde inchangé le tétracorde chromatique {8, 9, 10, 11}.

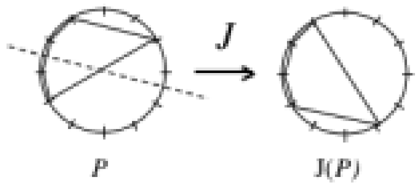


Figure 61 : L'effet de l'opération d'inversion « **contextuelle** » ***J***

Notons qu'il est toujours possible d'exprimer une occurrence particulière de *J* en termes de transposition ou d'inversion (ou des combinaisons des deux opérations). L'indice de transposition change cependant selon la position particulière du pentacorde dans le total chromatique. Avec cette nouvelle définition de l'opération d'inversion, un réseau transformationnel du type du réseau précédent est cohérent par rapport à *toute* opération de transposition du pentacorde de départ. Autrement dit, la relation de transposition entre deux

[204] Comme nous l'avons souligné, la notion de propriété « contextuelle » est également présente dans la démarche de Forte. Cependant, la théorie transformationnelle de Lewin offre un cadre pour étudier cette notion

pentacordes P et $T_n(P)$ est conservée entre les deux formes inverses $J(P)$ et $J(T_n(P))$ pour toute transposition T_n. La figure suivante montre le cas pour la transposition de 8 demi-tons.

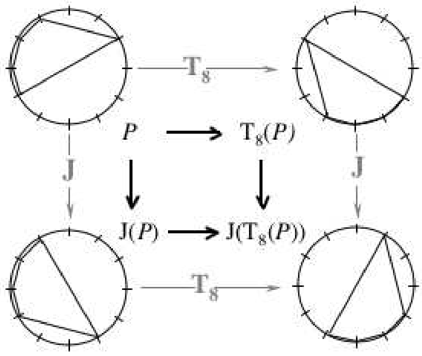


Figure 62 : Exemple de réseau transformationnel cohérent par rapport à l'opération d'inversion contextuelle *J*

C'est précisément le tétracorde chromatique qui constitue selon Lewin un point d'ancrage pour la perception, un aspect qui n'était pas pris en compte par la série d'inversions utilisée dans le cas d'une progression transformationnelle.

Grâce à cette nouvelle inversion, il est donc possible de créer des relations « formelles » entre diverses formes du pentacorde. L'ensemble de ces relations forme un espace de potentialités à l'intérieur duquel la pièce se déroule. À la différence de la « progression transformationnelle », dans un réseau l'organisation des formes du pentacorde n'a aucun lien direct avec leur apparition chronologique. Cette structuration abstraite est néanmoins suggérée et limitée par les transitions effectives dégagées dans la progression temporelle.

2.2.6.2 Construire et utiliser un réseau transformationnel

L'analyse transformationnelle du *Klavierstück III* est sans doute l'étude qui met le mieux en évidence les champs de possibilité envisagés par cette généralisation de la *Set Theory* d'Allen Forte. Comme le titre l'indique[205], l'analyse transformationnelle implique d'un côté la « construction » d'un réseau d'ensembles de classes de hauteurs mais également, d'un autre côté, l'« utilisation » de cette architecture formelle permettant de dégager de critères de pertinence pour la réception de l'œuvre et pour son interprétation. Autrement dit, l'intérêt de *construire* un réseau transformationnel réside dans la possibilité de l'*utiliser*, à la fois pour

par rapport à l'idée de transformation. Pour une discussion récente sur les *opérations contextuelles* on pourra se référer à l'article de Philip Lambert intitulé « On contextual transformations » [LAMBERT 2000].

« structurer » l'écoute par rapport à la singularité de l'œuvre analysée mais également pour établir des critères formels qui pourront servir pour aborder le problème de son interprétation. Dans le premier cas, on rejoint une problématique qui est centrale dans toute réflexion épistémologique sur l'analyse musicale, à savoir l'articulation entre le niveau poïétique (ou compositionnel), le niveau neutre (le niveau de la partition ou, plus généralement, de toute représentation symbolique de l'œuvre) et le niveau esthésique (au sens de la réception)[206]. À partir de cette tripartition, Jean-Jacques Nattiez a récemment proposé une analyse critique de la *Set Theory* d'Allen Forte en soulignant la difficulté qu'il y a à concilier la segmentation de l'œuvre (niveau neutre), qui reste souvent assez arbitraire, et les stratégies compositionnelles (niveau poïétique), qui sont pour la plus part indépendantes des critères de segmentation choisis. Nous avons déjà souligné le caractère « ambigu » de la segmentation dans la *Set Theory*, qui n'offre pas à l'analyste des critères prescriptifs pour en établir la pertinence par rapport aux stratégies compositionnelles ou aux retombées perceptives. La critique de Nattiez ne s'applique pas, nous semble-t-il, à l'analyse transformationnelle, et cela pour plusieurs raisons.

Comme Lewin le montre, les critères de segmentation ne reposent en général pas sur une connaissance préalable des techniques compositionnelles utilisées par le compositeur. En particulier, dans l'analyse du *Klavierstück III* on aurait pu utiliser une segmentation différente, basée sur des structures de tétracordes au lieu de pentacordes, pourvu qu'on puisse établir un réseau des transformations de ces éléments de base capable de recouvrir intégralement la pièce et d'une façon pertinente par rapport à la perception.

Soulignons tout de suite qu'il ne s'agit pas, selon Lewin, d'établir une théorie de la perception de l'œuvre à partir de laquelle déduire des critères analytiques adéquats, en ce qui concerne la segmentation et la mise en relation des segments choisis. La perception reste induite par la structure du réseau formel, pour renverser les termes d'une analyse récente du phénomène structuraliste en musique faite par F. Lévy[207]. Cependant, la construction d'un réseau transformationnel est d'autant plus riche de conséquences qu'elle s'appuie sur une

---

[205] « Making and Using a Pcset Network for Stockhausen's *Klavierstück III* » [LEWIN 1993, 16-67].

[206] Le modèle de la « tripartition », qu'on retrouve également dans l'approche informationnelle d'Abraham Moles sous la forme d'une articulation entre producteur, message et récepteur (voir [MOLES 1958]) a été repris et enrichi, dans une perspective sémiologique, par Jean Molino [MOLINO 1975] et Jean-Jacques Nattiez [NATTIEZ 1975]. Pour une réflexion récente du modèle sémiologique tripartite, voir l'étude d'Olivier Lartillot intitulé « Analyser sans réduire : un modèle cognitif d'inductions d'analogies » [LARTILLOT 2002].

[207] Voir l'article de Fabien Lévy intitulé « Le tournant des années 70 : de la perception induite par la structure aux processus déduits de la perception » [LEVY 2003a].

volonté précise de rendre « intelligible » une logique musicale sous-jacente[208]. Dans le cas du *Klavierstück III*, par exemple, la logique musicale sous-jacente au processus analytique vise à rendre intelligible le réseau relationnel entre les différentes composantes de la pièce.

Lewin discute la portée « cognitive » de cette approche analytique en se référant aux études de Jeanne Bamberger sur la définition de la notion d'*espace musical* chez l'enfant. Dans l'étude intitulée « Cognitive Issues in Development of Musically Gifted Children » [BAMBERGER 1987], les différentes stratégies employées pour arranger des cloches afin d'obtenir une mélodie donnée mettent en évidence deux logique différentes à la base de la constitution d'un espace musical chez l'enfant. Dans un premier cas, les cloches sont disposées dans l'espace dans un ordre linéaire qui respecte la séquence mélodique. Une telle disposition s'apparente à la progression transformationnelle, approche analytique qui suit le déroulement chronologique de la pièce. Une deuxième stratégie mise en évidence consiste à ne disposer dans l'espace que les cloches qui correspondent à des notes différentes en rétablissant la « logique » de la mélodie à travers un parcours bien défini à l'intérieur de l'espace. C'est une démarche qui s'apparente, évidemment, au deuxième type d'analyse transformationnelle, basée sur les réseaux abstraits. Cependant, pour rendre encore plus explicites les retombés cognitives du processus de construction d'un réseau transformationnel, nous voudrions proposer une lecture des diagrammes utilisés par Lewin à partir d'une analyse de certaines approches développementales récentes de la pensée logico-mathématique. Nous allons pour cela retrouver la théorie des catégories, dont nous avons déjà analysé quelques exemples dans le cas de l'approche théorique proposée par Guerino Mazzola.

Nous avons également souligné l'importance des travaux de Jean Piaget dans l'établissement du concept de « musique symbolique », et en particulier de la notion de dualité entre « hors-temps » et « en-temps » chez Iannis Xenakis. Parmi les trois problématiques qui, selon le psychologue Olivier Houdé, marquent le renouveau de la pensée piagétienne, la théorie mathématique des catégories occupe une place tout à fait centrale. À la différence de l'approche structurale que Piaget a développée à partir de l'*Essai de logistique opératoire* [PIAGET 1949] et qui constitu également le cadre conceptuel de ses recherches sur l'abstraction réfléchissante [PIAGET 1977] et sur la généralisation [PIAGET 1978], la

[208] Nous avons évoqué explicitement la notion de « logique musicale » car elle représente l'une des ramifications philosophiques les plus complexes de l'approche algébrique en musique et musicologie. Nous y reviendrons dans l'étude conclusive en essayant d'aborder cette question à partir d'une lecture des thèses du philosophe Alain Badiou par le compositeur et théoricien François Nicolas.

théorie des catégories introduit, selon Houdé, un élément nouveau dans la pensée opératoire[209].

Les morphismes permettent « la prise en compte d'un aspect de la cognition logico-mathématique qui ne procède pas de la transformation du réel (opérations et groupements d'opérations) mais de la simple activité de **mise en relation** » [HOUDE et MIEVILLE 1993, 116][210]. Cette lecture de l'approche catégorique éclaircit, à notre avis, un aspect fondamental de l'analyse musicale de type transformationnel, à savoir l'articulation entre la notion de progression et celle de réseau transformationnel. Dans une progression, les transformations s'enchaînent selon un ordre qui respecte le déroulement chronologique de la pièce. La logique opératoire reste ancrée dans une notion de temporalité qui, comme dans le cas du Klavierstück III, s'avère parfois insuffisante d'un point de vue de la réception de l'œuvre (plan esthésique).

Dans un réseau transformationnel, la « logique opératoire » est créée par le sujet (qui est dans ce cas l'auditeur et/ou l'analyste) à travers une mise en relation d'objets et de morphismes dans un espace abstrait de potentialités. Pour paraphraser la conclusion de Lewin, dans le cas des progressions transformationnelles, quand nous sommes à un point d'une telle progression, nous sommes à un *instant* précis du temps, de la *narration* de la pièce, tandis que dans le cas d'un réseau abstrait nous sommes plutôt à un *point* bien défini à l'intérieur d'un *espace* créé par la pièce. Dans un réseau spatial, les différents événements musicaux « *se déroulent à l'intérieur d'un univers bien défini de relations possibles tout en rendant l'espace abstrait de cet univers accessible à nos sensibilités. Autrement dit, l'histoire projette ce qu'on appelle traditionnellement la forme* » [LEWIN 1993, 41].

C'est probablement trop tôt pour évaluer les conséquences épistémologiques d'un tel changement de paradigme en analyse musicale, la théorie transformationnelle n'ayant pas encore constitué un champ d'études bien défini en musicologie du XX^e^ siècle[211]. Cependant, elle ne fait qu'articuler, à un deuxième degré, la dualité de l'*objectal* et de l'*opératoire* en tant que « *catégorie primitive de la pensée* », pour reprendre la thèse de l'épistémologue français

[209] Notons que l'approche algébrique est déjà présente chez Piaget dès la fin des années trente, dans un écrit resté peu connu et intitulé « La réversibilité des opérations et l'importance de la notion de « groupe » pour la psychologie de la pensée » [PIAGET 1938].

[210] Souligné dans le texte original.

[211] Un pas décisif dans cette direction a été fait lors des derniers travaux du *Mannes Institute* de New York dans lequel la question s'est posée de la place de l'approche transformationnelle à l'intérieur de la musicologie et de la théorie de la musique. La simple métamorphose de l'intitulé de cette rencontre, de l'appellation originale « Transformational Institute » à celle de « Transformation Institute » qui a été peut-être inconsciemment suggérée par le directeur Wayne Alpern, rappelle la lente évolution de la théorie musicale [*musical theory*] vers la théorie de la musique [*music theory*] en tant que discipline académique.

Gilles-Gaston Granger[212]. Dans le même temps, la pensée algébrique offre un cadre conceptuel qui permet de fonder la recherche musicologique sur des bases computationnelles, comme nous allons essayer de le montrer dans l'*Interludium* suivant.

2.3 Interludium. Aspects computationnels de la Set Theory d'Allen Forte et de la théorie transformationnelle de David Lewin

Cette section est consacrée à une exploration computationnelle des outils analytiques proposés par la *Set Theory* américaine, aussi bien dans la démarche classique d'Allen Forte que dans la perspective transformationnelle de David Lewin. Les opérations de base de la *Set Theory* seront ici discutées à travers l'implémentation que nous avons réalisée en *OpenMusic*, un langage de programmation pour l'analyse et la composition assistée par ordinateur qui permet une représentation et une manipulation graphique de ces outils théoriques [ASSAYAG et al., 1999][213]. Comme nous l'avons souvent rappelé tout au long du deuxième chapitre, le catalogue d'accords proposé par Allen Forte n'est qu'un cas particulier d'une *action* d'une structure algébrique de groupe sur un ensemble. L'approche algébrique permet donc de présenter les concepts traditionnels de la *Set Theory* américaine dans une forme à la fois très élégante et particulièrement adaptée à la généralisation et à l'implémentation dans un environnement d'analyse et composition assistée par ordinateur.

L'implémentation que nous avons réalisée permet de choisir la structure de groupe la plus appropriée par rapport au type de relation d'équivalence employée. Chaque structure de groupe caractérise une librairie spécifique ; le fait de privilégier une librairie à une autre peut être considéré comme le choix d'un « paradigme » particulier dans le processus à la fois de formalisation des structures musicales et d'application analytique. L'utilisation analytique d'un catalogue d'accords est donc étroitement liée au paradigme algébrique sur lequel on s'appuie pour définir la notion d'équivalence. Cela nous semble particulièrement important dans le domaine de la musicologie computationnelle, dans lequel la manipulation des

---

[212] Voir, en particulier, l'écrit « Contenus formels et dualité », repris dans l'ouvrage *Formes, opérations, objets* [GRANGER 1994].

[213] L'implémentation a été réalisée en collaboration étroite avec Carlos Agon. Elle s'est également appuyée, récemment, sur l'aide précieuse du compositeur Killian Sprotte, avec qui nous avons intégré les différentes perspectives algébriques ayant trait au problème de la classification d'accords dans une librairie appelée *OMGroups*. Nous analyserons les concepts de base de cette implémentation, tout en en discutant de façon plus détaillée les parties algébriques, en particulier la librairie *Zn* (basée sur la structure de groupe cyclique) et la librairie *Dn* (basée sur la structure de groupe dihédral). Les paradigmes du groupe affine *Aff* et du groupe symétrique *Sn* ne seront pas abordés car les catalogues correspondant d'accords ne sont pas utilisés par la *Set Theory* de façon systématique.

structures musicales assistée par ordinateur, en particulier comme outil d'analyse musicale, est nécessairement soumise à une réflexion épistémologique. Le choix d'un groupe spécifique qui opère sur un ensemble n'est donc pas qu'un simple problème technique, mais il a également des conséquences musicologiques intéressantes. Les différentes librairies que nous avons réalisées en *OpenMisic* (*Zn, Dn, Affn* et *Sn*) offrent de véritables paradigmes à l'intérieur desquels il est possible de modeler le concept d'équivalence musicale, en l'adaptant au répertoire ou au contexte particulier d'une pièce.

Dans le cas de la librairie *Zn,* nous avons utilisé les propriétés algébriques du groupe cyclique **Z/nZ** d'ordre *n* et l'*action* de ce groupe sur la structure d'ensemble sous-jacente[214]. Cela offre, comme nous l'avons vu, une formalisation algébrique du concept d'équivalence entre accords à une transposition près et permet d'établir le catalogue exhaustif des 352 accords à une transposition près (si l'on inclut aussi bien l'ensemble vide que l'ensemble constitué d'une seule classe de hauteurs). Dans le cas du catalogue de Forte, deux accords sont équivalents à une transposition et/ou inversion près. En termes d'action d'un groupe sur un ensemble, on est ainsi passé du groupe cyclique au groupe dihédral opérant sur l'ensemble **Z/nZ** sous-jacent au groupe cyclique. Cette approche algébrique a été implémentée dans la librairie *Dn*, qui représente le cadre théorique où l'on peut placer la *Set Theory* d'Allen Forte et certaines de ses généralisations[215]. Mais avant de rentrer dans la discussion des aspects computationnels de la *Set Theory* américaine, essayons d'analyser comment le choix d'un groupe entre formellement dans la notion d'équivalence entre les accords.

2.3.1 Action d'un groupe sur un ensemble

Par définition un groupe $(G, \bullet)$ opère sur un ensemble X si il existe une application ACTION de $G\times X$ dans X telle que les deux conditions suivantes sont satisfaites :

---

[214] Notons que le passage de la structure de groupe à l'ensemble sous-jacent est un exemple d'application fonctorielle. Plus précisément il s'agit du « foncteur d'oubli » qui permet de mettre en relation une catégorie dont les objets sont donnés par beaucoup de propriétés avec une catégorie dont les objets en ont moins. Autrement dit, le foncteur permet « d'oublier » certaines propriétés sans pour cela perdre la structure catégorielle des deux espaces. Un deuxième exemple de foncteur d'oubli est le foncteur qui à un groupe abélien associe le groupe lui-même, mais dans la catégorie qui contient aussi les groupes non abéliens. Notons que dans ce cas les flèches (ou morphismes) à l'intérieur des deux catégories sont les mêmes, à la différence du foncteur d'oubli entre la catégorie des groupes et celle des ensembles. Cette dernière a, paradoxalement, plus de flèches de la catégorie de départ.

[215] Une simple généralisation consiste à établir un catalogue complet de structures micro-tonales (toujours à une transposition et/ou une inversion près). Cette nouvelle démarche ne change pas le paradigme algébrique sur lequel la notion d'équivalence repose. La seule différence consiste à travailler sur le groupe dihédrale d'ordre 24 et à considérer l'action de ce groupe sur l'ensemble sous-jacent à la structure de groupe cyclique **Z/24Z** ayant 24 éléments.

(a) ACTION ($a \bullet b$, x) = ACTION (a, ACTION ($b \bullet x$)) pour tout a, b dans G et x dans X.

(b) ACTION (e, x) = x pour tout x dans X, où e est l'identité de G.

La première propriété est une sorte de condition de compatibilité entre le concept d'action et la loi de *groupe*. La deuxième propriété exprime le fait que « l'élément identité » de G opère comme « l'action identique » en laissant fixe tout élément de l'ensemble.

Deux éléments x, y de l'ensemble X sont *conjugués* si l'un est l'image de l'autre sous l'action de G sur X, autrement dit s'il y a un élément a dans G tel que y = ACTION (a, x). Comme nous l'avons remarqué, la *conjugaison* est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence sont aussi appelées *orbites.* Musicalement, l'action du groupe cyclique sur l'ensemble des entiers de classes de hauteurs permet de définir les classes de transposition des accords. Les orbites par rapport à l'action du groupe dihédral sont les ensembles de classes de hauteurs dans le sens de Forte [*pitch-class sets*]. Le catalogue des classes équivalences d'accords à une application affine près se réduit à 157 orbites. Et pour conclure, en ce qui concerne les orbites issues de l'action du groupe symétrique **Sn** sur **Z/nZ** , le catalogue comprend 77 classes d'équivalence, toujours en incluant l'orbite formée par une seule classe de hauteurs et le total chromatique.

Voyons d'abord comment la définition formelle de l'action d'un groupe sur un ensemble, telle que nous l'avons donnée précédemment, s'applique au cas du catalogue d'accords de Vieru/Zalewsky à une transposition près. D'un point de vue mathématique il s'agit donc de considérer l'action du groupe cyclique **Z/nZ** sur l'ensemble sous-jacent à une telle structure algébrique. Comme nous l'avons déjà mentionné dans la section précédente, le groupe cyclique **Z/nZ** peut être considéré comme engendré par des opérations plutôt que par des éléments. Si l'on note T_k la transposition de k « unités minimales » (dans la division de l'octave en n parties), pour tout entier k relativement premier avec n, T_k engendre le groupe cyclique **Z/nZ**. Par définition, étant données deux transpositions T_k et T_h, on peut définir la loi de composition « • » de deux transpositions de la façon suivante :

$$T_k \bullet T_h = T_{h+h}$$

où l'addition k+h est calculée modulo n.

Cette opération a deux propriétés fondamentales par rapport à **Z/nZ** en tant qu'ensemble :

1. ($T_k \bullet T_h$) (x) = T_k (T_h (x)) pour deux transpositions T_k et T_h quelconques et pour tout élément x dans **Z/nZ**. Autrement dit, transposer un entier de classe de hauteurs par h

« demi-tons » et ensuite par k « demi-tons » est équivalent à transposer le même entier par h+k « demi-tons » (modulo n).

2. $T_0\,(x) = T_n\,(x) = x$ pour tout x dans **Z/nZ**, où T_0 (ou T_n) est la transposition identique.

En vertu de la définition précédente, on peut conclure que la transposition musicale définit une *action* au sens mathématique du terme. L'énumération des classes de transposition d'accords est donc équivalente à l'étude des orbites d'accords par rapport à l'action du groupe **Z/nZ** sur lui-même.

2.3.2 Enumération et classification des structures musicales

Un premier problème concerne l'énumération de toutes ces orbites pour un tempérament donné. La fonction `card` de la librairie *Zn* permet de calculer le nombre de classes de transposition d'un accord ayant k éléments. La figure suivante montre la situation pour *n*=12 et *n*=24, c'est-à-dire dans le cas de la division de l'octave en 12 et en 24 parties égales. Il y a, par exemple, 80 hexacordes (k = 6) dans la division de l'octave en 12 parties, alors qu'il y en a plus de 5000 (précisément 5620) dans la division en quarts de tons. Cela donne déjà une bonne idée de la complexité combinatoire engendrée par des grandes valeurs de *n*.

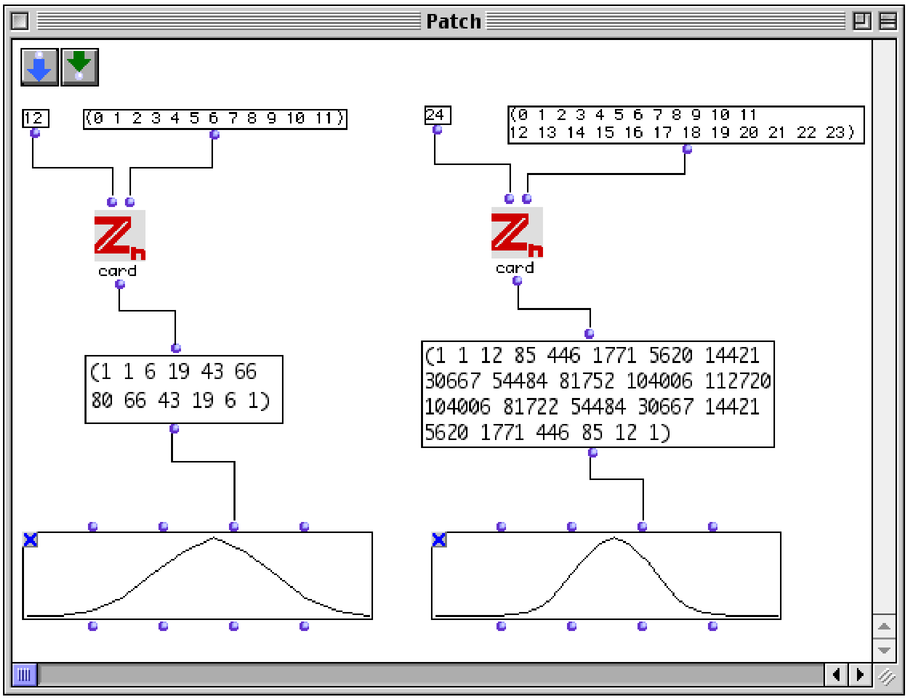


Figure 63 : Nombre de classes de transposition d'accords dans le système tempéré à 12 et à 24 degrés

Un premier changement « paradigmatique » s'obtient en remplaçant le groupe cyclique **Z/nZ** par le groupe dihédral **Dn**. L'action de ce groupe sur l'ensemble sous-jacent au groupe cyclique **Z/nZ** est la généralisation formelle de la *Set Theory* d'Allen Forte.

Après la publication de l'ouvrage de référence *The Structure of Atonal Music* [FORTE 1973], plusieurs implémentations de la *Set Theory* ont été proposées[216]. Dans le cas de la librairie *Dn*, nous avons commencé par adapter en *OpenMusic* une implémentation en lisp réalisée par Janusz Podrazik. Nous avons par la suite ajouté d'autres outils algébriques, en incluant certaines constructions théoriques qui relèvent de l'approche transformationnelle de David Lewin. Comme dans le cas de l'équivalence à une transposition près, la formalisation algébrique de la *Set Theory* nous permet d'obtenir un catalogue complet d'ensembles de classes de hauteurs pour toute division de l'octave en *n* parties égales. La figure suivante représente une relation d'équivalence compatible avec l'action du groupe dihédral sur **Z/12Z**. Un accord de *do* majeur est transformé en accord de *do* mineur par une inversion (par rapport à l'axe qui passe par les points 0 et 6) suivie d'une transposition (d'une quinte).

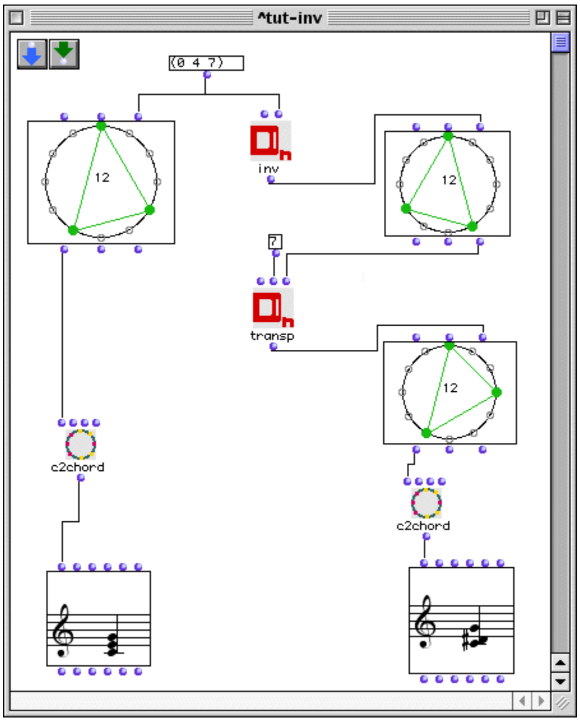


Figure 64 : Equivalence majeur/mineur dans le paradigme Dn

[216] Par exemple, voir « The Contemporary Music Analysis Package » réalisé par Peter Castine et discuté dans le texte *Set Theory Objets* [CASTINE 1994]. Nous discutons aussi quelques aspects de notre implémentation de la *Set Theory* en *OpenMusic* dans la section 11.5.2.3 de *The Topos of Music* [MAZZOLA 2003].

Avec la fonction `Dn-card`, on peut calculer pour tous *n* et *k* le nombre d'ensembles de classes de hauteurs « généralisées » ayant cardinalité *k*. La figure suivante offre une énumération comparative pour le système tempéré à 12 et à 24 degrés.

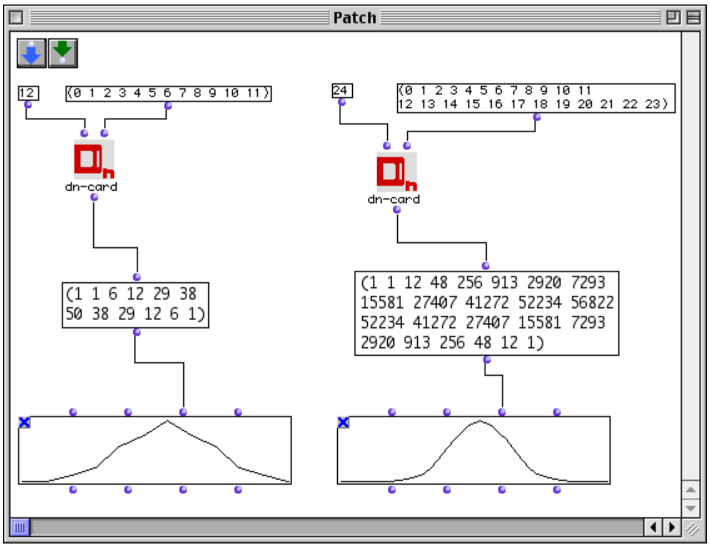


Figure 65 : Distribution du nombre d'orbites sous l'action de *Dn* dans le cas de la division de l'octave en 12 et en 24 parties égales

Comme dans le cas du groupe cyclique **Z/nZ**, on peut remarquer la propriété d'invariance de la fonction `Dn-card` entre les orbites ayant *k* et *n-k* éléments, ce qui suggère qu'on peut restreindre la classification aux classes d'équivalence ayant une cardinalité *k* inférieure ou égale à *n/2* sans perte de généralité. Par exemple, dans le cas de la division de l'octave en 12 parties égales on pourrait restreindre la classification aux ensembles de classes de hauteurs ayant au plus 6 éléments. À chaque ensemble de cardinalité *k* inférieure à 6 correspond un ensemble, le *complémentaire*, de cardinalité 12-*k*. Comme on l'a vu, dans le cas du catalogue de la *Set Theory*, l'ensemble complémentaire n'est pas considéré au sens littéral, mais il est toujours ramené à sa « forme primaire » [*prime form*].

Pour un ensemble de classes de hauteurs donné, nous avons gardé dans l'implémentation la possibilité d'avoir plusieurs représentations, au-delà de celle proposée par Forte dans son catalogue. Pour cela, on utilise la fonction `pc-set` qui opère sur un ensemble de classes de hauteurs représenté dans le catalogue de Forte et qui restitue l'ensemble sous trois formes ou *types* :

3. La représentation par entiers des classes de hauteurs [*integer mode*], donnée par une collection ordonnée d'entiers entre 0 et 11.
4. Le vecteur d'intervalles [*vector mode*].

5. La représentation symbolique traditionnelle [*pitch mode*]. Par convention, 0=C=do, 1=C#=do#=Db=réb, …, 11=B=si.

L'ensemble de classes de hauteurs donné à travers la représentation par des entiers de classe de hauteurs peut facilement être convertie dans la représentation intervallique déjà introduite, grâce à la fonction générique `n—structure`, où l'entier *n* indique l'ordre du groupe cyclique dans lequel se trouve la structure intervallique, comme le montre la figure suivante :

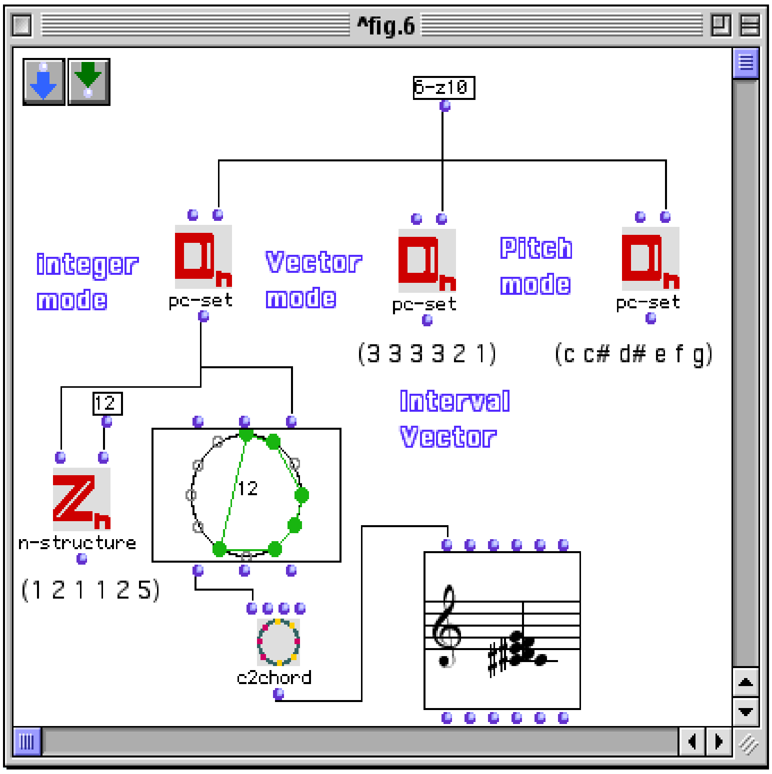


Figure 66 : les fonctions `pc-set` et `n—structure`

Comme nous l'avons déjà souligné, le *vecteur d'intervalles* ne détermine pas un ensemble de classes de hauteurs d'une façon unique. D'un point de vue algébrique, cela s'exprime en disant qu'on peut trouver des ensembles de classes de hauteurs ayant le même vecteur d'intervalles mais n'étant pas équivalents dans le paradigme ***Dn***. Dans la terminologie de Forte cela s'exprime en disant que les deux ensembles de classes de hauteurs sont dans la *relation Z*. Un exemple d'ensemble en relation Z avec l'ensemble de classes de hauteurs de la figure précédente (ensemble **6z-10**) est montré sur la figure suivante :

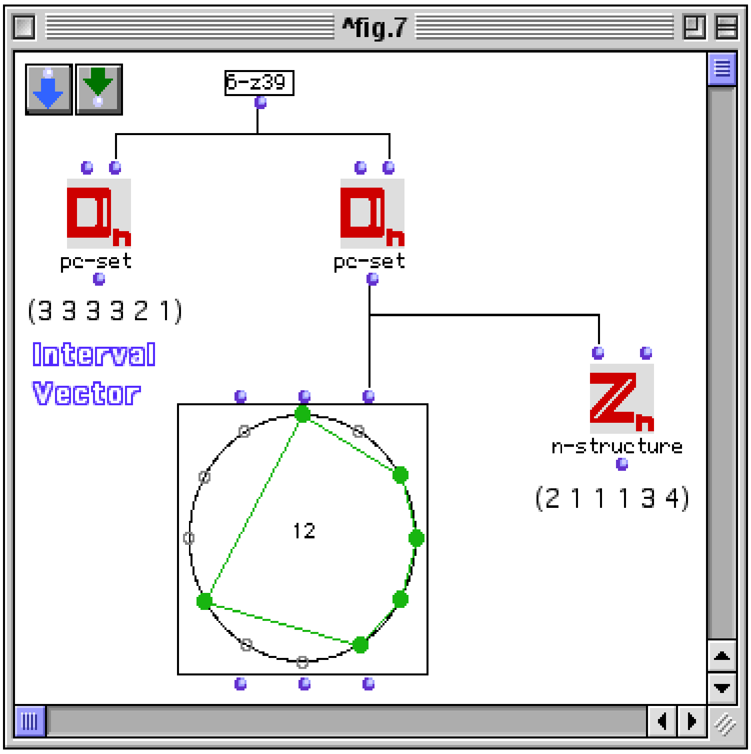


Figure 67 : Un ensemble de classes de hauteurs en relation Z avec l'ensemble 6-Z10

Comme on peut le constater, les `n-structures` correspondantes ne sont pas en rapport de permutation cyclique ou d'inversion, ce qui montre que les deux accords ne sont pas représentés par la même orbite (par rapport à l'action du groupe cyclique **Z/12Z** sur l'ensemble de classes de hauteurs).

En ce qui concerne la relation de complémentarité au sens *abstrait*, nous avons déjà évoqué la possibilité, pour un ensemble de classes de hauteurs, d'être inclus dans son complémentaire. Prenons un exemple tiré de l'analyse du *Sacre du Printemps* d'Igor Stravinsky par Allen Forte [Forte 1978][217]. L'ensemble de classes de hauteurs *A* est inclus dans l'ensemble *B*, car tout élément de *A* appartient à *B*. Le complément « littéral » de *A* est donné par *C* à travers la fonction `Dn-comp`. À son tour, l'ensemble *C* peut être transformé en *B* à travers les opérations de transposition et d'inversion données respectivement par les fonctions `Dn-transp` et `Dn-inv`. En conclusion, *A* est contenu au sens « abstrait » dans son complémentaire.

[217] Cet exemple est discuté également par Marc Chemillier dans « Monoïde libre et musique « [CHEMILLIER 1987].

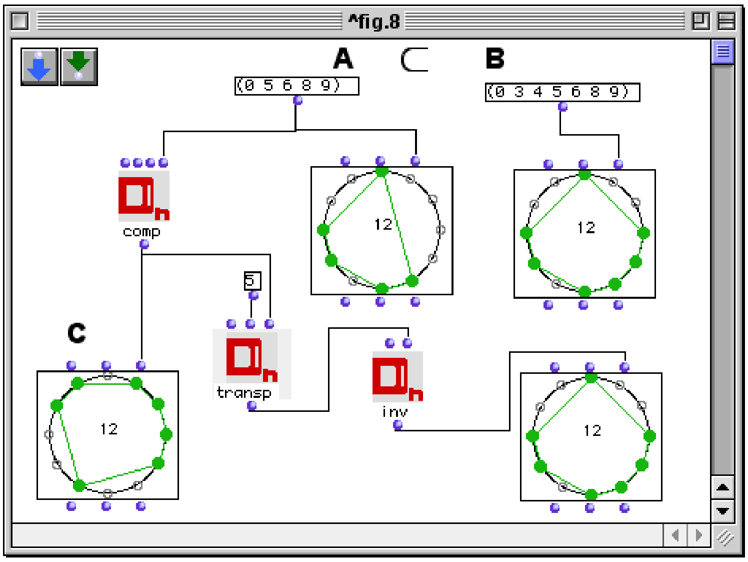


Figure 68 : Un ensemble de classes de hauteurs contenu dans son complémentaire

Comme nous l'avons montré en discutant la notion de complexe et sous-complexe d'ensembles, les relations d'inclusion et de passage au complémentaire permettent de mettre en rapport des ensembles de classes de hauteurs ayant des cardinalités différentes.

La figure suivante montre le sous-complexe *Kh* de l'ensemble de classes de hauteurs **4-28**, correspondant à l'accord de septième diminuée. Son sous-complexe comprend par définition tous les ensembles de classes de hauteurs X_i qui sont en « relation d'inclusion »[218] avec *A* et son complémentaire, l'ensemble *A* étant le *nexus* du sous-complexe. Le sous-complexe, calculé avec la fonction `Dn-sub-complex`, est constitué, dans ce cas particulier, de quatre ensembles, dont la représentation circulaire met en évidence les rapports d'inclusion avec le nexus et son complémentaire.

[218] Rappelons qu'à la différence du langage mathématique, dans la *Set Theory* d'Allen Forte l'expression « *A* est en relation d'inclusion avec l'ensemble *B* » signifie que *A* est inclus dans *B* ou bien que *B* est inclus dans *A*.

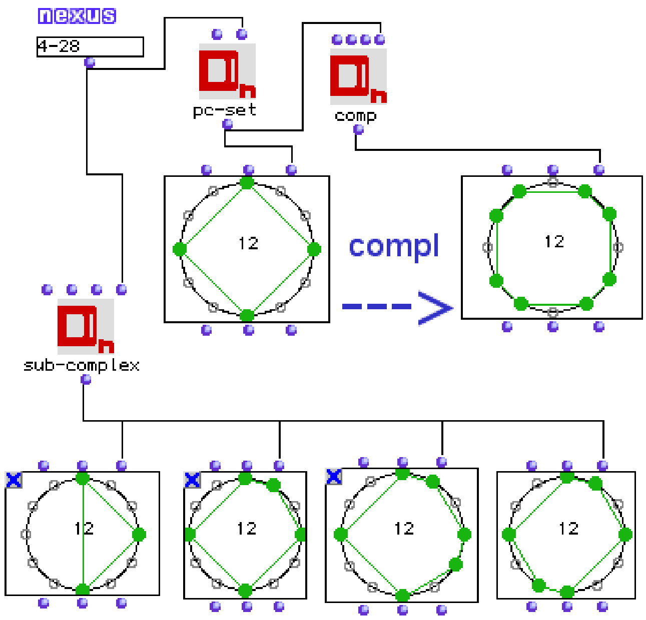


Figure 69 : Le sous-complexe de l'accord de septième diminuée

Dans le cas de la célèbre analyse du *Sacre du Printemps* par Forte, la technique des sous-complexes d'ensembles met en évidence une organisation harmonique autour de l'hexacorde **6-27**, dont le sous-complexe est donné par les cinq ensembles de classes de hauteurs représentés par la figure suivante :

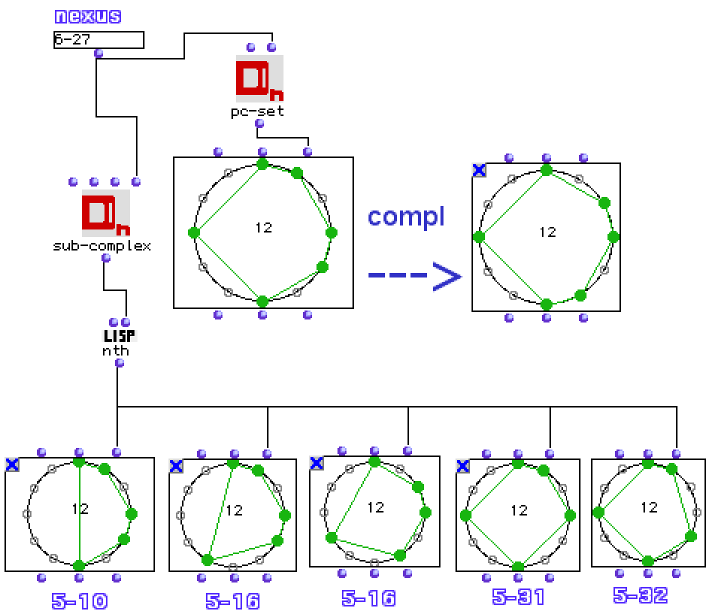


Figure 70 : Un des *nexus* mis en évidence dans l'analyse du *Sacre du Printemps* par Allen Forte

Nous pouvons maintenant abandonner l'approche « classique » de la *Set Theory* et discuter quelques aspects computationnels de l'approche « transformationnelle » de David Lewin.

Certains outils, comme la fonction intervallique IFUNC, sont de simples généralisations des concepts classiques. L'exemple suivant montre l'implémentation de la fonction `ifunc` qui opère sur deux ensembles de classes de hauteurs, respectivement l'accord de *do* mineur et de *do* majeur représentés, comme toujours, à l'aide du cercle chromatique :

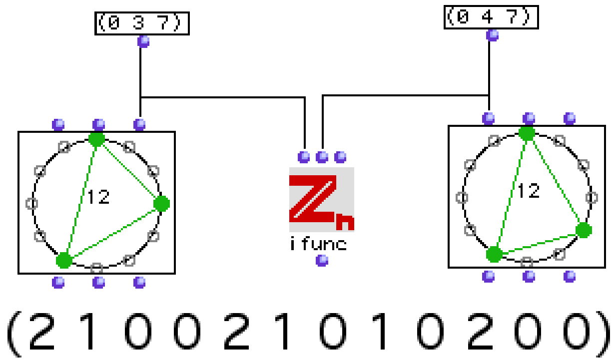


Figure 71 : La fonction `ifunc` entre l'accord de do mineur et l'accord de do majeur

On peut noter qu'en renversant l'ordre des ensembles, la fonction intervallique résultante correspond à la lecture en rétrogradation de la fonction précédente à partir de son premier élément, comme le montre la figure suivante :

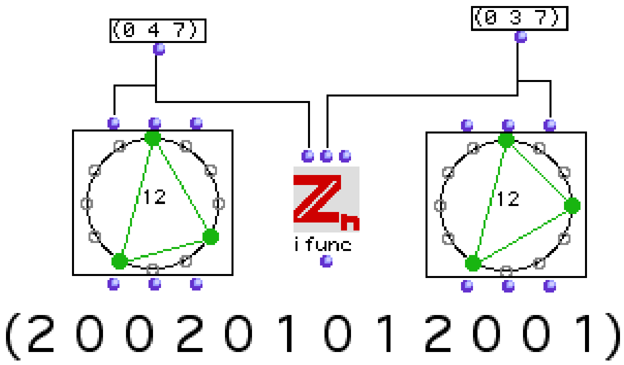


Figure 72 : La fonction intervallique appliquée aux mêmes ensembles mais dans l'ordre inverse

Il s'agit en effet d'une généralisation du vecteur d'intervalles de Forte, comme on le constate en calculant la fonction intervallique dans le cas où les deux ensembles coïncident. La figure suivante montre la relation entre la fonction intervallique IFUNC d'un ensemble et le vecteur d'intervalles de Forte. Notons que pour calculer le vecteur d'intervalles, il faut d'abord transformer un ensemble de classes de hauteurs dans sa *forme primaire* à l'aide de la fonction `p-form`.

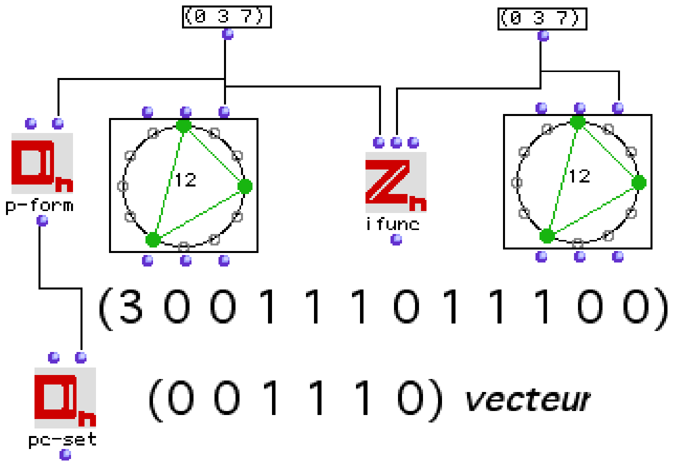


Figure 73 : La fonction intervallique et le vecteur d'intervalles de Forte

Remarquons également qu'à ce stade de la présentation d'outils techniques utilisés par Lewin, l'aspect « transformationnel » est caché par le cas très particulier de la structure d'ensemble d'intervalles généralisés (GIS), appliquée dans le cas du groupe **Z/nZ** et avec la fonction *int* qui compte la distance entre deus classes de hauteurs (modulo l'octave). Cependant, la structure de GIS est beaucoup plus générale car le concept d'« intervalle », exprimé par la fonction *int*, ne repose que sur deux axiomes qui ne sont aucunement restreint au cas de la distance traditionnelle. Ainsi, une autre fonction qui généralise la *Set Theory* classique, à savoir la fonction d'injection INJ, est définie dans le cas abstrait d'un GIS avant d'être appliquée au cas particulier de la théorie classique.

Rappelons que pour tout système d'intervalles généralisés GIS = (S, IVLS, int), pour tous sous-ensembles X et Y de l'ensemble S et pour toute application bijective *f* de X dans Y, on peut définir la fonction injection INJ(X,Y) par rapport à la fonction *f* comme le nombre d'éléments *x* dans X tels que *f*(*x*) appartient à Y. La figure suivante offre un exemple de fonction injection entre l'accord de *do* majeur et l'accord de septième de dominante, en correspondance de la fonction *f* égale à la transposition à la quinte.

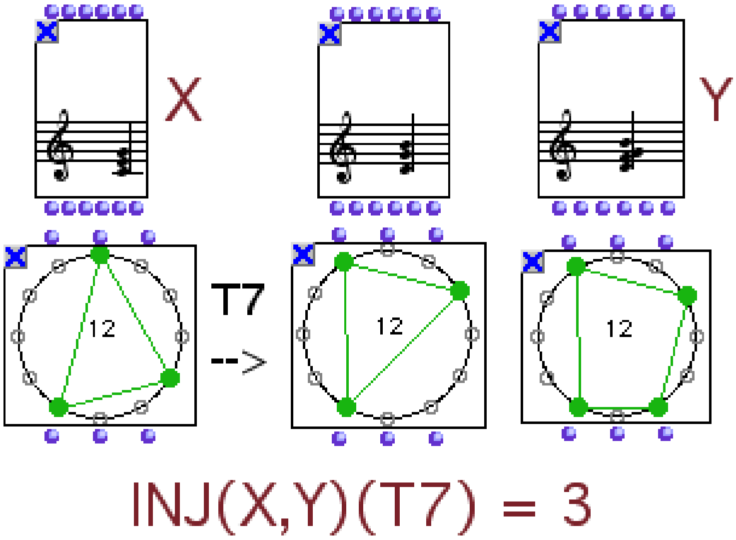


Figure 74 : La fonction injection INJ dans le cas d'une transposition

Comme nous l'avons souligné dans la présentation de l'approche transformationnelle, la fonction injection INJ permet de généraliser certains résultats classiques, comme par exemple le théorème de l'hexacorde de Milton Babbitt. Rappelons que d'après ce résultat, un hexacorde a toujours le même contenu intervallique que son complémentaire, ce qui s'exprime également en termes de fonction intervallique IFUNC en disant que pour tout hexacorde X et pour tout index i, la fonction intervallique calculée sur l'ensemble X sera égale à celle calculée sur l'ensemble complémentaire X'. Formellement on aura donc l'égalité suivante :

$$\text{IFUNC}(X, X)(i) = \text{IFUNC}(X', X')(i) \text{ pour tout intervalle } i$$

La version « transformationnelle » du théorème de l'hexacorde s'obtient en utilisant la relation fondamentale entre la fonction intervallique IFUNC et la fonction injection INJ. Cette propriété affirme que la fonction intervallique entre deux ensembles A et B est égale, pour toute valeur i de l'intervalle, à la fonction d'injection de l'ensemble A dans B en correspondance de la transposition T_i de i demi-tons. En prenant comme ensembles A et B respectivement un hexacorde X et son complémentaire X' on pourra écrire les deux égalités suivantes :

- $\text{IFUNC}(X, X)(i) = \text{INJ}(X, X)(T_i)$ pour tout intervalle i
- $\text{IFUNC}(X', X')(i) = \text{INJ}(X', X')(T_i)$ pour tout intervalle i

En utilisant l'égalité entre les fonctions intervalliques d'un hexacorde et de son complémentaire, on arrive ainsi à la formulation transformationnelle du théorème de Babbitt, qui peut donc s'énoncer en disant que pour toute transposition T_i de i demi-tons les fonctions d'injection correspondantes sont égales. Formellement :

$$\mathrm{INJ}(X, X)(T_i) = \mathrm{INJ}(X', X')(T_i)$$

Lewin montre que le résultat précédent reste vrai si l'on substitue à l'opération de transposition une opération d'inversion, une transformation affine et, plus généralement, toute transformation bijective. Le théorème généralisé de l'hexacorde peut donc s'énoncer en disant que pour toute fonction bijective f et tout hexacorde X (et son complémentaire X') on a la relation suivante :

$$\mathrm{INJ}(X, X)(f) = \mathrm{INJ}(X', X')(f)$$

Ce résultat montre l'existence d'une relation « structurale » profonde entre les contenus intervalliques d'un hexacorde et de son complémentaire, dans le sens que ce contenu est préservé par les quatre opérations qui sont à la base des relations d'équivalences entre ensembles de classes de hauteurs (et du catalogue qui en découle) : la transposition, l'inversion, la multiplication (ou application affine) et la permutation. L'approche algébrique du phénomène de la classification d'accords est « structurale » dans le sens de l'existence d'une structure de groupe qui constitue le « paradigme » sur lequel se fonde la notion d'équivalence entre ensembles de classes de hauteurs[219]. La possibilité de changer le « paradigme » selon le répertoire musical choisi ou selon le contexte analysé est la philosophie qui a guidé la conception de la librairie *OMGroups*, dont une première version est actuellement disponible sur *OpenMusic*. La figure suivante montre l'architecture formelle de cette librairie qui permet d'affiner l'analyse musicale selon quatre types de groupes différents. Chaque groupe établit ainsi un « paradigme » bien défini en ce qui concerne le problème de la classification d'accords : groupe cyclique **Zn** (ou paradigme transpositionnel), groupe dihédral **Dn** (ou paradigme de la *Set Theory*), groupe affine **Affn** (ou paradigme de la théorie mathématique de la musique)[220] et groupe symétrique **Sn** (ou paradigme des textures d'Estrada). Nous reviendrons dans la partie conclusive de ce travail sur certaines ramifications

[219] Notons que cette approche s'applique aussi bien au domaine des rythmes, une fois la notion de rythme définie de façon algébrique. Nous reviendrons sur le modèle algébrique du rythme musical dans la prochaine partie, lorsqu'on discutera la formalisation de la structure de canon rythmique telle nous l'avons implémentée à partir de la théorie proposée par Dan Vuza.
[220] Ici indiqué comme $\mathbf{A}_{\mathbf{n}}$.

philosophiques de la notion de « paradigme » algébrique en théorie de la musique, analyse et composition.

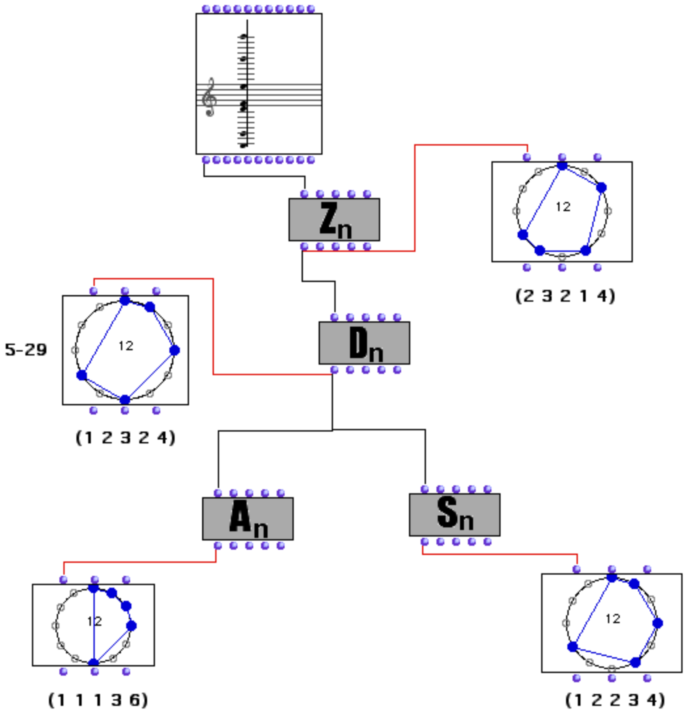


Figure 75 : Architecture « paradigmatique » de la librairie d'aide à l'analyse musicale *OMGroups*

3 Aspects compositionnels : théorie des groupes et combinatoire musicale

Cette partie est consacrée à quelques applications compositionnelles de la démarche algébrique. Nous allons nous concentrer sur les trois compositeurs/théoriciens dont on a analysé quelques aspects théoriques dans la première partie. Mais nous irons beaucoup plus loin, car le domaine de la composition assistée par ordinateur a vu dernièrement une utilisation croissante de méthodes algébriques. Nous nous concentrerons sur un cas particulier de démarche algébrique de la part d'un compositeur avec qui nous avons pu faire un travail de recherche pointu sur un problème qui reste ouvert à d'autres applications compositionnelles différentes.

3.1 L'utilisation compositionnelle de la notion mathématique de partition chez Milton Babbitt

Nous avons analysé dans la première partie certains outils théoriques proposés par Milton Babbitt dans sa formalisation algébrique de la technique sérielle. Un des concepts qui pourraient aider à comprendre les correspondances « structurelles » entre les différents outils algébriques est sans doute celui de *partition*. Il s'agit avant tout d'une notion d'algèbre combinatoire sur laquelle le compositeur revient plusieurs fois dans ses écrits théoriques[221] et qui s'est avérée particulièrement intéressante du point de vue compositionnel. En particulier, elle offre le cadre naturel pour étudier deux concepts théoriques sur lesquels nous avons beaucoup insisté dans la première partie : la *combinatorialité* (en particulier, au niveau des ensembles de trois, quatre et six notes) et le système des *time-points*. Nous analyserons l'application compositionnelle de ce concept dans deux pièces pour piano qui appartiennent à

[221] Certains problèmes musicaux autour du concept de *partition* ont un intérêt non négligeable d'un point de vue mathématique. On a déjà mentionné le théorème de l'hexacorde qui établit une propriété d'invariance, en termes de vecteurs d'intervalles, du partitionnement du total chromatique en deux hexacordes complémentaires. Ce résultat est valable en général pour toute division de l'octave en *n* parties égales, donc pour tout groupe cyclique **Z/nZ**. Deux ensembles mutuellement complémentaires ayant cardinalité $n/2$ ont le même contenu intervallique. Un autre problème célèbre de partition en musique concerne l'étude des matrices carrées ayant *m* lignes et *m* colonnes à valeurs dans **Z/nZ** et pour lesquelles la somme de toute ligne ou colonne est égale à *n*. Les implications compositionnelles de ce problème sont traitées dans un article paru dans le numéro spécial de la revue *Perspectives of New Music* consacré à Milton Babbitt [BAZELOW et BRICKLE 1976]. Pour une présentation de ce problème d'un point de vue mathématique, voir aussi [BAZELOW et BRICKLE 1980].

deux périodes différentes de la production musicale de Milton Babbitt : *Partitions* (1957) et *Post-Partitions* (1966)[222].

Les titres des deux compositions renvoient directement à la notion algébrique qui unifie tous les concepts précédents. Le principe de partition gère aussi bien l'organisation des hauteurs que celle des rythmes, mais dans le cas du rythme, la technique est appliquée dans les deux compositions de façon très différente. En ce qui concerne l'organisation des hauteurs, les deux pièces utilisent le même hexacorde « omni-combinatoire » représenté sur la figure suivante. Cet hexacorde correspond à l'ensemble de classes de hauteurs {0, 2, 3, 4, 5, 7}, ou bien au *pitch-class set* **6-8** dans la table de Forte.

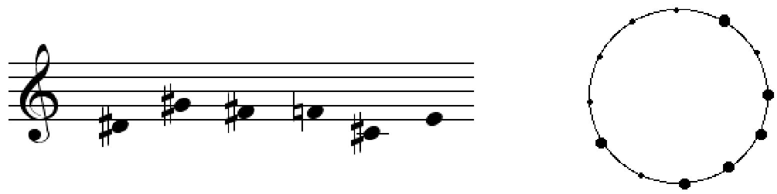


Figure 76 : Hexacorde *all-combinatorial* commun aux deux pièces *Partitions* et *Post-Partitions*

L'hexacorde complémentaire qui ajouté au précédent réalise le total chromatique, est obtenu par une transposition d'un intervalle de triton suivie par une rétrogradation. Il est toujours de type **6-8**, comme le montre la figure suivante :

Figure 77 : Hexacorde complémentaire

[222] Andrew Mead, auteur d'un excellent ouvrage d'introduction à la musique de Milton Babbitt, propose de diviser l'activité compositionnelle de Babbitt en trois périodes. La première période, qui va des expériences initiales autour du sérialisme intégral (*Three Compositions for Piano* et *Composition for Four Instruments* de 1947-48) jusqu'à la fin des années cinquante, est caractérisée par une technique de partitionnement du total chromatique à travers des structures des trois notes (*trichordal arrays*). Cette technique est généralisée dans la deuxième période (1961-1980) à travers l'emploi de partitions ayant un nombre variable d'éléments (*all-partition arrays*). D'autres organisations différentes des hauteurs sous la forme de tableaux (*superarrays*) caractérisent la troisième période de l'activité de Babbitt, qui commence dans les années quatre-vingt et continue à ce jour, la pièce *Allegro Penseroso* pour piano (1999) étant la dernière dans un catalogue qui inclut désormais presque une centaine de compositions.

Grâce à la propriété d'« omni-combinatorialité » de l'hexacorde de départ, la série dodécaphonique obtenue par juxtaposition des deux hexacordes est une série qui contient tous les intervalles (série tous-intervalles)[223]. La série est donnée dans la figure suivante :

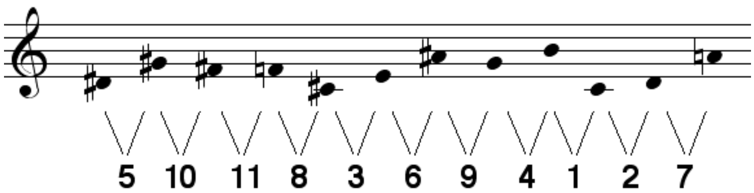


Figure 78 : Série tous-intervalles établie à partir d'un hexacorde *all-combinatorial*

Dans la première pièce que nous allons analyser, le processus compositionnel de *partition* commence par le clavier du piano qui est divisé en sept tessitures, comme le montre la figure suivante :

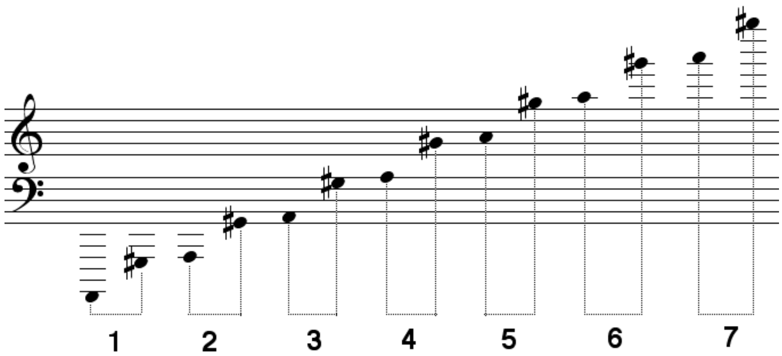


Figure 79: Les sept tessitures employées dans *Partitions*

La pièce peut ainsi être segmentée en sept parties de huit mesures, chaque partie n'utilisant que quatre tessitures à la fois[224]. Par exemple, la première partie utilise les tessitures impaires 1 3 5 7.

L'hexacorde est donné dans les trois premières mesures de la pièce, les notes étant choisies dans le registre moyennement grave (numéro 3). La figure suivante montre les trois premières mesures de la pièce et les quatre tessitures employées :

---

[223] Nous avons analysé une telle structure, aussi bien d'un point de vue théorique qu'historique, dans l'*Interludium* à la fin de la première partie.

[224] Cette segmentation est proposée par Andrew Mead dans son ouvrage d'introduction à la musique de Milton Babbitt [MEAD 1994]. Voir l'analyse de *Partitions* par Jerome Kuderna [KUDERNA 1982] pour une stratégie analytique différente qui ne tient pas compte de façon systématique de la présence des sept tessitures utilisées par le compositeur.

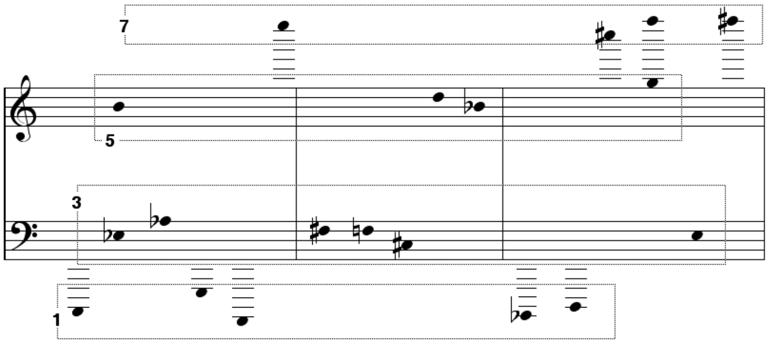


Figure 80 : Les quatre tessitures employées dans les trois premières mesures de la pièce

La pièce peut s'analyser en utilisant des tableaux d'accords de trois notes [*trichordal arrays*], une façon de segmenter la série dodécaphonique que Babbitt a héritée de Webern et qui est utilisée ici dans son aspect éminemment combinatoire. Quatre types différents d'accords de trois notes sont les éléments sur lesquels se base l'architecture de la pièce. Ces quatre ensembles de classes de hauteurs sont donnés par la figure suivante :

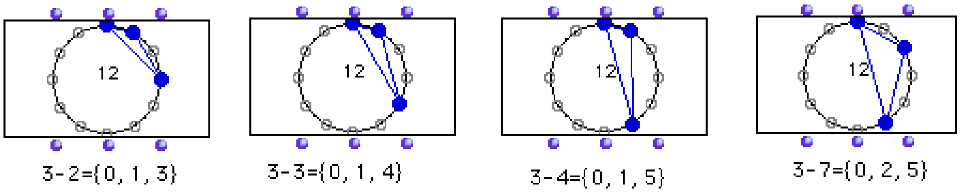


Figure 81 : Quatre ensembles de classes de hauteurs dans *Partitions*

La figure suivante montre un exemple de *trichordal array* qui met en évidence comment l'hexacorde « omni-combinatoire » peut être engendré, par exemple, par deux accords de type **3-7** ou bien de type **3-2** simplement en utilisant des transpositions et des inversions :

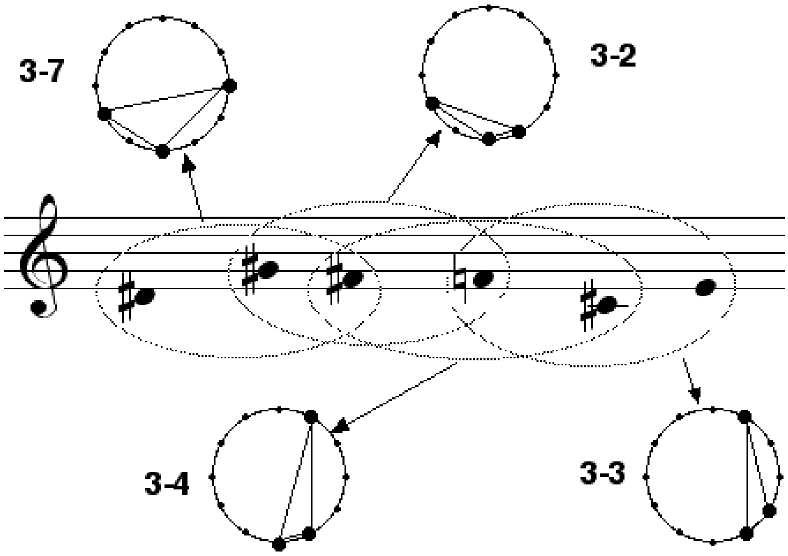


Figure 82 : Fonction “partitionnante” des deux accords de type 3-7 et 3-2

Le total chromatique s’obtient donc en considérant les trois premières notes de chacune des quatre tessitures représentées sur la figure. Aux quatre tricordes précédents, Babbitt ajoute trois autres structures ayant la propriété d’engendrer le même hexacorde omni-combinatoire. Ces structures sont représentées sur la figure suivante :

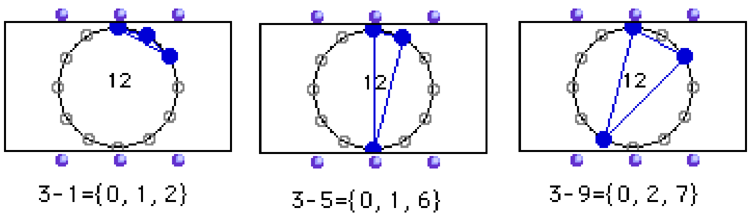


Figure 83 : Trois accords “partitionnant” l’hexacorde *all-combinatorial*

Voyons maintenant comment cette organisation *hors-temps* des hauteurs se reflète dans un processus analogue de *partition*, mais cette fois au niveau rythmique. La structuration rythmique de la pièce est basée sur le premier modèle des rapports hauteurs/rythmes proposé par Babbitt : la série des durées [*durational row*][225].

La pièce utilise une partie des 77 *partitions* possibles du nombre 12. Rappelons qu’en analyse et algèbre combinatoire, une partition d’un nombre n est un ensemble d’entiers compris entre 0 et n dont la somme est égale à n. Pour représenter d’une façon compacte un tel ensemble, Babbitt utilise une notation exponentielle qui condense la répétition y fois du nombre x dans le symbole x^y. En mathématiques, on préfère utiliser une représentation

[225] Nous avons analysé ce modèle hauteurs/rythmes dans la première partie de ce travail, car il s’agit avant tout d’un concept *théorique* qui formalise, comme souvent dans la pensée de Babbitt, une technique compositionnelle issue du dodécaphonisme schoenbergien.

graphique pour indiquer une partition. Il s'agit du *graphe de Ferrer* qui associe à chaque partition x^y une disposition de points dans un réseau de y lignes et x colonnes. Un tel graphe permet de mettre en évidence une propriété de *conjugaison* entre partitions. Par exemple, la partition x^y est la *conjuguée* de la partition y^x. En général, pour obtenir la conjuguée d'une partition donnée, il suffit de changer le rôle des lignes et des colonnes du graphe de Ferrer correspondant[226]. La figure suivante montre un exemple de partition du nombre 12 en six parties, dans ses représentations ensembliste, condensée et graphique :

$$\{1,1,2,2,2,4\} \longleftrightarrow 1^2 2^3 4 \longleftrightarrow$$

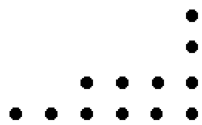


Figure 84 : Quelques exemples de représentations différentes d'une partitions du nombre 12

Dans la pièce *Partitions*, Babbitt considère certaines partitions de 12 en un nombre de parties inférieur ou égal à six et il interprète une partition d'un point de vue rythmique en transformant les valeurs numériques en valeurs de durées. Pour ce faire, il choisit des unités minimales différentes selon le fait qu'il s'agit d'un mètre binaire ou d'un mètre ternaire. Dans le premier cas (c'est-à-dire dans le cas d'un mètre de 4/4 ou de 2/4), l'unité minimale est le triolet de croches (ou le sextolet de noires), tandis que dans le cas d'un mètre de 3/4, l'unité minimale est la double-croche[227]. La figure suivante montre une interprétation rythmique possible de la partition précédente dans un rythme ternaire[228] :

[226] Pour une introduction mathématique aux techniques de partitions en algèbre combinatoire, on pourra se référer à l'ouvrage de John Riordan [RIORDAN 1958]. Pour une description récente des applications musicales de cette technique et d'autres techniques d'algèbre combinatoire, voir le cours avancé de théorie de la musique atonale de Robert Morris [MORRIS 2001].

[227] L'organisation métrique semble représenter l'un des soucis majeurs de l'application compositionnelle d'outils algébriques chez Milton Babbitt. Comme le compositeur l'affirme, *« […] une métrique écrite sur la page doit, pour moi, être projetée musicalement comme une unité auditive perceptible d'organisation d'une progression temporelle [an audible aural unit of framing the temporal progression]. […] S'il n'y a pas une telle organisation métrique, alors une grande partie de l'organisation des hauteurs est cachée, sinon complètement perdue* » [KUDERNA 1982, 77].

[228] Remarquons que pour Babbitt un ensemble qui définit une partition est toujours *non ordonné*. Cela explique le fait qu'on peut associer plusieurs patterns rythmiques à un même ensemble, en considérant une des permutations possibles de ses éléments. Par exemple l'ensemble $\{3, 4, 5\}$ définit une des six permutations possibles de ses trois éléments, c'est-à-dire l'un des *ensembles ordonnés* possibles suivants : 345, 354, 435, 453, 534, 543. D'où la possibilité, par le compositeur, d'affecter une partition du nombre 12 en m parties à une des $m!$ permutations possibles de ses éléments. Notons que ce problème s'intègre dans notre perspective algébrique sur le catalogue d'accords par rapport au concept d'action de groupe. En effet, les partitions du nombre 12 sont les classes d'équivalence des structures intervalliques par rapport à l'action du groupe symétrique $\mathbf{S_n}$ que nous avons analyse brièvement dans l'interlude précédent.

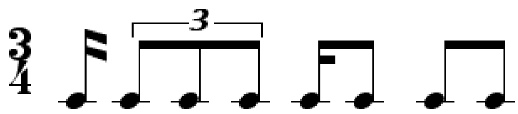


Figure 85 : Interprétation rythmique de la partition {1, 1, 2, 2, 2, 4}

Nous allons maintenant examiner quelques aspects « partitionnantes » d'une deuxième pièce qui est étroitement liée à *Partitions* dans le choix du matériau de base : *Post-Partitions.* Du point de vue de l'organisation de hauteurs, *Post-Partitions* est basée sur la même série tous-intervalles de la pièce précédente. Cependant, la série est traitée avec une technique qui est souvent employée à partir des années soixante : la technique des tableaux *tout-partitionnants* ou *all-partition arrays*[229].

Comme dans le cas de *Partitions*, la série dodécaphonique est donnée au début de la pièce à travers une projection d'un *array* qui est constitué de douze lignes organisées par groupes de deux, chaque groupe contenant un même hexacorde omni-combinatoire et son complémentaire obtenu par des opérations de transposition, inversion et rétrogradation[230]. La partition du total chromatique par des tricordes est ici généralisée à des partitions qui contiennent un nombre variable d'éléments. La figure suivante montre une des possibles partitions du nombre 12 en 6 parties de deux éléments, ce qui correspond musicalement à une organisation des hauteurs qu'on retrouve dans l'*array* initial de *Post-Partitions* :

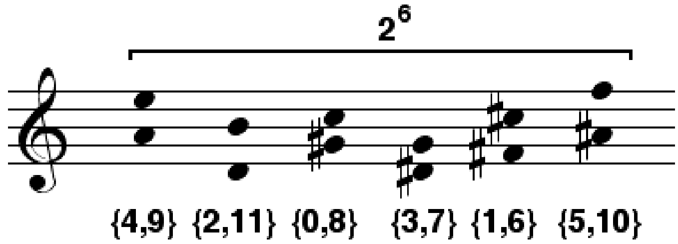


Figure 86 : Une des partitions du total chromatique employée dans l'*array* initial de *Post-Partitions*

La pièce a la particularité d'utiliser l'intégralité des partitions de 12 en un nombre donné de parties. Compte tenu de l'importance de la structure d'hexacorde et de ses subdivisions possibles dans cette composition, on comprend la contrainte que Babbitt pose sur le nombre des parties qui forment l'*array* « partitionnant ». Cet *array* contient la totalité des 58

[229] Nous garderons tout au long de ce travail le terme anglais « array » au lieu de la traduction française.
[230] Les analystes offrent diverses solutions au problème de la segmentation de la surface musicale en douze lignes simples ou bien en six lignes composées. Pour un point de vue différent de celui que nous avons adopté

partitions du nombre 12 en un nombre de parties inférieur ou égal à six, ce qui permet de segmenter la pièce en 6 blocs de 7 partitions chacun plus 2 blocs de 8 partitions[231].

Comme dans le cas des *arrays* basés sur des trichordes, un *all-partition array* est une structure « hors-temps » qui est susceptible de multiples interprétations (ou *projections*, pour reprendre la terminologie introduite par Mead) aussi bien au niveau des hauteurs qu'au niveau rythmique. Cette propriété, qui est particulièrement significative dans tout *all-partition array*, permet, selon certains commentateurs de l'œuvre de Babbitt, de dégager un trait caractéristique de la démarche compositionnelle du théoricien américain. Il s'agit d'un principe de « *diversité maximale* » [MEAD 1994, 19] qui consiste à chercher à explorer le champ combinatoire des possibilités offertes par la technique sérielle dans plusieurs dimensions musicales (hauteurs, rythmes, intensités, …) et en variant le plus possible les paramètres musicaux. Ce processus de diversification maximale du matériel compositionnel est réalisé, dans *Post-Partitions,* à travers une utilisation très particulière de la technique des *time-points*.

Traditionnellement, le *time-points system* tel que nous l'avons décrit dans la première partie de cette étude est basé sur le choix d'une grille rythmique ayant une unité minimale bien définie. Dans le cas de *Post-Partitions*, l'unité minimale varie en fonction de chaque ligne de l'*array*. En outre, chaque entier de classe de hauteurs correspondant à un *time-point* particulier est associé toujours à la même valeur d'intensité. L'échelle des 12 intensités varie entre *ppppp*, qui correspond au nombre 1, jusqu'à *fffff*, qui correspond avec la hauteur *Do* identifiée, par convention, avec le nombre 0. Cette échelle est montrée par le cercle chromatique de la figure suivante:

dans la présente étude, voir les analyses de Jerome Kuderna [KUDERNA 1982] et Peter Lieberson [LIEBERSON 1985].

[231] *L'array* total sur lequel Babbitt a construit les *Post-Partitions* est donné par Andrew Mead dans [MEAD 1994, 274-277].

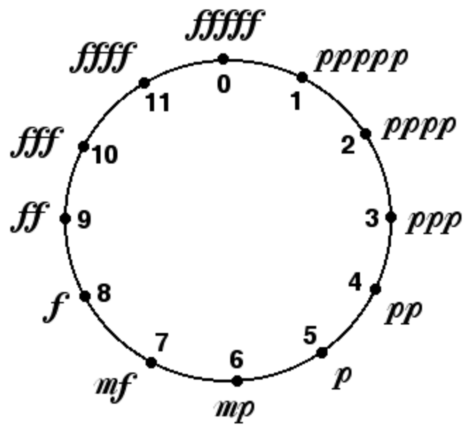


Figure 87 : Cercle chromatique des échelles d'intensités

L'unité minimale varie entre la triple croche et le triolet de croches, ce qui explique l'organisation formelle extrêmement riche du point de l'articulation entre structure rythmique et organisation des intensités. Il faut néanmoins remarquer qu'en dépit du fait qu'il s'agit d'une *partition* du total chromatique, l'interprétation rythmique ne préserve pas le caractère de pavage, précisément à cause du changement de l'unité minimale en fonction de chaque ligne de l'*array*. Paradoxalement, la technique des *time-points* appliquée avec des grilles rythmiques ayant des unités différentes semble contraster avec le principe de « diversification maximale » tel que nous l'avons explicité. Cependant, pour discuter pleinement cet aspect il faudrait analyser en détail plusieurs techniques transformationnelles que le compositeur utilise sur une même structure d'*array*. Certaines techniques, comme la multiplication de chaque entier de classe de hauteur par 5 ou par 7, s'intègrent pleinement dans un cadre algébrique, comme nous avons montré dans le chapitre precedent. Par exemple la multiplication par 7, qui transforme une succession chromatique en une succession des quintes, « *préserve les agrégats dans les partitions tout en changeant le pattern intervallique de la série de base d'une façon prédictible* » [MEAD 1994, 36].

D'autres compositeurs ont appliqué des techniques transformationnelles de type algébrique en composition à partir de considérations très proches à celles de Babbitt. Un des compositeurs qui semble s'approcher le plus au principe de « diversification maximale » de Babbitt, et cela à partir d'une démarche compositionnelle qui est apparemment aux antipodes du dodécaphonisme schoenbergien, est sans doute Iannis Xenakis. La section suivante sera consacrée à l'analyse d'une application très particulière dans le cadre d'une démarche transformationnelle de type algébrique en composition musicale.

3.2 Iannis Xenakis et la théorie des groupes en composition : le cas de « Nomos Alpha »

Dans la section précédente, nous avons mentionné un élément qui pourrait permettre de comprendre les liens entre la pensée compositionnelle d'un théoricien comme Milton Babbitt, toujours intéressé dans sa démarche par les potentialités du système dodécaphonique d'Arnold Schoenberg, et un compositeur comme Iannis Xenakis qui s'est imposé au monde musical à partir notamment d'une analyse des contradictions du langage sériel. Nous avons mis en évidence cet aspect dans la partie théorique de cette étude, en essayant de montrer comment la réponse initiale donnée par le compositeur, à savoir le recours à la statistique et au calcul des probabilités, laisse très tôt la place à une réflexion philosophique sur les fondements algébriques de la formalisation des structures musicales, aussi bien d'un point de vue théorique que compositionnel.

Iannis Xenakis explique clairement cette évolution de sa pensée compositionnelle dans une conférence donnée à Saclay en 1983 et restée inédite à ce jour[232]. Dans cet écrit, intitulé « Problèmes actuels de composition musicale », Xenakis explique la nouvelle conception de la musique proposée au début des années cinquante et qui « *reposait sur des effets de masse d'événements individuels sonores, masse qui empêche alors de suivre les individus un à un* » [XENAKIS 1983, 1]. Par voie de conséquence, l'outil statistique s'imposait dans le processus de théorisation et de composition musicale. D'où une première catégorie nouvelle de musique, la musique *stochastique*, synonyme, selon le compositeur, de musique probabiliste ou musique basée sur le calcul des probabilités.

Cependant, comme Xenakis n'hésite pas à l'affirmer, « il faut aller **plus profondément** dans notre mental musical. Et c'est là que l'on découvre les symétries des propriétés des sons ou des opérations qu'effectue l'auditeur ou le musicien sans le savoir » [XENAKIS 1983, 2][233].

Une deuxième catégorie s'avère donc nécessaire pour rendre compte du fait que « la musique […] est plongée dans l'idée de récurrence, de répétition plus ou moins fidèle, de symétrie en temps ou hors temps » [XENAKIS 1983, 2] et c'est probablement pour cette raison, nous dit le compositeur, que « l'on découvre des structures de groupe presque à fleur de peau » [XENAKIS 1983, 2].

---

[232] Je remercie l'Association *Les Amis de Xenakis* de m'avoir rendu possible l'accès à ce document.

Un des exemples qu'il cite pour montrer le caractère algébrique de certains outils compositionnels concerne les quatre transformations classiques d'une ligne mélodique ou d'une série dodécaphonique : c'est ce que Xenakis appelle la « lecture droite » (c'est-à-dire la forme originaire du profil mélodique ou de la série), le rétrograde, l'inversion intervallique (sic !) et la rétrogradation de l'inversion. Ces quatre transformations forment, comme nous l'avons vu en analysant la pensée théorique de Milton Babbitt, le groupe de Klein. Cela permet, dans le cas de Xenakis, de conclure que « *la stochastique n'est qu'un aspect de la récurrence, de la copie, de la duplication. Un aspect de grand degré d'infidélité contrairement aux chaînes strictement causales, déterministes qui sont le résultat des copies des cycles totalement fidèles* » [XENAKIS 1983, 2].

Cependant, les symétries qu'on retrouve d'un point de vue analytique quand on analyse, par exemple, des pièces basées sur la technique dodécaphonique, « *peuvent être utilisées* ***cette fois consciemment*** *pour bâtir des architectures sonores* » [XENAKIS 1983, 2][234]. Une étude théorique du concept de symétrie à partir de l'analyse d'une pratique compositionnelle classique, comme la manipulation des quatre formes d'un profile mélodique ou d'une série dodécaphonique, ouvre le champ à des applications tout à fait nouvelles en composition musicale. Dans le cas précis des quatre transformations du groupe de Klein, la démarche théorique de Xenakis est particulièrement intéressante car elle s'appuie sur une représentation à la fois algébrique et géométrique qu'on ne retrouve pas souvent dans les écrits des théoriciens de l'époque.

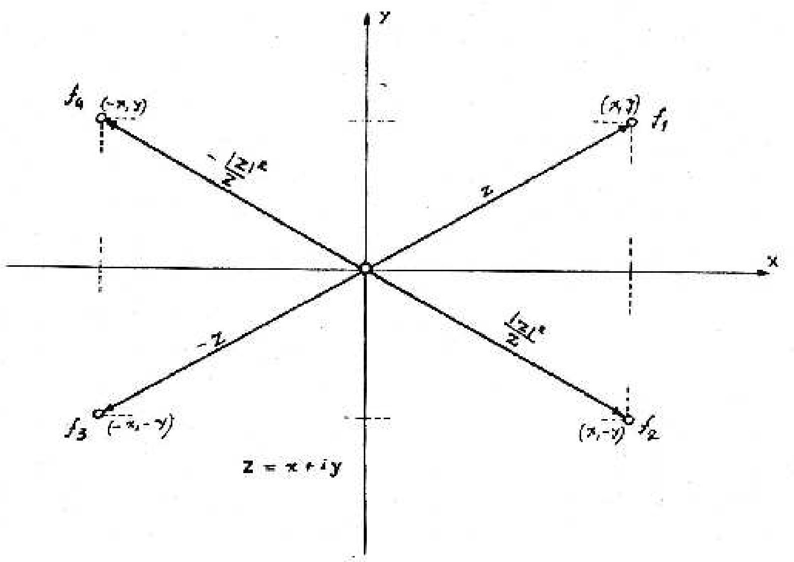
Nous décrivons ici succinctement la représentation géométrique du concept de groupe de Klein comme introduction aux techniques algébriques utilisées par le compositeur dans sa pièce *Nomos Alpha* (1966) à laquelle nous consacrerons une grande partie de ce chapitre[235]. Xenakis formalise les quatre transformations d'une série dodécaphonique en considérant les symétries qui laissent inchangé un rectangle dans le plan **C** des nombres complexes. En identifiant un sommet du rectangle avec un nombre complexe $z=x+iy$, on peut associer chaque symétrie du rectangle, et donc chaque transformation sérielle, avec une opération sur le nombre complexe z.

---

[233] C'est nous qui soulignons. Nous développerons ce concept de profondeur de la portée théorique de la pensée algébrique dans la partie conclusive de cette étude.
[234] C'est un passage que nous soulignons car on voit paraître une articulation entre le moment « descriptif » (ou phase analytique) et le caractère « prescriptif/normatif » de l'application compositionnelle d'une démarche théorique, pour reprendre une typologie introduite par Célestin Deliège [DELIÈGE 1995]. En particulier, le passage tiré de Xenakis semble expliciter une des caractéristiques majeures des méthodes algébriques, à savoir la possibilité d'établir une articulation profonde entre pensée théorique, analytique et compositionnelle.

- L'inversion intervallique est la symétrie par rapport à l'axe horizontal et correspond à la *conjugaison*, c'est-à-dire à l'opération qui transforme le nombre complexe z en son conjugué[236] $z^*=x-iy$.
- La rétrogradation est la symétrie par rapport à l'axe vertical et correspond à l'opération qui transforme z en l'inverse algébrique du conjugué, c'est-à-dire en le nombre $-z^*=-x+iy$ ou, de façon équivalente, dans $-|z|^2$ divisé par z.
- La quatrième et dernière opération sérielle, la rétrogradation inverse, correspond à l'opération qui transforme z en son inverse algébrique $-z$. Notons que cette dernière opération correspond, d'un point de vue géométrique, à une rotation du rectangle de 180° autour son centre.

La figure suivante, tirée de la deuxième édition anglaise de *Musiques Formelles* [XENAKIS 1992], montre les quatre transformations complexes décrites précédemment :



$Z = x + yi$

$f_1 = Z = x + yi = Z = f_1(Z) =$ original form

$f_2 = x - yi = |Z|^2/Z = f_2(Z) =$ inversion

$f_3 = -x - yi = -Z = f_3(Z) =$ inverted retrogradation

$f_4 = -x + yi = -(|Z|^2/Z) = f_4(Z) =$ retrogradation

Figure 88 : Représentation algébrico-géométrique des quatre transformations de base d'une série dodécaphonique

[235] Pour plus de détails voir [ANDREATTA 1999, 9-11].

[236] Xenakis utilise une autre expression pour noter le nombre conjugué, c'est-à-dire $|z|^2$ divisé par z, où le modulo $|z|$ d'un nombre complexe $z=x+iy$ est défini comme x^2+y^2. Notons que ce concept de *conjugaison* n'a aucun rapport avec la notion de conjugué dans le cas d'un processus de *partition* en algèbre combinatoire, tel que Milton Babbitt l'applique dans sa généralisation du dodécaphonisme schoenbergien.

Une première généralisation à la fois théorique et compositionnelle proposée par Xenakis à partir du groupe des quatre symétries du rectangle consiste à considérer les rotations d'un angle quelconque d'un profil mélodique dans le plan. Comme il l'a dit récemment dans un de ses nombreux entretiens, « *on peut imaginer d'autres types de transformations, comme une rotation continue ou discontinue, peu importe, d'un angle quelconque. Alors ça donne des phénomènes nouveaux, des événements nouveaux, même à partir d'une mélodie, puisqu'une mélodie simple devient une polyphonie* » [DELALANDE 1997, 93]

On voit donc un premier élément d'intérêt de l'utilisation des « rotations » en composition[237]. Ces transformations permettent de construire de nouvelles architectures sonores dont l'aspect graphique des *arborescences* constitue l'une des applications musicales les plus connues[238]. Cependant, un deuxième aspect nous intéresse tout particulièrement puisqu'il met en évidence certaines analogies avec la démarche compositionnelle de Milton Babbitt. Il s'agit de l'utilisation des rotations à l'intérieur d'un paradigme algébrique qui trouve dans la notion de *groupe* l'outil conceptuel naturel pour gérer la combinatoire de façon structurelle tout en respectant le principe de « diversification maximale » que nous avons déjà vue chez Milton Babbitt. Nous allons donc étudier le processus compositionnel en œuvre dans *Nomos Alpha* pour violoncelle solo (1966).

Il existe à présent au moins six analyses très détaillées de cette pièce, dont la première est le mémoire de Fernand Vandenbogaerde - mené sous la supervision du compositeur, à l'époque chargé du cours de « Mise en ondes et acoustique appliquée » à la Schola Cantorum [VANDENBOGAERDE 1968] - jusqu'à l'analyse de Robert Peck sur les rapports entre la structure formelle de la pièce et son interprétation [PECK 2003][239]. À ces analyses, nous

---

[237] Le compositeur allemand H. Eimert avait proposé de généraliser la technique sérielle avec des transformations d'angles variables dans son ouvrage *Grundlagen der musikalischen Reihentechnik* [EIMERT 1964], que nous avons déjà cité comme l'une des premières études sur les séries dodécaphoniques tous-intervalles. Un article publié quelques années par O'Connell, un théoricien américain, montre comment le concept de rotation dans ce qu'il appelle les *Tone Spaces*, est étroitement lié à la notion de structure algébrique dans un espace géométrique abstrait [O'CONNELL 1968]. Curieusement, ce dernier écrit n'apparaît presque jamais dans les références d'articles concernant l'organisation algébrico/géométrique de l'espace musical.

[238] Par exemple, dans le graphique de travail de la pièce *Erikhton* pour piano et orchestre (1974) on peut voir l' utilisation des symétries et en particulier des rotations des lignes mélodiques du piano. Ces lignes sont traitées selon la technique des arborescences, comme le montre François Delalande dans son entretien avec le compositeur [DELALANDE 1997, 96].

[239] Les autres analyses sont celles de Thomas DeLio [DeLIO 1980], Jean Vriend [VRIEND 1981], Makis Solomos [SOLOMOS 1993] Ajoutons aussi notre analyse qui envisage pour la première fois le problème d'une modélisation informatique du processus compositionnel [AGON *et al.* 2003]. Cette analyse considère *Nomos Alpha* comme l'évolution conceptuelle de la pièce *Herma* pour piano solo, composée quelques années auparavant. Les deux pièces appartiennent, selon la définition du compositeur, à la catégorie de « musique symbolique », mais leur différence profonde relève de la nature *ensembliste* de la première et du caractère *algébrique* de la deuxième. Comme le compositeur l'affirme dans une longue interview avec Bálint András

pouvons ajouter la description très détaillée de la pièce donnée par le compositeur dans un article paru à la fin des années soixante dans la *Revue d'esthétique* et repris successivement dans *Musique Architecture* [XENAKIS 1976] et *Formalized Music* [XENAKIS 1992].

La longueur de toutes ces analyses est en soi un indice des difficultés qu'on rencontre dès qu'on cherche à résumer en quelques pages les multiples aspects de cette pièce. La lecture de *Nomos Alpha* que nous proposons ici est centrée sur un aspect que nous avons analysé en détail dans le chapitre précédent, à savoir la dialectique entre un aspect *objectal* et une démarche *transformationnelle.* D'un point de vue compositionnel, Milton Babbitt est, comme on l'a vu, l'un des premiers théoriciens à développer une réflexion sur cette dualité comme élément constituant du dodécaphonisme schoenbergien[240]. Cette dualité est particulièrement évidente dans une pièce comme *Nomos Alpha* dans laquelle le compositeur utilise pleinement la puissance *transformationnelle* de la théorie des groupes finis, tout en donnant au concept même d'*objet musical* un caractère qui reste indépendant de toute composante opérationnelle.

Il y a donc, dans cette pièce, une dialectique entre structure et matériaux, comme Thomas DeLio l'a mis en évidence [DeLIO 1980], dialectique qui nous semble être une conséquence d'une dualité plus profonde entre objectal et transformationnel dans la formalisation du processus de composition. Cet élément théorique, qui permet d'ouvrir une discussion plus générale sur la portée épistémologique des méthodes algébriques en musique et musicologie se concrétise dans l'œuvre à travers le caractère computationnel du processus de composition. C'est précisément la calculabilité du processus algébrique qui rend particulièrement significatif le recours à des outils informatiques comme aide à l'analyse. Notre lecture de la pièce sera donc une discussion autour du concept de modèle et de modélisation en analyse musicale, ce qui nous offrira la possibilité de décrire les aspects compositionnels des méthodes algébriques dans une perspective de musicologie computationnelle.

Faire une modélisation informatique du processus compositionnel en œuvre dans la pièce *Nomos Alpha* implique d'abord une prise en compte non seulement des éléments systématiques décrits par le compositeur, mais aussi du champ des potentialités théoriques

---

Varga, *« les ensembles peuvent être amorphes, comme dans Herma, ou bien ses éléments sont liés de quelque façon. En d'autres termes, les ensembles ont une structure interne. C'est cela qui m'a emmené vers les structures de groupe qui caractérisent la pensée humaine depuis un temps immémorial* » [VARGA 1996, 85].

.

[240] Rappelons que la structure de groupe de Klein, qui gère l'organisation « hors-temps » de la série dodécaphonique, exprime précisément cette dualité entre les formes de la série conçues comme des *objets*, et les quatre transformations musicales interprétées comme des *opérations* algébriques qu'on peut combiner à travers les axiomes de la théorie des groupes.

offertes par le système. Ensuite, placer une telle modélisation dans une perspective musicologique nous oblige pour ainsi dire à revenir à l'œuvre en essayant de comprendre, à partir du modèle formel, la singularité de certains choix compositionnels. En effet, comme plusieurs analystes ont pu l'observer, *Nomos Alpha*, ainsi que la plupart des œuvres de Xenakis[241], n'est pas le simple résultat du calcul formel. Cependant, le fait d'entrer un peu plus dans la partie computationnelle du processus algébrique de composition nous permet d'ouvrir un débat sur les rapports entre le modèle formel et l'œuvre.

Un premier élément concerne la macro-forme de la pièce qui, d'après notre analyse, semble être une conséquence directe de la nature particulière du groupe algébrique employé plutôt qu'un choix libre du compositeur. Deuxièmement, un concept éminemment compositionnel comme le « principe de diversification maximale », est appliqué, dans le cas de *Nomos Alpha*, à travers une conscience précise des propriétés formelles du système. C'est donc sur cet aspect systématique que nous concentrerons la discussion de la démarche compositionnelle dans la pièce.

Afin de mettre en évidence le processus de manipulation hors temps d'outils algébriques et leur organisation temporelle de la part du compositeur, nous avons implémenté le processus compositionnel en *OpenMusic*[242]. Un concept particulier s'est avéré extrêmement utile pour représenter l'organisation formelle de la pièce : celui de maquette. Une maquette est un espace de représentation d'objets et de processus musicaux dont une dimension est le temps et une des possibilités offertes d'établir des hiérarchies et des liens fonctionnels entre les objets. Dans le cas de *Nomos Alpha*, la maquette permet d'étudier les différents enchaînements temporels d'objets musicaux dont les propriétés structurelles sont déterminées par un processus algébrique qu'on peut visualiser à travers une deuxième maquette emboîtée dans la première. Il s'agit de huit objets musicaux que Xenakis appèle complexes sonores et dont la description est donnée par la figure suivante :

[241] La seule exception semble être les trois œuvres stochastiques *ST/48*, *ST/10* et *ST/4* (1956-62) qui appartiennent pleinement à la catégorie des pièces algorithmiques.

[242] Dans *Nomos Alpha*, comme dans d'autres compositions telles que *Herma*, les deux catégories fondamentales introduites par Xenakis (l'*hors-temps* et l'*en-temps*) ne suffisent pas pour rendre compte du processus compositionnel. Nous reviendrons par la suite sur cet aspect qui suggère l'introduction et la discussion, d'un point de vue compositionnel, d'une catégorie théorique intermédiaire, celle du *temps logique* [ASSAYAG 2000].

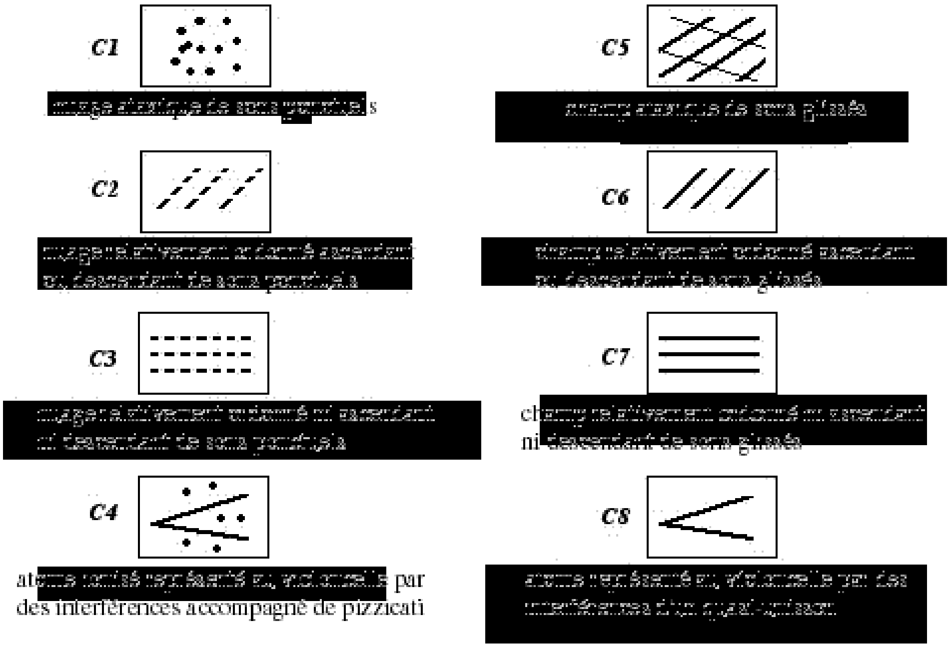


Figure 89 : Les huit complexes sonores de la pièce « Nomos Alpha »

L'ordre temporel des huit complexes sonores dans la pièce est géré par une structure algébrique particulière : le groupe des 24 rotations du cube dans l'espace. Les complexes sonores sont mis en correspondance avec les huit sommets du cube de telle façon que toute rotation détermine une permutation dans l'ordre des complexes sonores. Cette correspondance est rendue possible en prenant un cube de référence[243] qui donne un ordre privilégié aux huit sommets du cube. Une rotation du cube induit une permutation des sommets du cube unitaire. La figure suivante, tirée de l'analyse de Robert Peck [PECK 2003] montre les 24 éléments du groupe des rotations du cube associés à la permutation des sommets correspondante :

[243] Ou cube *unitaire*, car d'un point de vue *transformationnel* il représente l'élément neutre du groupe des rotations du cube.

I	12345678
A	21436587
B	34127856
C	43218765
D	23146758
D^2	31247568
E	24316875
E^2	41328576
G	32417685
G^2	42138657
L	13425786
L^2	14235867
Q_1	78653421
Q_2	76583214
Q_3	86754231
Q_4	67852341
Q_5	68572413
Q_6	65782134
Q_7	87564312
Q_8	75863142
Q_9	58761432
Q_{10}	57681324
Q_{11}	85674123
Q_{12}	56871243

Figure 90 : Les vingt-quatre permutations des huit nombres utilisées dans la pièce

Par exemple, l'élément *A* correspond à la permutation qui échange les éléments deux par deux. Autrement dit, le groupe (1 2) est transformé dans (2 1), le groupe (3 4) dans (4 3) et ainsi de suite. On pourra aussi représenter la permutation en explicitant comment elle transforme chaque élément de *I*. Si l'on note par la flèche « $\Rightarrow$ » la transformation d'un nombre *x* dans un nombre *y*, on pourra représenter une permutation des huit nombres avec huit transformations, comme dans la figure suivante :

$1\Rightarrow2$	$2\Rightarrow1$
$3\Rightarrow4$	$4\Rightarrow3$
$5\Rightarrow6$	$6\Rightarrow5$
$7\Rightarrow8$	$8\Rightarrow7$

Figure 91 : effet de la permutation *A* sur les groupes (1 2), (3 4), (5 6), (7 8)

Notons qu'on peut obtenir cet élément en faisant le *produit* de deux autres éléments du groupe, plus précisément *E* et *G*. En effet *E* transforme 1 dans 2 et *G* laisse le nombre 2 inchangé. Donc le produit *E(G)* transforme la valeur 1 dans 2, ce qui correspond à la transformation engendrée par l'élément *A.* La figure suivante montre l'effet du produit des permutations *E(G)* sur tous les éléments :

1⇒2⇒2 donc 1⇒2

2⇒4⇒1 donc 2⇒1

3⇒3⇒4 donc 3⇒4

4⇒1⇒3 donc 4⇒3

5⇒6⇒6 donc 5⇒6

6⇒8⇒5 donc 6⇒5

7⇒7⇒8 donc 7⇒8

8⇒5⇒7 donc 8⇒7

Figure 92 : l'élément *A* comme produit *E(G)* des permutations

Notons que le produit des permutations (ou, d'une façon équivalente, la composition des rotations, n'est pas commutatif. Autrement dit *E(G)* n'est pas la même rotation que *G(E)*, comme le montre la figure suivante :

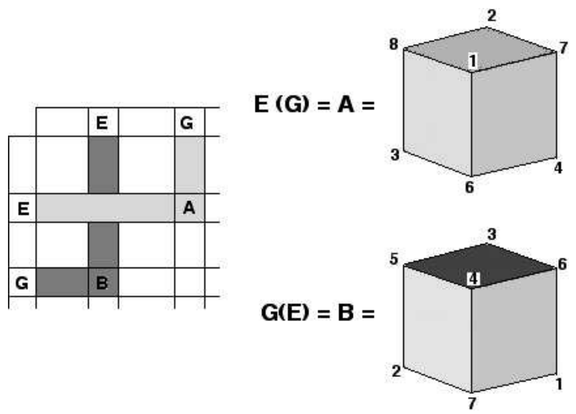


Figure 93: La non-commutativité du groupe des rotations du cube dans l'espace

Pour retrouver la permutation induite par la rotation *B* il suffit de parcourir les sommets du cube correspondant dans le même ordre que les sommets du premier cube pour avoir la permutation attachée à l'élément *A.* On obtient donc la permutation 34127856, qui correspond à l'élément *B* dans la table donnée précédemment.

Un complexe sonore *Ci* est attaché au ième sommet du cube de telle façon qu'un élément du groupe des rotations détermine ainsi un ordre d'enchaînement particulier des complexes sonores. De plus, chaque élément du groupe des rotations est affecté par un paramètre (α, β ou γ) qui ajoute des permutations supplémentaires afin de varier au maximum les caractéristiques structurelles de deux complexes sonores successifs[244]. La figure suivante montre la séquence des huit complexes sonores attachés à l'opération de groupe indiqué par la lettre *D* et qui a été choisie comme le point de départ de la pièce.

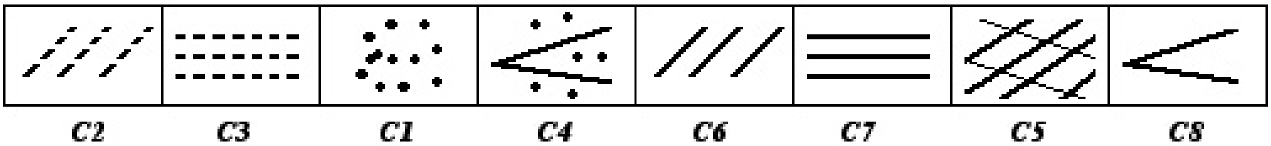


Figure 94 : La séquence initiale des complexes sonores

Grâce à la propriété de *fermeture* du groupe, toute combinaison de deux rotations est un élément du groupe, comme le montre le tableau de groupe de la figure suivante :

[244] Nous reviendrons sur le rôle stratégique des paramètres α, β et γ dans la discussion sur la nature *temporelle* du processus de structuration des complexes sonores dans la pièce. Le recours à des paramètres supplémentaires pour changer la permutation induite par une rotation donnée représente une instance du principe de « diversification maximale » (*maximal diversity principle*) que nous avons vue à l'œuvre dans le cas de la généralisation du dodécaphonisme schoenbergien par Milton Babbitt.

	I	A	B	C	D	D2	E	E2	G	G2	L	L2	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12
I	I	A	B	C	D	D2	E	D2	G	G2	L	L2	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12
A	A	I	C	B	G	L	G2	L2	D	E	D2	E2	Q7	Q4	Q5	Q2	Q3	Q12	Q1	Q10	Q11	Q8	Q9	Q6
B	B	C	I	A	L2	E	D2	G	E2	L	G2	D	Q6	Q9	Q8	Q11	Q10	Q1	Q12	Q3	Q2	Q5	Q4	Q7
C	C	B	A	I	E2	G2	L	D	L2	D2	E	G	Q12	Q11	Q10	Q9	Q8	Q7	Q6	Q5	Q4	Q3	Q2	Q1
D	D	L2	E2	G	D2	I	C	L	E	A	B	G2	Q3	Q6	Q4	Q1	Q11	Q10	Q8	Q9	Q7	Q2	Q12	Q5
D2	D2	G2	L	E	I	D	G	B	C	L2	E2	A	Q4	Q10	Q1	Q3	Q12	Q2	Q9	Q7	Q8	Q6	Q5	Q11
E	E	L	G2	D2	B	L2	E2	I	A	D	G	C	Q11	Q5	Q6	Q8	Q7	Q9	Q2	Q12	Q3	Q1	Q10	Q4
E2	E2	G	D	L2	G2	C	I	E	L	B	A	D2	Q10	Q7	Q9	Q12	Q2	Q3	Q5	Q4	Q6	Q11	Q1	Q8
G	G	E2	L2	D	L	A	B	D2	G2	I	C	E	Q5	Q12	Q2	Q7	Q9	Q8	Q10	Q11	Q1	Q4	Q6	Q3
G2	G2	D2	E	L	C	E2	L2	A	I	G	D	B	Q9	Q3	Q12	Q10	Q1	Q11	Q4	Q6	Q5	Q7	Q8	Q2
L	L	E	D2	G2	A	G	D	C	B	E2	L2	I	Q2	Q8	Q7	Q5	Q6	Q4	Q11	Q1	Q10	Q12	Q3	Q9
L2	L2	D	G	E2	E	B	A	G2	D2	C	I	L	Q8	Q1	Q11	Q6	Q4	Q5	Q3	Q2	Q12	Q9	Q7	Q10
Q1	Q1	Q7	Q12	Q6	Q9	Q5	Q8	Q2	Q11	Q10	Q3	Q4	A	L2	D2	E2	L	B	I	G2	G	E	D	C
Q2	Q2	Q11	Q9	Q4	Q10	Q6	Q1	Q8	Q3	Q12	Q7	Q5	E	I	G	C	L2	D2	L	E2	B	D	A	G2
Q3	Q3	Q8	Q5	Q10	Q7	Q11	Q9	Q6	Q12	Q2	Q4	Q1	L2	G2	I	L	B	E2	D	A	E	C	D2	G
Q4	Q4	Q9	Q11	Q2	Q8	Q12	Q7	Q10	Q5	Q6	Q1	Q3	G2	A	D	B	E2	L	D2	L2	C	G	I	E
Q5	Q5	Q10	Q3	Q8	Q1	Q9	Q11	Q12	Q6	Q4	Q2	Q7	E2	E	A	D2	C	L2	G	I	G2	B	L	D
Q6	Q6	Q12	Q7	Q1	Q2	Q10	Q3	Q9	Q4	Q5	Q8	Q11	C	D	E	G	G2	I	B	L	E2	D2	L2	A
Q7	Q7	Q1	Q6	Q12	Q11	Q3	Q10	Q4	Q9	Q8	Q5	Q2	I	E2	L	L2	D2	C	A	E	D	G2	G	B
Q8	Q8	Q3	Q10	Q5	Q12	Q4	Q2	Q1	Q7	Q9	Q11	Q6	D	L	B	G2	I	G	L2	C	D2	A	E	E2
Q9	Q9	Q4	Q2	Q11	Q5	Q1	Q6	Q3	Q8	Q7	Q12	Q10	D2	B	E2	A	D	E	G2	G	I	L2	C	L
Q10	Q10	Q5	Q8	Q3	Q6	Q2	Q4	Q7	Q1	Q11	Q9	Q12	G	D2	C	E	A	D	E2	B	L	I	G2	L2
Q11	Q11	Q2	Q4	Q9	Q3	Q7	Q12	Q5	Q10	Q1	Q6	Q8	L	C	L2	I	G	G2	E	D	A	E2	B	D2
Q12	Q12	Q6	Q1	Q7	Q4	Q8	Q5	Q11	Q2	Q3	Q10	Q9	B	G	G2	D	E	A	C	D2	L2	L	E2	I

Figure 95 : Le tableau des 24 rotations du cube dans la notation de Xenakis

La propriété de fermeture et le fait que le groupe des rotations du cube dans l'espace est fini permettent de construire des séquences cycliques de rotations selon le processus de Fibonacci[245]. En effet, en choisissant deux éléments x_1 et x_2 du groupe et en utilisant la loi de composition interne « • », on obtient une séquence d'éléments x_3 , x_4 , …, x_i tels que :

[245] Notons que Xenakis ne parle jamais de processus de Fibonacci dans *Nomos Alpha.* Il s'agit pourtant d'une technique qu'il utilise aussi bien pour gérer l'organisation des complexes sonores que pour articuler les différents cribles toute au long de la pièce, un aspect qui ne sera pas pris en compte par notre analyse. Notons aussi qu'aucune des analyses de la pièce que nous avons citées précédemment ne semble prendre en compte cette propriété formelle du processus compositionnel, à l'exception toutefois d'une récente étude de Robert Peck [PECK 2003] et de notre étude de modélisation informatique [AGON *et al.* 2003]. Le compositeur utilise également la série de Fibonacci et le *nombre d'or* dans sa première pièce pour orchestre, *Metastasis* (1953-54). Voir en particulier l'analyse détaillée de *Metastasis* par André Baltensperger [BALTENSPERGER 1995].

$x_3 = x_2 \bullet x_1$

$x_4 = x_3 \bullet x_2$

…

$x_{i+1} = x_i \bullet x_{i-1}$.

Autrement dit, chaque élément de la séquence (c'est-à-dire chaque rotation) est le *produit* des deux précédents, de la même façon que chaque élément d'une suite de Fibonacci classique est la somme des deux nombres entiers précédents. Nous insistons sur la technique d'enchaînement des éléments du groupe à travers le processus de Fibonacci, car certaines propriétés mathématiques permettent d'éclairer la place des choix arbitraires du compositeur dans l'organisation de la forme musicale.

Tout d'abord, comme nous l'avons déjà mentionné, ce processus appliqué au groupe des rotations du cube a toujours un caractère cyclique. Autrement dit, en prenant x et y respectivement comme premier et deuxième élément du processus de Fibonacci, nous allons retrouver les mêmes éléments dans le même ordre après un nombre fini d'itérations. Deuxièmement, les cycles ainsi obtenus peuvent être plus ou moins longs, où *longueur* se définit simplement par le nombre d'itérations successives du processus de Fibonacci nécessaires pour compléter le cycle une première fois.

On peut montrer qu'un processus de Fibonacci dans le cas du groupe de rotations du cube ne peut jamais recouvrir tous les éléments du groupe. La longueur maximale d'un tel processus est 18. De plus, les 18 éléments qui constituent le cycle de longueur maximale du processus ne sont pas tous différents. On peut donc définir une deuxième propriété d'un cycle obtenu par le processus de Fibonacci en considérant le plus grand nombre d'éléments différents. On appellera cette valeur le *degré* du cycle.

Une étude mathématique montre que le degré maximal d'un cycle obtenu par le processus de Fibonacci dans le groupe des rotations du cube dans l'espace est égal à 13 et correspond à un cycle de longueur maximale. Xenakis utilise dans la pièce deux cycles de longueur et degrés maximaux[246]. Le premier, obtenu à partir des éléments D et Q_{12} est représenté dans la figure suivante :

[246] Longueur et degré maximaux pour un cycle sont, évidemment, des indices de la volonté de la part du compositeur d'avoir le maximum de variété afin d'éviter le plus possible les redondances à l'intérieur du processus. Nous pouvons interpréter cela comme une instance du principe de « diversification maximale » du même type que celui utilisé par Milton Babbitt.

$$D \longmapsto Q_{12} \longmapsto Q_4 \longmapsto E \longmapsto Q_8 \longmapsto Q_2 \longmapsto E^2 \longmapsto Q_7 \longmapsto Q_4 \longmapsto$$
$$D^2 \longmapsto Q_3 \longmapsto Q_{11} \longmapsto L^2 \longmapsto Q_7 \longmapsto Q_2 \longmapsto L \longmapsto Q_8 \longmapsto Q_{11}.$$

Figure 96 : Cycle de Fibonacci obtenu à partir des éléments D et Q_{12}

À l'aide de ce premier cycle, on peut représenter l'organisation de *Nomos Alpha* en ce qui concerne sa macro-forme en remplaçant un élément générique du groupe de rotations par le symbole X_i et en insérant après chaque groupe de trois éléments un symbole I_j qui indique la présence d'une section non-structurée, sorte d'« intermezzo » dans le déroulement de la pièce[247] :

$$[X_1, X_2, X_3, I_1] \longmapsto [X_4, X_5, X_6, I_2] \longmapsto \ldots \longmapsto [X_{16}, X_{17}, X_{18}, I_6]$$

Figure 97 : Structure formelle de la pièce

Rappelons que chaque rotation induit un ordre possible des huit complexes sonores dans la pièce. On obtient donc une première information sur la macro-forme en ce qui concerne l'organisation des complexes sonores qui seront donc 144 au total, présentés par des groupes de 24 complexes suivis, chaque fois, par un « intermezzo ».

Nous avons indiqué la segmentation à l'aide de flèches pour indiquer une sorte de temporalité dans l'enchaînement des complexes sonores. Cette temporalité, qui ne concerne pas encore le temps chronologique, représente une structuration *logique* bien définie à l'intérieur d'une organisation *hors-temps* du matériel pré-compositionnel. Elle appartient donc à la catégorie que nous avons appelée *temps logique*. L'organisation *en-temps* concerne l'affectation à chaque complexe sonore d'une valeur précise de *durée*. Ce paramètre, ainsi que deux autres paramètres (*densité* et *intensité*), est géré par le groupe de rotations d'un deuxième cube.

Comme dans le cas des complexes sonores abstraits, Xenakis utilise un paramètre additionnel (α, β ou γ) pour augmenter la variabilité des densités, intensités et durées des complexes sonores. Autrement dit, il y a huit objets musicaux qu'on appellera *complexes sonores temporels* pour chaque paramètre, ce qui fait au total $8 \times 3 = 24$ objets musicaux différents. En suivant la notation de Xenakis, nous noterons ces objets par le symbole K_i. Comme dans le cas des complexes sonores abstraits, Xenakis change les paramètres α, β et γ toutes les trois rotations du cube et cela en suivant le pattern cyclique suivant :

$$[\alpha \longmapsto \beta \longmapsto \gamma \longmapsto \alpha \longmapsto \beta \longmapsto \gamma]$$

Figure 98 : Pattern cyclique dans le changement des paramètres

Notons que cette opération de changement cyclique des paramètres peut être aussi considérée sous un angle algébrique. En effet, les paramètres α, β et γ peuvent être associés aux sommets d'un triangle ; six rotations successives du triangle autour de son centre d'un angle de 120° produit le cycle que déterminent les différentes sections de la pièce. La table de la figure suivante offre la liste des caractéristiques des objets musicaux K_i, par rapport aux paramètres α, β et γ :

$\kappa^{\alpha}_1 = 1 \,.\, mf \,.\, 2 = 2.mf$	$\kappa^{\beta}_1 = 0.5 \,.\, mf \,.\, 2 = 1.mf$	$\kappa^{\gamma}_1 = 1 \,.\, mf \,.\, 2 = 2.mf$
$\kappa^{\alpha}_2 = 1 \,.\, fff \,.\, 4.5 = 4.5.\, fff$	$\kappa^{\beta}_2 = 0.5 \,.\, fff \,.\, 4.5 = 2.25.\, fff$	$\kappa^{\gamma}_2 = 1 \,.\, fff \,.\, 2 = 2.\, fff$
$\kappa^{\alpha}_3 = 2.5 \,.\, fff \,.\, 4.5 = 11.25.\, fff$	$\kappa^{\beta}_3 = 5 \,.\, fff \,.\, 4.5 = 22.5.\, fff$	$\kappa^{\gamma}_3 = 4.0 \,.\, fff \,.\, 4.5 = 18.0.\, fff$
$\kappa^{\alpha}_4 = 2.5 \,.\, mf \,.\, 2 = 5.mf$	$\kappa^{\beta}_4 = 5.0 \,.\, mf \,.\, 2 = 10.0.mf$	$\kappa^{\gamma}_4 = 4.0 \,.\, mf \,.\, 2.0 = 8.0.mf$
$\kappa^{\alpha}_5 = 1.5 \,.\, f \,.\, 2.62 = 3.93.f$	$\kappa^{\beta}_5 = 1.08 \,.\, f \,.\, 2.62 = 2.83.f$	$\kappa^{\gamma}_5 = 2.0 \,.\, f \,.\, 2.62 = 5.24.f$
$\kappa^{\alpha}_6 = 1.5 \,.\, ff \,.\, 3.44 = 5.15.ff$	$\kappa^{\beta}_6 = 1.08 \,.\, ff \,.\, 3.44 = 3.72.ff$	$\kappa^{\gamma}_6 = 2.0 \,.\, ff \,.\, 3.44 = 6.88.ff$
$\kappa^{\alpha}_7 = 2.0 \,.\, ff \,.\, 3.44 = 6.88.ff$	$\kappa^{\beta}_7 = 2.32 \,.\, ff \,.\, 3.44 = 7.98.ff$	$\kappa^{\gamma}_7 = 3.0 \,.\, ff \,.\, 3.44 = 10.32.ff$
$\kappa^{\alpha}_8 = 2.0 \,.\, f \,.\, 2.62 = 5.24.f$	$\kappa^{\beta}_8 = 2.32 \,.\, f \,.\, 2.62 = 6.08.f$	$\kappa^{\gamma}_8 = 3.0 \,.\, f \,.\, 2.62 = 7.86.f$

Figure 99 : Table des trois caractéristiques (*durées*, *intensités* et *densité*) des complexes sonores

Par exemple, si l'on considère le premier complexe sonore de *Nomos Alpha*, c'est-à-dire K_i, avec paramètre β, la table donne comme valeurs de densité, intensité et durée respectivement 0.5 évènements /seconde, *fff* et 4.5 secondes.

Comme nous l'avons mentionné, le processus d'affectation des caractéristiques physiques à tout complexe sonore abstrait est géré par le groupe des rotations d'un deuxième cube. Chaque rotation induit une permutation des huit sommets du cube, donc un ordre particulier des « complexes temporels » K_i,. En utilisant le processus de Fibonacci décrit précédemment, un nouveau cycle est construit, qui rétablit cette fois l'ordre des dix-huit complexes temporels à attacher aux complexes sonores abstraits. Ce nouveau cycle possède la même longueur que le premier cycle, ainsi que le même nombre d'éléments différents, qui est toujours de 15. Il

[247] Le terme est employé par Thomas DeLio [DeLIO 1985] qui a été l'un des premiers analystes à souligner l'alternance, dans la pièce, de deux niveaux très différents, l'un structuré à travers la théorie des groupes, l'autre apparemment indépendant de toute organisation algébrique.

s’agit donc d’un cycle de longueur 18 et de degré maximal, une autre instance du principe de *maximal variety* que nous avons vu à l’œuvre dans la structuration *logico-temporelle* des complexes sonores abstraits[248].

La figure suivante offre une nouvelle représentation des huit premiers complexes sonores de *Nomos Alpha*. Cette fois les complexes sonores sont représentés par des carrés de dimensions différentes et ayant différents niveaux de gris. Plus un carré est clair, plus la valeur de densité du complexe sonore correspondant est grande. Intensités et durées sont représentées respectivement par la dimension verticale et la dimension horizontale. Par exemple, les deux premiers complexes sonores auront les mêmes valeurs d’intensité et de durée, mais deux valeurs de densité différentes.

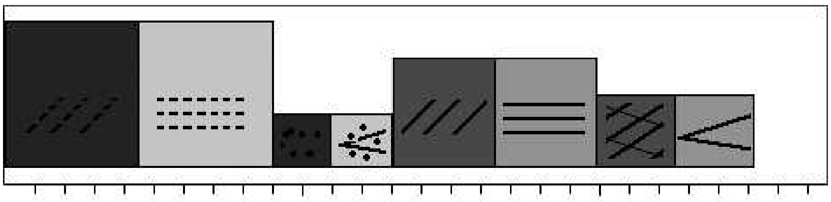


Figure 100 : Représentation des « complexes temporelles » K_i

Comme dans le cas des complexes sonores « abstraits », le compositeur peut augmenter la combinatoire des propriétés internes des objets musicaux en utilisant les trois paramètres α, β et γ. La figure suivante montre l’effet du changement de paramètre sur un même élément du groupe de rotation. Il s’agit toujours de la rotation D mais cette fois dépendante du paramètre α au lieu du paramètre β.

[248]Nous mentionnons aussi une troisième utilisation du processus de Fibonacci, cette fois par rapport à l’organisation des hauteurs, à travers la *théorie des cribles*. Dans ce cas, le compositeur utilise l’ensemble des entiers inférieurs ou égaux à 18 qui n’ont pas avec 18 de diviseur en commun. Cet ensemble, muni de l’opération de multiplication (modulo 18), est un groupe commutatif. En particulier, pour la propriété de fermeture, on pourra donc multiplier deux éléments quelconques du groupe sans sortir de l’ensemble. C’est ainsi que Xenakis construit des suites de Fibonacci à valeurs dans ce groupe et en utilisant la multiplication au lieu de l’addition traditionnelle. Comme dans les cas des cycles des complexes sonores et des complexes temporels, il suffit de deux éléments pour engendrer le processus de Fibonacci. Le troisième élément sera ainsi la multiplication (modulo 18) des deux premiers et ainsi de suite, chaque élément de la suite étant la multiplication des deux éléments précédents. Dans le cas de *Nomos Alpha*, Xenakis choisit comme premier et deuxième élément respectivement les entiers 11 et 13, ce qui donne le cycle suivant de longueur 23 :
11, 13, 17, 5, 13, 11, 17, 7, 11, 5, 1, 5, 7, 17, 11, 7, 5, 17, 13, 5, 11, 1, 11 (11, 13, 17, …)
Ces nombres sont utilisés par Xenakis comme « modules » à remplacer, avec des transformations supplémentaires, dans le cas particulier du crible $\Lambda(11,13)$ que nous avons analysé dans la partie théorique de cette étude.

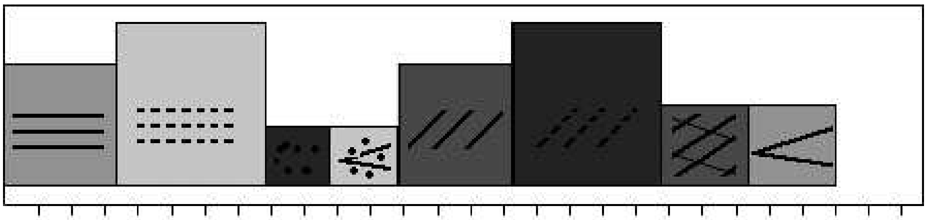


Figure 101 : Complexes sonores associés à l'élément *D* avec paramètre α

En comparant les deux dernières figures, on peut mieux comprendre l'utilité compositionnelle d'un changement de paramètre, changement qui permet en particulier de réduire les redondances engendrées par le système. Par exemple, le changement de paramètre diminue la redondance engendrée par la succession de blocs ayant les mêmes valeurs d'intensités, comme les deux figures précédentes le montrent.

Il est donc assez clair que le changement de paramètre tous les trois éléments du groupe, aussi bien pour les complexes sonores « abstraits » que pour les complexes temporels, représente un moyen de créer de la diversité là où le processus algébrique semble engendrer de la répétition. Le fait d'avoir un modèle informatique paramétré du processus compositionnel offre à l'analyste un moyen d'étudier un champ de possibilités qui ne reste que partiellement exploré par le compositeur. Dans le cas de *Nomos Alpha*, l'analyse par modélisation du processus compositionnel s'appuie sur une des caractéristiques majeures de cette pièce qui est l'une des rares dans le répertoire contemporain à ne pas poser de problèmes en ce qui concerne la segmentation. Les différents blocs sont facilement reconnaissables, aussi bien dans la partition que dans l'analyse du signal sonore. Cependant, la combinatoire engendrée par l'utilisation des deux groupes de rotations du cube, ainsi que du groupe auxiliaire qui gère le changement cyclique des paramètres, est tellement élevée que la modélisation devient un outil indispensable pour une analyse détaillée des choix compositionnels par rapport aux potentialités offertes par le système.

Xenakis avait abordé explicitement la question de l'exploration systématique du champ de possibilités offertes par le processus algébrique employé dans *Nomos Alpha*. Les représentations graphiques d'autres cycles possibles de Fibonacci, que Xenakis discute en détail dans ses analyses[249], ouvrent le problème du rapport entre le modèle formel de *Nomos Alpha* et l'œuvre dans son caractère d'*unicité* et de *singularité*. En ce qui concerne l'unicité de la pièce, le modèle informatique permet de définir *Nomos Alpha* comme un réseau formel de possibilités, plutôt que comme une œuvre déterminée une fois pour toutes. Ce réseau se fonde sur la notion de *transformation*, à tel point qu'on peut envisager d'appliquer au domaine compositionnel la catégorie analytique de « théorie transformationnelle », comme nous l'avons décrite dans l'approche de David Lewin. *Nomos Alpha* serait donc, dans cette première lecture, une « classe d'équivalence » d'œuvres possibles dans un univers engendré par la combinatoire des groupes finis.

Cependant, l'œuvre possède un caractère « singulier » qu'on peut se représenter comme un parcours « remarquable » dans le réseau algébrique des transformations possibles[250]. Par exemple, en ce qui concerne le processus de Fibonacci, le compositeur utilise des cycles de longueur et degré maximaux. Une exploration systématique des possibilités offertes par un tel processus montre que ces caractéristiques « singulières » sont, paradoxalement, les plus récurrentes d'un point de vue statistique. Il y a ainsi 216 cycles de longueur 18 et de degré 13 dans un univers de 576 cycles de Fibonacci possibles, ce qui montre que presque 40% de tous les cycles possibles sont du type de ceux qui sont utilisés par le compositeur dans la pièce. Nous arrivons ainsi, par simple observation du modèle algébrique utilisé, à envisager la question de la macro-forme pour une pièce dont l'architecture globale semble être une conséquence directe du processus de Fibonacci et du groupe utilisé plutôt qu'un libre choix du compositeur. L'œuvre est donc à la fois un « champ de possibilités », comme nous l'avons montré par rapport à l'exploration du matériel proposé explicitement par le compositeur, mais également une conséquence directe des fortes limitations imposées par la nature algébrique du processus compositionnel. Pour Xenakis c'est donc l'algèbre, et plus précisément la théorie des groupes finis appliquée à la musique, qui « *assure en même temps la combinatoire interne et la macro-structure* » [DELALANDE 1997, 78], selon une idée qui est finalement très proche de l'organisation totale de la série que nous avons analysée chez Milton Babbitt.

Combinatoire et algèbre sont deux éléments qui animent également la démarche modale d'Anatol Vieru qui envisage, comme Babbitt et Xenakis l'ont fait, une réflexion à la fois théorique et compositionnelle sur la nécessité d'articuler, dans la catégorie de l'*hors-temps* et

---

[249] Voir, par exemple, l'analyse publiée dans *Musique Architecture*, p. 101 [XENAKIS 1976].

[250] Nous avons ainsi adapté, dans le cas particulier d'une approche transformationnelle en composition, l'idée proposée par Fabien Lévy de la « figure remarquable » comme objet de fascination en analyse musicale [LEVY 2002]. L'approche algébrique ajoute à la notion de « figure », ainsi qu'à celle du signe dans une analyse sémiologique de la musique, une composante « structurale » au sens mathématique. Ainsi, un parcours compositionnel comme celui réalisé par Xenakis dans *Nomos Alpha*, est « remarquable » dans la mesure où il réalise une singularité dans le champ des solutions possibles d'un problème. Dans ce cas précise, la singularité est liée au choix d'un cycle ayant les caractéristiques de longueur et degrés maximaux dans l'espace combinatoire des possibilités. La singularité relève du fait qu'un tel choix va à la rencontre d'un principe compositionnel précis, à savoir le fait de réduire le plus possible la redondance inhérente au processus de Fibonacci sur le groupe des rotations du cube.

de l'*en-temps*, une organisation intégrale des paramètres musicaux. La sérialisation des hauteurs et des durées est gérée, également, par des processus algébriques qui rendent la démarche du compositeur roumain, ainsi que celle des deux autres théoriciens analysés jusqu'ici, très différente des expériences faites par d'autres compositeurs de la même époque. C'est donc sur le caractère algébrique de la théorie modale que nous allons concentrer l'analyse des stratégies compositionnelles d'Anatol Vieru.

3.3 *La théorie compositionnelle des suites modales chez Anatol Vieru*[251]

Dans cette section, nous discutons quelques applications compositionnelles de la théorie modale dont nous avons présenté les éléments théoriques majeurs dans le premier chapitre. Nous nous concentrons, en particulier, sur la théorie des suites modales, un processus compositionnel basé sur l'engendrement de suites périodiques à travers le calcul de différences finies (sur des structures algébriques particulières). Cette méthode algébrique, qui met en évidence l'articulation dialectique entre la notion de « son » et celle d'« intervalle », est décrite par le compositeur dans plusieurs écrits[252]. Nous allons reprendre certaines propriétés théoriques des suites modales pour montrer comment le compositeur roumain les a utilisées dans deux compositions des années soixante-dix : *Symphonie* n° 2 pour orchestre (1978) et *Zone d'oubli* pour alto (1973). Cependant, avant de rentrer dans cette technique compositionnelle, nous allons reprendre encore une fois le concept de « structure intervallique » pour analyser comment il est employé par Vieru dans ce qu'il appelle les « cribles ». L'utilisation des cribles par Vieru rappelle beaucoup plus le célèbre procédé d'Eratosthène que la théorie homonyme de Xenakis, telle que nous l'avons présentée dans le premier chapitre. Le compositeur utilise la technique des cribles dans sa première Symphonie intitulée *Ode au silence* (1954-1955) qui sera notre point de départ pour analyser la facette compositionnelle de la théorie modale[253].

[251] Ce chapitre développe une communication sur les structures algébriques en musique présentée à l'occasion de la journée d'étude sur Anatol Vieru qui s'est déroulée à l'Ircam le 2 décembre 2000 dans le cadre des Séminaires *MaMuPhi* (Mathématiques/Musique et Philosophie) dirigés par François Nicolas, Gérard Assayag et Guerino Mazzola. Pour un compte-rendu de la journée, avec le programme du concert qui a proposé de nombreuses créations françaises d'Anatol Vieru, voir aussi la contribution collective [CAZABAN *et al.* 2003].

[252] En particulier dans l'un de deux articles publiés dans *Perspectives of New Music* [VIERU 1992] et dans le chapitre V de l'ouvrage *The Book of Modes* [VIERU 1993, 113-134]. Pour une étude exhaustive des aspects algébriques des suites modales, voir notre contribution personnelle [ANDREATTA et VUZA, 2001

[253] Le compositeur utilise la technique des cribles dans d'autres compositions, en particulier dans *Le Crible d'Erathostène*, *Clepsydre I*, *Clepsydre II* et *Ecran.*

3.3.1 Structures intervalliques et technique des cribles dans « Ode au silence »

Cette pièce, qui représente dans l'intention du compositeur « *une étude musicale sur le temps et l'espace* », est divisée en trois mouvements. Le premier mouvement expose un bloc sonore, constitué de 61 hauteurs différentes, obtenu par la superposition des différents états d'une même structure modale ; ce bloc sera ensuite sculpté, découpé à l'aide de cases temporelles prédéterminées. Progressivement, les trous qui se créent ainsi sont remplis par des trémolos de gongs. Il s'agit d'une sorte de musique en creux ; la pensée modale d'Antol Vieru gère, en fait, l'avènement du silence, à l'aide d'une application rigoureuse du système des hauteurs dans le domaine rythmique et dans l'organisation des dynamiques[254].

L'importance de ce premier mouvement repose sur le fait que le compositeur exprime la transformation d'une structure modale en harmonie ; par l'intermédiaire de la technique des cribles, qui est aussi à la base de la génération du mode employé tout au long de la pièce, cette harmonie est, à son tour, mise en temps et devient forme musicale. Le « criblage » de l'espace des hauteurs se réalise par un processus de Fibonacci à partir du nombre 1 (non répété). Etant donné que le processus s'arrête presque immédiatement, cela correspond à engendrer une structure modale par les premiers nombres premiers. Ces nombres sont interprétés comme des intervalles, ce qui permet d'obtenir la structure (1 2 3 5). Cette structure intervallique est « composée », au sens de la théorie modale, avec la classe de hauteur {0}, ce qui revient à la déployer à partir du *do* central du piano[255]. Le résultat de cette première opération de « composition » est donné par la figure suivante :

Figure 102 : Déploiement de la structure intervallique (1 2 3 5) à partir du *do*

Le processus de Fibonacci est abandonné et la structure modale est prolongée par ajouts successifs de nombres premiers. Le procédé est réalisé en « miroir » en considérant le *do* comme axe de symétrie.

[254] Le même procédé a été utilisé dans le premier épisode de l'opéra *Jonas* (1972 - 1975) ; certaines techniques, en particulier les transformations graphiques, sont ici inspirées par l'esthétique de l'artiste hollandais M.C. Escher.

[255] La même cellule génératrice est utilisée dans la pièce *Ecran*, créée à Royan en 1971, et dans les deux *Clepsydres* (1968-69 et 1970-72).

La somme de ces nombres premiers est elle-même le nombre premier 29 qui n’est évidemment pas un multiple de 12. Pour cette raison, on obtient ce qu’on appelle une gamme non octaviante qui n’est donc pas du type des 352 structures modales classées de façon systématique dans le catalogue du *Livre des Modes*. La figure suivante montre le double comportement non-octaviant de la structure intervallique que le compositeur a déployée par symétrie (autour de la note *do*) sur presque cinq octaves :

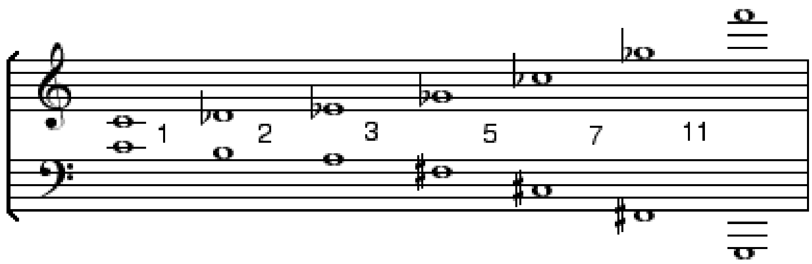


Figure 103 : Structure intervallique doublement non-octaviante

À partir des pôles ainsi obtenus, la même structure est bâtie en sens inverse, en transformant simplement un intervalle ascendant en un intervalle descendant (et vice-versa), en respectant toutefois (en valeur absolue) les intervalles de départ. Évidemment, un déploiement en sens inverse à partir des mêmes pôles ne change pas l’axe de symétrie, qui restera donc le *do* de départ, comme le montre la figure suivante.

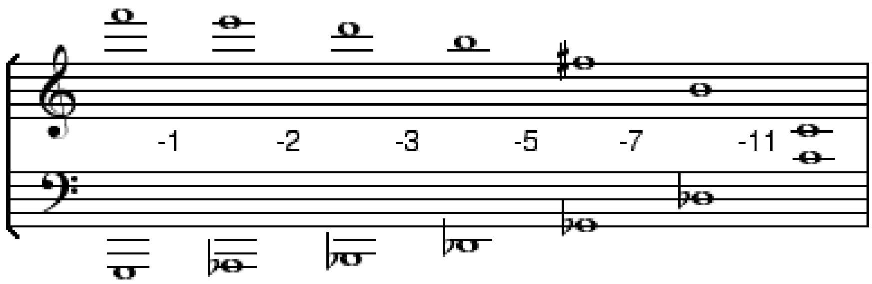


Figure 104 : Processus de déploiement de la même structure de départ mais en sens inverse

L’union ensembliste de la première et de la deuxième séquence donne le bloc harmonique suivant :

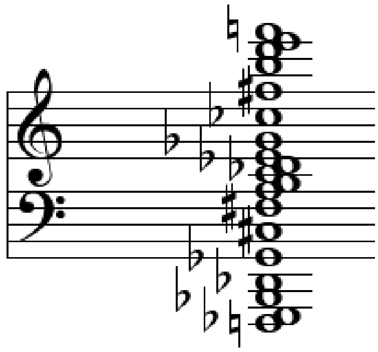


Figure 105 : Bloc harmonique obtenu par union ensembliste des deux gammes non octaviantes mutuellement symétriques

Ce bloc admet plusieurs hauteurs qui se disposent de façon symétrique par rapport à l'axe de symétrie principal (le *do*). Le compositeur choisit six hauteurs (outre *do*), ce qui permet d'extraire du bloc de départ un accord de sept notes. Cet accord est montré sur la figure suivante :

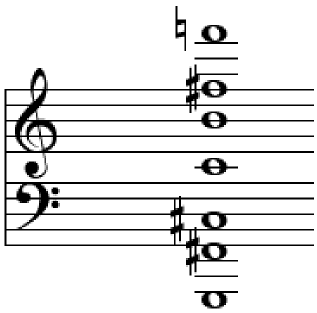


Figure 106 : Accord obtenu par extraction des pôles de symétrie de l'accord de départ

Le nouveau bloc est « enrichi » en prenant chacun de ses pivots comme point de départ d'une nouvelle suite qui utilise les mêmes nombres premiers comme intervalles.

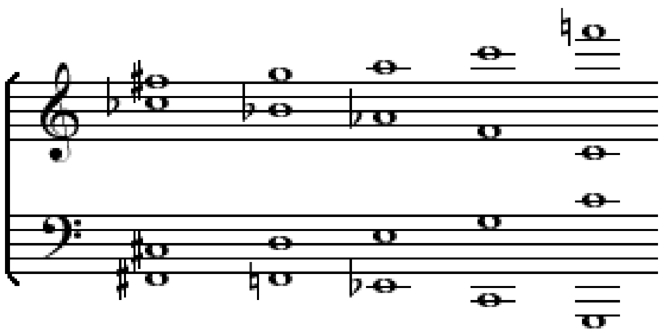


Figure 107 : Déploiement de la structure intervallique de départ à partir des nouveaux pôles

Les deux processus peuvent maintenant être réunis, comme le montre la figure suivante :

Figure 108 : Déploiement de la structure intervallique de départ à partir des nouveaux pôles

Le compositeur a ainsi fait proliférer le champ harmonique de départ en aboutissant à un bloc sonore constitué de 31 hauteurs. Il s'agit, encore une fois, d'une gamme non-octaviante qui s'étend dans la même tessiture que le bloc sonore utilisé précédemment. La densité est donc considérablement augmentée ainsi que la possibilité de repérer de nouveaux pôles disposés de façon symétrique autour du *do*. Ces pivots peuvent à leur tour engendrer de nouveaux centres de symétrie qui peuvent également correspondre à des structures micro-intervalliques. La figure suivante montre un exemple d'axes de symétrie qui appartiennent à la division de l'octave en 24 parties. Autrement dit, ces centres se situent dans le groupe cyclique **Z**/24**Z** d'ordre 24 :

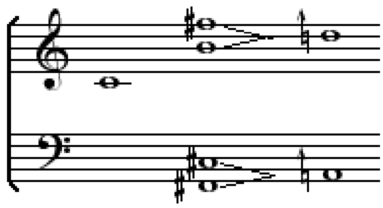


Figure 109 : Deux axes de symétrie micro-intervalliques

Ces nouveaux centres engendrent, à partir du même principe appliqué encore une fois dans les deux directions (ascendante et descendante), un espace chromatique des (trente) hauteursmais cette fois dans une division de l'octave en quarts de tons. Le bloc sera symétrique par rapport au *do* central, cette note n'étant pas incluse dans l'espace des hauteurs, comme le montre la figure suivante :

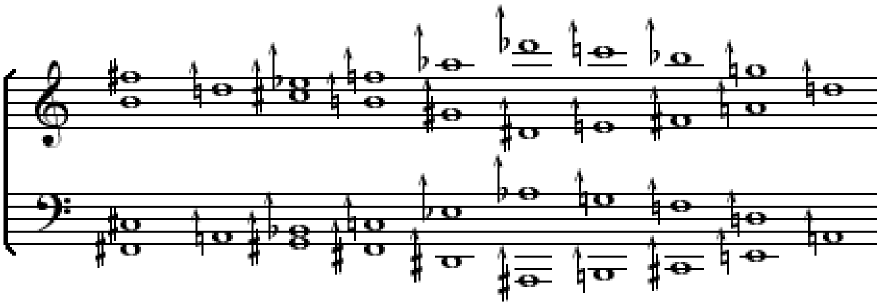


Figure 110 : Espace micro-tonal résultant du déploiement de la structure intervallique de départ selon des pôles microintervalliques

Les deux systèmes se situent à un quart de ton l'un de l'autre et forment ensemble le bloc de 61 sons qui constitue le matériau de base de la symphonie. Cet accord contient plusieurs symétries internes, qui dérivent d'une organisation très structurée de ses composantes. Cependant il n'a pas de symétrie globale, car l'union ensembliste des deux systèmes (l'un basé sur le groupe **Z/12Z** et l'autre sur le groupe **Z/24Z**) ne permet pas une extension des propriétés de symétrie locale à la forme globale. En outre, joué dans sa totalité au début de l'œuvre, ce bloc semble totalement obscur à cause de sa densité. Toutefois, lorsque le compositeur procède à des découpages, il révèle ses composantes internes en mettant en évidence la structure modale reposant sur les premiers nombres premiers.

Le processus de découpage a lieu dans la première section de la *Symphonie*, selon un procédé qui tient compte de trois variables. Ces variables constituent des « situations musicales » correspondant aux différentes caractéristiques d'intensité. Les deux premières situations correspondent respectivement à la présence de l'intensité *forte* et *piano.* La troisième variable correspond à l'absence de son (pause). Vieru dispose donc les sons selon un decrescendo écrit entre deux pôles : tous les 61 sons *forte* d'un côté, et tous les 61 sons absents de l'autre, en passant par des situations où *forte*, *piano* et silence sont mélangés.

Du bloc de marbre de 61 sons du début, le compositeur enlève progressivement des sons en faisant de découpages du bloc de base selon les registres. Il s'agit d'une « technique sculpturale » que l'on pourrait interpréter, en utilisant une expression du compositeur, comme une simple métaphore du pouvoir d'érosion du temps aveugle. Ajoutons également que le mécanisme utilisé dans ce premier mouvement de la Symphonie *Ode au silence* rappelle la technique de la musique électro-acoustique de l'époque. Pour cette raison, cette pièce possède, à l'écoute, les caractéristiques d'une composition électro-acoustique. L'auditeur perçoit le bloc initial comme un son global très riche, au point d'être assimilable au bruit blanc.

Le processus de composition, selon une lecture proposée par Costin Cazaban, correspond ainsi, dans la perception de l'auditeur, à une sorte de filtrage écrit d'un bruit blanc duquel on enlève progressivement les partiels. Ajoutons aussi que dans le final de la symphonie, la structure initiale est reconstruite, mais cette fois ponctuellement, par découpages variés, selon des figures géométriques qui organisent « en-temps » des parties du matériau de base. L'œuvre, selon les intentions du compositeur, met donc en évidence l'étroite association du temps et de l'espace chez l'auditeur, qui reste dans l'impossibilité d'approcher l'une de ces deux catégories sans faire immédiatement intervenir l'autre.

3.3.2 Théorie des suites modales et leur utilisation dans « *Symphonie n. 2* » et « *Zone d'oubli* »

Nous allons maintenant décrire quelques aspects techniques de la théorie des suites modales. Il s'agit d'une approche algébrique du calcul des différences finies, un problème que nous avons récemment étudié dans le cas de structures plus générales que les groupes commutatifs. Cependant, avant d'en donner la définition formelle, nous voudrions donner une idée intuitive d'un point de vue musical en reprenant la technique du déploiement d'une structure intervallique à partir d'une hauteur donnée telle que nous l'avons vue dans la pièce *Ode au silence*. En renversant la perspective, nous pourrions considérer comme point de départ une gamme non octaviante que nous imaginons de répéter à l'infini. En réduisant les notes de la gamme modulo l'octave, on obtient une suite (infinie) d'entiers de classe de hauteurs qu'on peut noter de la façon suivante :

f = 0 1 3 6 11 6 5 0 1 3 6 …

Une telle séquence se répète égale à elle même toutes les sept valeurs. On dira donc que sa *période* est égale à 7. Ses valeurs sont toujours comprises entre 0 et 11. On dira donc qu'il s'agit d'une suite périodique à valeurs dans le groupe cyclique **Z/12Z**.

Pour retrouver la structure intervallique utilisée par Vieru, il suffit de faire la différence (modulo 12) entre la deuxième valeur et la première, la troisième et la deuxième et ainsi de suite. On obtient ainsi la nouvelle suite (infinie) d'intervalles, qu'on notera f' :

f' = 1 2 3 5 7 11 7 1 2 3 5 7 11 …

Il s'agit à nouveau d'une suite infinie ayant la même période que la suite initiale, c'est-à-dire 7. On peut imaginer de réitérer le processus en interprétant les données intervalliques comme des classes de hauteurs. Par soustractions successives, on obtient ainsi les suites *f''*, *f'''*, etc. Le problème posé par Vieru, et auquel le compositeur n'a pas su complètement répondre, concerne la caractérisation du comportement des suites dérivées par le processus de soustractions successives.

Ce problème n'a trouvé une réponse qu'au début des années quatre-vingt grâce à la formalisation algébrique proposée par Dan Tudor Vuza[256]. La réponse réside dans un théorème qui caractérise toute suite périodique à valeurs dans un groupe cyclique[257]. Il s'agit d'un théorème de décomposition qui affirme la possibilité de représenter toute séquence périodique à valeurs dans un groupe cyclique **Z/nZ** comme une somme de deux séquences ayant des propriétés structurelles très particulières. Cependant, avant de commenter ce résultat fondamental, nous allons placer le problème des suites périodiques dans son contexte algébrique naturel.

D'un point de vue mathématique, une suite modale est une application f de **Z** des nombres entiers dans **Z/nZ**. Par exemple, la suite que nous avons prise comme point de départ correspond à l'application f de l'ensemble **Z** dans le groupe cyclique **Z/12Z** qui est définie de la façon suivante :

$f(0) = 0$
$f(1) = 1$
$f(2) = 3$
$f(3) = 6$
$f(4) = 11$
$f(5) = 6$
$f(6) = 5$
$f(7) = 0\ldots$

La valeur $f(0)$ indique donc le premier élément de la suite, $f(1)$ le deuxième et ainsi de suite, jusqu'à la huitième valeur $f(7)$, qui correspond à la première à cause du caractère

[256] L'étude algébrique des suites modales est envisagée d'abord dans un article adressé à un public musicologique et paru dans la revue *Muzica* [VUZA 1984]. Une présentation formelle des résultats est donnée dans la cinquième et dernière partie de la collection d'essais dédiés aux aspects mathématiques de la théorie modale d'Anatol Vieru [VUZA 1982/1986]. Nous avons récemment discuté comment généraliser cette théorie dans le cas de structures algébriques plus générales, comme les *modules* (sur un anneau commutatif). Pour cela, nous renvoyons à deux études intitulées « On some properties of periodic sequences in Anatol Vieru's modal theory » [ANDREATTA et VUZA 2001] et « Anatol Vieru : formalisation algébrique et enjeux esthétiques » [CAZABAN *et al.* 2003].

cyclique de la suite. On peut donc préciser le concept de périodicité d'une suite de la façon suivante. Une suite est périodique s'il existe un entier m tel que :

$f(x) = f(x+m)$ pour tout x de **Z**.

Le plus petit m satisfaisant cette propriété est appelé la période de la suite. Dans le cas précédent, le nombre 7 est le plus petit entier vérifiant l'équation :

$f(x) = f(x+7)$ pour tout x de **Z**.

La suite est donc périodique et sa période est égale à 7.

Considérons un autre exemple de suite périodique à valeurs dans un groupe cyclique différent, en l'occurrence **Z/9Z** :

$f = 0\ 3\ 2\ 8\ 6\ 0\ 3\ 2\ 8\ 6\ 0 \ldots$

Il s'agit d'une suite périodique de période $m = 5$ car la suite se répète toutes les cinq valeurs.

Pour mettre en évidence la périodicité de la suite nous pouvons la représenter simplement comme une liste contenant tous les éléments à l'intérieur d'une période. Dans ce deuxième cas, l'exemple précédent sera noté :

$f = (0\ 3\ 2\ 8\ 6)$

En particulier, la période m d'une suite peut coïncider avec l'ordre n du groupe cyclique dans lequel la suite prend ses valeurs. C'est le cas précisément d'une série dodécaphonique que l'on imagine réitérée à l'infini. Du point de vue de la théorie modale, une telle série sera donc une suite périodique de période 12 dans le groupe cyclique **Z/12Z**.

Remarquons une différence fondamentale avec la notion de périodicité telle que nous l'avons employée au cours de la première partie, notamment dans le cas des modes à transposition limitée de Messiaen. Un mode à transposition limitée est un sous-ensemble *périodique* de **Z/12Z** ou, plus généralement, d'un groupe cyclique **Z/nZ**. Cependant, la périodicité est définie par rapport à l'opération d'addition, non à la caractéristique de réitération de ses éléments. Par exemple, le mode octotonique {0 1 3 6 7 9}, si interprété comme une séquence infinie à valeurs dans **Z/12Z**, correspond à la suite suivante :

$f = 0\ 1\ 3\ 6\ 7\ 9\ 0\ 1\ 3\ 6\ 7\ 9 \ldots$

---

[257] La théorie développée par Vuza concerne les suites à valeurs dans tout groupe commutatif. Cependant, nous allons la présenter ici dans le cas de la structure de groupe cyclique **Z/nZ** qui est celle qui a intéressé de plus près le compositeur roumain.

Cette suite est périodique de période $m = 6$, à la différence du mode de Messiaen correspondant, qui admet $t = 3$ comme le plus petit entier vérifiant (modulo 12) l'équation suivante :

$t + \{0\ 1\ 3\ 6\ 7\ 9\} = \{0\ 1\ 3\ 6\ 7\ 9\}$

La notion de période ayant été formalisée, nous pouvons détailler un peu le processus de calcul des différences finies. Pour cela, il faut définir d'abord deux *opérateurs* de base de toute suite périodique : l'opérateur « différence » et l'opérateur « translation »[258].

3.3.2.1 Opérateur de différence *D*

Si $G^{\mathbf{Z}}$ est l'ensemble des suites à valeurs dans le groupe G, l'opérateur D est défini de $G^{\mathbf{Z}}$ à valeurs dans $G^{\mathbf{Z}}$. Pour tout élément f de $G^{\mathbf{Z}}$, la suite différence Df est définie formellement par l'équation suivante :

$Df(x)=f(x)-f(x-1)$.

3.3.2.2 Opérateur de translation *T*

L'opérateur T a le même ensemble de définition (domaine) et le même ensemble de valeurs (co-domaine) que l'opérateur D. Il est donc défini de $G^{\mathbf{Z}}$ à valeurs dans $G^{\mathbf{Z}}$, tel que :

$Tf(x)= f(x+1)$.

On peut donc « redéfinir » la notion de périodicité d'une suite modale uniquement en termes d'opérateur « translation » T. En fait, une suite est *périodique* s'il existe un entier m tel que, si l'on note avec T^m la réitération m fois de l'opérateur translation T, on ait l'équivalence formelle :

$T^m (f) = f$.

De même, on notera avec D^m la réitération m fois de l'opérateur différence D. Le but d'une formalisation algébrique de la théorie des suites modales est de caractériser les rapports entre une suite f, ses opérateurs T et D et le groupe dans lequel une telle suite prend ses valeurs.

[258] Le terme « opérateur » est synonyme de « fonction », mais nous l'utilisons ici pour mettre en évidence que les nouvelles fonctions que nous allons définir (fonctions « différence » et « translation ») opèrent à leur tour sur des fonctions, non sur des nombres (comme dans le cas de la fonction f définissant une suite périodique).

3.3.2.3 Suites réductibles et suites reproductibles

Une première caractérisation des suites modales est la *réductibilité*[259]. Une suite *réductible* est une suite modale telle qu'une réitération de l'opérateur D appliquée un nombre k de fois à la même séquence la rend égale à la suite constamment nulle, c'est-à-dire à la séquence f représentée par :

f = 0 0 0 0 0 0 0

Formellement, une suite f est *réductible* s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $D^k f = 0$.

Exemple :

Prenons la suite suivante à valeurs dans **Z**/12**Z** et ayant une période de 6 éléments :

f = 11 6 7 2 3 10 11 6 7 2 3 10…

Df = 7 1 7 1 7 1 7 1…

$D^2 f$ = 6 6 6 6 6…

$D^3 f$ = 0 0 0…

Notons qu'on pourrait renverser la perspective et considérer une suite réductible comme la suite qu'on obtient à partir d'un élément de base (dans ce cas le 6) par des additions successives (modulo 12). Cependant, à la différence du procédé de soustractions successives, il faudra dans le cas additif spécifier la valeur de départ de chaque niveau. On verra un exemple d'utilisation de cette technique « duale » dans le cas de la pièce pour alto *Zone d'oubli* (1973). En outre, cette technique permet d'étudier le comportement statistique de certaines valeurs à l'intérieur d'une suite périodique.

Une autre famille importante de suites modales est représentée par les suites *reproductibles*[260]. Une suite est reproductible si elle vérifie l'équation $D^k f = f$ pour un entier $k \geq 1$.

Exemple :

Prenons la suite suivante à valeurs dans **Z**/12**Z** et ayant la même période de la suite réductible précédente :

f = 11 10 11 7 2 7 11 10 11 7 2 7 11 10 11 7 2 7…

[259] Vieru utilise le terme suite modale comme synonyme de toute suite réductible.
[260] Vieru parle à ce propos de suites irréductibles mais sans jamais les caractériser.

Df = 4 11 1 8 7 5 4 11 1 8 7 5 4 11 1 8 7 5…

$D^2 f$ = 11 7 2 7 11 0 11 7 2 7 11 0…

$D^3 f$ = 1 8 7 5 4 11 1 8 7 5 4 11…

$D^4 f$ = 2 7 11 10 11 7 2 7 11 10 11 7 2 7 11 10 11 7 …

La quatrième réitération du processus de différence est donc égale à la suite de départ (à une permutation circulaire près).

Le processus de différences successives doit parfois être réitéré un nombre très élevé de fois pour retrouver la suite initiale ou bien pour la réduire à 0. En outre, il y a des suites qui ne sont ni *réductibles* ni *reproductibles*, d'où l'intérêt d'aborder le problème d'un point de vue algébrique. En effet, une formalisation algébrique du problème permet de dégager des critères de réductibilité (ou d'irréductibilité) pour une suite périodique sans effectuer tous les calculs de différences finies. Pour cela, il faut d'abord rappeler un résultat fondamental d'algèbre qui concerne la décomposition d'un groupe cyclique en *p*-groupes[261]. Il s'agit du théorème de décomposition de Sylow, qui établit un isomorphisme entre tout groupe cyclique **Z/nZ** et la somme directe de ses *p*-sous-groupes maximaux[262].

Voyons maintenant comment appliquer ces résultats pour établir des critères de réductibilité d'une suite modale à partir du cas de la représentation toroïdale du groupe cyclique **Z/12Z**, telle que nous l'avons discutée dans le premier chapitre. La décomposition de 12 en facteurs premiers donne : $12 = 2^2 \times 3$. Le groupe cyclique **Z**/12**Z** est donc somme directe de H_1 et H_2 , les sous-groupes ayant respectivement 4 et 3 éléments. H_1 est le sous-groupe engendré par l'intervalle de tierce mineure et correspond aux éléments {0, 3, 6, 9} tandis que H_2 est le sous-groupe engendré par l'intervalle de tierce majeure et correspond aux éléments {0, 4, 8}. Si l'on note *g* et *h* les projections de **Z**/12**Z** sur les sous-groupes H_1 et H_2 respectivement, on peut facilement les calculer à travers le tableau suivant :

[261] Un groupe commutatif fini est appelé un *p*-groupe (*p* étant un nombre premier) si son nombre d'éléments est une puissance de *p*.
[262] En général un groupe commutatif *G* est somme directe d'une famille de sous groupes $H_1, \ldots, H_n$ si tout élément de *G* se décompose (avec unicité de décomposition) dans la somme $x_1+\ldots+x_n$ où chaque élément x_i appartient à H_i.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
g	0	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3
h	0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8

Figure 111 : Tableau des projections du groupe Z/12Z sur ses sous-groupes maximaux

Ces applications seront maintenant utilisées pour établir des critères de réductibilité d'une suite de 72 éléments :

f = 0 0 1 5 2 6 7 7 8 0 9 1 2 2 3 7 4 8 9 9 10 2 11 3 4 4 5 9 6 10 11 11 0 4 1 5 6 6 7 11 8 0 1 1 2 6 3 7 8 8 9 1 10 2 3 3 4 8 5 9 10 10 11 3 0 4 5 5 6 10 7 11 0 0…

Il suffit de transformer chaque valeur *x* de la suite de départ dans ses composantes ayant valeur partie à valeurs dans le groupe {0,3,6,9} isomorphe à **Z/4Z** et {0,4,8} isomorphe à **Z/3Z**. Les projections sont respectivement :

g = 0 0 9 9 6 6 3 3 0 0 9 9 6 6 3 3 0 0 …

h = 0 0 4 8 8 0 4 4 8 0 0 4 8 8 0 4 4 8 …

Le théorème qui permet de donner une caractérisation complète des suites réductibles est le suivant[263] :

Une suite f à valeurs dans un p-groupe **Z**/p^k **Z** est réductible si et seulement si sa période est une puissance (éventuellement nulle) de p.

En général, pour vérifier qu'une suite à valeurs dans **Z/nZ** est réductible il suffit de décomposer **Z/nZ** dans ses *p*-groupes maximaux, de prendre les projections de la suite du départ sur ces groupes et d'appliquer le critère précédent. Dans le cas de l'exemple précédent, les suites *g* et *h* sont respectivement 9-périodique et 8-périodique, ce qui permet d'affirmer que la suite est réductible[264].

3.3.2.4 Théorème fondamental de décomposition.

Le résultat central de la théorie modale est un théorème de décomposition qui affirme la possibilité de décomposer (de façon unique) toute suite périodique à valeurs dans un groupe cyclique **Z/nZ** en une somme d'une suite réductible et d'une suite reproductible. L'algorithme

---

[263]Pour la démonstration, qui est essentiellement un raisonnement par récurrence sur la puissance *k* du nombre premier *p*, on renvoie à l'article « On some properties of periodic sequences in Anatol Vieru's modal theory » [ANDREATTA et VUZA 2001].

[264] Notons que, réciproquement, en connaissant les projections *g* et *h* on retrouve la suite *f* du départ à travers la formule : $f(x) = 4g(x) - 3h(x) \bmod 12$.

de décomposition, qui a été implémenté dans *OpenMusic*, permet d'aborder des propriétés de suites modales étudiées du point de vue théorique par Dan Tudor Vuza en suivant le processus de décomposition de la suite initiale dans toutes ses étapes intermédiaires. Voici un exemple d'une telle décomposition dans le cas d'une série dodécaphonique déjà analysée dans la première partie[265]. Considérons la série tous-intervalles du premier mouvement de la *Suite Lyrique* d'Alban Berg.

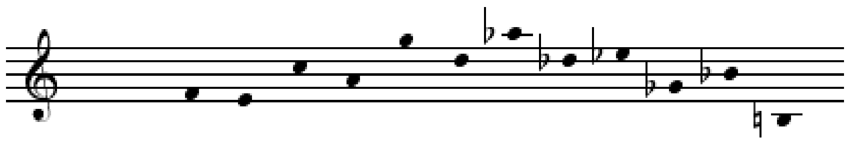


Figure 112 : Série tous-intervalles

Si l'on considère la série d'intervalles et si l'on imagine de les répéter à l'infini, on obtient la suite périodique suivante de période égale à 11 :

f = 11 8 9 10 7 6 5 2 3 4 1 11 8 9 10 7 6 5 2 3 4 1 …

Les composantes réductibles et reproductibles de la suite sont données par :

f_{red} = 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 …

f_{rep} = 5 2 3 4 1 0 11 8 9 10 7 …

Ainsi, chaque intervalle de la série de départ a été décomposé d'une manière unique en somme de deux intervalles. Pour représenter musicalement cette décomposition, on peut transformer la série dodécaphonique initiale en un nouveau profil mélodique en plaçant dans chaque intervalle une nouvelle note réalisant cette décomposition.

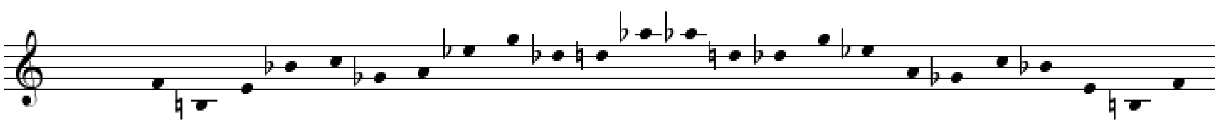


Figure 113 : Profil mélodique obtenu à partir de la décomposition d'une série tous-intervalles

La suite des intervalles qui se situent à gauche des notes ajoutées est réductible tandis que la suite des intervalles à droite de celles-là est reproductible. Dans ce cas, la reproductibilité est loin d'être immédiate, car elle s'obtient après 7503 réitérations du processus des

[265] Voir, en particulier, l'*Interludium* qui conclut la première partie.

différences finies ! Le résultat fondamental de décomposition d'une suite périodique nous sert comme point de départ pour étudier certaines propriétés de prolifération des valeurs d'une suite modale à travers le processus « duale » de celui décrit jusqu'à maintenant.

3.3.2.5 Engendrement des suites modales par additions successives et propriété de prolifération des valeurs d'une suite périodique.

La technique d'engendrement des suites modales par additions successives représente, comme nous l'avons mentionné, une approche duale de celle basée sur le calcul des différences finies. Anatol Vieru utilise cette technique en particulier dans la pièce *Zone d'oubli* pour alto. Le système est dérivé d'une valeur de base (le 6, correspondant au triton) par additions successives (modulo 12). Le niveau I commence par 7, ce qui donne la suite 2-périodique suivante :

f = 7 1 7 1 7 1 7 1 …

Le niveau II commence par 10 et donne lieu, selon le même principe, à une séquence 6-périodique et ainsi de suite, jusqu'au niveau X ayant période 864. Les trois premiers niveaux de la suite sont représentés par la figure suivante :

```
II    10  5  6  1  2  9  10
I        7  1  7  1  7  1
O         6  6  6  6  6
```

Figure 114 : Trois niveaux dans le processus d'additions successives

Remarquons que chaque niveau peut être considéré a priori comme une suite de hauteurs ou d'intervalles, le calcul des différences finies (ou d'additions successives) étant précisément le procédé qui permet de passer d'un niveau à l'autre.

Dans le cas de la pièce *Zone d'oubli*, les niveaux sont attachés à des paramètres différents :

1. Les *hauteurs* sont choisies selon les valeurs contenues dans le niveau V et sont représentées comme toujours en termes de classes de résidus modulo 12.
2. Les *durées* sont données par le niveau IV, en prenant comme unité minimale la double-croche. La valeur 0 est attribuée à une *acciaccatura*.
3. Les *registres* grave, médium et aigu sont déterminés par le niveau VIII, avec les valeurs correspondant aux ensembles {1, 5, 9}, {2, 3, 4} et {6, 7, 8} respectivement.
4. Pour gérer les *intensités*, Vieru utilise le niveau IX, avec 0=*mf*, 3=*mp*, 6=*pp*, 9=*p*. Les éléments 7, 10, 1 et 4 correspondent à des restes.

5 Finalement, les 4 modes de jeu employés dans la pièce sont attachés au même niveau IV qui gère les durées, mais cette fois selon la correspondance :

(a) {0, 1}=*vibrato,*

(b) {3, 4}=normal,

(c) {6, 7}= al ponticello

(d) {9, 10}=*tremolo.*

La figure suivante montre un extrait de *Zone d'oubli* complété avec les différents niveaux du processus d'additions successives.

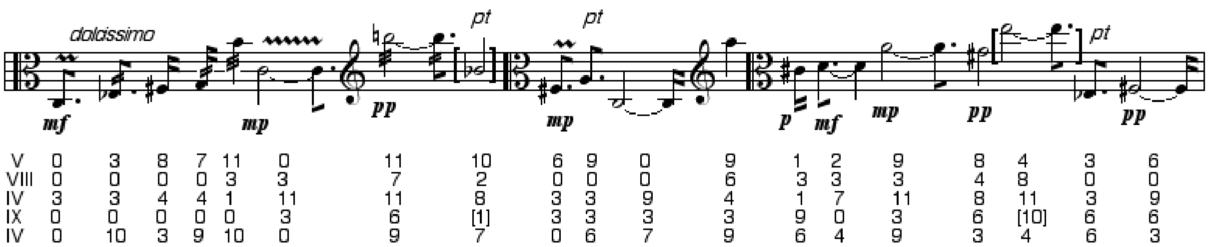


Figure 115 : Extrait de la pièce *Zone d'oubli* avec l'« architecture » numérique sous-jacente

Dans le passage suivant, les mêmes paramètres ont été attachés à d'autres niveaux. En particulier, les hauteurs correspondent maintenant à la suite 6-périodique du niveau II tandis que les deux registres (inférieur et supérieur) sont donnés par les valeurs respectivement impaires et paires de la suite du niveau VI.

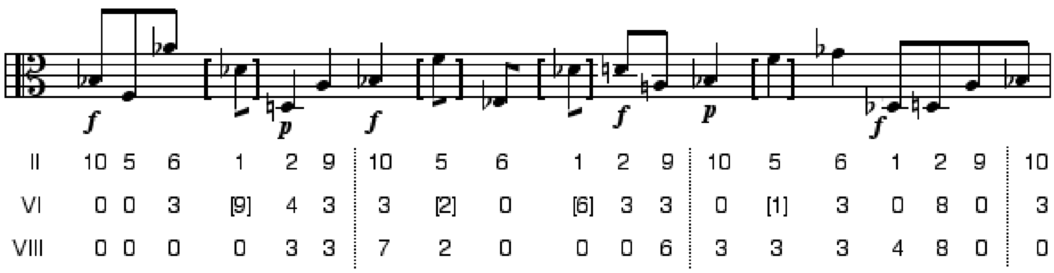


Figure 116 : Extrait de la même pièce après changement de paramètres musicaux

Parfois, le processus d'additions successives met en évidence des propriétés de croissance de certaines valeurs particulières. Vieru considère, par exemple, la suite correspondant au deuxième mode de Messiaen à transposition limitée comme niveau zéro pour engendrer d'autres suites par additions successives. Si l'on note avec f = (2 1) la suite associée à la structure intervallique du mode de Messiaen[266], on peut engendrer d'autres suites périodiques par additions successives à partir de certaines valeurs.

Les deux premiers niveaux sont obtenus en prenant comme points de départ respectivement les valeurs 11 et 2. Pour le troisième niveau, en prenant comme valeur initiale le 8 on obtient une suite modale 14-périodique. La figure suivante montre le processus d'engendrement des trois premiers niveaux :

III	8	10	11	1	5	1	2	10	2	4	5	7	11	7	8	4…	
II		2	1	2	4	8	1	8	4	2	1	2	4	8	1	8	4
I			11	1	2	4	5	7	8	10	11	1	2	4	5	7…	
O				2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1…

Figure 117 : Processus d'engendrement des trois premiers niveaux d'une suite modale

Les niveaux successifs commencent par des 8 et ont la particularité d'avoir une prolifération progressive de valeurs 8 et 4. Notons cependant que ses valeurs sont moins importantes en correspondance du niveau qui précède le changement de la période. Ce comportement est montré par la figure suivante qui offre aussi le pourcentage des valeurs 8 et 4 :

IV 37.5% des 8 et 4

8	4	2	1	2	7	8	10	8	10	2	7	2	1	8	4

V 50% des 8 et 4

8	4	8	10	11	1	8	4	2	10	8	10	5	7	8	4

VI 50% des 8 et 4

8	4	8	4	2	1	2	10	2	4	2	10	8	1	8	4

VII 25% des 8 et 4

8	4	8	4	8	10	11	1	11	1	5	7	5	1	2	10
2	10	2	10	2	4	5	7	5	7	11	1	11	7	8	4

VIII 37.5% des 8 et 4

8	4	8	4	8	4	2	1	2	1	2	7	2	7	8	10
8	10	8	10	8	10	2	7	2	7	2	1	2	1	8	4

IX 50% des 8 et 4

8	4	8	4	8	4	8	10	11	1	2	4	11	1	8	4

[266] La représentation compacte exprime le fait que le mode de Messiaen (aussi appelé mode octotonique) est obtenu par alternance de tons et demi-tons. Il est donc un mode périodique, sa période étant donnée par la somme des deux valeurs 2 et 1.

2	10	8	4	2	10	8	10	5	7	2	4	5	7	8	4

X 68.75% des 8 et 4

8	4	8	4	8	4	8	4	2	1	2	4	8	7	8	4
8	10	8	4	8	10	8	4	2	7	2	4	8	1	8	4

XI 56.25% des 8 et 4

8	4	8	4	8	4	8	4	8	10	11	1	5	1	8	4
8	4	2	10	2	10	8	4	8	10	5	7	11	7	8	4

XII 68.75% des 8 et 4

8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	2	1	2	7	8	4
8	4	8	10	8	10	8	4	8	4	2	7	2	1	8	4

XIII 75% des 8 et 4

8	4	8	4	8	4	8	4	8	4	8	10	11	1	8	4
8	4	8	4	2	10	8	4	8	4	8	10	5	7	8	4

Figure 118 : Comportement des suites modales jusqu'au treizième niveau

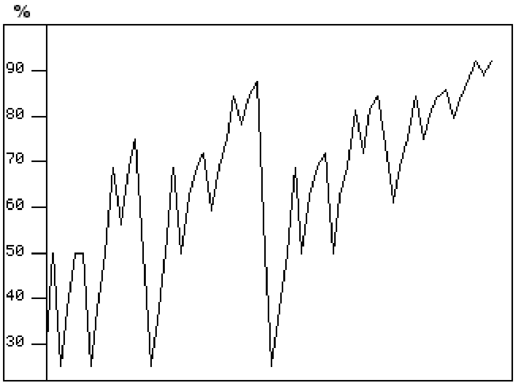
Voyons comment expliquer ce comportement à l'aide du théorème fondamental de décomposition. La suite (2 1) se décompose de façon unique en une partie réductible f_{red}=(6,9) et une partie reproductible f_{rep}=(8 4). Or, f_{red}=(6 9) et f_{rep}=(8 4) sont deux suites à valeurs dans les sous-groupes isomorphes à **Z/4Z** et **Z/3Z** respectivement. On peut montrer (par récurrence) qu'une telle décomposition est caractéristique de toutes les suites f qui ont la propriété suivante :

10. L'opérateur « différence », en correspondance d'un certain niveau, donne la suite f = (2 1).

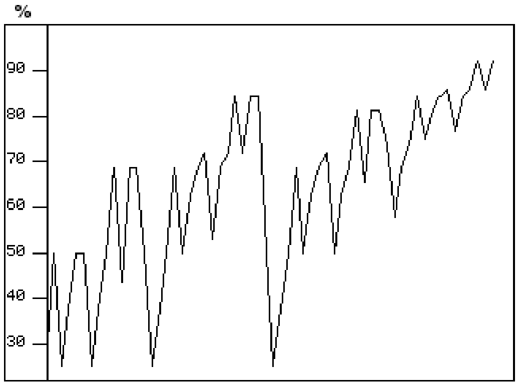
Les niveaux commencent par un entier x tel que $p(x)$=8, où p est la projection dans le sous-groupe isomorphe à **Z/3Z**.

La prolifération des facteurs 8 et 4 dans les différents niveaux n'est donc pas nécessairement liée au fait que tous les niveaux, à partir du troisième, commencent par 8. Parmi les éléments x vérifiant l'équation $p(x)$=8, il y a la valeur « 8 », mais aussi d'autres valeurs, et plus précisément les trois valeurs suivantes : 11 (=8+3), 2 (=8+6) et 5 (=8+9).

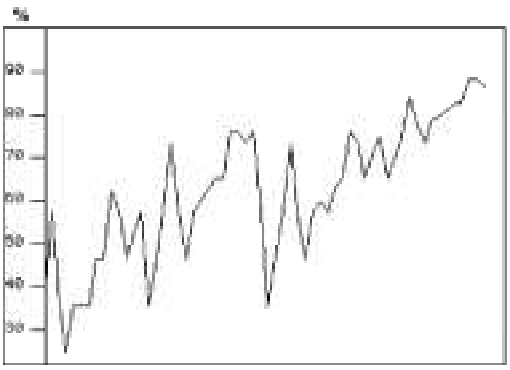
Vieru a donc choisi, pour ainsi dire, une valeur parmi les bonnes. La prolifération des valeurs 8 et 4 aurait eu lieu avec les mêmes proportions si l'on avait pris comme point de départ un des entiers x précédents. La figure suivante montre les courbes de croissance des valeurs 8 et 4 au fur et à mesure que les niveaux augmentent (en abscisse) et en fonction des quatre valeurs initiales admises :



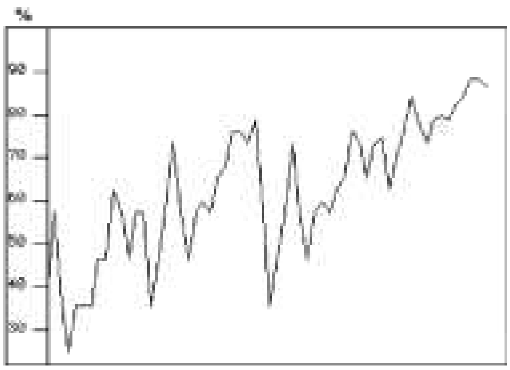
Valeur initiale = 8



Valeur initiale = 2



Valeur initiale = 5



Valeur initiale = 11

Figure 119 : Prolifération des valeurs 8 et 4 en fonction des quatre valeurs initiales

La figure suivante montre la courbe de croissance des mêmes valeurs dans le cas où les différents niveaux ont comme point de départ un nombre dont la projection dans le sous-groupe isomorphe à **Z/3Z** n'est pas égale à 8. Notons que, à la différence des cas précédents, qui produisent un grand pourcentage de 8 et de 4 (environs 90% des valeurs possibles, après 60 itérations), le choix du 4 comme valeur initiale limite fortement la croissance des valeurs 8 et 4, qui ne va jamais au-delà du 50%.

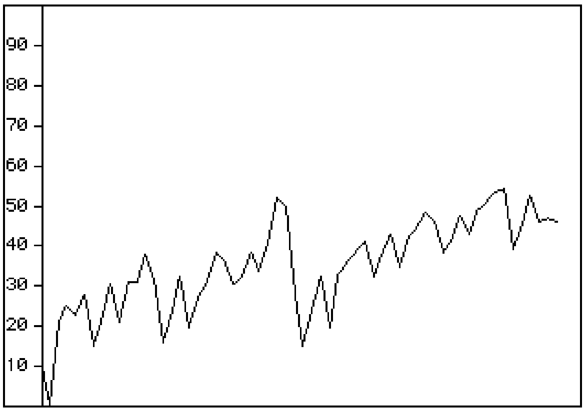


Figure 120 : des valeurs 8 et 4 en correspondance du valeur initial *x* = 4

La technique de prolifération de certaines valeurs par additions successives (ou, en renversant le processus, par différences successives) a beaucoup fasciné le compositeur, surtout à partir des années quatre-vingt-dix. Il s'agit d'un aspect qui rend la théorie modale assez proche d'une certaine tradition minimaliste américaine, pour reprendre les propos contenus dans un article paru dans la revue *Perspectives of New Music* [VIERU 1992][267]. Vieru parle également de procédé fractal, ce qui ne correspond pourtant pas à la nature du processus, qui n'a pas de liens directs avec les théories de l'auto-similarité en composition musicale[268].

Remarquons, pour conclure, que d'un point de vue théorique, le résultat de décomposition de toute suite périodique en partie réductible et partie reproductible offre une technique très puissante de génération et prolifération d'un matériau de base n'ayant pas, a priori, de régularités remarquables. Il s'agit de concepts qui dépassent le cadre strict de la théorie modale développée par Vieru et qui peuvent être appliqués dans différentes démarches compositionnelles.Applications compositionnelles récentes : le modèle algébrique des canons musicaux rythmiques

3.3.3 Olivier Messiaen et la notion de canon musical rythmique

Comme nous l'avons vu au cours du premier chapitre, l'idée d'établir une correspondance entre univers des hauteurs et domaine rythmique est au centre des préoccupations des nombreux théoriciens du XX^e^ siècle, en particulier des trois compositeurs/théoriciens dont nous avons analysé la pensée algébrique en théorie de la musique et en composition. Nous

[267] La prolifération de certaines valeurs a été employée par Vieru en particulier dans le huitième et dernier quatuor à cordes, le seul qui est resté inédit à ce jour.

avons aussi mentionné l'importance, surtout dans le cas de Iannis Xenakis et d'Anatol Vieru, de la figure d'Olivier Messiaen, « compositeur et rythmicien » - pour reprendre une de ses appellations - qui a probablement essayé le premier de théoriser la question d'une correspondance entre l'univers des hauteurs et celui des rythmes.

Cependant, comme nous l'avons déjà souligné en suivant une idée de Célestin Deliège, le compositeur n'a fait qu'effleurer les techniques dont il a été l'initiateur[269]. On a vu un exemple de ce paradoxe en considérant la réflexion de Messiaen sur les modes à transposition limitée, une technique compositionnelle qu'il a étudiée dans ses diverses propriétés structurelles, sans arriver, pourtant, à en décerner le caractère éminemment *algébrique*. Ainsi, non seulement le catalogue des modes ayant cette propriété n'est pas exhaustif, à la différence de ce qu'il semble soutenir, mais tout essai d'établir une correspondance précise entre hauteurs et rythmes se heurte à des difficultés majeures. L'analyse de ces difficultés peut servir comme point de départ pour comprendre les solutions offertes par l'approche algébrique.

L'interprétation rythmique des modes à transposition limitée s'appuie sur la notion de *rythme non rétrogradable*, un concept qui est introduit dans l'ouvrage *Technique de mon langage musical* [MESSIAEN 1944] et qui est discuté à plusieurs reprises dans le deuxième tome du *Traité de rythme, de couleur et d'ornithologie* [MESSIAEN 1992]. Nous allons nous concentrer sur cet ouvrage posthume dans lequel le concept de rythme non rétrogradable sert de point de départ pour caractériser, d'un point de vue théorique, le processus de construction des canons rythmiques.

Selon la définition de Messiaen, les rythmes non rétrogradables sont « deux groupes de durées, rétrogradés l'un par rapport à l'autre, encadrant une valeur centrale libre et commune aux deux groupes. Lisons le rythme de gauche à droite ou de droite à gauche, l'ordre de ses durées reste le même. C'est un rythme absolument fermé » [MESSIAEN 1992, 7]. Comme Messiaen le souligne, la non rétrogradation correspond à ce qu'en littérature ou en mathématiques on appelle le palindrome. Un rythme est donc non rétrogradable si la succession de ses valeurs est un nombre palindrome, la valeur centrale étant un nombre unique ou bien la répétition du même nombre. L'analogie entre les rythmes non

---

[268] Nous renvoyons à un des ouvrages parmi les plus intéressants parus ces dernières années sur les processus fractals en composition musicale, *Self-Similar Melodies* du compositeur et théoricien américain Tom Johnson [JOHNSON 1996].

[269] Voir dans la première partie notre discussion sur les modes à transposition limitée du point de vue de la théorie des cribles

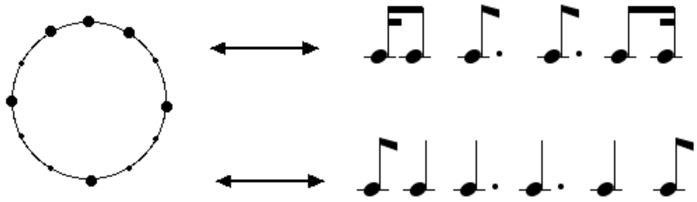
rétrogradables et les modes à transposition limitée est postulée à plusieurs reprises dans le Traité, en particulier dans un extrait qui est tiré du premier ouvrage théorique et que nous allons regarder en détail :

> « *Les modes à transpositions limitées réalisent dans le sens vertical (transposition) ce que les rythmes non-rétrogradables réalisent dans le sens horizontal (rétrogradation). En effet, ces modes ne peuvent se transposer au-delà d'un certain nombre de transpositions, sous peine de retomber dans les mêmes notes (enharmoniquement parlant) ; de même, ces rythmes ne peuvent être lus en sens rétrograde sans que l'on retrouve exactement le même ordre de valeurs que dans le sens droit. […] Ces modes sont divisibles en groupes symétriques ; ces rythmes aussi, avec cette différence que la symétrie des groupes rythmiques est une symétrie rétrograde. […] L'analogie est donc complète.* » [MESSIAEN 1992, 9].

L'analogie est loin d'être complète, comme d'autres théoriciens l'on bien souligné[270]. Si l'on cherche une analogie qui soit un *isomorphisme* entre rythmes non rétrogradables et certaines configurations de hauteurs, il faudra considérer d'autres propriétés que la transposition limitée.

Nous avons analysé, en particulier dans la deuxième partie, l'effet de l'opération d'*inversion* sur la structure intervallique d'un ensemble de classes de hauteurs. Une inversion induit une rétrogradation au niveau de la structure intervallique, ce qui permet d'établir une correspondance entre *rythmes non rétrogradables* et ensembles des classes de hauteurs symétriques par inversion (ou modes *auto-inverses*). Dans ce cas, l'analogie est complète. De plus, elle est un isomorphisme : à tout rythme non-rétrogradable de longueur n (c'est-à-dire ayant n divisions minimales) on peut faire correspondre, d'une façon naturelle, un mode auto-inverse dans une division de l'octave en un nombre n de parties égales et vice-versa à tout mode *auto-inverse* dans $\mathbf{Z/nZ}$ correspond toujours un rythme *non-rétrogradable* ayant comme période n. La correspondance est établie au niveau de la structure intervallique, ce qui implique qu'en changeant l'unité minimale on peut attacher à un même mode une infinité de rythmes non rétrogradables, comme le montre la figure suivante :

[270] Par exemple, voir la discussion dans *Geometrie der Töne* [MAZZOLA 1990, 98-99], reprise et prolongée dans *The Topos of Music* [MAZZOLA 2003, 150-152].



...

Figure 121 : Deux interprétations rythmiques d'un mode auto-inverse

Nous reviendrons dans la suite de ce chapitre au problème de la formalisation algébrique précise de cette correspondance entre domaine de hauteurs et domaine des rythmes, en présentant le modèle du rythme périodique de Dan Tudor Vuza [VUZA 1985]. Ce modèle explique les possibles réalisations d'une structure intervallique à partir d'une formalisation du rythme périodique comme sous-ensemble de l'axe **Q** des nombres rationnels. Mais avant de discuter cette approche, qui permet également une formalisation rigoureuse de la forme musicale de canon rythmique, nous voulons montrer comment Messiaen utilise la propriété des rythmes non-rétrogradables et le changement d'unité minimale décrit précédemment pour produire des structures de canons rythmiques ayant des caractéristiques géométriques particulières.

Le problème de la construction des canons rythmiques est mentionné dans la partie B du deuxième Tome du *Traité* (« Technique des rythmes non rétrogradables ») et développé, de façon plus systématique, dans le deuxième chapitre intitulé « Pédales et canons rythmiques ». Il s'agit, à notre connaissance, du premier essai de définition de la forme de canon musical en considérant exclusivement l'organisation rythmique, sans s'appuyer préalablement sur la structure mélodique ou l'organisation harmonique.

Par définition, un canon rythmique est la répétition, décalée dans le temps, d'une même structure rythmique, ou d'une de ses transformations. Le pattern rythmique de base, ou *pédale rythmique*, est à son tour répété, ce qui donne le caractère cyclique (et donc infini) de tout canon rythmique. Messiaen prend en considération plusieurs types d'opérations sur cette forme musicale. Une première opération permet d'obtenir un canon » de plus en plus serré » [MESSIAEN 1992, 61] simplement en réduisant la valeur qui établit la distance entre chaque voix.

Notons que cette valeur est toujours la même pour un canon donné. Autrement dit, les voix entrent régulièrement l'une après l'autre, chacune à la même distance temporelle de celle qui la précède. Comme nous l'avons déjà mentionné dans la définition précédente, les voix ne doivent pas nécessairement être les mêmes, mais Messiaen autorise dans la définition de canon des opérations comme les *augmentations* ou les *diminutions*, deux notions qui ne respectent pas, comme le fait remarquer Célestin Deliège, la « *convention terminologique utilisée dans le contrepoint classique* » [DELIÈGE 2003, 28].

Dans la terminologie de Messiaen, l'augmentation (respectivement la diminution) d'une structure rythmique correspond à l'ajout (*resp.* la soustraction) à chaque valeur du pattern rythmique d'un point ou d'une fraction de sa valeur. À travers le processus d'augmentation, Messiaen peut considérer des canons rythmiques dont les voix sont superposées (c'est-à-dire qu'elles démarrent en même temps), mais par le fait du processus d'augmentation (ou de diminution) les voix se décalent l'une par rapport à l'autre.

Un cas particulier de canon rythmique s'obtient en considérant comme pattern rythmique de base un rythme non rétrogradable ou une concaténation de rythmes non rétrogradables. Messiaen discute deux exemples de canons de rythmes non rétrogradables, les deux étant des » triple canons », c'est-à-dire des canons à trois voix. Il s'agit, d'un point de vu structurel, du même canon, la différence étant la valeur minimale qui correspond à une croche dans le premier cas et à une double-croche dans le deuxième.

Le premier exemple est le canon que Messiaen utilise dans la 7e partie de la pièce *Harawi* (1945) intitulée *Adieu*. L'extrait est montré par la figure suivante :

Figure 122 : Le triple canon rythmique non rétrogradable dans *Harawi*

D’un point de vue rythmique, le canon précédent est un canon à trois voix, chaque voix (ou pédale rythmique) étant la concaténation de trois rythmes non rétrogradables, comme le montre la figure suivante :

Figure 123 : Pédale rythmique de *Harawi*

Une valeur rythmique constante, la croche, sépare les différentes entrées de voix, selon la technique traditionnelle de construction des canons rythmiques chez Messiaen. À la différence des canons musicaux traditionnels, chaque voix est une succession différente d’accords qui sont répétés cycliquement sous la forme *d’un* « *ostinato harmonique indépendant des rythmes* » [MESSIAEN 1992, 46]. La première voix correspond à la première portée qui contient six accords différents, tandis que les deux autres ostinato harmoniques correspondent, respectivement, aux trois notes de la portée médiane et aux deux notes de la portée inférieure.

Cependant, l’aspect fondamental de ce processus compositionnel est l’effet des rythmes non rétrogradables et des entrées régulières sur la structure globale du canon. Le compositeur est très clair sur le caractère à la fois chaotique et très organisé de cette forme :

> « *Remarquons […] que les trois rythmes non rétrogradables divisent les durée en 5+5+7 durées, alors que les termes des trois ostinatos harmoniques contiennent toujours six sonorités pour le supérieur, et trois sonorités pour les deux autres. Ajoutons que les durées sont très inégales. Il résulte de tout cela que les différentes sonorités se mélangent ou s’opposent de manières très diverses,* ***jamais au même moment ni au même endroit […]. C’est du désordre organisé*** » [MESSIAEN 1992, 46][271].

Nous avons vu dans cette démarche compositionnelle l’intention, de la part de Messiaen, d’obtenir ce que nous avons appelé un « canon rythmique de pavage » ou *tiling canon* [ANDREATTA *et al.* 1999]. Un canon de pavage a la propriété de se dérouler dans le temps de telle façon qu’à chaque instant il n’y a qu’une (et une seule) attaque parmi les différentes voix. Autrement dit, les voix sont *complémentaires* et la pulsation résultante des différentes pédales rythmiques est *régulière*.

[271] C’est nous que soulignons.

Cette propriété n'est que partiellement vérifiée dans le cas du triple canon de rythmes non rétrogradables utilisé dans *Harawi*, comme la représentation suivante le montre. Cette représentation utilise une grille temporelle dans laquelle les points correspondent à des attaques de voix. Il y a des instants temporels qui ne sont remplis par aucune attaque des trois voix et, de même, il y a des moments où les attaques de deux ou plusieurs voix coïncident[272].

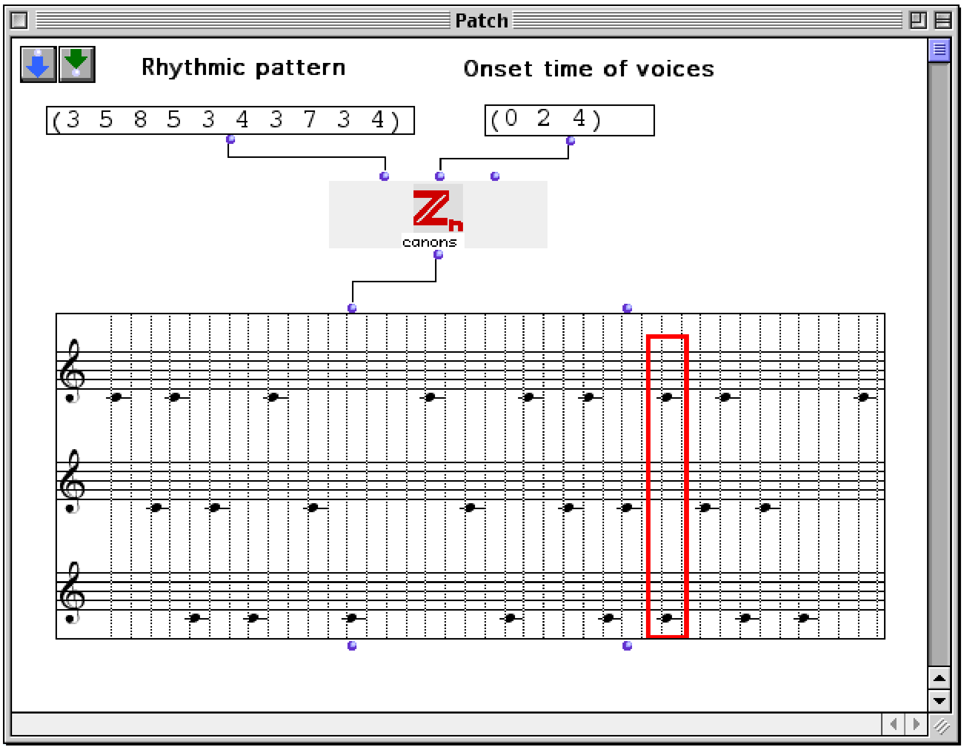


Figure 124 : Représentation du canon de *Harawi* par une grille

La même structure formelle est employée dans la pièce pour deux pianos *Visions de l'Amen* (1943), plus précisément dans la partie intitulée *Amen des anges, des saints, du chant des oiseaux*. Il s'agit donc encore une fois d'un triple canon de rythmes non rétrogradables mais avec une unité minimale d'une triple-croche au lieu d'une double-croche. La figure suivante montre la « nouvelle » structure du canon rythmique en notation traditionnelle.

[272] Nous avons entouré la première intersection entre deux voix par un rectangle.

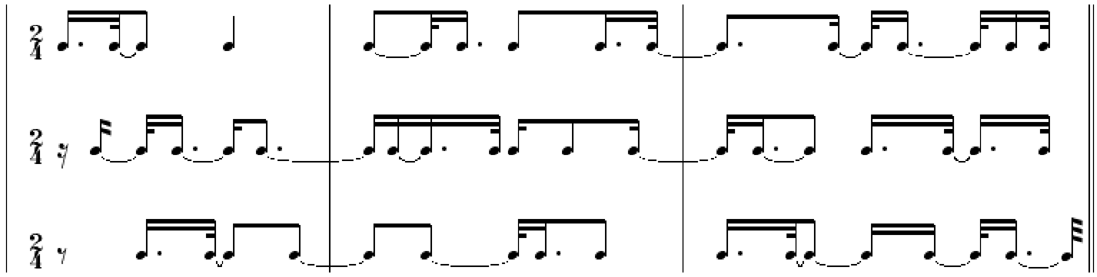


Figure 125 : Triple canon de rythmes non rétrogradables dans la pièce *Visions de l'Amen*

Comme dans le cas d'*Harawi*, ce canon rythmique réalise partiellement le principe du pavage de l'axe du temps. Cependant, les deux exemples précédents nous offrent la possibilité de mettre en évidence certaines limitations du modèle rythmique proposé par Messiaen.

Une première limitation concerne les entrées toujours régulières des différentes voix. Le décalage temporel de la pédale rythmique est constant et le compositeur ne discute jamais de cas où les entrés de voix sont de longueurs variables. Pourtant, pour réaliser intégralement le pavage de l'axe du temps, une bonne formalisation du processus de décalage temporel entre les voix s'avère nécessaire. Messiaen semble sous-estimer cet aspect quand il discute la propriété de « chaos organisé » du canon final exclusivement par rapport à la structure irrégulière de la pédale rythmique. Le choix d'une pédale rythmique de rythmes non rétrogradables est l'une des possibilités que le compositeur se donne pour s'approcher de la propriété de pavage, mais cette stratégie compositionnelle relève, il nous semble, plus du *charme des impossibilités* de certaines structures musicales que d'une démarche théorique consciente. Pour cette raison, nous allons maintenant discuter la manière de généraliser, à l'aide d'outils algébriques, le modèle de canon rythmique proposé par Messiaen, en particulier en ce qui concerne la propriété de pavage de l'axe du temps.

3.3.4 Formalisations algébriques équivalentes d'un canon rythmique de pavage

Le modèle algébrique des canons rythmiques de pavage que nous allons présenter a été proposé par Dan Tudor Vuza dans les années quatre-vingt-dix. À la base de ce modèle, il y a une interprétation rythmique de la théorie modale d'Anatol Vieru, en particulier de l'opération de *composition* ou « combinaison transpositionnelle » [*transpositional combination*] que nous avons discutée dans la première partie.

Nous avons déjà analysé ce modèle dans plusieurs écrits précédents ; l'intérêt de reprendre ces travaux ici est lié aux développements compositionnels récents que nous avons pu suivre de près grâce au travail d'implémentation du modèle algébrique réalisé en *OpenMusic*[273]. Nous allons donc résumer ici certaines propriétés de base de la théorie des canons de pavage, à commencer par une définition plus générale de canon rythmique que celle qu'on retrouve chez Messiaen.

Pour établir une telle définition, il faut d'abord remplacer la propriété de régularité dans les entrées des voix par une condition plus générale qui permet des distances différentes entre les voix d'un même canon. La façon la plus simple de généraliser le modèle de Messiaen est tout d'abord celle de représenter les informations sur les entrées des voix à l'aide d'une structure rythmique quelconque. Nous désignerons indifféremment cette structure par le terme *classe métrique* [VUZA 1991] ou bien *rythme externe* [ANDREATTA *et al*. 1999].

Tout canon rythmique est donné par le choix d'un *rythme de base*[274], qu'on notera souvent *R*, et d'un rythme externe, qu'on notera *S*. La figure suivante montre un exemple de canon rythmique ayant comme *rythme de base* la structure *R*=(2 8 2) et comme *rythme externe* la structure *S*=(5 1 5 1) :

[273] L'implémentation de la théorie des canons rythmique de Vuza a ouvert la voie à une exploration systématique, de la part des compositeurs, des structures rythmiques à la base d'un canon de pavage. Les applications compositionnelles récentes de ce modèle de canons rythmique concernent, en particulier, un travail de collaboration avec le compositeur Georges Bloch, dont nous analyserons quelques aspects au cours du présent chapitre.

[274] Le terme « rythme de base » [*ground rhythm*], introduit par Vuza, remplace le concept de pédale rythmique chez Messiaen.

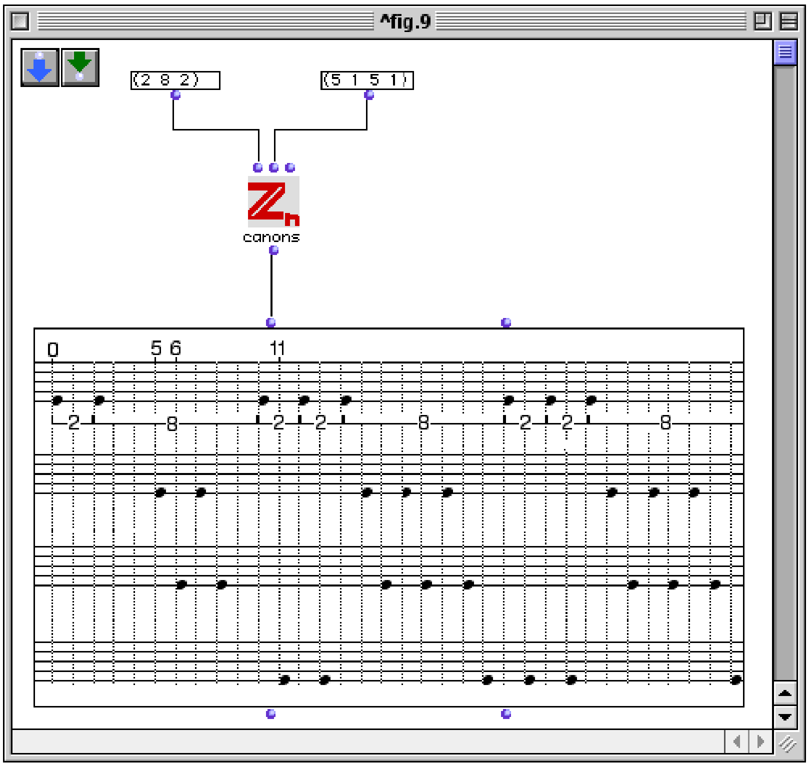


Figure 126 : Exemple d'un canon rythmique de pavage

On vérifie aisément qu'il s'agit d'un *canon de pavage* car dès que la quatrième et dernière voix est entrée, chaque instant temporel est rempli par une attaque d'une (et une seule) voix. Dans la terminologie de Vuza, un tel canon s'appelle *canon régulier complémentaire*, la régularité étant la caractéristique du rythme résultant de la *projection* des attaques des voix différentes sur l'axe du temps et la complémentarité étant la propriété qui empêche d'avoir deux ou plusieurs voix avec la même attaque au même instant temporel.

La propriété de pavage d'un canon peut être formalisée, d'un point de vue algébrique, en suivant deux stratégies différentes.

Une première stratégie consiste à considérer un canon comme une *factorisation* d'un groupe cyclique **Z/nZ** dans une *somme directe* de deux sous-ensembles. Dans le cas du canon de pavage précédent, les deux sous-ensembles sont les deux *modes* *R'* et *S'* ayant respectivement *R* et *S* comme structure intervallique. La *somme directe* garantit que tout élément de **Z/nZ** peut s'écrire, de façon unique, comme somme d'un élément de *R'* et d'un élément de *S'*.

Si l'on reprend l'exemple précédent, il suffit donc d'interpréter les structures *R*=(2 8 2) et *S*=(5 1 5 1) comme ensembles de classes de résidus. Le processus de transformation d'une structure intervallique dans un ensemble des classes de hauteurs est un cas particulier de l'opération de *composition* dans la théorie modale[275]. Plus précisément, il s'agit de la composition entre une structure intervallique et une note. En choisissant pour *R* et *S* respectivement les entiers de classes de hauteurs 10 et 0, on obtient les deux sous-ensembles R' et S' en appliquant la définition de *composition* entre une structure modale et un entier :

R'=(2 8 2)•{10}={10+2, 10+2+8, 10+2+8+2}={0,8,10}
S'=(5 1 5 1) •{0}={0+5, 0+5+1, 0+5+1+5, 0+5+1+5+1}={0,5,6,11}

On peut vérifier que les deux sous-ensembles *R'* et *S'* représentent une *factorisation de* **Z/12Z**, dans le sens que chaque élément du groupe cyclique **Z/nZ** peut s'exprimer (de façon unique) comme la somme d'un élément de *R'* et d'un élément de *S'*. En effet :

0	=	0	+	0
1	=	8	+	5
2	=	8	+	6
…				
11	=	0	+	11

Cependant, à côté de cette stratégie algébrique qui repose sur la notion de *factorisation*, une deuxième stratégie est possible. Cette nouvelle démarche algébrique s'appuie directement sur la notion de *composition* entre structures intervalliques. Rappelons que composer deux structures intervalliques *R* et *S* signifie transposer la première structure sur les degrés de la deuxième.

L'interprétation de cette opération dans le domaine rythmique découle immédiatement lorsqu'on remplace la « transposition » par le concept de « translation temporelle ». Composer deux structures rythmiques signifie translater temporellement une structure rythmique selon les valeurs de la deuxième. Autrement dit, d'un point de vue rythmique, la composition est équivalente à la construction d'un canon rythmique ayant la première structure comme *rythme de base* et la deuxième comme *classe métrique*. Dans le cas où le résultat de cette composition est le groupe cyclique complet, alors le canon correspondant est

[275] Voir, en particulier, les discussions sur les cas possibles d'opérations de *composition* (entre une structure intervalique et une note, entre une structure intervallique et un ensemble de classes de hauteurs et entre deux structure intervalliques) dans la première partie de ce travail.

un canon de pavage. La figure suivante montre le processus de composition sous-jacent au canon de pavage précédent :

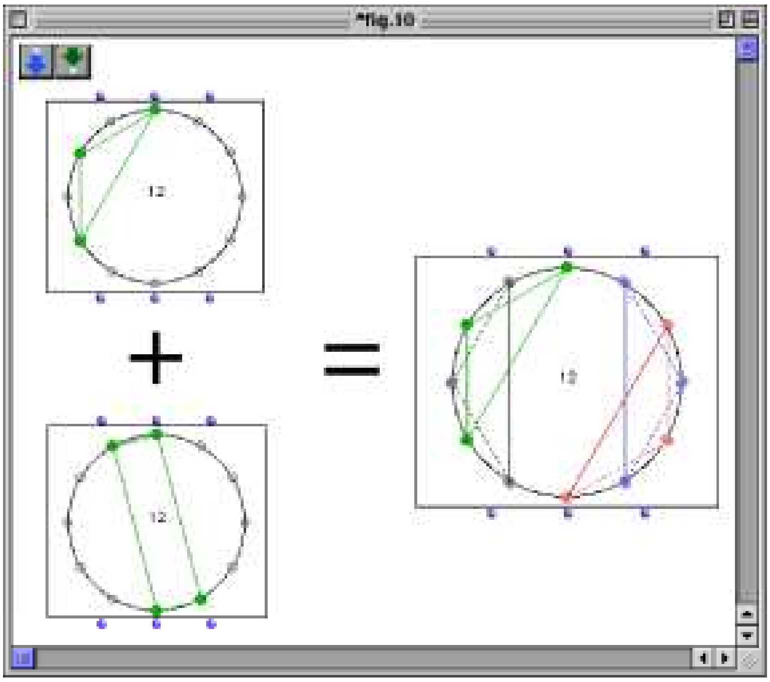


Figure 127 : Equivalence entre factorisation et composition de structures intervalliques

L'exemple précédent de canon rythmique de pavage est une première généralisation du modèle de canon proposé par Messiaen car les entrées des voix ne sont plus régulières. Cependant, ces entrées sont organisées selon une propriété de « transposition limitée », comme on peut le voir en observant la représentation circulaire du deuxième sous-ensemble, correspondant à la structure intervallique (1 5 1 5).

On se heurte, dans ce cas, à un problème conceptuel qui soulève un doute sur une correspondance complète entre le domaine des hauteurs et le domaine rythmique. En effet, un mode à transposition limitée correspond à une structure rythmique dont la période n'est pas minimale. Autrement dit, si l'on considère le cas du groupe cyclique **Z/12Z**, un mode à transposition limitée correspond à une structure rythmique qui a une période inférieure à 12.

Par exemple, le mode à transposition limitée (5 1 5 1) corresponds à la structure rythmique (5 1) de période égale à six, comme le montre la figure suivante :

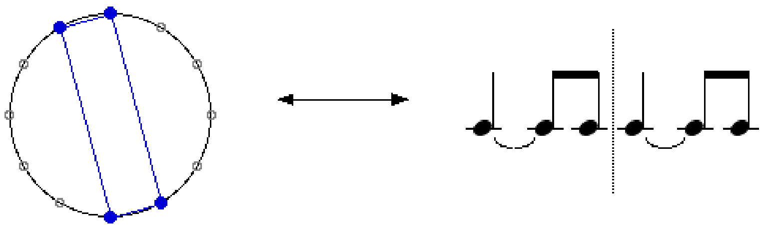


Figure 128 : Structure rythmique attachée au mode à transposition limitée (5 1 5 1)

Pour cette raison, on doit ajouter dans la définition même d'un canon rythmique de pavage une condition ultérieure sur la factorisation (ou, de façon équivalente, sur les structures intervalliques qu'on « compose »). La condition peut se résumer ainsi :

Dans la composition de deux structures rythmiques, aucune des deux structures ne doit être un mode à transposition limitée.

En ajoutant à la définition précédente de canon de pavage cette nouvelle condition, on obtient ce qu'on appelle les *canons réguliers complémentaires de catégorie maximale*, en abrégé canons RCCM. Cette famille de canons rythmiques de pavage a été le point de départ de la démarche compositionnelle de George Bloch[276]. Nous allons maintenant procéder à une courte analyse des propriétés majeures de cette famille de canons rythmiques pour discuter ensuite la façon dont le compositeur s'est servi des résultats théoriques et du modèle informatique.

3.3.5 Les canons RCCM ou canons rythmiques réguliers complémentaires de catégorie maximale

Une première contrainte d'un canon RCCM concerne sa période. Vuza démontre que la période d'un tel canon rythmique doit respecter les cinq conditions négatives suivantes[277]. Elle ne doit pas être :

1. Une puissance d'un nombre premier ;
2. Le produit d'une puissance d'un nombre premier par un autre nombre premier ;
3. Le produit des carrés de deux nombres premiers distincts ;
4. Le produit de deux nombres premiers par un troisième nombre premier ou son carré ;

[276] D'un point de vue mathématique, la famille des canons RCCM est liée à une ancienne conjecture de théorie des nombres avancée par Hermann Minkowski à la fin du XIX^{e} siècle et résolue dans la moitié des années quarante par le mathématicien hongrois G. Hajós. Nous allons décrire l'histoire de la « Conjecture de Minkowski » et la métamorphose musicale de ce problème mathématique dans l'*Interludium* qui conclut ce troisième chapitre.

[277] Il s'agit d'un résultat connu en théorie des groupes de Hajós, comme nous allons le montrer à la fin du chapitre.

5. Le produit de quatre nombres premiers distincts.

La liste des périodes inférieures à 1000 est la suivante :

(72 108 120 144 168 180 200 216 240 252 264 270 280 288 300 312 324 336 360 378 392 396 400 408 432 440 450 456 468 480 500 504 520 528 540 552 560 576 588 594 600 612 616 624 648 672 675 680 684 696 700 702 720 728 744 750 756 760 784 792 800 810 816 828 864 880 882 888 900 912 918 920 936 945 952 960 968 972 980 984 1000)

La factorisation du groupe cyclique en deux sous-ensembles non-périodiques est calculée à travers un algorithme qui utilise un résultat de décomposition de la période *n* d'un tel groupe cyclique. Ce résultat affirme que toute période *n* d'un canon RCCM peut se décomposer en un produit $p_1 \cdot p_2 \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ de cinq nombres entiers, tels que :

(a) Les nombres p_i sont premiers (distincts)

(b) Les deux produits $p_1\ n_1$ et $p_2 \cdot n_2$ sont relativement premiers entre eux

(c) Les n_i sont supérieurs ou égaux à 2.

Pour une période *n* donnée, les décompositions peuvent être très différentes[278]. La théorie affirme qu'un canon RCCM ayant une période *n* qui se décompose en le produit $p_1 \cdot p_2 \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ (avec les propriétés précédentes) sera décrit par deux structures rythmiques *R* et *S* ayant respectivement des cardinalités égales à $p_1 \cdot p_2 \cdot n_3$ et $n_1 \cdot n_2$.

La structure rythmique *R* étant le rythme de base, l'indication sur sa cardinalité nous permet de conclure que *R* a un nombre d'attaques égal au produit $p_1 \cdot p_2 \cdot n_3$. De même, *S* étant la structure rythmique qui décrit les décalages entre les voix, sa cardinalité restitue le nombre total de voix du canon, qui sera donc toujours égal au produit $n_1 \cdot n_2$.

De manière évidente, si l'on multiplie le nombre d'attaques de chaque voix par le nombre total des voix du canon, on obtient comme résultat le nombre total d'attaques dans une période, c'est-à-dire *n.* Cela correspond précisément à la propriété de *pavage* de l'axe du temps.

La figure suivante montre un exemple de Canon RCCM de période 72. Ce canon à six voix a comme rythme de base et classes métrique respectivement :

R=(1 4 1 6 13 4 7 6 6 1 4 19)

S=(8 10 8 14 18 14).

[278] C'est le cas, par exemple, de la période *n*=180 qui admet cinq décompositions différentes. Pour les deux premières valeurs (*n*=72 et *n*=108) la décomposition est unique.

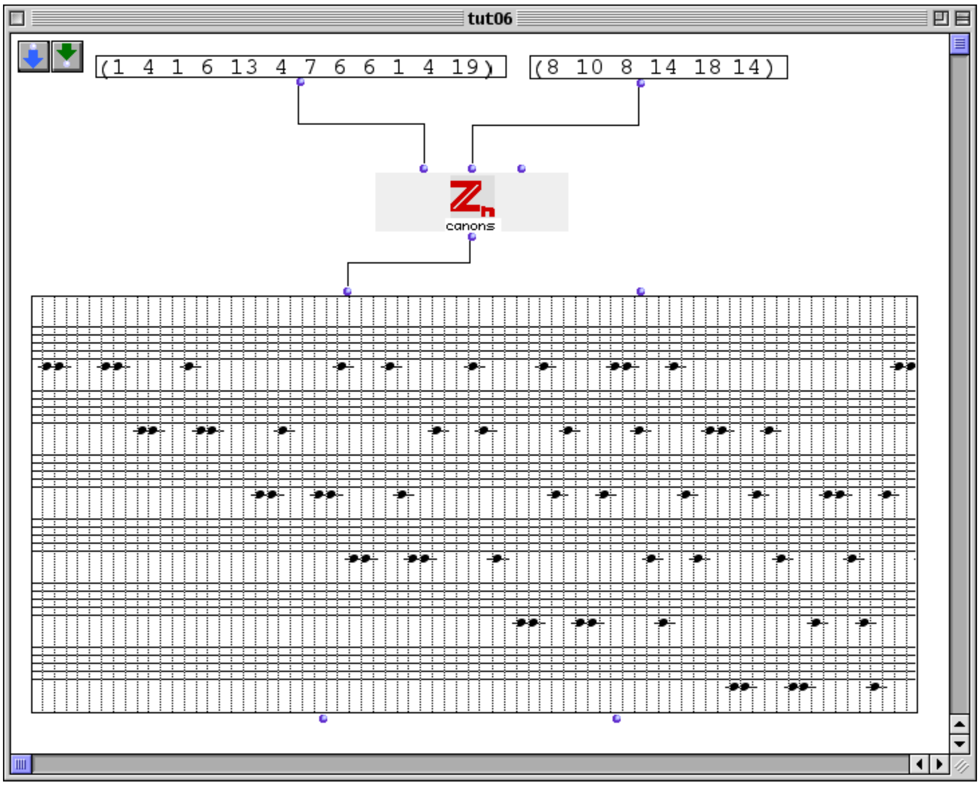


Figure 129 : Un canon RCCM à six voix de période 72

Ces éléments sont suffisants pour comprendre le point de départ du travail compositionnel de George Bloch. Une analyse de sa démarche théorique permettra, en outre, de décrire quelques propriétés majeures de cette famille très particulière de canon rythmiques.

3.4 Quelques stratégies compositionnelles à partir de la théorie des canons rythmiques de pavage dans le Projet Beyeler de Georges Bloch

George Bloch est l'un des premiers compositeurs à avoir utilisé le modèle algébrique des canons rythmiques de pavage en composition[279]. Son approche est emblématique en ce qui concerne les directions parfois très inattendues qu'une recherche théorique peut prendre lorsqu'elle est soumise à la primauté de la pensée compositionnelle. Nous discutons ici trois problématiques que le compositeur a posées autour du modèle formel et qui sont à la base de

[279] Pour être plus précis, l'application compositionnelle de la théorie algébrique des canons de pavage commence avec le compositeur Fabien Lévy, auteur de deux pièces qui utilisent, avec des finalités très différentes, ce modèle théorique : *Coïncidences* pour ensemble de 35 musiciens (1999) et *Où niche l'hibou*, petites pièces pédagogiques pour un jeune élève et son professeur (1999). Dans le premier cas, la structure de canon rythmique de pavage est utilisée comme grille organisatrice du déploiement d'événements sonores complexes dans le temps. Dans le cas de la deuxième pièce, le modèle de canon rythmique est employé dans son interprétation classique, à savoir en termes d'attaques, une utilisation qui est accompagnée par toute une variété de modes de jeu instrumentaux. Quelques éléments d'analyse d'une telle démarche compositionnelle sont contenus dans la thèse de doctorat du compositeur [LEVY 2003b].

trois projets compositionnels : le projet Beyeler (2001), le projet Hitchcock (2001) et le projet Reims (2002). Les problématiques sont les suivantes :

(a) organisation métrique d'un canon rythmique de pavage ;
(b) réduction d'un canon rythmique de pavage à une collection de sous-canons auto-similaires ;
(c) modulation (métrique) entre des canons rythmiques de pavages différents ;
(d) transformation d'un canon rythmique de pavage en *texture.*

Nous concentrerons l'analyse sur les trois premières problématiques, celles qui ont concerné le travail compositionnel autour du *Projet Beyeler.* Il s'agit d'une une commande de la Fondation Beyeler de Bâle pour une visite guidée musicale de la collection permanente et d'une exposition particulière intitulée *Ornament and Abstraction*[280]. La pièce de George Bloch, crée en juillet 2001 dans le cadre du Festival *Europäische Musikmonat,* est intitulée *Fondation Beyeler : une empreinte sonore.*

Nous n'allons pas décrire l'exposition *Ornament and Abstraction* qui était organisée autour de dix chapitres précédés par un *Prologue* et déployant des œuvres d'art allant de l'ornementation marocaine du XVIIIe siècle jusqu'aux peintures murales de l'artiste américain Sol LeWitt. Cependant, il faut insister sur l'aspect provocateur de cette exposition qui défendait la thèse selon laquelle, pour employer les propres mots de son conservateur, « *l'ornement était le passager clandestin de l'art abstrait* ». Étaient explorés, notamment, les rapports entre la ligne et la figure, ainsi qu'entre la figure et l'espace, sujets qui se prêtaient particulièrement bien à une utilisation musicale de la notion géométrique de pavage.

D'un point de vue musical, le *Projet Beyeler* consistait en cinq visites guidées indépendantes, chaque visite étant conçue autour d'un musicien. La formation comprenait un violon, une clarinette, un saxophone ténor, une contrebasse et une percussion. Les parties du *Projet Beyeler* qui concernent le plus directement le problème de pavage en musique sont trois canons rythmiques qui interviennent à des moments où les musiciens se rencontrent (au premier tiers de la durée de la visite, au deuxième tiers et à la fin de la visite).

Le premier canon, *Canon 1,* est un canon pour clarinette, saxophone et contrebasse. Le deuxième canon, *Canon 2,* est écrit pour violon et berimbao. Le troisième, *Canon Final,* reprend le *Canon 1* dans la même formation, développe une version différente du *Canon 2*

---

[280] Cette exposition, organisée par Markus Bruederlin, le conservateur de la Fondation Beyeler, était centrée sur la dualité entre partie ornementale et caractère abstrait de l'œuvre d'art.

pour violon, contrebasse et vibraphone et termine avec un troisième canon rythmique dans lequel tous les musiciens jouent.Voici comment les trois problématiques théoriques de départ émergent dans l'utilisation compositionnelle de la théorie algébrique des canons rythmiques de pavage.

La première problématique concerne la possibilité d'établir une organisation métrique dans une structure qui semble contredire toute hiérarchisation. Le risque de tout canon RCCM est, en effet, de se réduire à un train indifférencié de pulsations, chaque voix ayant perdu sa propre caractéristique de « pédale rythmique », pour reprendre une terminologie de Messiaen. Cela empêche à la structure rythmique de base de rester perceptible dans le résultat final.

La démarche pour établir une organisation métrique a été envisagée, par le compositeur, en relation étroite avec la deuxième problématique. Le modèle impose, normalement, une limitation très stricte au nombre d'instrumentistes qui pourront jouer une telle forme canonique. Rappelons que d'après la théorie, six est le plus petit nombre des voix d'un canon rythmique *régulier complémentaire de catégorie maximale* (ou canon RCCM). Le problème se pose donc de chercher des stratégies pour permettre à un nombre quelconque d'instrumentistes de jouer un canon ayant au moins six voix et cela sans détruire la structure canonique ni le caractère géométrique de pavage d'une telle forme musicale.

Le troisième et dernier problème que nous allons analyser concerne la possibilité d'opérer des transformations sur une structure de canon RCCM de telle façon qu'on puisse « moduler » d'un canon de taille donnée (ayant une période p et un nombre de voix l) à un canon qui n'a pas les mêmes caractéristiques (et qui aura donc une période p' et un nombre de voix l').

3.4.1 Organisation métrique d'un canon rythmique de pavage

Pour garder une intelligibilité de la structure canonique, une étude des régularités dans le catalogue possible des solutions de classes rythmiques R et S pour une période donnée reste une étape préalable à toute utilisation compositionnelle du modèle. Une fois les bonnes valeurs choisies, le problème de la réduction d'un canon rythmique de taille donné à un canon rythmique de taille inférieure, c'est-à-dire ayant un nombre inférieur de voix, peut être résolu à travers une technique de « compactage » des voix. Cette technique, proposée par le compositeur pour résoudre une limitation technique posée par le nombre d'instrumentistes à disposition, s'avère riche de conséquences théoriques car elle affecte la propriété de *catégorie maximale* d'un canon rythmique de pavage. Essayons d'analyser la structure du *Canon 1* à partir des deux problématiques précédentes : réduction du nombre de voix et établissement d'une organisation métrique.

La période choisie pour le *Canon 1* est de 144 pulsations. Autrement dit les solutions *R* et *S* correspondent à des factorisations du groupe cyclique **Z/nZ** d'ordre 144 en sous-ensembles non périodiques ayant chacun 12 éléments. Le catalogue des solutions possibles comprend 36 valeurs pour la classe rythmique *R* et 6 valeurs pour la classe *S*, ce qui donne a priori 36×6=216 solutions possibles[281].

La figure suivante montre le catalogue dans lequel les solutions sont représentées à l'aide de la structure intervallique :

R

(40 7 1 11 12 17 8 23 12 5 7 1)

(40 5 3 9 12 19 8 21 12 7 5 3)

(40 3 5 7 12 21 8 19 12 9 3 5)

(40 1 7 17 6 17 8 17 23 1 6 1)

(40 1 7 5 12 23 8 17 12 11 1 7)

(40 1 6 1 23 17 8 17 6 17 7 1)

(39 8 1 12 12 15 8 25 12 3 8 1)

(39 3 5 19 6 15 8 19 21 3 5 1)

(39 3 5 1 24 15 8 19 6 15 8 1)

(39 1 8 15 6 19 8 15 24 1 5 3)

(39 1 8 3 12 25 8 15 12 12 1 8)

(39 1 5 3 21 19 8 15 6 19 5 3)

(37 8 3 12 12 13 8 27 12 1 8 3)

(37 5 3 21 6 13 8 21 19 5 3 3)

(37 5 3 3 24 13 8 21 6 13 8 3)

(37 3 8 13 6 21 8 13 24 3 3 5)

(37 3 8 1 12 27 8 13 12 12 3 8)

(37 3 3 5 19 21 8 13 6 21 3 5)

(35 8 5 12 12 11 8 29 11 1 7 5)

(35 7 1 23 6 11 8 23 17 7 1 5)

(35 7 1 5 24 11 8 23 6 11 8 5)

(35 5 8 11 6 23 8 11 24 5 1 7)

(35 5 7 1 11 29 8 11 12 12 5 8)

(35 5 1 7 17 23 8 11 6 23 1 7)

(33 8 7 12 12 9 8 31 9 3 5 7)

(33 8 1 24 6 9 8 25 15 8 1 6)

(33 8 1 6 24 9 8 25 6 9 8 7)

(33 7 8 9 6 25 8 9 24 6 1 8)

(33 7 5 3 9 31 8 9 12 12 7 8)

(33 6 1 8 15 25 8 9 6 24 1 8)

[281] Sans compter toutes les permutations circulaires et les inversions qu'on peut opérer sur chaque classe rythmique *R* et *S* sans changer la propriété de pavage ni de catégorie maximale.

(31 9 8 7 6 27 8 7 24 6 3 8)

(31 8 3 24 6 7 8 27 13 8 3 6)

(31 8 3 6 24 7 8 27 6 7 8 9)

(31 6 3 8 13 27 8 7 6 24 3 8)

(29 11 8 5 6 29 8 5 24 6 5 8)

(29 8 5 6 24 5 8 29 6 5 8 11)

S

(58 16 2 14 2 2 14 2 2 14 2 16)

(26 18 14 4 14 4 10 4 14 4 14 18)

(22 16 16 4 16 2 14 2 16 4 16 16)

(22 10 22 4 18 10 4 18 4 10 18 4)

(18 18 18 10 16 2 16 2 16 2 16 10)

(18 10 16 10 10 16 2 16 10 10 16 10)

Un simple regard sur le catalogue précédent montre une présence significative, d'un point de vue statistique, des valeurs respectivement multiples de 3 et de 2 dans les solutions de *R* et de *S*. Le compositeur a pris ce constat comme point de départ pour essayer de repérer des structures répétitives à l'intérieur des rythmes de base *R*. Cette analyse est faite en utilisant la représentation des structures rythmiques en termes de classes de résidus (modulo 144), en prenant le 0 comme point de départ de tout rythme de base. Ainsi la solution :

R = (1 5 3 21 19 8 15 6 19 5 3 39)

est d'abord transformé dans la forme suivante[282] :

R= (0 1 6 9 30 49 57 72 78 97 102 105 [144])

avant d'être étudiée dans sa composante métrique interne. L'analyse métrique est conduite à travers un programme informatique qui met en évidence les meilleures solutions pour un mètre musical donné.

Par exemple, dans le cas du *Canon 1*, le compositeur s'est intéressé à déployer la structure canonique à l'aide d'une pulsation à trois temps ternaires (du type 9/16, ou 3/4 en triolet). Les meilleures solutions retenues sont donc celles dont les attaques coïncident le plus avec des multiples de 3 et de 9. Le tableau suivant en donne quelques unes (accompagnée par une ou plusieurs de ses permutations circulaires). Ces résultats sont donnés en commençant par le meilleur :

(1 5 3 21 19 8 15 6 19 5 3 39) et ses permutations circulaires :

(3 21 19 8 15 6 19 5 3 39 1 5)
(21 19 8 15 6 19 5 3 39 1 5 3)
(19 8 15 6 19 5 3 39 1 5 3 21)
(15 6 19 5 3 39 1 5 3 21 19 8)

(1 8 33 7 8 9 6 25 8 9 24 6) et ses permutations circulaires :

(33 7 8 9 6 25 8 9 24 6 1 8)
(7 8 9 6 25 8 9 24 6 1 8 33)
(9 6 25 8 9 24 6 1 8 33 7 8)
(6 25 8 9 24 6 1 8 33 7 8 9)
(25 8 9 24 6 1 8 33 7 8 9 6)
(9 24 6 1 8 33 7 8 9 6 25 8)

[282] Pour faciliter la lecture, on gardera l'*italique* pour indiquer une structure rythmique en termes de classe intervallique. Notons que le passage de la classe rythmique *R* au sous-ensemble R d'un groupe cyclique, est un

(24 6 1 8 33 7 8 9 6 25 8 9)

(6 1 8 33 7 8 9 6 25 8 9 24)

(3 3 37 5 3 21 6 13 8 21 19 5) et ses permutations circulaires :

(3 37 5 3 21 6 13 8 21 19 5 3)

(37 5 3 21 6 13 8 21 19 5 3 3)

(3 21 6 13 8 21 19 5 3 3 37 5)

(21 6 13 8 21 19 5 3 3 37 5 3)

(6 13 8 21 19 5 3 3 37 5 3 21)

(13 8 21 19 5 3 3 37 5 3 21 6)

(21 19 5 3 3 37 5 3 21 6 13 8)

(19 5 3 3 37 5 3 21 6 13 8 21)

(3 6 24 7 8 27 6 7 8 9 31 8) et ses permutations circulaires :

(6 24 7 8 27 6 7 8 9 31 8 3)

(24 7 8 27 6 7 8 9 31 8 3 6)

(7 8 27 6 7 8 9 31 8 3 6 24)

(27 6 7 8 9 31 8 3 6 24 7 8)

(6 7 8 9 31 8 3 6 24 7 8 27)

(7 8 9 31 8 3 6 24 7 8 27 6)

(9 31 8 3 6 24 7 8 27 6 7 8)

(31 8 3 6 24 7 8 27 6 7 8 9)

(3 9 12 19 8 21 12 7 5 3 40 5) et ses permutations circulaires :

(9 12 19 8 21 12 7 5 3 40 5 3)

(12 19 8 21 12 7 5 3 40 5 3 9)

(19 8 21 12 7 5 3 40 5 3 9 12)

(21 12 7 5 3 40 5 3 9 12 19 8)

(12 7 5 3 40 5 3 9 12 19 8 21)

(7 5 3 40 5 3 9 12 19 8 21 12)

(3 40 5 3 9 12 19 8 21 12 7 5)

(40 5 3 9 12 19 8 21 12 7 5 3)

La solution retenue par le compositeur pour le *Canon 1* est la quatrième, soit :

R = (3 6 24 7 8 27 6 7 8 9 31 8)

Nous pouvons remarquer que ce n'est pas la meilleure. Les raisons d'un tel choix, nous précise Georges Bloch, sont, pour la plus grande partie, subjectives :

> « *afin d'avoir une clarté rythmique, nous voulions éviter un scotch snap (une valeur très courte suivie par une valeur longue, comme par exemple 1 8) dans les attaques. En*

---

exemple de « composition » dans le sens de la théorie modale (plus précisément de composition entre la structure intervallique *R* et la classe de hauteur 0).

outre, la troisième note, longue, accentuée et clairement située dans le temps fort, contribue à rendre le début plus intelligible. De plus, les valeurs candidates ont été analysées une deuxième fois pour ne pas introduire un accent toutes 12 unités rythmiques, ceci afin d'éviter une impression binaire »[283].

Voyons maintenant comment l'étude de l'organisation métrique permet d'aborder le problème de la réduction du nombre de voix d'un canon.

3.4.2 Réduction d'un canon rythmique de pavage à une collection de sous-canons auto-similaires

Grâce à la propriété de pavage, tout canon rythmique RCCM se réduit finalement à un train isochrone de pulsations, c'est-à-dire à une structure monophonique. Cependant, l'histoire de la musique occidentale offre de nombreux exemples d'œuvres contrapontiques écrites pour des instruments monophoniques. La solution classique est de créer des voix « composées », c'est-à-dire de transformer deux lignes (contrapuntiques) dans une ligne en jouant les notes dans l'ordre d'apparition et en les abandonnant quand une autre note est jouée.. Cette pratique instrumentale est souvent utilisée dans la musique baroque, par exemple.

Cette technique s'applique de façon naturelle aux canons rythmiques RCCM. Prenons par exemple la clarinette, instrument qui, dans le *Projet Beyeler*, marque le temps des visites en lançant un « appel » général toutes les cinq minutes. Le premier « appel », reproduit dans la figure suivante, introduit une partie du pattern rythmique de base du canon[284] :

[283] Communication personnelle du compositeur.

[284] Nous nous concentrons exclusivement sur l'aspect rythmique. Le travail mélodique et harmonique du compositeur sur ces types de canons utilise une approche qui ne relève pas, à proprement parler, des méthodes algébriques. Il est basé sur une technique de programmation appelée « programmation par contraintes » [*constraints programming*] et sur une théorie des *textures harmoniques* élaborée à partir de certains concepts du compositeur mexicain Julio Estrada. Néanmoins, la théorie des textures harmoniques d'Estrada se prête très naturellement à être formalisée à l'aide de l'approche algébrique. Cette théorie établie une relation d'équivalence formelle entre toutes les permutations d'une même structure intervallique réduite à l'octave. Nous avons discuté les différentes stratégies algébriques pour établir un catalogue d'accords selon une relation d'équivalence dans l'*Interludium* precedent, consacré à l'implémentation des méthodes algébriques en *OpenMusic*. Une analyse détaillée de la théorie des textures harmoniques par Julio Estrada se trouve dans sa thèse de doctorat intitulée *Théorie de la composition : discontinuum-continuum* [ESTRADA 1994]. Les aspects algébriques de l'approche théorique du compositeur mexicain sont développés dans l'ouvrage écrit en collaboration avec le mathématicien Jorge Gil et intitulé *Música y Teoría de Grupos finitos* [GIL et ESTRADA 1984].

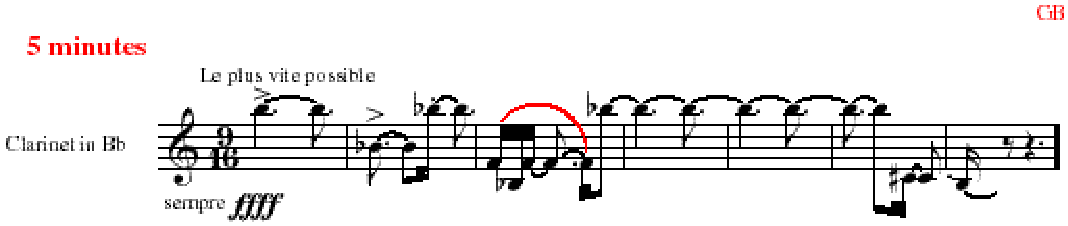


Figure 130 : Une partie du pattern rythmique de base du *Canon 2*

Le pattern rythmique complet est donné dans le deuxième appel de la clarinette :

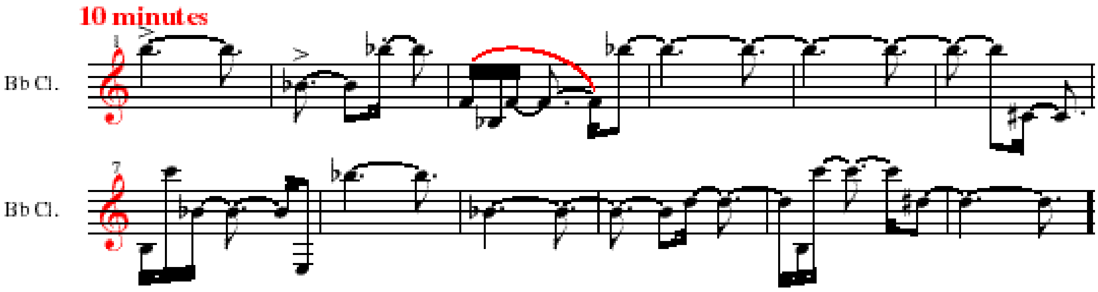


Figure 131 : Deuxième appel de la clarinette, avec le pattern rythmique complet

On voit donc que la période est 108 (nombre de doubles-croches), et que le schéma rythmique *R* est le suivant :

R = (9 5 4 1 1 5 25 4 1 1 5 2 9 14 5 1 5 11).

La durée des appels reste ensuite constante, égale à la durée de la période (soit 12 mesures comme dans l'exemple précédent). À partir du troisième appel (« 15 minutes »), et à l'occurrence de tout appel impair (cinquième, septième, etc.), une voix est ajoutée et traitée selon le principe précédent des voix composées. Comme la durée de chaque appel est la période (108 double-croches, c'est-à-dire douze mesures de 9/16), pour obtenir une texture homogène, il ne suffit pas de faire entrer les voix. Il faut les présenter dans ce que le compositeur appelle le « régime permanent », c'est-à-dire sur la durée d'une période entière, comme cela se produit une fois que la voix du canon est entrée (et répétée). Le pattern rythmique se replie alors sur le début du cycle. C'est ce qui se produit dans l'« Appel 20 minutes », où la deuxième voix, qui entre à la mesure 10, se replie effectivement sur le début (la huitième note de la voix 2 est le *la* grave de la troisième mesure).

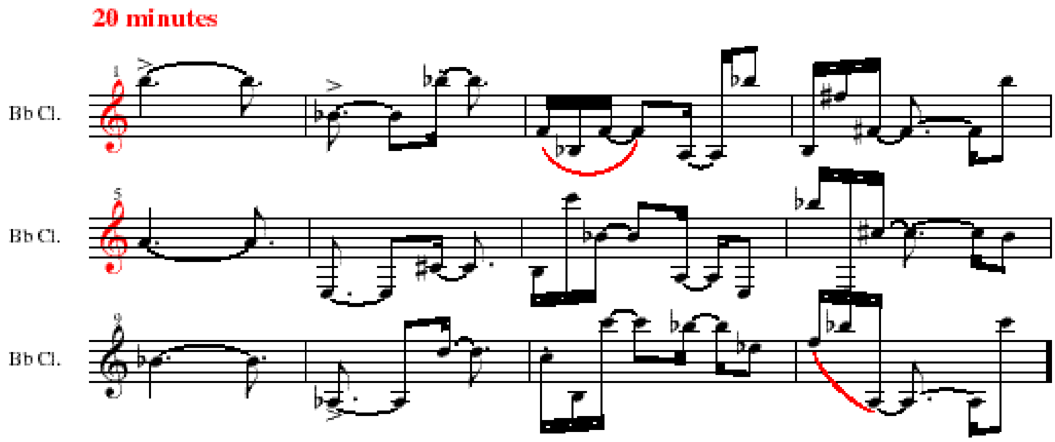


Figure 132 : « Appel 20 minutes »

Comme nous l'avons déjà mentionné, la technique de réduction du nombre des voix affecte les caractéristiques structurelles d'un canon RCCM, en particulier en ce qui concerne la propriété de *maximalité* de sa catégorie[285]. La figure précédente montre assez clairement, par la simple disposition graphique des systèmes, qu'en composant deux voix, le rythme de base a été transformé en une succession de trois patterns identiques. Autrement dit, le pattern de base *R*, ayant une période de 108 pulsations, est maintenant réduit à une juxtaposition de trois patterns rythmiques de longueur 36.

Autrement dit, le rythme *R* a été transformé en un mode à transposition limitée, ce qui est en contradiction avec la définition même de canon rythmique RCCM. De plus, le processus de réduction des voix crée une ambiguïté entre une forme musicale censée être celle d'un canon à deux voix et qui est maintenant perçue plutôt comme un canon à trois voix, précisément à cause de la présence de cette triple périodicité. Au fur et à mesure que les autres voix sont ajoutées et qu'on se rapproche d'une structure monophonique, le caractère canonique de la forme musicale devient de moins en moins évident. La figure suivante montre les appels de la clarinette à la 45e et à la 50e minute.

[285] Nous rappelons que la propriété de « catégorie maximale » exprime le fait que les deux solutions R et S de la factorisation d'un groupe cyclique d'ordre *n* ont une période égal à *n*. Autrement dit, R et S ne sont pas de modes à transposition limitée en tant qu'accords dans un système tempéré à *n* degrés.

Figure 133 : Deux appels de la clarinette

Cinq voix du canon rythmique initial se trouvent ici compactées dans une structure monophonique proche d'une pulsation régulière. Le simple ajout d'une nouvelle voix, la sixième et dernière du canon initial, complèterait le canon rythmique en le rendant équivalent, d'un point de vue perceptif, à un train de pulsations régulières.

À ce niveau de complexité, la perception de la nature canonique de cette forme musicale est évidemment secondaire par rapport au caractère géométrique du pavage progressif de l'axe temporel. On a donc une figure, le motif du canon, qui se transforme en ligne et cette ambiguïté entre ligne et figure est une parfaite illustration du propos de l'exposition.

Cet exemple de l'appel de clarinette montre l'existence de deux problèmes : d'une part celui d'une exposition d'un canon à *n* voix par un nombre d'instruments inférieur à *n*, et d'autre part le fait que cette réduction canonique reste justement perçue comme telle. Ce sont ces deux questions qui poussent le compositeur vers un concept nouveau, celui de « sous-canon ». Il s'agit d'une technique permettant de « compacter » les voix de telle façon qu'un canon de douze voix, par exemple, puisse être interprété par quatre instruments, chaque instrument réalisant une voix, elle même un canon, mais cette fois à trois voix.

Un tel canon obtenu à partir d'un canon RCCM à travers un processus de réduction et de compactage des voix s'appelle un « sous-canon »[286]. Nous remarquerons que ce procédé de compactage porte uniquement sur les structures métriques *S* (points d'attaques des voix) et que les solutions sont valables pour toutes les valeurs de *R*.

Le processus de compactage des voix d'un canon, conduit d'une façon aveugle, ne permet en général pas d'obtenir des sous-canons ayant la même structure. Un simple exemple montre les difficultés d'un tel processus. Prenons le cas d'un canon RCCM à 12 voix ayant pour période 144. Supposons que les douze voix entrent selon les intervalles donnés par la structure rythmique suivante, notée comme toujours en italique :

S = (16 2 14 2 2 14 2 2 14 2 16 58)

Cette structure correspond aux points d'attaques suivants :

S = (0 16 18 32 34 36 50 52 54 68 70 86 [144])

Il est très facile de réduire ce canon en un canon de 4 voix en regroupant simplement les voix par trois, en faisant par exemple :

V_1 : (0, 0+16, 0+16+2)

V_2 : (32, 32+2, 32+2+2)

V_3 : (50, 50+2, 50+2+2)

V_4 : (68, 68+2, 68+2+16)

Chaque voix devient ainsi une *métavoix,* c'est-à-dire un sous-canon de trois voix. Cependant, comme on peut le vérifier aisément, la structure intervallique des quatre *métavoix* n'est pas la même. Seules les *métavoix* V_2 et V_3 sont semblables. Donc, abstraction faite de la forme primitive, le canon composé des quatre voix V_1, V_2, V_3, V_4 n'en est pas un, puisque les voix sont rythmiquement différentes. Il s'agit donc de trouver une technique permettant d'aboutir à des *métavoix* possédant les mêmes structures intervalliques. La métrique trouvée du fait de la problématique précédente (organisation métrique facilement discernable) va aider à trouver des solutions.

[286] Le compositeur utilise souvent le terme « métavoix » pour indiquer le caractère composé de chaque voix qui est, à son tour, un canon rythmique.

Considérons la classe rythmique suivante *S* = (18 10 16 10 10 16 2 16 10 10 16 10) correspondant à un canon RCCM de période 144, solution que le compositeur propose d'étudier, comme dans le cas précédent, dans une mesure à trois temps ternaires. Pour cela il faut d'abord transformer la structure intervallique en l'ensemble de ses attaques. On obtient ainsi l'ensemble ordonné S = (0 18 28 44 54 64 80 82 98 108 118 134). En réduisant les nombres précédents modulo 9, on peut avoir une idée plus précise du décalage des valeurs des entrées par rapport à la battue (*beat*) choisie.

On vérifie ainsi que 0, 18, 54 et 108 sont des valeurs fortes du mètre ternaire et que 28 [27+1], 64 [63+1], 82 [81+1] et 118 [117+1] sont en décalage d'une unité par rapport au mètre choisi. Également, 44 [45-1], 80, 98 et 134 anticipent d'une unité la battue du mètre ternaire. Une première stratégie consiste donc dans le fait de construire les *métavoix* à partir de ces trois groupes rythmiques. Plus précisément, on obtient ainsi trois *métavoix* M_1, M_2 et M_3, dont la structure intervallique sera notée respectivement M_1, M_2 et M_3 :

M_1=(0 18 54 108) M_1=*(18 36 54 36)*

M_2=(28 64 82 118) M_2=*(36 18 36 54)*

M_3=(44 80 98 134) M_3=*(36 18 36 54)*

Comme dans l'exemple précédent, les trois *métavoix* n'ont pas la même structure intervallique, ce qui ne permet pas d'avoir un canon rythmique au sens strict (c'est-à-dire une répétition égale de la même structure décalée dans le temps). Autrement dit, pour reprendre un commentaire du compositeur, « *nous ne pouvons pas parler d'un canon entre métavoix, car les patterns rythmiques composés sont différents* ». Cela dit, on constate quand même une grande similarité de structure intervallique entre les trois *métavoix,* et si M_2 et M_3 commençaient sur la deuxième note au lieu de la première, on aurait des structures similaires *(18 36 54 36).*

Comment établir des similarités dans une stratégie de réduction apparemment aussi limitative que le processus de réduction à la base des *métavoix* ? La solution suggérée par le compositeur utilise une propriété sur laquelle nous n'avons pas insisté jusqu'à maintenant : le caractère *cyclique* du modèle des canons RCCM. Les patterns rythmiques peuvent se répéter à l'infini, ce qui permet de déplacer l'entrée d'une ou plusieurs voix d'un multiple entier de la période de base du canon. Si l'on analyse sur deux périodes du canon les points d'attaque de la *métavoix* M_2 en commençant donc sur la deuxième attaque, on obtient les valeurs (64 82 118 144+28), dont la structure intervallique est bien *(18 36 54 36)*, celle de M_1. Notons que 18 est le résultat de la différence entre 82 et 64, 36 le résultat de la différence entre 118 et 82, 54 celui de la distance qui sépare 118 de la première attaque 28, mais dans la deuxième période du canon, donc transformé en 144+28. Nous avons donc trouvé les mêmes valeurs d'intervalles à l'intérieur de la première et de la deuxième *métavoix* et le processus s'applique également à la troisième *métavoix*, en prenant comme points d'attaques 80, 98, 134 et 44+144. L'exemple suivant montre la décomposition du canon rythmique du départ en trois *métavoix*, chaque *métavoix* étant un canon de 4 voix.

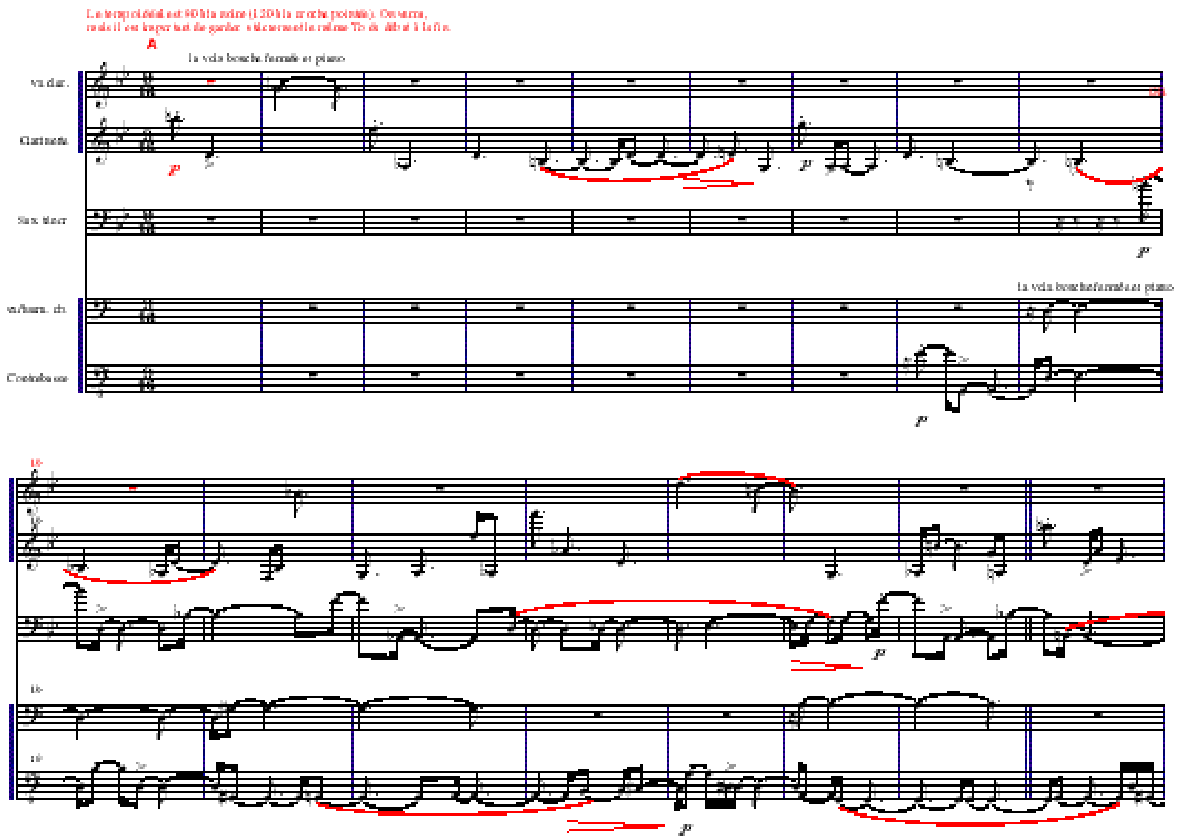


Figure 134 : Décomposition d'un canon en trois *métavoix*

On remarquera que la clarinette (première *métavoix*) joue le plus souvent sur le temps, tandis que la contrebasse (M_2) joue en général juste après le temps et le saxophone ténor juste avant. Ainsi, la similarité à l'intérieur de chaque *métavoix* a simplement été obtenue en retardant d'une période l'entrée de la troisième et de la douzième voix du canon originel.

En résumé, la technique de compactage de voix, si elle vise à respecter le caractère canonique de la structure finale, suggère de transformer légèrement la classe rythmique S en déplaçant l'entrée de certaines voix d'une ou plusieurs périodes. Dans le cas précédent, nous avons ainsi obtenu la transformation suivante entre S et la nouvelle classe rythmique S*, point de départ pour la construction des *métavoix* :

S=(0 18 28 44 54 64 80 82 98 108 118 134)

S*=(0 18 54 64 80 82 98 108 118 134 144+28 144+44).

En distinguant les trois *métavoix* de S* par une simple convention typographique, on peut représenter ainsi S*:

S* = (0 18 54 **64** *80* **82** *98* 108 **118** *134* **144+28** *144+44*)

avec trois styles différents exprimant l'appartenance de chaque attaque à une *métavoix.* On a ainsi, à l'arrivée, un canon à trois voix dont chaque voix est elle-même un canon à quatre voix. Cette construction, dont le caractère d'auto-similarité pourrait justifier l'expression de « canons fractals » pour la structure canonique résultante[287], est employé par le compositeur dans les trois canons du *Projet Beyeler* : *Canon 1*, *Canon2* et *Canon Final*. L'exemple précédent montrait le début du *Canon 1* dans l'utilisation que le compositeur en fait pour le *Canon Final.* Il s'agit donc d'un canon RCCM ayant pour période 144 et basé sur les valeurs de l'exemple précédent. Grâce au travail préalable sur les entrées des *métavoix*, nous pouvons constater que le caractère canonique a été préservé dans la réduction du canon rythmique de 12 voix au canon de trois *métavoix*, chacune étant un sous-canon de quatre voix. Il faut remarquer qu'ayant retardé l'entrée des voix appartenant aux *métavoix* M_2 et M_3, il faudra attendre plus d'une période pour que toutes les voix soient entrées et que le canon ait la propriété de *pavage*. Dans l'exemple précédent, la double barre en bas de la page signale la fin de la première période (mesure 16, car 16 fois 9 double croche égale 144) ; on constate que dans la mesure suivante, pourtant au début de la deuxième période, il manque la sixième double croche. L'exemple suivant montre le même *Canon 1* dans sa troisième période :

[287] Cette observation a été développée dans une communication du compositeur et de l'auteur de la présente étude dans la séance « Problèmes de pavage en musique » du Séminaire *MaMuX* de l'Ircam [BLOCH et ANDREATTA 2002]

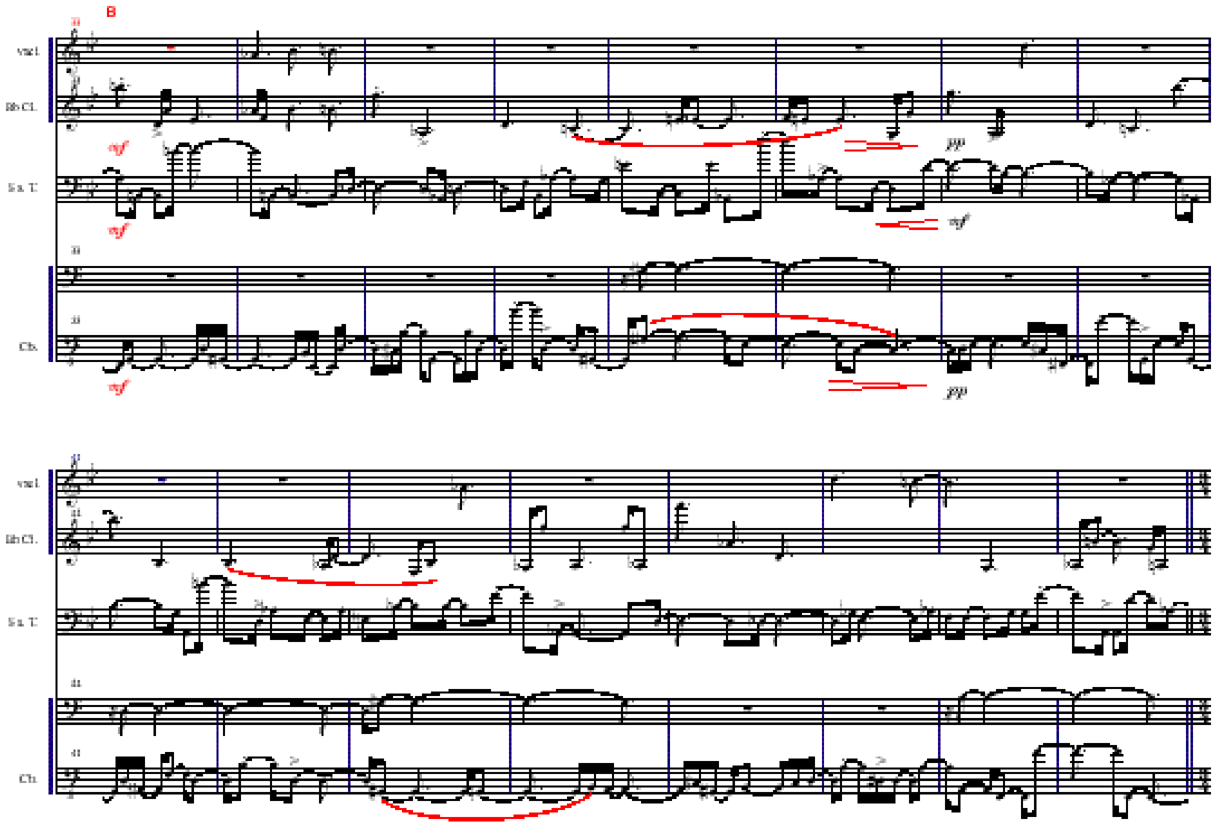


Figure 135 : Troisième période du *Canon 1*

Toutes les voix sont alors entrées et le pavage de l’axe temporel est accompli sans qu’il y ait de superposition entre les attaques des différentes voix. Il s’agit donc bien d’un canon *régulier complémentaire* mais la réduction du nombre des voix empêche de garder la propriété de catégorie maximale. En effet, une analyse détaillée des *métavoix* montre qu’elles possèdent des périodicités locales : elles répètent trois fois le même pattern rythmique. Par exemple, le pattern rythmique joué par la clarinette dans ses cinq premières mesures se répète inchangé du deuxième temps de la sixième mesure à la dixième mesure et du troisième temps de la onzième mesure jusqu’à la fin de l’extrait. Le changement de métrique - à la fin de l’extrait - annonce le passage du *Canon 1* au *Canon 2*.

Avant d’analyser la stratégie permettant de *moduler* d’un canon à un autre et de répondre ainsi à la troisième problématique soulevée par le compositeur sur le modèle théorique de Vuza, voyons comment le compactage de voix en *métavoix* est réalisé dans le *Canon 2*. Comme nous l’avons vu plus haut, la solution retenue par le compositeur dans le cas de la période 108 est la suivante :

R = (9 5 4 1 1 5 25 4 1 1 5 2 9 14 5 1 5 11)

S = (21 12 15 12 21 27)

Ses points d'attaques sont donnés par l'ensemble suivant :

S = (0 21 33 48 60 81)

qui est transformé dans l'ensemble S* suivant afin de pouvoir mettre en évidence les *métavoix* similaires :

S* = (0 48 60 **81 81+48 81+60**).

Les deux *métavoix* ayant ainsi la même structure intervallique sont donc les suivantes :

M_1 = (0 48 60)

M_2 = (81 129 141)

Toute décomposition en *métavoix* peut être utilisée de deux manières différentes. Dans un premier cas, on prend les valeurs telles quelles (par exemple on trouve deux *métavoix* de trois voix chacune, comme dans l'exemple précédent) ; cependant, on peut également créer une autre décomposition en *métavoix* en prenant les premières, deuxièmes, …, n-ièmes voix de chaque *métavoix*. Dans l'exemple précédent, cela revient à prendre :

M_1 = (0 81)

M_2 = (48 129)

M_3 = (60 141)

Les deux décompositions ont été utilisées dans le cas du *Projet Beyeler*, la première pour le *Canon2* proprement dit (joué au violon et berimbao) et la deuxième dans la partie du *Canon Final* qui reprend la structure du *Canon 2* (et interprétée par trois instruments).

3.4.3 Modulation (métrique) entre des canons rythmiques de pavage différents

Nous avons désormais tous les éléments pour comprendre comment le compositeur a résolu le problème de la transformation entre des canons ayant une période et un nombre de voix différents. La similarité entre sous-canons de période différente a été le point de départ pour introduire le concept de *modulation canonique*.

Comme toute modulation rythmique, la modulation canonique peut être de deux types : soit l'unité minimale reste inchangée, soit l'unité rythmique change mais la durée totale reste constante. C'est dans cette deuxième perspective que Georges Bloch a envisagé les modulations canoniques dans son projet. Voyons un exemple dans le cas d'une modulation entre la structure du *Canon 1* et celle du *Canon 2* à l'intérieur du *Canon Final*. Le tableau suivante résume les propriétés principales de ces deux canons :

	Nombre de voix	Période	Début des trois métavoix
Canon1	12	144	0 64 80
Canon2	6	108	0 48 60

Appelons X_1=(0 64 80) et X_2=(0 48 60) les ensembles contenant respectivement le début des trois *métavoix* du *Canon 1* et du *Canon 2*. Constatons que les périodes des deux canons, ainsi que les valeurs des ensembles X_1 et X_2, sont dans le même rapport de 4/3. Autrement dit :

$144 = 108 \times (4/3)$

$64 = 48 \times (4/3)$

$80 = 60 \times (4/3)$

$0 = 0 \times (4/3)$

Il est donc possible de garder la même longueur pour les deux canons, tout en faisant correspondre exactement les entrées des *métavoix* ; à cet effet, il suffit que les unités minimales des *Canon1* et *Canon2* soient dans le rapport de 3/4. En prenant la double-croche comme unité du *Canon1* (dans un mètre de 9/16) et le triolet de croche comme unité minimale du *Canon2*, ce rapport est respecté. Autrement dit, la durée de 144 doubles-croches est égale à celle de 108 triolets de croche, ce qui s'exprime par l'équation suivante :

$144 \times 1/16 = 108 \times 1/12.$

La figure suivante montre le processus de modulation canonique entre le *Canon1* et le *Canon2* tel qu'il a été utilisé dans le *Canon Final*.

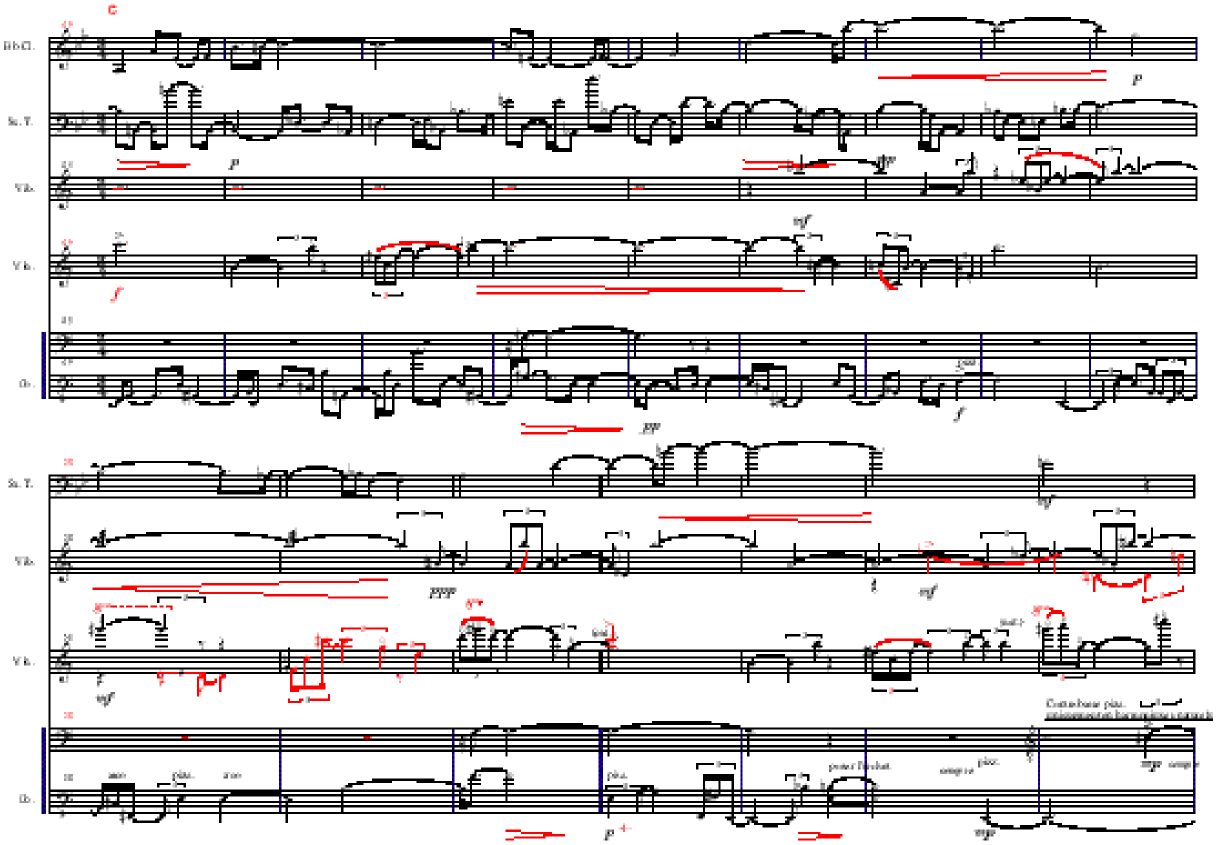


Figure 136 : Processus de modulation entre canons

Le *Canon1*, ayant pour période 144, déploie une période de 16 mesures à 9/16 (l'unité étant la double-croche). En gardant la même unité, mais en interprétant le pattern rythmique dans un mètre de 3/4, les 16 mesures se réduisent à 12, ce qui est exactement le nombre de mesures de la période du *Canon2*. Cependant, puisque le *Canon2* n'a que 108 notes à l'intérieur de sa période, l'unité devient le triolet de croche et le tempo est légèrement plus lent. À la fin du *Canon final*, la structure de *Canon 2* cède la place à celle d'un canon RCCM de période 216 par un procédé semblable de modulation. Le tempo est donc deux fois plus rapide et les points d'attaques deviennent tellement rapprochés qu'on n'a plus l'impression d'un rythme isochrone mais d'une texture dense à évolution lente.

3.4.4 Quelques éléments de conclusion sur une démarche théorique particulière en composition musicale

La démarche compositionnelle de George Bloch vis-à-vis du modèle algébrique des canons rythmiques est emblématique du rapport entre théorie de la musique et composition. Le modèle offre un catalogue des solutions possibles pour la construction de toutes formes musicales canoniques ayant des propriétés formelles apparemment très contraignantes, comme l’absence de régularités locales à l’intérieur des patterns rythmiques de base, ou bien l’irrégularité dans les entrées de voix, ce qui le distingue des modèles traditionnels de canons musicaux.

Cependant, à partir d’une étude du catalogue, le compositeur peut envisager des stratégies pour récréer tout d’abord une organisation métrique reconnaissable à l’intérieur d’une structure musicale dans laquelle il n’y a qu’un train de pulsations régulières. Une telle exploration permet d’envisager des solutions pour un autre problème posé par le modèle formel, celui des nombres élevés de voix. La nécessité de devoir respecter à la fois la propriété géométrique du pavage de l’axe temporel et les caractéristiques canoniques d’une telle forme musicale pousse le compositeur à chercher des stratégies pour réduire le nombre des voix sans renoncer à la puissance du modèle formel. C’est ainsi que la technique de construction des *métavoix* trouve une justification à la fois théorique et compositionnelle, tout en donnant la clef pour définir un concept nouveau dans la théorie des canons de pavage : celui de modulation canonique.

La démarche compositionnelle de George Bloch met également en évidence une différence fondamentale entre la formalisation théorique et le travail de composition. Aucune des trois problématiques soulevées par le compositeur n’est une conséquence directe du modèle formel. La théorie algébrique des canons RCCM offre d’abord un catalogue des solutions qui sert essentiellement pour stimuler l’imaginaire du compositeur. À partir du catalogue, le travail compositionnel consiste à essayer de dégager des stratégies pour adapter le modèle formel, parfois très contraignant, à une exigence précise, par exemple la limitation du nombre d’instrumentistes par rapport aux résultats prévus par le modèle.

C’est ainsi que le travail de composition s’éloigne de celui de l’ *ingénieu*r et s’approche de l’attitude du *bricoleur*, pour reprendre une célèbre expression de Lévy-Strauss que nous avons déjà citée dans le cas du travail théorique et compositionnel de Iannis Xenakis[288]. Cependant, l’attitude du bricoleur face à un modèle formel peut garder, comme dans le cas de la démarche de Georges Bloch, une orientation théorique très claire, conséquence directe du fait d’avoir essayé de préserver les propriétés structurales du modèle. Par exemple, le problème des réductions du nombre des voix d’un CRCM est traité dans une perspective visant à garder les deux propriétés majeures de la théorie : le caractère canonique de la forme musicale et la

[288] Pour une discussion plus philosophique sur cette problématique et indépendamment de toute interprétation musicale, voir aussi l’étude de Peter Caws visant à redéfinir de la place du structuralisme en sciences humaines [CAWS 1997].

propriété du pavage de l'axe du temps. On peut ainsi parler d'« exploration théorique » d'un modèle formel de la part d'un compositeur, bien que cette exploration ait été conduite sans la nécessité d'établir une nouvelle théorie permettant de déduire directement les propriétés souhaitées.

Le modèle algébrique décrit dans cette partie possède deux propriétés musicales évidentes : il décrit des canons et ces canons réalisent un pavage. On l'utilise au départ pour cela mais au fur et à mesure qu'un compositeur utilise le modèle, d'autres propriétés musicales apparaissent. Parfois, ces propriétés sont si profondes qu'il est possible d'envisager des transformations qui vont détruire les caractéristiques initiales du modèle, ce qui ne veut pas dire qu'il soit abandonné, au contraire. Dans son travail le plus récent, Georges Bloch s'est servi des Canons RCCM comme un moyen d'obtenir une trame musicale homogène : le matériau musical résultant fait parfois l'objet de telles transformations que la structure canonique et la structure de pavage disparaissent. L'exemple suivant le montre bien : il n'y a pas de pavage du temps, les instruments jouent un *ré#* à l'unisson sur la première mesure du deuxième système, mais… la texture est homogène, chaque instrument contribue à un impression de ligne musicale unique ; cela ressemble finalement à un canon de Vuza !

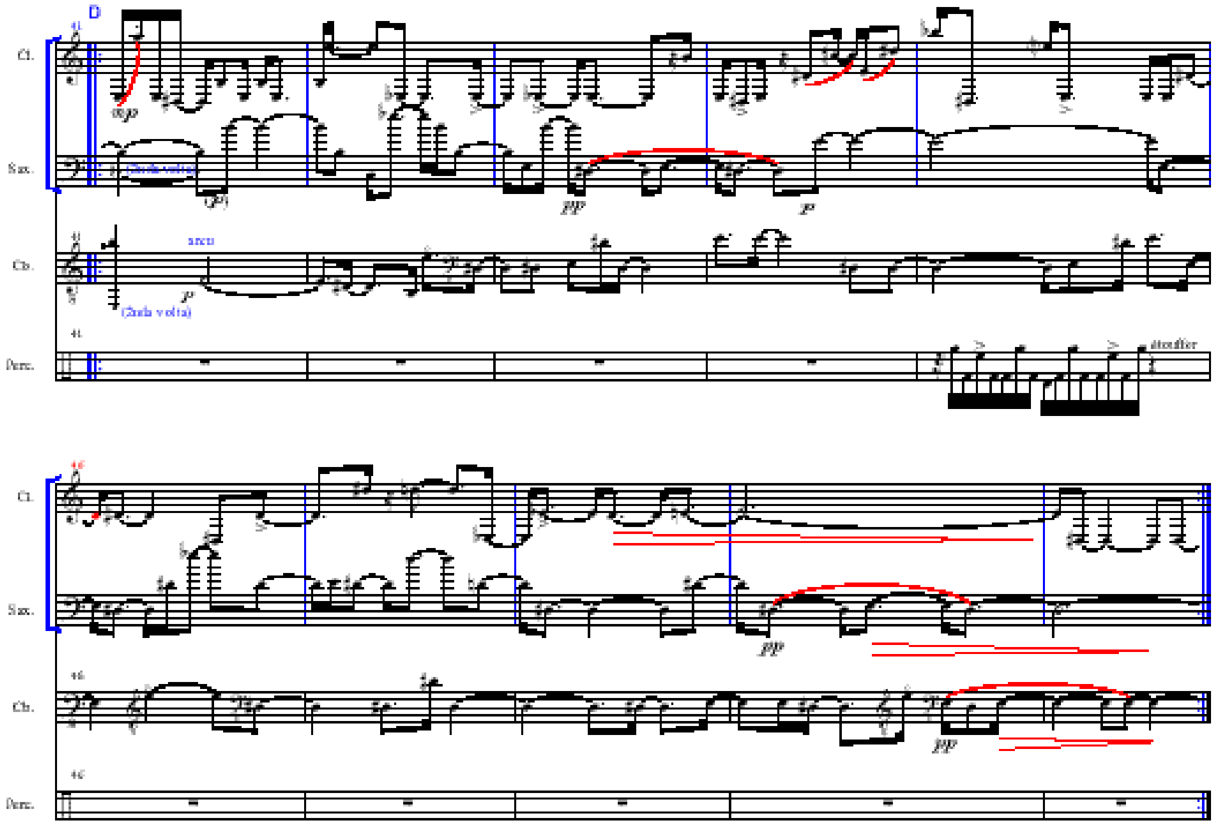


Figure 137: extrait de la « Visite des tours de la cathédrale de Reims ». Un canon RCCM transformé…

3.5 *Quelques éléments pour une généralisation du modèle des canons rythmiques de pavage*

Dans la première partie de cette étude, nous avons souligné comment le processus de formalisation peut parfois prendre des directions tout à fait nouvelles grâce à certaines questions théoriques posées par des compositeurs. C'est ainsi que des problèmes combinatoires posés par Milton Babbitt[289], des observations sur la portée de la théorie des cribles en analyse musicale ou encore des questions sur la nature algébrique du calcul des différences finies, deviennent le point de départ pour une *formalisation* des structures musicales qui peut aller très loin par rapport aux intuitions initiales. Un phénomène tout à fait semblable a concerné récemment la théorie des canons rythmiques.

Le point de départ fut encore une fois un certain nombre de questions posées par les compositeurs autour de l'aspect computationnel de certaines structures canoniques. Un des

[289] Voir, en particulier, l'article d'A. Bazelow et F. Brickle intitulé « A Partition Problem posed by Milton Babbitt » [BAZELOW et BRICKLE 1976].

problèmes qui ont le plus fait avancer la recherche théorique sur les canons rythmiques de pavage, a sans doute été le problème posé par le compositeur Tom Johnson sur le processus d'*augmentation* et ses rapports avec la notion de pavage [JOHNSON 2001]. Sans analyser le problème posé par Tom Johnson, il nous semble important de souligner que sa démarche a permis de transformer le concept même de canon rythmique. Dans l'approche traditionnelle, un canon rythmique est défini par « translation » temporelle d'une même structure rythmique. Si l'on considère des processus contrapontiques classiques, comme l'*augmentation* ou la *diminution*, la structure algébrique sous-jacente au modèle change. La structure de groupe cyclique est remplacée par une structure algébrique différente : celle de *groupe affine.*

Un des outils les plus intéressants qui ont été proposés pour manipuler ce type d'opération sur les structures rythmiques est la *représentation polynomiale* d'un canon rythmique. Plus précisément, cette représentation utilise des polynômes à coefficients 0 ou 1, qu'on cherche à *factoriser* avec des polynômes du même type. Un tel polynôme sera aussi appelé « polynôme 0-1 »[290].

À travers la notion de polynôme 0-1, il est possible de formaliser un canon rythmique par simple produit de polynômes. Un canon rythmique est un polynôme 0-1 qui est le produit de deux polynômes 0-1. Par exemple, à partir des deux polynômes $P(x)=1+x+x^4$ et $Q(x)=1+x^2$, respectivement de degrés 4 et 2, on peut définir par simple produit polynomial le polynôme suivant $T(x)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^6$ de degré 6.

Musicalement, le polynôme $P(x)=1+x+x^4$ correspond au *rythme de base* du canon. Les attaques du pattern rythmique sont données par les exposants du polynôme (dans ce cas 0, 1 et 4)[291]. Le deuxième polynôme donne les entrées des voix, toujours en termes de *time-points*. Dans le cas du polynôme $Q(x)=1+x^2$ on obtient donc le deux valeurs 0 et 2, ce qui exprime le fait qu'il s'agit d'un canon rythmique à deux voix, la deuxième entrant deux unités temporelles après la première. Le canon rythmique résultant est montré dans la figure suivante :

[290] Un exemple de polynôme 0-1 est le polynôme suivant : $P(x)=1+x+x^4$. Un cas particulier de polynôme 0-1 est le polynôme $P(x)=1+x+x^2+\ldots+x^n$, c'est-à-dire le polynôme ayant tous les coefficients égaux à 1. Le plus grand exposant du polynôme s'appelle le *degré* du polynôme.

[291] Notons que ces valeurs correspondent aux attaques dans le sens de *time-points* et non des structures intervalliques que nous avons discutées précédemment avec le modèle de canon rythmique par « composition ».

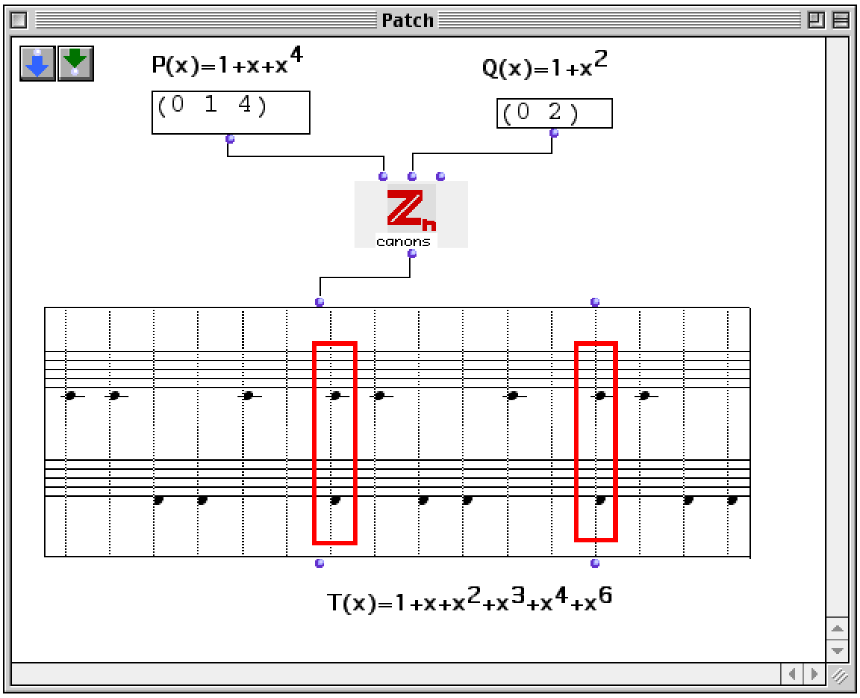


Figure 138 : Un canon rythmique généré par le produit des deux polynômes 0-1

Le canon rythmique précédant n'est évidemment pas un canon rythmique de pavage. En fait, les deux voix ont aussi bien des intersections que des trous sur l'axe temporel. Cependant, la représentation polynomiale offre un moyen rapide pour vérifier si un polynôme 0-1 définit un canon rythmique de pavage. En effet :

Un canon rythmique a la propriété de *pavage* si et seulement si le polynôme produit de deux polynôme 0-1 a tous ses coefficients égaux à 1.

La figure suivante montre un exemple de canon rythmique de pavage en forme polynomiale. Le canon est généré par les deux polynômes suivants de degrés 5 et 18 respectivement :

$P(x)=1+x+x^4+x^5$

$Q(x)=1+x^2+x^8+x^{10}+x^{16}+x^{18}$

Le produit de deux polynômes précédents est le polynôme $T(x)=1+x+x^2+\ldots+x^{23}$ de degré 23 et ayant tous les coefficients unitaires[292].

[292] Du fait que le degré du polynôme résultant $T(x)=1+x+x^2+\ldots+x^{23}$ est égal à 23, il suffit d'ajouter une unité (correspondant au polynôme de degré 0) pour déduire que la période du canon sera de 24.

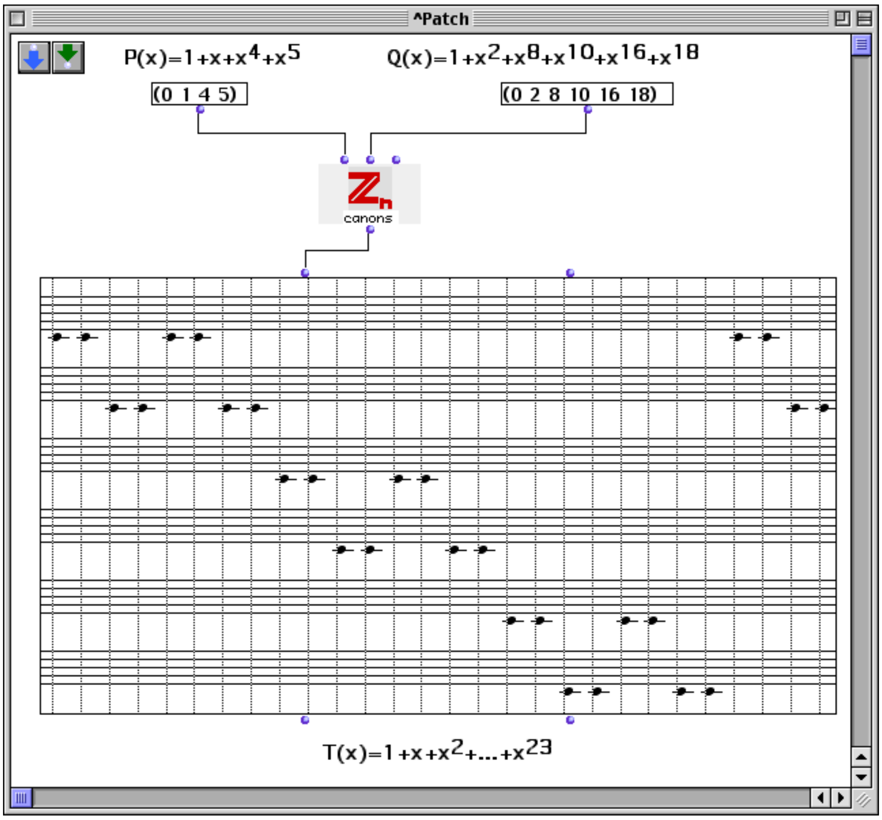


Figure 139 : Un canon rythmique de pavage généré par le produit de deux polynômes 0-1

La théorie des groupes de Hajós nous permet d'anticiper sur la « catégorie » d'un tel canon de période égale à 23. Le canon n'est pas de *catégorie maximale*, car sa période est inférieure à 72. En effet, l'entré des voix du canon (réglée par le polynôme $Q(x)=1+x^2+x^8+x^{10}+x^{16}+x^{18}$) « dessine » un mode à transposition limitée, comme on peut le voir avec la représentation circulaire suivante :

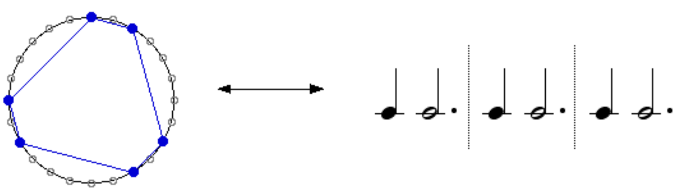


Figure 140 : Mode à transposition limitée correspondant au polynôme *Q(x)*

Nous allons maintenant rentrer un peu plus dans la nature à la fois algébrique et géométrique du problème de la construction des canons rythmique de pavage. Pour cela, il faudra remonter au XIX^e siècle et suivre la « métamorphose musicale » d'une célèbre conjecture du mathématicien Hermann Minkowski sur le pavage de l'espace. C'est donc a ce problème « mathémusical » qu'on va consacrer notre dernier interlude.

3.6 Interludium : la conjecture d'Hermann Minkowski comme problème « mathémusical »[293]

Cette partie est consacrée à une présentation, à la fois historique et mathématique, des ramifications algébriques et musicales d'une ancienne conjecture de la fin du XIX^e siècle. La conjecture a été proposée par Hermann Minkowski, l'inventeur de la vision de la théorie des nombres au sens moderne, dans *Geometrie der Zahlen* [MINKOWSKI 1896] sous la forme d'un problème d'approximation simultanée de plusieurs nombres réels par des nombres rationnels. La conjecture généralise un résultat connu en théorie des nombres et concernant l'approximation d'un nombre réel a par un nombre rationnel $q=x_1/x_2$ tel que :

$|a-q| < 1/tx_2$ avec $0 < x_2 < t$ et le nombre réel $t > 1$

Dans le cas général, la conjecture de Minkowski concerne l'approximation des nombres réels $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ avec des entiers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que, si l'on note q_i le nombre rationnel générique x_i/x_n et t un nombre réel strictement positif tel que $0< x_n< t^{n-1}$, la condition suivante soit vérifiée pour tout indice i :

$$|a_i-q_i| < 1/tx_n$$

Minkowski a exprimé la conjecture sous une forme géométrique une dizaine d'années plus tard dans l'ouvrage *Diophantische Approximationen* [MINKOWSKI 1907]. Dans cette deuxième forme, la conjecture s'exprime de la façon suivante :

> *Dans un pavage simple [simple lattice tiling][294] d'un espace à n dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension n-1.*

Dans le cas particulier de l'espace à trois dimensions, la conjecture exprime le fait que dans un pavage avec des cubes unités, on trouvera toujours un couple de cubes ayant en commun une de leurs faces. La figure suivante montre ce cas, que Minkowski pensait pouvoir généraliser facilement à toute dimension n.

---

[293] Cette partie développe le contenu d'une conférence intitulée « The Minkowski/Hajós Problem and Rhythmic Musical Canons » que nous avons donnée le 29 mai 2000 au *Centro de Estruturas Lineares e Combinatórias* sur invitation de José Francisco Rodrigues, directeur du *Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais* (CMAF) de l'Université de Lisbone.

[294] Par un pavage simple d'un espace à n dimensions, nous entendons une collection de cubes congruents qui recouvrent l'espace de telle façon que ces cubes n'ont pas d'intersection (autre que la frontière) et que leurs centres forment un treillis. Ce treillis est appelé « simple » pour le distinguer du cas (multiple) dans lequel les cubes ont plusieurs points d'intersections (autres que les frontières).

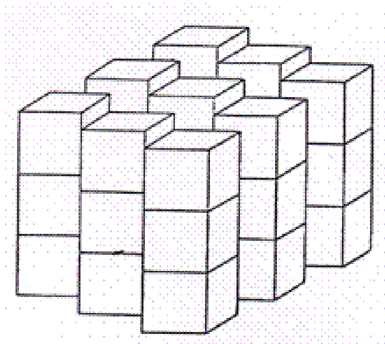


Figure 141 : Pavage de l'espace tridimensionnel par des cubes unité (figure tirée de l'ouvrage *Diophantische Approximationen*, p. 74)

En faisant référence au dernier problème de Fermat, nous avons proposé d'appeler cette conjecture le « dernier problème de Minkowski » [ANDREATTA 1997], car il aura fallu attendre plus de cinquante ans pour la solution du problème dans sa forme générale. La solution a été trouvée grâce à l'algèbre par le mathématicien hongrois G. Hajós qui a transformé la conjecture en un problème de factorisation de groupes. Selon certains historiens des mathématiques, la solution algébrique de Hajós est « *le résultat le plus extraordinaire* [spectacular] *en théorie de la factorisation* » [STEIN 1974, 446]. Dans la solution de Hajós, la conjecture géométrique est transformée en un problème de factorisation de groupes, un résultat qui est aussi connu comme le « *deuxième théorème général pour les groupes abéliens finis* » [REDEI 1967]. Le théorème peut s'énoncer de la façon suivante :

Soit G un groupe abélien fini et soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n éléments de G. Si l'on suppose que le groupe admet comme factorisation la somme directe des sous-ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ suivants :

$$A_1 = \{1, a_1, \ldots, a_1^{m_1-1}\}, A_2 = \{1, a_2, \ldots, a_2^{m_2-1}\}, \ldots, A_n = \{1, a_n, \ldots, a_n^{m_n-1}\}$$

avec $m_i > 0$ pour tout i=1, 2, …, n, alors un des facteurs A_i est un groupe[295].

Notons que le théorème de Hajós peut s'énoncer de façon équivalente en utilisant la notion d'ensemble *périodique*, que nous avons introduite pour formaliser en termes algébriques les modes à transposition limitée de Messiaen. Rappelons qu'un sous-ensemble A d'un groupe G

[295] Comme Rédei l'a montré, ce résultat est en rapport de dualité logique avec le théorème de Frobenius-Stickenberger qui affirme la possibilité de factoriser tout groupe abélien fini comme la somme directe de ses sous-groupes cycliques [REDEI 1965]. Une discussion de la technique utilisée par Hajós dans sa démonstration, ainsi que l'histoire détaillée de la Conjecture de Minkowski, est contenue dans *Algebra and Tiling* [STEIN et SZABO 1994]. Une nouvelle approche axiomatique au problème de Minkowski/Hajós a été récemment proposée par K. Corrádi et S. Szabó [CORRADI et SZABO 1997].

est périodique s'il existe un élément g dans G, autre que l'identité, tel que $g+A=A$, la loi de composition interne du groupe étant, dans ce cas, l'addition. La forme suivante énonce la généralisation du théorème de Hajós proposée par Redei, à l'aide de la notion de périodicité :

> Soit G un groupe abélien fini et soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n sous-ensembles de G, chacun contenant l'élément neutre du groupe et chacun ayant un nombre premier d'éléments et supposons que le groupe admette comme factorisation la somme directe des sous-ensembles A_i, i=1, …, n. Alors, un des sous-ensembles A_i est périodique.

Ce résultat a ouvert la voie à l'étude des propriétés d'un groupe par rapport au problème de la périodicité des sous-ensembles réalisant sa factorisation. Un groupe G est dit un « groupe de Hajós » (ou groupe ayant la propriété de Hajós) si pour toute factorisation du groupe en somme directe des sous-ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$, au moins un des facteurs est périodique. De façon duale, on appellera un groupe G « non- Hajós » si l'on peut trouver comme factorisation du groupe une somme directe de ses sous-ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ telle qu'aucun de ces ensembles ne soit périodique.

Nous avons concentré l'étude sur les groupes ayant la propriété de Hajós, aussi bien dans le cas d'un groupe fini que dans le cas, non complètement résolu à ce jour, des groupes infinis[296]. Ajoutons que le fait pour un groupe d'avoir ou non la propriété d'Hajós est strictement dépendant du nombre des sous-ensembles qui en composent la factorisation. Nous concentrerons la discussion sur le cas d'un groupe qui est factorisé en deux sous-ensembles A_1 et A_2 car c'est le cas qui permet d'analyser la conjecture de Minkowski comme un problème « mathémusical »[297]. La liste complète des groupes abélien finis ayant la propriété de Hajós a été donnée par Sands qui a ainsi résumé le travail d'un bon nombre de mathématiciens, après Hajós. Si l'on note de façon compacte $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ la somme directe des groupes cycliques d'ordre $a_1, a_2, \ldots, a_n$, avec $\alpha>1$ un entier, on obtient une liste exhaustive de tous les groupes

[296] Le problème d'établir si un groupe infini possède ou non la propriété de Hajós a été abordé de façon systématique par A. D. Sands qui a établi une liste de groupes de Hajós dans le cas d'une factorisation en somme directe de deux sous-ensembles et sous l'hypothèse que l'un des facteurs possède une cardinalité finie. Hajós avait déjà montré [HAJÓS 1950] que sous une telle hypothèse, le groupe des nombres entiers relatifs **Z** possède la propriété de Hajós. Sands montre que ce résultat est valable également pour le groupe des nombres rationnels **Q** ainsi que pour les deux groupes **Z**+**Z/pZ** et **Q**+**Z/pZ**, avec p un nombre premier [SANDS 1964]. Le problème est toujours ouvert dans le cas où l'hypothèse sur la cardinalité finie de l'un des facteurs est levée.

[297] Dans des travaux précédents, nous avions mentionné comment une factorisation d'un groupe de Hajós ou de non- Hajós en k sous-ensembles pouvait trouver une application musicale à travers une formalisation de la structure de canon rythmique de pavage comme une « composition globale » (au sens de la théorie de Guerino

ayant la propriété de Hajós[298]. Nous proposons la liste d'un point de vue chronologique, en restituant à chaque solution sa place dans l'histoire des mathématiques :

Rédei 1947	(p, p)
Hajós 1950	$\mathbf{Z/nZ}$ avec n= p^{α}
De Brujin 1953	(p^{α}, q)
	(p, q, r)
Sands 1957	(p^2, q^2)
	(p^2, q, r)
	(p, q, r, s)
Sands 1959	$(2^2, 2^2)$
	$(3^2, 3)$
	$(2^n, 2)$
Sands 1962	$(p, 3, 3)$
	$(p, 2^2, 2)$
	$(p, 2, 2, 2, 2)$
	$(p^2, 2, 2, 2)$
	$(p^3, 2, 2)$
	$(p, q, 2, 2)$

Notons, en particulier, que la démonstration du fait que le groupe $G = \mathbf{Z_p} \times \mathbf{Z_p}$ est un groupe de Hajós précède, historiquement, la démonstration de la conjecture de Minkowski par Hajós, un résultat qui a ouvert la voie à l'étude systématique des factorisations d'un groupe (avec la propriété de périodicité de ses sous-ensembles). Remarquons aussi que, mise à part la première solution ($\mathbf{Z_p} \times \mathbf{Z_p}$), les six cas suivants correspondent à des groupes cycliques. Autrement dit, les groupes cycliques de Hajós constituent l'ensemble des groupes $\mathbf{Z/nZ}$ pour lesquels n est :

- Une puissance d'un nombre premier (n= p^{α})

Mazzola). Pour une présentation de cette problématique, voir notre travail de DEA *La théorie mathématique de la musique de Guerino Mazzola et les canons rythmiques* [ANDREATTA 1999].

[298] Rappelons que nous sommes toujours dans le cas d'une factorisation du groupe en somme directe de deux sous-ensembles. Les résultats ne se transposent pas directement à toute factorisation en somme directe d'un nombre de sous-ensembles strictement supérieur à 2. Par exemple, Sands montre que le groupe cyclique d'ordre $p^k q^2$, avec p et q nombres premiers distincts, n'est pas un groupe de Hajós pour toute factorisation en somme directe de k sous-ensembles, avec k>2. Pourtant, dans le cas de deux sous-ensembles (k=2), le groupe cyclique d'ordre $p^k q^2$ est un groupe de Hajós.

- Un produit d'une puissance d'un nombre premier par un autre nombre premier distinct (n = $p^{\alpha} q$)
- Le produit de trois nombres premiers distincts (n= $p\ q\ r$)
- Le produit des carrés de deux nombres premiers distincts (n= $p^2 q^2$)
- Le produit d'un carré d'un nombre premier par deux autres nombres premiers distincts (p^2, q, r)
- Le produit de quatre nombres premiers distincts (p, q, r, s)

Cette nouvelle liste coïncide avec la famille de groupes cycliques établie par Vuza dans la formalisation algébrique des canons rythmiques de pavage que nous avons discutée dans la partie précédente[299].

Nous pouvons donc quitter le domaine strictement mathématique pour mettre en évidence l'émergence de la structure de groupe de Hajós en musique, à partir de considérations musicales qui sont tout à fait indépendantes de la conjecture originale d'Hermann Minkowski. Cette analyse montre que le problème de la pertinence des structures de groupes de Hajós en musique s'inscrit, du point de vue de l'histoire de la théorie musicale, dans une discussion sur le rapport entre problèmes combinatoires et problèmes structuraux en musique. Nous allons reprendre les points principaux de cette problématique en essayant d'ouvrir une discussion sur le rapport entre composante combinatoire et composante structurelle dans la théorie des groupes de Hajós en ce qui concerne le problème « mathémusical » posé et résolu par Vuza.

Nous avons souligné à plusieurs reprises l'importance de la pensée de Milton Babbitt dans l'évolution de la théorie de la musique aux Etats-Unis. En particulier, un problème de *partition* posé par le compositeur américain, dont nous avons donné quelques éléments au début de cette troisième partie, offre l'occasion à A. R. Bazelow et F. Brickle de proposer une typologie des problèmes mathématiques en théorie de la musique. Cette typologie distingue deux catégories de problèmes, une première qui relève de l'aspect à la fois computationnel et combinatoire et une deuxième que les théoriciens qualifient de « structurel » [*structural*].

---

[299] Rappelons encore une fois qu'à la différence de la plupart des études sur le problème de Minkowski/ Hajós, la théorie de Vuza se concentre sur les groupes cycliques qui ne possèdent pas la propriété de Hajós, c'est-à-dire sur les groupes qui n'appartiennent pas à la liste précédente. En outre, pour tout groupe qui n'est pas d'Hajós, Vuza propose un algorithme permettant d'obtenir la liste exhaustive des factorisations (non-périodiques). Ce résultat n'a jamais été publié, à notre connaissance, dans aucune revue de mathématiques, ce qui exprime encore plus clairement l'intérêt à la fois mathématique et musical d'une démarche « mathémusicale ».

Typiquement, « un problème combinatoire demande […] l'établissement d'un algorithme qui sert à calculer le nombre d'objets d'un certain type qui possèdent une propriété particulière » [BAZELOW et BRICKLE 1976, 280]. Les deux théoriciens américains citent le problème de l'énumération et classification d'accords de k notes dans un tempérament donné, en soulignant que ce problème est « très proche de certains problèmes de classification concernant la théorie des groupes finis » [BAZELOW et BRICKLE 1976, 280]. Le problème du pavage [tesselation] dans le cas des groupes finis est cité comme un des problèmes qui sont potentiellement intéressants d'un point de vue musical. En particulier, Bazelow et Brickle citent le résultat de Hajós à propos de la conjecture de Minkowski, mais sans indiquer quel type d'application musicale un tel résultat pourrait avoir. Pour envisager une application musicale des théories mathématiques abordées, les deux théoriciens s'appuient sur une étude dédiée aux méthodes algébriques en musique signée par deux mathématiciens, Edwin Hewitt et G. D. Halsey.

Les auteurs affirment pouvoir établir une théorie pour « *tous les pavages* [tessellations] *dans tout groupe ayant un intérêt possible pour la composition musicale* » [HEWITT et HALSEY 1978, 200][300]. Ces groupes, selon les deux mathématiciens, sont l'ensemble des groupes cyclique **Z/nZ** d'ordre inférieur ou égale à 24. Pour cette raison, aucune référence n'est faite aux groupes cycliques n'ayant pas la propriété de Hajós, le plus petit desquels possède, comme on l'a vu, 72 éléments. Cependant, le point que nous voulons souligner n'est pas seulement celui d'une difficulté à établir la pertinence musicale d'un problème mathématique. Notre réflexion concerne plutôt la question de la dichotomie entre problèmes combinatoires et problèmes structuraux en théorie de la musique.

Selon Bazelow et Brickle, « *un problème structural concerne le contexte* [background] *abstrait ou catégorique, à partir duquel un problème combinatoire émerge* » [BAZELOW et BRICKLE 1976, 281]. On peut ainsi se poser la question du caractère combinatoire ou structural d'un problème comme celui de la construction des canons rythmiques de pavage. La formalisation algébrique de Vuza, en ce qui concerne en particulier la structure de « canon régulier complémentaire de catégorie maximale » (ou canon RCCM), met en évidence la double composante, combinatoire et structurale, d'une telle construction. Rappelons que tout canon RCCM relève de la factorisation d'un groupe cyclique n'ayant pas la propriété de

[300] Cette citation de Bazelow et Brickle de l'article « A Group-Theoretic Method in Musical Theory » est l'une des rares fois où l'étude de Hewitt et Halsey est citée par des théoriciens américains. Cet écrit théorique, qui occupe une place centrale dans l'histoire des méthodes algébriques en musique, n'a jamais été publié, à notre connaissance, dans la version originale.

Hajós en somme directe de deux sous-ensembles non-périodiques. Etablir une typologie de ces formes musicales passe nécessairement par l'élément computationnel, mais cela n'est pas lié exclusivement à une démarche de type combinatoire. On retrouve un problème que nous avons déjà abordé dans le premier *Interludium* consacré aux séries tous-intervalles. Un algorithme algébrique, comme on l'a vu en retraçant les fils de l'histoire de ce problème, permet d'avoir un catalogue exhaustif des solutions, mais le problème combinatoire d'établir une formule explicite pour le calcul du nombre des solutions d'un tel problème est resté pendant longtemps une question ouverte. Ainsi, une approche strictement combinatoire sur les canons rythmiques RCCM ne permet pas d'obtenir un catalogue complet des solutions.

Autrement dit, la démarche « structurale », au sens de l'algèbre, reste l'une des seules démarches assurant l'exhaustivité des solutions d'un tel problème « mathémusical ». De plus, la propriété géométrique de pavage permet d'établir un lien « structurel » entre le problème de la construction des canons rythmiques ayant une telle propriété formelle et le problème initial concernant le pavage de l'espace euclidien par des cubes unités. La dialectique entre caractère « combinatoire » et « structural » d'un problème théorique en musique semble être donc pleinement intégrée dans une approche de type algébrique. Cette observation constitu notre point de départ pour résumer les résultats principaux de ce travail qui vient de s'achever tout en essayant d'ouvrir une réflexion plus philosophique sur les méthodes algébriques en musique et musicologie.

Conclusions et perspectives

Après ce triple parcours sur les méthodes algébriques en musique et musicologie du XX^{e} siècle (théorie, analyse et composition), nous pouvons revenir à la question que nous avions posée en ouverture de cette étude : peut-on parler de musique avec les outils de l'algèbre ? À cette question, nous avons essayé de répondre d'une part en analysant les rapports étroits entre l'émergence du concept de structure algébrique en musique et l'évolution de ce concept en mathématiques et d'autre part en engageant une discussion musicologique à partir de certaines idées des trois compositeurs/théoriciens qui ont posé les premiers le problème de la pertinence de l'approche algébrique en musique.

Dans le premier cas, l'approche algébrique en musique a favorisé la constitution d'un champ d'étude, la théorie musicale, ayant un caractère nouveau par rapport à toutes les propositions théoriques du passé. En effet, la démarche algébrique affirme la primauté, dans la théorie de la musique, d'une pensée axiomatique et structurale, au sens des mathématiques modernes. Nous avons essayé de suivre les grandes étapes de la formalisation algébrique, depuis l'émergence du concept de groupe en musique jusqu'à l'utilisation d'outils catégoriels dans la représentation des structures musicales, en analysant l'indépendance de la formalisation algébrique par rapport à la pratique compositionnelle. La réflexion de Babbitt sur les principes de base du dodécaphonisme, la critique de Xenakis de certaines généralisations de cette approche théorique et la démarche modale d'Anatol Vieru se rejoignent précisément sur le constat du caractère universel des méthodes algébriques dans la formalisation des structures musicales.

La difficulté majeure à établir une distinction claire entre formalisation théorique et application compositionnelle relève du fait que, dans le cas de trois compositeurs/théoriciens, les deux démarches partagent un même caractère computationnel. Le calcul est une partie intégrante de la formalisation théorique, ce qui explique également la possibilité de modéliser en termes informatiques les concepts de base du dodécaphonisme chez Babbitt, de la théorie des cribles chez Xenakis et de la théorie modale chez Vieru.

Nous avons beaucoup insisté sur l'aspect computationnel d'une démarche théorique car cet aspect est à la base des applications analytiques des méthodes algébriques. Nous avons privilégié la présentation des concepts de base de la *Set Theory* américaine pour montrer comment le paradigme algébrique opère, et ce à différents niveaux, dans l'analyse musicale.

Notre interprétation de la *Set Theory* comme étant un cas particulier de l'*action* d'un groupe sur un ensemble offre une perspective structurale sur la théorie américaine qui n'est pas courante dans les ouvrages de référence sur cette approche théorique. Elle offre également un moyen de généraliser l'étude de l'organisation des hauteurs à des systèmes musicaux micro-intervalliques, un domaine qui est resté en marge de la *Set Theory* proprement dite. Dans le même temps, notre formalisation algébrique permet d'intégrer certains développements de la tradition américaine, et en particulier la théorie transformationnelle, à l'intérieur d'un cadre théorique plus général, comme l'approche catégorielle dont nous avons montré quelques aspects de base.

Nous voudrions maintenant revenir une dernière fois à la question posée au tout début de cette étude, à savoir la *possibilité* d'envisager un discours sur la musique et la musicologie du XX^e^ siècle à travers les outils de l'algèbre pour essayer d'introduire quelques éléments de réflexion philosophique sur la *portée* d'un tel discours. Nous croyons en effet que, par rapport à d'autres méthodologies qui privilégient également l'aspect computationnel dans la recherche théorique et analytique, l'approche algébrique en musicologie ouvre des questions philosophiques et épistémologiques qui dépassent largement le domaine musical. Nous avons insisté, par exemple, sur la dualité entre la notion d'« objet » et celle d'« opération », car elle accompagne l'évolution des méthodes algébriques en musique depuis la formalisation du système dodécaphonique d'Arnold Schoenberg par Babbitt jusqu'aux développements plus récents de la *Set Theory*, incluant, à différents niveaux d'abstractions, la démarche transformationnelle de David Lewin et la démarche catégorielle de Guerino Mazzola.

Cette dualité est à la base de l'idée même de « structure » au sens des mathématiques modernes. La possibilité de modéliser tout système tempéré à la fois comme collection d'objets (les notes de musique) et comme structure algébrique (les intervalles) offre un premier exemple musical de cette dualité que nous voudrions maintenant essayer de préciser dans sa portée philosophique. Nous avons en effet retrouvé, incarnée dans une problématique éminemment musicale, une des thèses fondamentales de l'épistémologue français Gilles-Gaston Granger qui considère la dualité de l'*objectal* et de l'*opératoire* comme un « concept » au sens philosophique.

Il est assez curieux d'observer que les débuts de la réflexion de Gilles-Gaston Granger sur la dualité opération/objet est contemporaine des premières propositions théoriques de Milton Babbitt sur la nature algébrique du dodécaphonisme. En effet, comme l'épistémologue français l'affirme dans ses « réflexions sur la pensée formelle », c'est la notion de *groupe* qui

« *donne un sens précis à l'idée de structure d'un ensemble [et] permet de déterminer les éléments efficaces des transformations en réduisant en quelque sorte à son schéma opératoire le domaine envisagé* » [GRANGER 1947/1994, 26]. D'où la conclusion que « *l'objet véritable de la science est le système des relations et non pas les termes supposés qu'il relie* » (p. 27), une thèse que nous retrouvons dans la formalisation algébrique du système dodécaphonique de Milton Babbitt [BABBITT 1946/1992]. La nature du concept philosophique est bien explicitée par un passage de l'ouvrage *Pour la connaissance philosophique* que nous allons reprendre pour essayer d'éclairer quelques aspects de la démarche algébrique en musique :

> « *Tout concept, quel qu'en soit le champ d'application, se présente nécessairement comme une certaine espèce de* ***représentation*** *d'un vécu dans* ***un système de symboles****. Mais pour qu'une représentation soit conceptuelle, il faut qu'elle offre à la pensée une* ***articulation opératoire*** » *[GRANGER 1988, 152].*

À la différence d'autres approches computationnelles en musique et musicologie, basées par exemple sur l'analyse du son musical en tant que phénomène physique, le concept de structure algébrique en musique met en évidence les caractéristiques d'une démarche symbolique. Le « système de symboles », dont nous avons décrit quelques aspects tout au long de ce travail, est la conséquence d'une certaine « représentation d'un vécu », représentation qui s'exprime par le biais de la formalisation et qui garantit à la pensée théorique une articulation opératoire.

La structure de groupe offre une première modalité d'articulation opératoire. Le changement de groupe de transformations par rapport au problème de la classification de structures musicales représente un exemple d'une telle articulation opératoire dont on est loin d'avoir compris la nature profonde. En effet, si c'est vrai, comme Granger le dit, que « *intégrer les résultats - symbolisés - d'une expérience nouvelle revient […] à créer un canevas nouveau, un groupe de transformations plus complexe et plus compréhensif* » [GRANGER 1947/1994, 27], la nature d'un tel changement de paradigme en théorie de la musique n'a pas encore été étudiée dans ses retombées philosophiques.

Cela constitue sans doute une étape qui pourrait prolonger notre travail dans le sens d'une remise en question du paradigme structuraliste en théorie, analyse et composition musicale. Le problème se pose de savoir si une démarche algébrique en musique, telle que nous l'avons présentée, relève exclusivement d'une telle position philosophique. En effet, on pourrait penser retrouver, avec la démarche algébrique que nous venons de discuter, certains aspects problématiques du structuralisme, que d'autres auteurs ont mis en évidence par rapport à l'application de modèles mathématiques en sciences humaines.

Cependant, le processus de formalisation algébrique de structures musicales, et en particulier la constitution d'une démarche transformationnelle en analyse musicale, semble suggérer d'autres ramifications philosophiques. Nous commençons à voir l'horizon d'une telle réflexion qui pourrait parvenir à concilier une position « structuraliste » sur la formalisation musicale avec certaines instances phénoménologiques, celles qui sont notamment liées à la « *représentation d'un vécu dans un système de symboles* », pour reprendre l'expression de Granger.

Une façon de le faire consisterait, à notre avis, à reprendre les thèses d'Ernst Cassirer sur le rapport entre le concept de groupe et la théorie de la perception en essayant d'interpréter les invariants perceptifs (au sens de la théorie des groupes de transformations) dans une nouvelle perspective catégorielle[301]. Certaines idées du théoricien américain Gerald Balzano, comme on a pu le constater, semblent aller dans ce sens, en particulier quand il affirme que « *le caractère singulier de l'expérience musicale est dû en partie aux structures particulières de groupe que la musique rend accessible à l'auditeur* » [BALZANO 1980, 83].

Nous avons souligné tout au long de cette étude les processus d'abstraction qui conduisent d'une représentation algébrique des structures musicales ancrée dans la notion de groupe à l'approche catégorielle qui reste implicite dans la démarche transformationnelle de David Lewin et qui est formalisée pour la première fois du point de vue de la théorie de la musique par Guerino Mazzola. En suivant encore une fois la réflexion épistémologique de Granger, on pourrait donc essayer de discuter ce processus d'abstraction en termes d'articulation opératoire afin de mettre en évidence les différentes ramifications philosophiques d'une telle approche théorique.

Nous avons montré comment la théorie des catégories permet, d'un point de vue technique, d'envisager le problème de la classification des structures musicales en opérant une substitution de l'objet étudié avec l'ensemble des points de vues (ou perspectives) sur

[301] Voir l'article d'Ernst Cassirer « The concept of group and the theory of perception » [CASSIRER 1944], dont la partie conclusive contient un essai d'application de la théorie des groupes à la perception musicale. Cassirer discute en particulier le problème d'une « ressemblance » perceptive entre différentes transpositions d'un même profil mélodique en disant que cette question est liée « à un problème beaucoup plus général, un problème qui concerne les mathématiques abstraites [abstract mathematics] » [CASSIRER 1944, 25].

l'objet[302]. Il s'agit d'une instance du processus de « *restauration in vitro* », expression que Granger applique à l'une des deux orientations principales du travail mathématique par rapport à l'idée de concept « naturel » [GRANGER 1988/1994]. L'épistémologue français discute cette orientation en tant que reconstruction d'un objet à partir des structures plus abstraites dans le cas du concept mathématique de *variété* qui permet de penser l'espace comme « *essentiellement représentable par morceaux au moyen de* « *cartes planes* »*, c'est-à-dire de parties d'un espace vectoriel-patron* R^n » [GRANGER 1988/1994, 173].

Notons que cette même démarche est à la base de la dualité « local/global » dans la théorie mathématique de la musique de Guerino Mazzola. Toute structure musicale peut s'interpréter comme variété, avec une différence fondamentale par rapport au concept analogue en mathématiques, à savoir le fait que la collection de « cartes locales », ou *atlas* en musique, est partie intégrante du processus d'interprétation de la structure[303].

Comme Frédéric Patras le suggère dans sa réflexion phénoménologique sur la connaissance mathématique, la notion de catégorie « *a un sens mathématique qui serait d'une importance probablement décisive si l'on souhaitait acquérir une entente philosophique de ce qu'est une "structure algébrique"* » [PATRAS 1996a, 110]. Le processus de construction d'un réseau transformationnel en analyse musicale ainsi que l'approche catégorielle dans la formalisation des structures musicales pourraient offrir des éléments nouveaux pour essayer de donner une réponse à ce type de question.

---

[302] Cette observation est bien fondée d'un point de vue mathématique grâce à un résultat fondamental en théorie des catégories connu comme « Lemme de Yoneda », résultat que nous avons évoqué sans pourtant pouvoir l'expliciter en langage mathématique. Pour une discussion détaillée sur la « philosophie de Yoneda » et ses conséquences dans le domaine de la formalisation des structures musicales, voir notre introduction à la théorie mathématique de la musique de Guerino Mazzola [ANDREATTA 1999].

[303] Une analyse différente de la dialectique du local et du globale en musique est proposée par François Nicolas à partir d'une lecture de *l'Essai sur l'unité des mathématiques* d'Albert Lautman [NICOLAS 1996]. Recemment, François Nicolas a proposé une interprétation philosophique de la théorie des catégories et de topoï qui se situe dans la réflexion d'Alain Badiou sur les mathématiques en tant qu'ontologie [BADIOU 1998b]. La théorie des topoï permettrait ainsi de comprendre, d'un point de vue philosophique, la « centration » logique sur l'écriture qui « prend mesure de la dimension musicale d'un matériau sonore mis en œuvre » [NICOLAS 2002, 105].

BIBLIOGRAPHIE

[ADAMEK et MacLANE 1989] J. Adámek et S. MacLane (éd.) : *Categorical Topology and its relation to analysis, Algebra and Combinatorics*, World Scientific Publishing, 1989.

[ADLER 1885] G. Adler : « Umfang, Methode und Ziel der Musikwissenschaft », *Vierteljahresschrift für Musikwissenschaft*, 1, pp. 5-20, 1885.

[ANDLER 1999] D. Andler : « Où résident les structures ? Questions de niveau dans l'étude de la cognition », *Mathématique et Musique : Logiques mathématiques, logiques musicales au XX*[e] *siècle*, Quatrième Forum Diderot, Ircam, 1999 (texte inédit).

[AGMON 1989] E. Agmon : « A Mathematical model of the diatonic system », *Journal of Music Theory*, 33, pp. 1-25, 1989.

[AGMON 1996] E. Agmon : « Coherent Tone-Systems: a study in the theory of diatonicism », *Journal of Music Theory*, 40(1), pp. 39-59, 1996.

[AGMON 2002] E. Agmon : « The Multiplicative Norm and its Implications for Set-Class Theory », *Perspectives of New Music*, 40(1), 2002.

[AGON 1998] C. Agon : OpenMusic : *Un langage visuel pour la composition musicale assistée par ordinateur*, Thèse, Paris VIII, 1998.

[AGON *et al.* 2003] C. Agon, M. Andreatta, G. Assayag, S. Schaub : « Formal aspects of Iannis Xenakis' Symbolic Music: a computer-aided exploration of some compositional processes », *Journal of New Music Research* (à paraître).

[AMIN 1999] K. Amin : « The factorisation of Abelian Groups », *Acta Mathematica Academiae Paedagigicae Nyíregyháziensis*, 15, pp. 9–18, 1999.

[AMIOT *et al*. 1986] E. Amiot, G . Assayag, C. Malherbe, A. Riotte : « Duration structure generation and recognition in musical writing «, *Proc. of the ICMC 1986*, La Haye, 1986.

[AMIOT 1994] E. Amiot : « La série dodécaphonique et ses symétries «, *Quadrature n°19*, III, 1994.

[AMIOT 2002] E. Amiot : « A Solution to Johnson-Tangian Conjecture », *Séminaire MaMuX (Mathématiques/Musique et relations avec d'autres disciplines)*, Ircam, février 2002. Disponible en ligne à l'adresse :
http://www.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/documents/MaMuXTiling.html

[AMIOT 2003] E. Amiot : « Why rhythmic Canons are interesting », *Perspectives in Mathematical Music Theory*, EpOs éd. (à paraître).

[ANDREATTA 1996] M. Andreatta : *Gruppi di Hajós, Canoni e Composizioni*, Tesi di Laurea, Facoltà di Matematica dell'Università degli Studi di Pavia, 1996.

[ANDREATTA 1997a] M. Andreatta : « Nastri, Orologi e Ciambelle. Spunti per riflessioni matemusicali «, *Il Monocordo*, Vol. 2, pp. 5-32, 1997.

[ANDREATTA 1997b] M. Andreatta : *Formalizing Musical Structure : from Information to Group Theory,* Dissertation in Aesthetics and Sociology of Music, University of Sussex, 1997.

[ANDREATTA 1997c] M. Andreatta : *Group-theoretical methods applied to music,* Dissertation, University of Sussex, 1997.

[ANDREATTA 1997d] M. Andreatta : « Logica simbolica, teoria dei gruppi e crivelli musicali nel pensiero di Iannis Xenakis (1[a] parte) «, *Il Monocordo*, Vol. 2, pp. 3-14, 1997.

[ANDREATTA 1998] M. Andreatta : « Logica simbolica, teoria dei gruppi e crivelli musicali nel pensiero di Iannis Xenakis (2[a] parte) «, *Il Monocordo,* Vol. 3, pp. 3-30, 1998.

[ANDREATTA *et al.* 1999] M. Andreatta, C. Agon, M. Chemillier : « *OpenMusic* et le problème de la construction de canons musicaux rythmiques «, *Actes des sixièmes Journées d'Informatique Musicale,* pp. 179-185, 1999. Disponible en ligne à l'adresse : http://www.ircam.fr/equipes/repmus/RMPapers/

[ANDREATTA 1999] M. Andreatta : *La Théorie mathématique de la musique de Guerino Mazzola et les canons rythmiques,* Mémoire de D.E.A. pour le doctorat en musique et musicologie du XX[e] siècle, E.H.E.S.S./Ircam, 1999.

[ANDREATTA 2000] M. Andreatta : « The Minkowski/Hajós Problem and Rhythmic Musical Canons », *Seminários do C.E.L.C,* Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais, Université de Lisbonne, 2000.

[ANDREATTA *et al.* 2001] M. Andreatta, C. Agon, G. Assayag, T. Noll : « The geometrical groove: rhythmic canons between theory, implementation and musical experiments », *Actes des huitièmes Journées d'Informatique Musicale*, Bourges, pp. 93–98, 2001.

[ANDREATTA *et al.* 2002] M. Andreatta, E. Amiot, C. Agon : « Tiling problems in music composition : Theory and implementation », *Proceedings of the ICMC*, 2002.

[ANDREATTA 2003a] M. Andreatta : « Un regard théorique sur les modes à transposition limitée de Messiaen », *Livret de l'Opéra Ion,* pp. 17-22, Aôut 2003.

[ANDREATTA 2003b] M. Andreatta : « On group-theoretical methods applied to music: some compositional and implementational aspects », *Perspectives in Mathematical Music Theory*, EpOs éd. (à paraître).

[ANDREATTA et SCHAUB 2003] M. Andreatta, S. Schaub : « Une introduction à la *Set Theory* : Les concepts à la base des théories d'Allen Forte et de David Lewin », *Musurgia*, X/1, pp. 73-92, 2003.

[ARNAUDIÈS et FRAYSSE 1987] J.-M. Arnaudiès et H. Fraysse : *Algèbre*, Dunod, 1987

[ASSAYAG et AGON 1996] G. Assayag et C. Agon : « OpenMusic Architecture *Proceedings of the ICMC* , Hong-Kong, 1996.

[ASSAYAG *et al.* 1999] G. Assayag, C. Agon, M. Laurson, C. Rueda : « Computer Assisted Composition at Ircam: Patchwork and OpenMusic », *Computer Music Journal*, 23(3), 1999.

[ASSAYAG 2000] G. Assayag: « De la calculabilité à l'implémentation musicale », *Séminaire Entretemps MaMuPhi (Mathématiques, Musique et Philosophie),* Ircam, Octobre 2000. Disponible en ligne à l'adresse :
http://www.entretemps.asso.fr/Seminaire/mamuphi.html

[ASSAYAG *et al.* 2003] G. Assayag, H. G. Feichtinger, J. F. Rodrigues : *Mathematics and Music. A Diderot Mathematical Forum*, Springer Verlag, 2003.

[ATLAS et CHERLIN 1998] R. Atlas et M. Cherlin (eds.) *: Musical Transformation and Musical Intuition*, Ovenbird Press, 1994.

[BABBITT 1946/1992] M. Babbitt : *The function of Set Structure in the Twelve-Tone System*, PhD, Princeton University, 1946 (thèse approuvée en 1992).

[BABBITT 1955/1972] M. Babbitt : « Some Aspects of Twelve-Tone Composition », *The Score and IMA Magazine*, 12, pp. 53-61, 1955 (repris dans [HAYS 1972], pp. 364-371).

[BABBITT 1960] M. Babbitt : « Twelve-Tone Invariants as Compositional Determinants », *Musical Quarterly*, 46, pp. 245-259, 1960.

[BABBITT 1961] M. Babbitt : « Set Structure as a Compositional Determinant », *Journal of Music Theory*, 5(2), pp. 72-94, 1961.

[BABBITT 1961/1972] M. Babbitt : « Past and present concepts of the nature and limits of music (repris dans [BORETZ et CONE 1972], pp. 3-9)

[BABBITT 1962] M. Babbitt : « Twelve-Tone Rhythmic Structure and the Electronic Medium », *Perspectives of New Music* 1(1), pp. 49-79, 1962.

[BABBITT 1965/1972] M. Babbitt : « The Structure and Function of Music Theory », College Music Symposium, Vol.5, 1965 (repris dans [BORETZ et CONE 1972], pp. 10-21).

[BABBITT 1972] M. Babbitt : « Contemporary Music Composition and Music Theory as Contemporary Intellectual History » (dans [BROOK *et al.* 1972], pp. 151-184).

[BABBITT 1987] M. Babbitt : *Words about Music* (S. Dembski et J.N. Straus éditeurs., Madison, University of Wisconsin Press, 1987).

[BABBITT 1991] M. Babbitt : *A life of learning*, American Council of Learned Societies, ACLS Occasional Paper, n°17, 1991.

[BABBITT 2003] M. Babbitt : *The Collected essays of Milton Babbitt* (sous la direction de Stephen Peles, Stephen Dembski, Andrew Mead et Joseph N. Straus), Princeton University Press, à paraître (novembre 2003).

[BACKUS 1960] J. Backus : « Pseudo-science in Music», *Journal of Music Theory,* 4(2), pp. 221-232, 1960.

[BADIOU 1969] A. Badiou : *Le concept de modèle*, Editions Maspero, 1969.

[BADIOU 1998a] A. Badiou : *Court traité d'ontologie transitoire*, Seuil, Paris, 1998.

[BADIOU 1998b] A. Badiou : *Topos ou Logiques de l'onto-logique,* Tome 1, Support de cours, Paris, 1998.

[BADIOU 1998c] A. Badiou : *Mathématiques du transcendantal*, Documentation de Séminaire, 1998.

[BAKER *et al.* 1997] J. Baker, D. Beach et J. Bernard : *Music Theory in Concept and Practice*, Eastman Studies in Music, University of Rochester Press, 1997.

[BALTENSPERGER 1995] A. Baltensperger : *Iannis Xenakis und die stochastische Musik. Komposition im Spannungsfeld von Architektur und Mathematik*, Zurich, Paul Haupt, 1995.

[BALZANO 1980] G. Balzano : « The group-theoretic description of 12-fold and microtonal pitch systems », *Computer Music Journal*, 4, pp. 66-84, 1980.

[BAMBERGER 1986] J. Bamberger : « Cognitive Issus in Development of Musically Gifted Children » (dans [STERNBERG et DAVIDSON 1986], pp. 388-413).

[BANCQUART 2003a] A. Bancquart : « Une arithmétique de l'anti-système. Deux exemples de combinatoires de chiffres », *Séminaire MaMuX (Mathématiques/Musique et relations avec d'autres disciplines)*, Ircam, février 2003. Texte disponible en ligne à l'adresse :
http://www.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/documents2002-2003/ResumesFev.html

[BANCQUART 2003b] A. Bancquart : *Musique : habiter le temps*, Symétrie, Lyon, 2003.

[BARBAUD 1965] P. Barbaud : *Introduction à la composition musicale automatique*, Dunod éd., 1965.

[BARBAUD 1968] P. Barbaud : *La musique discipline scientifique*, Dunod éd., 1968.

[BARBAUD 1993] P. Barbaud : *Vademecum de l'ingénieur en musique*, Springer Verlag, 1993.

[BARBAUD 1997] P. Barbaud : *Schoenberg*, Editions Main d'Œuvre, 1997.

[BARONI *et al.* 1999] M Baroni, R. Dalmonte, M. Jacoboni : *Le regole della musica. Indagine sui meccanismi della comunicazione*, EDT, Torino, 1999.

[BAZELOW et BRICKLE 1976] A. Bazelow et F. Brickle : « A Partition Problem posed by Milton Babbitt », *Perspectives of New Music*, 14(2), 15(1), pp. 280-293, 1976.

[BENT et DRABKIN 1987/1998] I. Bent et W. Drabkin : *Analysis*, Macmillan, 1987 (tr. française : *L'analyse musicale*, Editions Main d'Œuvre, 1998).

[BERNARD 1997] J. Bernard : « Chord, Collection, and Set in Twentieth-Century Theory » (dans [BAKER 1997], pp. 11-52).

[BIRKHOFF 1933] G. Birkhoff : *Aesthetic Measure*, Harvard University Press, 1933.

[BKOUCHE 2001] R. Bkouche : « La démonstration : du réalisme au formalisme », Texte non numéroté, disponible en ligne à l'adresse :
http://casemath.free.fr/divers/tribune/demonstr.pdf

[BLOCH et ANDREATTA 2002] G. Bloch, M. Andreatta : « Vuza-canons and low-level composition processes », *Séminaire MaMuX (Mathématiques/Musique et relations avec d'autres disciplines)*, Ircam, février 2002.

[BOI 2000] L. Boi (éd.) : *Science et philosophie de la Nature. Un nouveau dialogue*, Peter Lang, 2000.

[BOI 2003] L. Boi (éd.) : *New Interactions of Mathematics with Natural Sciences and the Humanities,* Springer (à paraître).

[BOOLE 1854/1992] G. Boole : *An investigation of the Laws of Thought, on which are founded the mathematical Theories of Logic ad Probabilities,* London, Walton&Maberley, 1854 (tr. franç. *Les lois de la pensée*, Vrin, Paris, 1992).

[BORETZ 1969/1995] B. Boretz : « Meta-Variations : Studies in the Foundations of Musical Thought », thèse, Université de Princeton, 1969 (Edition révisée : Red Hook, Open Space, 1995).

[BORETZ et CONE 1972] B. Boretz et E.T. Cone : *Perspectives on Contemporary Music Theor*y, W.W. Norton and Company, New York, 1972.

[BOTTAZZINI 1998] U. Bottazzini : *Storia della Matematica moderna e contemporanea,* UTET Libreria, 1998.

[BOULEZ 1963] P. Boulez : *Penser la musique aujourd'hui,* Gallimard éd., Paris, 1963.

[BOULEZ 1966] P. Boulez : *Relevés d'apprenti,* Seuil éd, Paris, 1966.

[BOULEZ 1986] P. Boulez : « Le système et l'idée », *Inharmonique : Le temps des mutations,* n°1, Ircam/C. Bourgeois, Paris, 1986.

[BOURBAKI 1948/1998] N. Bourbaki : « L'architecture des mathématiques », dans [Le Lionnais 1948/1998], pp. 35-47).

[BRANDT 1994] P. Aage Brandt : *Dynamiques du sens*, Aarhus University Press, 1994.

[BREDICEANU 2002] M. Brediceanu : *Topology of sound forms and music*, Romanian Academy Publishing House, 2002.

[BROOK *et al.* 1972] B. Brook, E. Downes et S. van Solkema : Perspectives in Musicology, Norton, New York, 1972.

[BUDDEN 1972] F.J. Budden : *The Fascination of groupes,* Cambridge University Press, 1972.

[BUTEAU 2003] C. Buteau : *A topological model of motivic structure and analysis of music : Theory and Operationalization*, PhD, University of Zürich, 2003.

[CAREY et CLAMPITT 1989] N. Carey et D. Clampitt : « Aspects of well-formed scales », *Music Theory Spectrum*, 11, pp.187-206, 1989.

[CARNAP 1928/2002] R. Carnap : *Der logische Aufbau der Welt,* Philosophische Bibliothek 514, Welt-kreis Verlag, 1928 (trad. franç. : *La construction logique du monde,* Vrin éd., Paris, 2002)

[CASSIRER 1944] E. Cassirer : « The concept of group and the theory of perception », *Philosophy and Phenomenological Research,* Vol. V, N. 1, pp. 1-36, 1944.

[CASTINE 1994] P. Castine : *Set Theory Objects,* Peter Lang, 1994.

[CAVAILLES 1962] J. Cavailles : *Philosophie Mathématique*, Hermann, 1962.

[CAVAILLES 1981] J. Cavaillès *: Méthode axiomatique et formalisme. Essai sur le problème du fondement des mathématiques,* Hermann, 1981.

[CAWS 1997] P. Caws : *Structuralism. A Philosophy for the Human Sciences*, Contemporary Studies in Philosophy and the Human Sciences, Humanities Press, New Jersey, 1997.

[CAZABAN *et al.* 2003] C. Cazaban, M. Andreatta, C. Agon, D. Vuza : « Anatol Vieru : formalisation algébrique et enjeux esthétiques » (à paraître dans *Mathématique et Musique*, G. Assayag et al., Ircam/L'Harmattan, 2003).

[CHEMILLIER 1987] M. Chemillier : « Monoide libre et musique «, *RAIRO Inf. Theo.,* vol. 21, n° 3 et 4, pp. 341-371 et pp. 379-417, 1987.

[CHEMILLIER 1990] M. Chemillier : *Structure et Méthode algébriques en informatique musicale (thèse),* L.I.T.P., Institut Blaise Pascal, 1990.

[CHEMILLIER 1999] M. Chemillier : « Générateurs musicaux et singularités «, *Actes des sixièmes Journées d'Informatique Musicale,* pp.167-177, 1999.

[CHEMILLIER 2002] M. Chemillier : « Ethnomusicology, Ethnomathematics. The Logic Underlying Orally Transmitted Artisti Practices » (dans [ASSAYAG *et al.* 2002], pp. 161-183).

[CHEMILLIER et PACHET 1998] M. Chemillier, F. Pachet : *Recherches et applications en informatique musicale,* Paris, Hermès, 1998.

[CHEMILLIER et TRUCHET 2003] M. Chemillier, C. Truchet : « Computation of words satisfying the "rhythmic oddity property" (after Simha Arom's works) », *Information Processing Letters*, 86, pp. 255-261, 2003.

[CHOMSKY 1956] N. Chomsky : *Syntactic structures,* The Hague, Mouton, 1956 (trad. franç. *Structures syntaxiques,* Paris Seuil, 1959).

[CHOMSKY 1965] N. Chomsky : *Aspects of the theory of syntax,* MIT Press, 1965 (trad. franç. *Aspects de la théorie syntaxique*, Paris, Seul, 1971).

[CHOUVEL 1998] J.-M. Chouvel : *Esquisses pour une pensée musicale. Les métamorphoses d'Orphée*, l'Harmattan éd., Paris, 1998.

[CHOUVEL 2002] J.-M. Chouvel : « La représentation hexagonale toroïdale : application a l'analyse harmonique de la musique d'Hermeto Pascoal », *Séminaire MaMuX (Mathématiques/Musique et relations avec d'autres disciplines),* Ircam, décembre 2002.

[CHOUVEL et LEVY 2002] J.-M. Chouvel, F. Lévy : *Observation, analyse, modèle : peut-on parler d'art avec les outils de la science ?,* Les Cahiers de l'Ircam/L'Harmattan, Paris, 2002.

[CHRISMAN 1971] R. Chrismas : « Identification and correlation of pitch-sets », *Journal of Music Theory,* 15(1), pp. 58-83, 1971.

[CLOUGH et MYERSON 1985] J. Clough et G. Myerson : « Variety and multiplicity in diatonic systems », *Journal of Music Theory,* 29, pp. 249-270, 1985.

[CLOUGH et MYERSON 1985] J. Clough et G. Myerson : « Musical scales and the generalized circle of fifths », *American Mathem. Month.*, pp. 695–701, 1985.

[CLOUGH et DOUTHETT 1991] J. Clough et J. Douthett : « Maximally even sets », *Journal of Music Theory*, 35, pp. 93-173, 1991.

[CLOUGH 1994] J. Clough : « Diatonic Interval Cycles and Hierarchical Structure », *Perspectives of New Music*, 32(1), pp. 228-253, 1994.

[COHN 1986] R. Cohn : *Transpositional combination in twentieth-century music*, PhD thesis, University of Rochester, Eastmann School of Music, 1986.

[COHN 1998] R. Cohn : « Introduction to neo-riemannian theory: a survey and a historical perspective », *Journal of Music Theory*, 42(2), pp. 167–180, 1998.

[COONS et KRAEHENBUEH, 1958] E. Coons et D. Kraehenbuehl : « Information as a measure of structure in Music », *Journal of Music Theory*, 2(2), 1958, pp. 127-161.

[COOK 1987] N. Cook : *A Guide to Musical Analysis*, Norton, New York, 1987.

[CORRÁDI et SZABÓ 1997] K. Corrádi, S. Szabó : An Axiomatic Approach for the Hajós Theorem. Contributions to Algebra and Geometry, 38(2), pp. 241–248, 1997.

[CORRY 1996] L Corry : *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Birhäuser Verlag, 1996.

[COURTINE 1996] J.-F. Courtine (éd.) : *Phénoménologie et logique*, Presses de l'ENS, 1996.

[DALHAUS 1966] C. Dahlhaus : *Untersuchung über die Entstehung der harmonischen Tonalität*, Bärenreiter, Kassel, 1966.

[DALHAUS et DE LA MOTTE-HABER 1982] C. Dahlhaus, H. de la Motte-Haber (éd.) : *Systématische Musikwissenschaft*, Vol. 10 du *Neues Handbuch der Musikwissenschaft*, Athenaion, Wiesbaden, 1982.

[DE BRUJIN 1953] N. G. de Brujin : « On the factorization of finite abelian groups », *Indag. Math. Kon. Ned. Akad. Wetensch. Amsterdam*, 15, pp. 258-264, 1953.

[DE NATALE 1978] M. De Natale : *Strutture e forme della musica come processi simbolici. Lineamenti di una teoria analitica*, Morano Editore, Napoli, 1978.

[DELALANDE 1997] F. Delalande : *Entretiens avec Xenakis*, Buchet/Chastel, 1997.

[DELEUZE 1968/2002] G. Deleuze : « A quoi reconnaît-on le structuralisme ? », dans [CHÂTELET 1972], pp. 299-335 (repris dans [DELEUZE 2002], pp. 238-269).

[DELEUZE 2002] G. Deleuze : *L'île déserte et autres textes. Textes et entretiens 1953-1974*, Les Éd. de Minuit, Paris, 2002.

[DELIÈGE 1984] C. Deliège : *Les fondements de la musique tonale : Une perspective post-schenkerienne*, Lattès, 1984.

[DELIÈGE 1986] C. Deliège : *Invention musicale et idéologies*, Bourgois, Paris, 1986.

[DELIÈGE 1989] C. Deliège : « La *Set-Theory* ou les enjeux du pléonasme », *Analyse Musicale,* 4e trimestre, pp. 64-79, 1989.

[DELIÈGE 1995] C. Deliège : « En exil d'un jardin d'Eden, essai sur la relation entre l'invention musicale et ses théories », *Revue de Musicologie*, n° 81(1), 1995.

[DELIÈGE 2003] C. Deliège : *Cinquante ans de modernité musicale : de Darmstadt à l'Ircam. Constribution historiographique à une musicologie critique*, Mardaga, Bruxelles, 2003.

[DELIÈGE et PADDISON 2000] I. Deliège, M. Paddison : *Musique contemporaine. Perspectives théoriques et philosophiques*, Mardaga, Bruxelles, 2000.

[DeLIO 1985] T. DeLio : The Dialectics of Structure and Materials. In Thomas DeLio (éd.), *Contiguous Lines*, University Press of America, pp. 3-30, 1985 (éd or. *Journal of Music Theory*, 24(1), pp. 63-86, 1980).

[DESANTI 1968] J. T. Desanti : *Les idéalités mathématiques. Recherches épistémologiques sur le développement de la théorie des fonctions de variables réelles*, Seuil, Paris, 1968.

[DESANTI 1968] J. T. Desanti : *La philosophie silencieuse ou critique des philosophies de la science,* Seuil, Paris, 1975.

[DIEUDONNE 1978] J. Dieudonné : *Abrégé d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris, 1978.

[DIEUDONNE 1987] J. Dieudonné : *Pour l'honneur de l'esprit humain. Les mathématiques aujourd'hui*, Hachette éd., 1987.

[DOSSE 1992] F. Dosse : *Histoire du Structuralisme*, Editions la découverte, 1992.

[DUCHEZ 1978] M.E. Duchez : « Théorie musicale et théorie scientifique «, *Actes du Colloque sur l'éducation musicale scientifique,* Brest, pp. 21-23, 1978.

[DUFOURT 1981] H. Dufourt : « Les difficultés d'une prise de conscience théorique «, dans IRCAM, *Le compositeur et* l'ordinateur, Paris, pp. 6-12, 1981.

[DUFOURT et FAUQUET 1996] H. Dufourt, J.-M. Fauquet : *La musique depuis 1945. Matériau, esthétique et perception*, Mardaga, Bruxelles, 1996

[DURNEY et JAMEU 1970] D. Durney, D. Jameux : « Rencontres avec Iannis Xenakis », *Musique en jeu*, 1, pp. 46-65, 1970.

[DURUTTE 1855] C. Durutte : *Technie, ou lois générales du système harmonique,* Mallet-Bachelier, Paris, 1855.

[DURUTTE 1876] C. Durutte : *Résumé élémentaire de la Technie harmoniqu, et complément de cette Technie*, Gauthier-Villars, Paris, 1876.

[ECO 1971] U. Eco : « Pensée structurale et pensée sérielle », *Musique en jeu*, n° 5, Seuil, Paris, pp. 45-56, 1971.

[EICHERT 1994] R. Eichert : *Iannis Xenakis und die mathematische Grundenforschung*, PFAU-Verlag, Saarbrücken, 1994.

[EILENBERG et MacLANE 1942] S. Eilenberg, S. MacLane : « Natural Isomorphisms in group theory », *Proceedings of the National Academy of Sciences*, USA, pp. 537-543, 1942.

[EILENBERG et MacLANE 1945] S. Eilenberg, S. MacLane : « General theory of natural equivalences », *Transactions of the American Mathematical Society*, pp. 231-294, 1945.

[EIMERT 1964] H. Eimert : *Grundlagen der musikalischen Reihentechnik*, die Reihe, Universal éd., 1964.

[ENGLISH 1996] J. English : « Husserl et Hilbert. La Phénoménologie est-elle axiomatisable ? » (dans [COURTINE 1996], pp. 83-107).

[ESTRADA 1994] J. Estrada : *Théorie de la composition : discontinuum-continuum*, Thèse, Université de Strasbourg, 1994.

[FEICHTINGER et DÖRFLER 1999] H.G. Feichtinger, M. Dörfler : *Computational and Mathematical Methods in Music*, Österreichische Computergesellschaft, Vienna, 1999.

[FICHET 1996] L. Fichet : *Les Théories Scientifiques de la musique aux XIXème et XXème siècles*, Vrin éd., 1996.

[FOKKER 1947] A.D. Fokker : *Les mathématiques et la musique*, Extrait du Tome X, Archives du musée Teyler, La Haye, pp. 1-31, 1947.

[FORTE 1964] A. Forte : « A Theory of Set-Complexes for Music », *Journal of Music Theory*, 8(2), pp. 136-183, 1964.

[FORTE 1973] A. Forte : *The Structure of Atonal Music*, New Haven, Yale University Press, 1973.

[FORTE 1978] A. Forte : *The Harmonic Organization of* « *The Rite of Spring* », New Haven, Yale University Press, 1978.

[FORTE 1982] A. Forte : *Introduction to Schenkerian Analysis*, Norton, New York, 1982.

[FORTE 1989] A. Forte : « La *Set-complex theory:*élevons les enjeux! », *Analyse musicale*, 4e trimestre, pp. 80-86, 1989.

[FRIPERTINGER 1992] H. Fripertinger : *Enumeration in Musical Theory*, Beiträge zur elektronischen Musik 1, Hochschule für Musik und darstellende Kunst, Graz, 1991. Disponible en ligne à l'adresse :
http://www.bedvgm.kfunigraz.ac.at:8001/frib/

[FRIPERTINGER 1999] H. Fripertinger : « Enumeration and construction in music theory » (dans [FEICHTINGER et DÖRFLER, 1999], pp. 179-204). Disponible en ligne à l'adresse :
http://www-ang.kfunigraz.ac.at/~fripert/papers/musik.pdf

[FRIPERTINGER 2001] H. Fripertinger : « Enumeration of non-isomorphic canons », *Tatra Mt. Math. Publ.*, 23, pp. 47–57, 2001.

[FRITTS 1997] L. Fritts : Revue du livre *An Introduction to the Music of Milton Babbitt* de A. Mead et de la thèse de Milton Babbitt « The Function of Set Structure in Twelve-Tone System », *Music Theory Spectrum*, 19(1), pp. 93-103, 1997.

[FUCHS 1960] L. Fuchs : *Abelian Groups*, Pergamon Press, 1960.

[FUCHS et SCHIMDT 1964] L. Fuchs, E. T. Schmidt (éd.) *Proceedings of the Colloquium on Abelian Groups*, Tihany (Hungary), Sept. 1963, Hungarian Academy of Sciences, Budapest, 1964.

[FULLER 1975] R. Fuller : « A structuralist approach to the diatonic scale », *Journal of Music Theory*, 19(2), pp. 182-210, 1975.

[GAMER 1967] C. Gamer : « Some combinatorial resources of equal-tempered systems », *Journal of Music Theory* , 11, pp. 32-59, 1967.

[GENEVOIS et ORLAREY 1997] H. Genevois et Y. Orlarey : *Musiques et Mathématiques,* Aleas éd., 1997.

[GIL et ESTRADA 1984] J. Gil, J. Estrada : *Música y Teoría de Grupos finitos*, IIE, UNAM, Mexique, 1984.

[GIBSON 1994] B. Gibson : La théorie et l'œuvre chez Xenakis: éléments pour une réflexion. *Circuit* 5(2), pp. 41-54, 1994.

[GOLLIN 2000] E. Gollin : *Representations of space and conceptions of distance in transformational music theories*, PhD Thesis, Harvard University, 2000.

[GONSETH 1998] F. Gonseth : *Logique et philosophie mathématiques*, Hermann, 1998.

[GÖTZE et WILLE 1985] H. Götze et R. Wille (sous la direction de) : *Musik und Mathematik, Salzburger Musikgespräch 1984*, Springer-Verlag, 1985.

[GRANGER 1947/1994] G.-G. Granger : « Pygmalion. Réflexions sur la pensée formelle », *Revue philosophique*, n° 7-9, pp. 282-300, 1947 (repris dans [GRANGER 1994], pp. 15-31).

[GRANGER 1987/1994] G.-G. Granger : « Contenus formels et dualité », Manuscrito, São Paulo, pp. 194-210, 1987 (repris dans [GRANGER 1994], pp. 53-70).

[GRANGER 1988/1994] G.-G. Granger : « Sur l'idée de concept mathématique "naturel" », *Revue internationale de philosophie*, pp. 477-499, 1988 (repris dans [GRANGER 1994], pp. 57-182).

[GRANGER 1988] G.-G. Granger : *Pour la connaissance philosophique*, Odile Jacob, Paris, 1988.

[GRANGER 1994] G.-G. Granger : *Formes, opérations, objets*, Librairie Philosophique J. Vrin, Paris, 1994.

[GREER 1998] T. A. Greer : *A question of balance : Charles Seeger's philosophy of music*, University of California Press, 1998.

[GRAESER 1924] W. Graeser : « Bachs *Kunst der Fuge* », in *Bach-Jahrbuch*, 1924.

[GRMELA 1997] S. Grmela : « On Vieru's diachro-measure », SMT/AMS Conference, Phoenix, Arizona, Oct/Nov. 1997 (papier inédit).

[GROTHENDIECK 1986] A. Grothendieck : *Récoltes et semailles. Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien* (en quatre parties), Université des Sciences et Techniques du Languedoc et CNRS, Montpellier, 1986.

[GUITART 1999] R. Guitart : *La pulsation mathématique. Rigueur et ambiguïté, la nature de l'activité mathématique, ce dont il s'agit d'instruire*, L'Harmattan, 1999.

[GUITART 2003] R. Guitart : « Que peut-on écrire et calculer de ce qui s'entend ? », (à paraître dans *Mathématique et Musique*, G. Assayag et al., Ircam/L'Harmattan, 2003).

[HALSEY et HEWITT 1978] D. Halsey et E. Hewitt : « Eine gruppentheoretische Methode in der Musik-theorie «, *Jahresber. der Dt. Math.-Vereinigung* 80, pp. 151-207, 1978.

[HANSLICK 1986] E. Hanslick : *Du beau dans la musique*, Christian Bourgois éd., 1986.

[HAJÓS 1942] G. Hajos : « Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter », *Math. Zeit.*, 47, pp. 427–467, 1942.

[HAJÓS 1950] G. Hajos : « Sur le probléme de factorisation des groupes cycliques », *Acta. Math. Acad. Sci. Hung.*, 1, pp. 189–195, 1950.

[HAYS 1972] W. Hays : *Twentieth Century Views of Music History*, Scribner, New York, pp. 364-371, 1972.

[HELLEGOUARCH 1980] Y. Hellegouarch : « Un aspect de la théorie des hauteurs », *Journées Arithmétiques*, Caen, 1980 (texte inédit).

[HELLEGOUARCH 1983] Y. Hellegouarch : « Gammes Naturelles «, *Musique et Mathématiques* (revue de l'Ass. des Profess. de Math. de l'Enseignement Public), n° 53, 1983.

[HELLEGOUARCH 1987] Y. Hellegouarch : « À la recherche de l'arithmétique qui se cache dans la musique «, *Gaz. des Math.*, n° 33, pp. 71-80, Avril 1987.

[HELLEGOUARCH 2002] Y. Hellegouarch : « Outils diophantiens pour la définition d'une distance harmonique », *Séminaire MaMuX (Mathématiques/Musique et relations avec d'autres disciplines)*, Ircam, Avril 2002. Disponible en ligne à l'adresse : http://www.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/ToneSystem.html

[HELMHOLTZ 1868] H. von Helmholts : *Die Lehnre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik*, Georg Olms Verlagsbuchhandlung, 1868.

[HILBERT 1899/1971] *Grundlagen der Geometrie,* Stuttgart, Teubner, 1899 (trad. franç. *Les Fondements de la Géométrie*, Paris, Dunod, 1971).

[HILBERT et COHN-VOSSEN 1932/1952] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen : Anschauliche Geometrie, 1932 (tr. anglaise : *Geometry and Imagination*, Chelsea, New York, 1952).

[HOUDE et MIEVILLE 1994] O. Houdé, D. Miéville : *Pensée Logico-mathématique, nouveaux objets interdisciplinaires*, Presses Universitaires de France, 1994.

[HOWE 1965] H. Howe : « Some combinatorial properties of Pitch-Structures » *Perspectives of New Music*, 4(1), pp. 45-61, 1965.

[HUSSERL 1950] E. Husserl : *Idées directrices pour une phénoménologie*, Gallimard, Paris, 1950.

[ILIESCU 2000] M. Iliescu : « Xenakis et Thom : une morphodynamique sonore », *Cahiers Arts et Sciences de l'art*, n°1, l'Harmattan, Paris, pp. 183-204, 2000.

[JEDRZEJEWSKI 2002a] F. Jedrzejewski : *Mathématiques des systèmes acoustiques. Tempéraments et modèles contemporains*, L'Harmattan, 2002.

[JEDRZEJEWSKI 2002b] F. Jedrzejewski : « Applications de la théorie des nœuds au domaine musical », *Séminaire MaMuX (Mathématiques/Musique et relations avec d'autres disciplines)*, Ircam, Mars 2002. Disponible en ligne à l'adresse :
http://www.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/SetTheory.html

[JONES 2001] E. Jones : « Residue-Class Sets in the Music of Iannis Xenakis : An Analytical Algorithm and a General Intervallic Expression », *Perspectives of New Music*, 39(2), pp. 229-261, 2001.

[JOHNSON 1996] T. Johnson : *Self-similar melodies*, Editions 75, Paris, 1996.

[JOHNSON 2001] T. Johnson : « Tiling the line (pavage de la ligne). Self-Replicating Melodies, Rhythmic Canons, and an Open Problem », *Les Actes des 8e Journées d'Informatique Musicale*, Bourges, pp. 147-152, 2001.

[KASSLER 1967] M. Kassler : *A Trinity of essays : Toward a theory that is the twelve-note class system ; Toward development of a constructive tonality theory based on writings by Heinrich Schenker ; Toward a simple program language for musical information retrieval*, thèse, Princeton University, 1967.

[KLEIN 1974] F. Klein : *Le Programme d'Erlangen. Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes*, Paris, Gauthier-Villars, 1974.

[KOLMAN 2003] O. Kolman : « Transfert principles for generalized interval systems », *Perspectives of New Music*, 41(2), 2003 (à paraître).

[KRENEK 1937/1939] E. Krenek : *Über Neue Musik. Sechs Vorlesungen zur Einführung in die theoretischen* Grundlagen, Universal Edition, Wien, 1937 (trad. anglaise : *Music here and now*, Norton, New York, 1939).

[KRENEK 1940] E. Krenek : *Studies in Couterpoint based on the Twelve-Tone Technique*, Schirmer, 1940.

[KRENEK 1943] E. Krenek : « New Developments of the Twelve-Tone Technique », *The Music Review*, IV, 2, pp. 81-97, 1943.

[KRENEK 1960] E. Krenek : « Extents and limits of serial techniques », *The Musical Quarterly*, 46, n°2, pp. 210-232, avril 1960.

[KRENEK 1974] E. Krenek : *Horizons Circles. Reflections on my Music*, University of California Press, Berkeley, 1974.

[KUDERNA 1982] J. Kuderna : *Analysis and Performance of selected Piano Works of Milton Babbitt*, PhD, New York University, 1982.

[KURTH 1991] E. Kurth : *Selected writings*, Cambridge Studies in Music Theory and Analysis, Cambridge University Press, 1991.

[LAFON 1998] J.-P. Lafon: *Les formalismes fondamentaux de l'algèbre commutative,* Hermann éd., 1998.

[LAMBERT 2000] P. Lambert : « On contextual transformations «, *Perspectives of New Music,* 38(1), pp. 45-76, 2000.

[LARTILLOT 2002] O. Lartillot : « Analyser sans réduire : un modèle cognitif d'inductions d'analogies » (dans [CHOUVEL et LEVY 2002], pp. 195-218).

[LAUTMAN 1977] A. Lautman : *Essai sur l'unité des mathématiques*, Paris, UGE, coll. 10/18 n°1100, 1977.

[LAVENDHOMME 2001] R. Lavendhomme : *Lieux du sujet. Psychanalyse et mathématique,* Seuil, 2001.

[LAWVERE 1966] F. W. Lawvere : « The Category of Categories as a Foundation of Mathematics », *Proc. Conference Categorical Algebra,* Springer Verlag, 1966.

[LAWVERE 1992] F. W. Lawvere : « Categories of space and of quantity » (dans J. Echeverria : *Philosophical, epistemological and historical Explorations*, Berlin, Walter de Gruyter, 1992).

[LEIBOWITZ 1949] R. Leibowitz : *Introduction à la musique de douze sons*, L'Arche, Paris, 1949.

[Le LIONNAIS 1948/1998] F. Le Lionnais : *Les grands courants de la pensée mathématique*, Cahiers du Sud, 1948 (rééd. Hermann, Paris 1998).

[Le LIONNAIS 1983] F. Le Lionnais : *Nombres Remarquables*, Hermann, 1983.

[LEMAN 1997] M. Leman : *Music, Gestalt, and Computing : Studies in Cognitive and Systematic Musicology,* Springer Verlag Lecture Notes in Artificial Intelligence, Vol. 1317, 1997.

[LERDAHL et JACKENDOFF 1983] F. Lerdahl, R. Jackendoff : *A Generative Theory of Tonal Music,* Cambridge, MIT Press, 1983.

[LEVY 1998] F. Levy : « Plaidoyer pour une oreille subjective et partisane. Une approche "pythagoricienne" de la perception culturelle des intervalles «, *Cahiers de philosophie du langage*, n° 3, L'Harmattan, 1998.

[LEVY 2002] F. Levy : « Fascination du signe et de la figure remarquable en analyse musicale » (dans [CHOUVEL et LEVY 2002], pp. 261-286).

[LEVY 2003a] F. Levy : « Le tournant des années 70 : de la perception induite par la structure aux processus déduits de la perception », L'Harmattan, à paraître.

[LEVY 2003b] *Complexité grammatologique et complexité aperceptive. Étude esthétique et scientifique du décalage la pensée de l'écriture et la perception cognitive des processus musicaux sous l'angle de la théorie de l'information et de la complexité,* thèse, EHESS (en préparation).

[LEVY-STRAUSS 1963] C. Lévy-Strauss : *Le cru et le cuit,* Plon éd, Paris, 1963.

[LEWIN 1959] D. Lewin : « Re: Intervallic Relations between Two Collections of Notes » *Journal of Music Theory* , 3(2), pp. 298-301, 1959.

[LEWIN 1960] D. Lewin : « Re: The Intervallic Content of a Collection of Notes, Intervallic Relations between a Collection of Notes and Its Complement: An Application to Schoenberg's Hexachordal Pieces », *Journal of Music Theory* , 4(1), pp. 98-101, 1960.

[LEWIN 1977a] D. Lewin : « A Label-Free Development for 12-Pitch-Class Systems », *Journal of Music Theory*, 21(1), pp. 29-48, 1977.

[LEWIN 1977b] D. Lewin : « Forte's Interval Vector, My Interval Function, and Regener's Common-Note Function », *Journal of Music Theory* , 21(2), pp. 194-237, 1977.

[LEWIN 1932-83] D. Lewin : « Transformational Techniques in Atonal and other Music Theories », *Perspectives of New Music*, 21, pp. 312-371, 1982-83.

[LEWIN 1984] D. Lewin : « On Formal Intervals between Time-Spans », *Music Perception*, 1(4), pp. 414-423, 1984.

[LEWIN 1986] D. Lewin : « Music Theory, Phenomenology and Modes of Perception », Music Perception, 3(4), pp. 327-392, 1986.

[LEWIN 1987] D. Lewin : *Generalized Musical Intervals and Transformations*, New Haven, Yale University Press, 1987.

[LEWIN 1993] D. Lewin : *Musical Form and Transformation: 4 Analytic Essays*, New Haven, Yale University Press, 1993.

[LEWIN 2001] D. Lewin : « Special cases of the interval function between pitch-class sets X and Y », *Journal of Music Theory*, 45(1), pp. 1-30, 2001.

[LEYTON 2001] M. Leyton : *A Generative Theory of Shape*, Springer, 2001.

[LIEBERSON 1985] P. Lieberson : Milton Babbitt's « Post-Partitions », PhD, Brandeis University, 1985.

[LOLLI 2002] G. Lolli : *Filosofia della Matematica. L'eredità del Novecento*, Il Mulino, 2002.

[LONGUET-HIGGINS 1962] H.C. Longuet-Higgins : « Two letters to a musical friend », *Music Review*, pp. 244–248 et pp. 271–280, 1962 (repris dans [LONGUET-HIGGINS 1987], pp. 64-81).

[LONGUET-HIGGINS 1976/1987] H.C. Longuet-Higgins : « The Perception of melodies », *Nature*, 263, n° 5579, pp. 646-653 (repris dans [LONGUET-HIGGINS 1987], pp. 106-129).

[LONGUET-HIGGINS 1978/1987] H.C. Longuet-Higgins : « The Grammar of Music », *Interdisciplinary Science Reviews*, 3, n° 2, pp. 148-156, 1978 (repris dans [LONGUET-HIGGINS 1987], pp. 130-149).

[LONGUET-HIGGINS 1987] H.C. Longuet-Higgins : *Mental Processes. Studies in Cognitive Sciences*, The MIT Press, 1987.

[LONGUET-HIGGINS 1989] H.C. Longuet-Higgins : « Modelling Musical Cognition », *CMR*, 3, pp. 15–27, 1989.

[LONGUET-HIGGINS 1994] H.C. Longuet-Higgins : « Artificial intelligence and musical cognition », *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 349, pp. 103-113, 1994.

[MÂCHE 1986/2000] F.-B. Mâche : « Les procédures d'analyse sémiologique », *Interbational Review of the Aesthetics and Sociology of Music*, 17(2), pp. 203-214, 1986 (repris dans [MÂCHE 2000], pp. 239-252).

[MÂCHE 1971/2000] F.-B. Mâche : « Méthodes linguistiques et musicologie », *Musique en jeu* n°5, Seuil, Paris, pp. 75-91, novembre 1971 (repris dans [MÂCHE 2000], pp. 100-122).

[MÂCHE 2000] F.-B. Mâche *Un demi-siècle de musique…et toujours contemporaine*, L'Harmattan, Paris, 2000.

[MacLANE 1989] S. MacLane : « The development of mathematical ideas by collision : The Case of Categories and Topos Theory » (dans [ADAMEK et MacLANE 1989], pp. 1-9).

[MacLANE 1997] S. MacLane : *Categories for the Working Mathematician*, Second Edition, Springer-Verlag, 1998.

[MacLANE et MOERDIJK 1992] S. MacLane, I. Moerdijk : *Sheaves in Geometry and Logic. A First Introduction to Topos Theory*, Speinger, 1992.

[MALT 2001] M. Malt : *Les mathématiques et la Composition assistée par Ordinateur (Concepts, Outils, Modèles)*, thèse, EHESS.

[MARTINO 1961] D. Martino : « The Source Set and Its Aggregate Formations », *Journal of Music Theory* , 5(2), pp. 224-273, 1961.

[MAZZOLA 1981] G. Mazzola : « Die gruppentheoretische methodes in der Musk », *Lectures Notes*, Zürich, 1981.

[MAZZOLA 1989] G. Mazzola (et al.) : « A Symmetry-Oriented Mathematical Model of Classical Counterpoint and Related Neurophysiological Investigations by Depth-EEG «, dans I. Hargittai (sous la direction de) : *Symmetry II*, CAMWA, Pergamon, New York, 1989.

[MAZZOLA 1990] G. Mazzola : *Geometrie der Töne*, Birkhäuser Verlag, 1990.

[MAZZOLA 1998] G. Mazzola : « Semiotic Aspects of Musicology: Semiotics of Music «, dans R. Posner et al. (sous la direction de) : *A Handbook on the Sign-theoretic Foundations of Nature and Culture.* Walter de Gruyter, Berlin and New York 1998.

[MAZZOLA 2002] G. Mazzola : « The Topos Geometry of Musical Logic » (dans *Mathematics and Music* [ASSAYAG *et al.* 2002], pp. 199-213).

[MAZZOLA 2003] G. Mazzola : *The Topos of Music*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.

[MEAD 1994] A. Mead : *An introduction to the music of Milton Babbitt*, Princeton University Press, 1994

[MEEÙS 1993] N. Meeùs : *Heinrich Schenker. Une introduction*, Mardaga, 1993.

[MESNAGE 1989] M. Mesnage : « La *Set-Complex Theory:* de quels enjeux s'agit-il? », *Analyse musicale*, 4e trimestre, pp. 87-90, 1989.

[MESNAGE 1991] M. Mesnage : « Sur la modélisation des partitions musicales «, *Analyse Musicale,* n°22, pp. 31-46, Février 1991.

[MESNAGE et RIOTTE 1993] M. Mesnage et A. Riotte : « Modélisation informatique de partitions, analyse et composition assisté, *Les Cahiers de l'IRCAM n°3,* pp. 43-59, 2e trimestre 1993.

[MESNAGE 1997] M. Mesnage : « Entités formelles pour l'analyse musicale » (dans [GENEVOIS et ORLAREY 1997], pp. 93-109).

[MESSIAEN 1944] O. Messiaen : *Technique de mon langage musical,* Alphonse Leduc, Editions Musicales, Paris, 1944.

[MESSIAEN 1992] O. Messiaen : *Traité de Rythme, de Couleur et d'Ornithologie,* tome 2, Alphonse Leduc, Editions Musicales, Paris, 1992.

[MEYER 1956] L.B. Meyer : *Emotion and Meaning in Music,* Chicago, University of Chicago Press, 1956.

[MEYER 1957/1967] L.B. Meyer : « Meaning in Music and Information Theory », *Journal of Aesthetics and Art Criticism,* 15 (4), pp. 412-424, 1957 (repris dans L.B. Meyer : *Music, the arts and Ideas,* Chicago University Press, 1967).

[MINKOWSKI 1896] H. Minkowski : *Geometrie der Zahlen*, Leipzig, 1896.

[MINKOWSKI 1907] H. Minkowski : *Diophantische Approximationen. Eine Einführung in die Zahlentheorie,* Chelsea Publishing Company, New York, 1907.

[MOLES 1958] A. Moles : *Théorie de l'Information et perception esthétique,* Flammarion, Paris, 1958.

[MOLINO 1975] J. Molino : « Fait musical et sémiologie de la musique », *Musique en jeu,* 17, pp. 11-36, 1975.

[MORRIS 1987] R. Morris : *Composition with Pitch-Classes: A Theory of Compositional Design*, New Haven, Yale University Press, 1987.

[MORRIS 1995] R. Morris : « Compositional Spaces and Other Territories », *Perspectives of New Music,* 33, pp. 328-358, 1995.

[MORRIS 1997] R. Morris : « K, Kh, and Beyond » (dans [BAKER 1997], pp. 275-306).

[MORRIS 1998] R. Morris : « Voice-Leading Spaces », *Music Theory Spectrum*, 20(2), pp. 175-208, 1998.

[MORRIS 2001a] R. Morris : *Class Notes for Adanced Atonal Music Theory* (en deux volumes), Frog Peak Music, 2001.

[MORRIS 2001b] R. Morris : « Some things I learned (didn't learn) from Milton Babbitt or Why I am (am not) a Serial Composer », *The Open Space Magazine*, 3, pp. 59-102, 2001.

[MUZZULINI 1995] D. Muzzulini : « Musical Modulation by Symmetries «, *Journal of Music Theory*, 39(2), pp. 311-325, 1995.

[NARMOUR 1977] E. Narmour : *Beyond Schenkerism. The Need for alternatives in music analysis*, Chicago University Press, 1977.

[NARMOUR 1990] E. Narmour : *The Analysis and cognition of basic melodic structures. The implication-realization model*, Chicago University Press, 1990.

[NARMOUR 1992] E. Narmour : *The Analysis and cognition of melodic complexity. The Implication-realization model*, Chicago University Press, 1992.

[NATTIEZ 1971] J.-J. Nattiez : « Situation de la semiologie musicale », *Musique en jeu*, n° 5, Seuil éd., Paris, pp. 3-18, 1971.

[NATTIEZ 1975] J.-J. Nattiez : *Fondements d'une sémiologie de la musique*, coll. 10/18, Paris, 1975.

[NATTIEZ 1987] J.-J. Nattiez : *Musicologie générale et sémiologie*, Paris, Christian Bourgeois éd., 1987.

[NATTIEZ 2002] J.-J. Nattiez : « Sémiologie musicale et herméneutique. Une analyse et quelques considérations épistémologiques » (dans [CHOUVEL et LEVY 2002], pp. 143-174).

[NATTIEZ 2003] J.-J. Nattiez : « La Set Theory d'Allen Forte, le niveau neutre et la poïétique », *Colloque International Autour de la Set Theory*, Ircam, 15-16 octobre 2003 (document inédit).

[NICOLAS 1991] F. Nicolas : « Pour une intellectualité musicale », dans *InHarmoniques* n° 8/9 (Musique recherche théorie), janvier 1991. Texte disponible en ligne à l'adresse :

http://mediatheque.ircam.fr/articles/textes/Nicolas91a/

[NICOLAS 1996] F. Nicolas : « Quelle unité pour l'œuvre musicale moderne? Une lecture d'Albert Lautman «, *Séminaire de travail sur la philosophie*, Lyon, 1996.

[NICOLAS 1999] F. Nicolas : « Le pli du sérialisme », *L'Observatoire Musical Français n°7*, Paris-Sorbonne, pp. 93-107, 1999.

[NICOLAS 2000] F. Nicolas : « Qu'espérer des logiques musicales mises en œuvre au XX^{e} siècle » (dans I. Deliège et M. Paddison : *Musique contemporaine. Perspectives théoriques et philosophiques*, Mardaga, Bruxelles, 2000).

[NICOLAS 2002] F. Nicolas : « Questions of Logic : Writing, Dialectics and Musical Strategies » (dans [ASSAYAG et al. 2002], pp. 89-111).

[NICOLAS 2003] F. Nicolas : « Quand l'algèbre mathématique aide à penser (et pas seulement à calculer) la combinatoire musicale », *Séminaire MaMuX (Mathématiques/Musique et relations avec d'autres disciplines)*, Ircam, février 2003. Disponible en ligne à l'adresse :
http://www.entretemps.asso.fr/Nicolas/TextesNic/mamux.html

[NOLL 1995] T. Noll : *Morphologische Grundlage der abendländischen Harmonik*, PhD, TU-Berlin, 1995.

[NOLL 2002] T. Noll : « Tone Apperception and Weber-Fechner's Law », *Séminaire MaMuX (Mathématiques/Musique et relations avec d'autres disciplines*, Ircam, décembre 2002.

[NOLL et NESTKE 2003] T. Noll, A. Nestke : « L'aperception des hauteurs », *Séminaire Entretemps MaMuPhi (Mathématiques, Musique et Philosophie)*, Ircam, 2002 (à paraître dans *Mathématique et Musique*, G. Assayag et al., Ircam/L'Harmattan, 2003).

[O'CONNELL 1968] W. O'Connell : « Tone Spaces », *Die Reihe*, vol. 8, pp. 35-67, 1968.

[ODIFREDDI 2000] P. Odifreddi : *La matematica del Novecento. Dagli insiemi alla complessità*, Einaudi, Torino, 2000.

[ORCALLI 1993] A. Orcalli : *Fenomenologia della musica sperimentale*, Sonus Edizioni Musicali, Potenza, 1993.

[ORCALLI 1996] A. Orcalli : *Stanze inesplorate dell'armonia. Sull'estetica musicale di Camillo Durutte,* Guerini Studio, Milano, 1996.

[ORCALLI 2001] A. Orcalli : « Gruppi algebrici e invarianti percettivi nella teoria musicale contemporanea », dans *Studi sul Novecento musicale, in memoria di Ugo Duse*, Forum, pp. 135-183, 2001.

[OSMOND-SMITH 1973] D. Osmond-Smith : « Iconic relations within formal transformation », dans les *Actes du 1er congres international de sémiotique musicale*, Belgrade, 1973.

[OSMOND-SMITH 1975] D. Osmond-Smith : « Introduction générale à une méthode d'analyse sémiotique formelle de la musique », dans *La musique en projet*, nrf, Gallimard, 1975.

[OTTERSTRÖM 1935] T. Otterström : *A Theory of modulation*, The University of Chicago, 1935.

[PALISCA et BENT 2001-2002] C. V. Palisca et I. D. Bent : « Theory », *The New Grove Dictionary of Music Online,* éd. Laura Macy. Disponible à l'adresse :
http://www.grovemusic.com

[PATRAS 1996a] F. Patras : « Sur la phénoménologie de la connaissance mathématique » (dans [COURTINE 1996], pp. 109-121).

[PATRAS 1996b] F. Patras : « Phénoménologie et mathématiques : de la logique formelle à la logique transcendantale », *Séminaire de Philosophie et Mathématiques*, E.N.S., Paris, Novembre 1996 (texte inédit).

[PATRAS 2001] F. Patras : *La pensée mathématique contemporaine*, Presses Universitaires de France, 2001.

[PATRAS 2003] F. Patras : « Phénoménologie et théorie des catégories » (dans [BOI 2003], à paraître).

[PECK 2003] R. Peck : « Toward an Interpretation of Xenakis's *Nomos Alpha* », *Perspectives of New Music*, 41(1), pp. 106-157, 2003.

[PEEL 1976] J. Peel : « On some celebrated mesures of the Schoenberg String Trio », *Perspectives of New Music*, 14/15, n° 1/2, pp. 260-279, 1976.

[PERLE 1962/1981] G. Perle : *Serial Composition and Atonality: An Introduction to the Music of Schoenberg, Berg and Webern*, 5th edition, revised, Berkeley, University of California Press, 1981.

[PERLE 1990] G. Perle : « Pitch-Class Set Analysis: An Evaluation », *Journal of Musicology*, 8/2, pp. 151-172, 1990.

[PETITOT 1985] J. Petitot : *Morphogenèse du sens*, Presses Universitaires de France, 1985.

[PETITOT *et al.* 2002] J. Petitot, F. J. Varela, B. Pachoud, J.-M. Roy : *Naturaliser la phénoménologie. Essais sur la phénoménologie contemporaine et les sciences cognitives*, CNRS Editions, Paris, 2002.

[PHILIPPOT 1976] M. Philippot : « Ear, Heart and Brain (A critical celebration of Milton Babbitt) », *Perspectives of New Music*, 14-15(1-2), pp. 45–60, 1976.

[PIAGET 1938] J. Piaget : « La réversibilité des opérations et l'importance de la notion de « groupe » pour la psychologie de la pensée », *Rapports et compte-rendus du XI*e *Congrès International de Psychologie*, Paris, 1938.

[PIAGET 1946] J. Piaget : *Le développement de la notion de temps chez l'enfant*, Presses Universitaires de France, Paris, 1946.

[PIAGET 1949] J. Piaget : *Essai de logistique opératoire*, Paris, Armand Colin, 1949.

[PIAGET 1968] J. Piaget : *Le structuralisme*, Paris, Presses Universitaires de France, « Que sais-je ? », 1968.

[PIAGET 1974] J. Piaget : « Structures et catégories », *Logique et Analyse*, Bruxelles, pp. 67-68, pp. 223-240, 1974.

[PIAGET 1977] J. Piaget : « Recherches sur l'abstraction réfléchissante », *Etudes d'épistémologie génétique*, 34-35, Paris, Presses Universitaires de France, 1977.

[PIAGET 1978] J. Piaget : « Recherches sur la généralisation », *Etudes d'épistémologie génétique*, 36, Paris, Presses Universitaires de France, 1978.

[PIAGET *et al.* 1990] J. Piaget, G. Henriques, E. Ascher : *Morphismes et Catégories. Comparer et transformer*, Neuchâtel, Delachaux & Niestlé, 1990.

[POIRIER 1986] A. Poirier : « De Metastasis à l'UPIC », *Compte-rendu des séances préparatoires au cours de composition et d'analyse de Iannis Xenakis*, CNSMP, 6 mars, 1986 (texte inédit).

[POLYA et READ 1987] G. Polya, R.C. Read : *Combinatorial Enumeration of Groups, Graphs, and Chemical Compounds*, Springer Verlag, 1987.

[POPPER 1934] K. Popper : *Logique de la découverte scientifique*, Payot, 1934.

[POUILLON 1966] J. Pouillon : *Présentation* du numéro spécial des *Temps Modernes* (Problèmes du structuralisme), n° 246, nov. 1966.

[QUINE 1960] W. Quine : *Word and Object*, Cambridge/Mass., MIT Press, 1960.

[RAHN 1979/2001] J. Rahn : « Logic, Set Theory, Music Theory », *College Music Symposium*, 19 (1), pp. 114-127, 1979 (repris dans [RAHN 2001], pp. 109-125).

[RAHN 1980a] J. Rahn : *Basic Atonal Theory*, New York, Longman, 1980.

[RAHN 1980b] J. Rahn : « On Some Computational Models of Music Theory », *Computer Music Journal*, 4(2), pp. 66-72, 1980.

[RAHN 1987] J. Rahn : Revue du livre *Generalized Musical Intervals and Transformations*, dans *Journal of Music Theory*, 31, pp. 305-318, 1987.

[RAHN 1989a] J. Rahn : « Notes on Methodology in Music Theory », *Journal of Music Theory*, 33(1), pp. 143-154, 1989 (repris dans [RAHN 2001], pp. 69-82).

[RAHN 1989b] J. Rahn : « New Research Paradigms », *Music Theory Spectrum*, vol. II, n° 1, 1989 (repris dans [RAHN 2001], pp. 83-99).

[RAHN 2001] J. Rahn : *Music Inside Out. Going too far in musical essays*, Overseas Publisher Association, 2001.

[RAHN 2003] J. Rahn : « The Swerve and the Flow : Music's Relationship to Mathematics », *Colloque International Autour de la Set Theory*, Ircam, 15-16 octobre 2003 (document inédit).

[READ 1996] R. C. Read : « Combinatorial problems in the theory of music », *Discrete Mathematics*, 167/168, n° 1-3, pp. 543-551, 1997.

[RÉDEI 1947] L. Rédei : « Zwei Lückensätze über Polynome in endlichen Primkörpern mit Anwendung auf die endlischen Abelschen Gruppen und die Gaussischen Summen », *Acta Math.*, 79, pp. 273-290, 1947.

[RÉDEI 1967] L. Rédei : *Algebra I*, Pergamon Press, 1967.

[RESTAGNO 1988] E. Restagno (sous la direction de) : *Xenakis*, Biblioteca di cultura musicale, E.D.T., Torino, 1988.

[REVAUL D'ALLONNES 1973] O. Revault D'Allonnes : *La création artistique et les promesses de la liberté*, Paris, Klincksieck, 1973

[RIEMANN 1914] H. Riemann : « Ideen zu einer 'Lehre von den Tonvorstellungen' », *Jahrbuch Peters*, 21/22, pp. 1-26, 1914.

[RIORDAN 1958] J. Riordan : *An Introduction to Combinatorial Analysis*, John Wiley éd., New York, 1958.

[RIOTTE 1963] A. Riotte : « Génération des cycles équilibrés «, Rapport interne n°353, Euratom, Ispra, 1963.

[RIOTTE 1969] A. Riotte : « Il nanosecondo ben temperato », Rivista IBM, Vol. 5 n°2, Milan, 1969.

[RIOTTE 1979] A. Riotte : *Formalisation des structures musicales,* thèse, Université Paris VIII, département d'informatique, Paris, 1979.

[RIOTTE 1978/1990] A. Riotte : *Formalisation des structures musicales,* Contenu des cours dispensés par André Riotte à l'Université Paris 8 puis aux départements Informatique et Musique, 1978-1990. Disponible en ligne à l'adresse :
http://www.riottemusicalfoundation.org/base.htm

[RIOTTE 1992] A. Riotte : « L'utilisation de modèles mathématiques en analyse et en composition musicales », *Quadrivium Musiques et Sciences*, éditions ipmc, La Villette, Paris, 1992.

[RIOTTE et MESNAGE 2003] A. Riotte, M. Mesnage : *Formalismes et modèles musicaux*, L'Harmattan (à paraître décembre 2003).

[RISSET 1991] J.-C. Risset : « Musique, recherche, théorie, espace, chaos «, *Inharmoniques n° 8/9,* IRCAM, 1991.

[RISSET 2002] J.-C. Risset : « Computing Musical Sound « (dans [ASSAYAG et al. 2002], pp. 215-231).

[ROCHBERG 1959] G. Rochberg : « The Harmonic Tendency of the Hexachord », *Journal of Music Theory*, 3, pp. 208-230, 1959.

[ROEDER 1993] J. Roeder : « A MaMuTh Achievement «, *Perspectives of New Music,* 31(2), pp. 294-312, 1993.

[ROEDER 1994] J. Roeder : « Voice leading as transformation « (dans [ATLAS et CHERLIN 1994], pp. 41-58).

[ROMANOWSKA 1974] A. Romanowska : « Algebraic structure of the Tone System », *Demonstratio Mathematica*, vol. VII, n° 4, pp. 525-542, 1974.

[ROMANOWSKA 2001] A. Romanowska : « Algebraic language in the theory of harmony », *Tatra Mt. Math. Publ.*, 23, pp. 113-123, 2001.

[RUWET 1966] N. Ruwet : « Méthodes d'analyse en musicologie », *Revue belge de Musicologie*, 20, pp. 65-90, 1966 (repris dans [RUWET 1972], pp. 100-134).

[RUWET 1972] N. Ruwet : *Langage, Musique, Poésie*, Seuil, Paris, 1972.

[SANDS 1957] A. Sands : « On the factorization of finite abelian groupes », *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 8, pp. 65-86, 1957.

[SANDS 1959] A. Sands : « The Factorisation of Abelian Groups «, *Quart. J. Math. Oxford*, vol. 2 n° 10, pp. 81-91, 1959.

[SANDS 1964] A. Sands : « Factorization of cyclic groups » (dans [FUCHS et SCHMIDT 1964], pp. 139-146).

[SANDS 1962] A. Sands : On a problem of L. Fuchs, *Journal of the London Math. Society*, 137, pp. 277-284, 1962.

[SCHAUB 1996] S. Schaub : *Algebraic Structures and Symmetry in Western Music,* Thesis, Department of Mathematics, University of Arizona, 1996.

[SCHAUB 2001] S. Schaub: *L'hypothèse Mathématique. Musique symbolique et composition musicale dans Herma de Iannis Xenakis,* Mémoire de DEA, Paris Sorbonne, 2001.

[SCHILLINGER 1941] F. Schillinger : *The Schllinger system of musical composition,* New York, Carl Fisher inc., 2 vol., 1941.

[SCHILLINGER 1948] F. Schillinger : *The mathematical basis of the art,* The Philosophical Library, 1948.

[SCHNAPPER 1998] L. Schnapper : *L'Ostinato, procédé musical universel*, Éditions Honoré Champion, Collection Musique / Musicologie, 1998.

[SCHNITZLER 1976] G. Schnitzler : *Musik und Zahl*, Verlag für systematische Musikwissenschaft, Bonn-Bad Godesberg, 1976.

[SCHOENBERG 1922] A. Schoenberg : *Harmonielehre*, Universal Edition, Wien, 1922.

[SCIMENI 1997] B. Scimeni : « Contrappunto musicale e trasformazioni geometriche «, *Atti del colloquio Matematica e Cultura,* Springer Verlag, pp. 77-86, 1997.

[SEEGER 1977] C. Seeger : *Studies in Musicology*, University of California Press, 1977.

[SHANNON et WEAVER 1949] C. E. Shannon et W. Weaver : *The Mathematical Theory of Communication*, Urbana, 1949.

[SOLOMOS 1993] M. Solomos, *A propos des premières œuvres (1953-1969) de Iannis Xenakis*, Thèse de doctorat, Université de Paris IV, Sorbonne, 1993.

[SOSSINSKY 1999] A. Sossinsky : *Nœuds. Genèse d'une théorie mathématique*, Seuil éd., 1999.

[STARR 1978] D. Starr : « Sets, Invariance and Partitions », *Journal of Music Theory*, 22(1), pp. 1-42, 1978.

[STARR et MORRIS 1978] D. Starr et R. Morris : « A General Theory of Combinatoriality and the Aggregate » *Perspectives of New Music*, 16(1), pp. 364-389, 16(2) pp. 50-84, 1977-78.

[STRAUS 1977] J. N. Straus : « Voice Leading in Atonal Music » (dans [BAKER 1997], pp. 237-274).

[STEIN 1974] S. K. Stein : « Algebraic Tiling », *Amer. Math. Month*., 81, pp. 445–462, 1974.

[STEIN et SZABÓ 1994] S. Stein, S. Szabó : *Algebra and Tiling,* The Carus Mathematical Monographs, n°25, 1994.

[STERNBERG et DAVIDSON 1986] R. J. Sternberg, J. E. Davidson : *Conceptions of Giftedness*, Cambridge University Press, New York, 1986.

[STRAUS 1990] J. Straus : *Introduction to post-tonal theory,* Prentice-Hall, New Jersey, 1990.

[SZABÓ 1993] S. Szabó : « Cube Tilings as Contributions of Algebra to Geometry », Contributions to Algebra and Geometry, 34(1), pp. 63–75, 1993.

[STOCKHAUSEN 1957/1988] K. Stockhausen : « Wie die Zeit vergeht », *Die Reihe*, n°3, 1957 (traduit en français par Christian Meyer : « Comment passe le temps », Contrechamps, n° 9, Paris, Editions L'Age d'Homme pp. 26-65, 1988).

[TANGIAN 2001] A. Tangian : « The Sieve of Eratosthene for Diophantine equations in integer polynomials and Johnson's problem », Discussion paper No. 309, FernUniversity of Hagen, 2001.

[TYMOCZKO 1998] Thomas Tymoczko : *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Revised and Expanded Edition, Princeton University Press, 1998.

[VAN DER WAERDEN 1930] B. L. van der Waerden : *Moderne Algebra*, Springer, 1930.

[VANDENBOGAERDE 1968] F. Vandenbogaerde : « Analyse de "Nomos Alpha" de I. Xenakis », *Mathématiques et Sciences Humaines*, n° 24, pp. 35-50, 1968.

[VARGA 1996] B. Varga : *Conversation with Iannis Xenakis*, London: Faber and Faber, 1996.

[VARESE 1983] E. Varèse : *Ecrits*, Bourgois, 1983.

[VECCHIONE 1992] « La Recherche musicologique aujourd'hui : questionnements, intersciences, Métamusicologie «, *Interface*, 2 n°1, pp. 281-322, 1992.

[VERDI 1998] L. Verdi : *Organizzazione delle altezze nello spazio temperato*, Diastema, Ensemble 900, Treviso, 1998.

[VIERU 1978] A. Vieru : « In domeniul formei muzicale » (dans le domaine de la forme musicale), *Studii de muzicologie*, 8, pp. 141-155, Bucarest, 1978.

[VIERU 1980] A. Vieru : *Cartea modurilor,* 1 (*Le livre des modes,* 1), Ed. muzicala, Bucarest, 1980.

[VIERU 1983/1994b] A. Vieru : « Introducere la o carte de Dan Vuza », 1983 (dans [VIERU 1994b], pp. 58-60).

[VIERU 1985] A. Vieru : « Modalism - A "Third World" «, *Perspectives of New Music,* 24, pp. 62-71, 1985.

[VIERU 1987] A. Vieru : « La théorie moderne des modes et l'atonalisme (autour d'un livre) », *Muzica*, n° 3, pp. 42-48, 1987.

[VIERU 1992] A. Vieru : « Generating Modal Sequences « (A remote approach to Minimal Music), *Perspectives of New Music,* 30 (2), pp. 178-200, 1992.

[VIERU 1993] A. Vieru : *The book of modes* (2nd Edition), Editura Muzicala, Bucarest, 1993.

[VIERU 1994a] A. Vieru : *Cuvinte despre sunete*, Cartea Romanesca, 1994.

[VIERU 1994b] A. Vieru : « Une théorie musicale pour la période postmoderne », *Muzica*, 2, pp. 20-26, 1994.

[VIERU 1995] A. Vieru : « The Musical signification of Multipplication by 7. Diatonicity and Chromaticity », *Muzica*, 1, pp. 64-67, 1995.

[VIERU 1998a] A. Vieru : « Privire retrospectiva asupra teoriei modurilor » (Rétrospective sur la théorie des modes), *Muzica*, 3, pp. 47-52, 1998.

[VIERU 1998b] A. Vieru : « Natura si cultura in perceptia muzicala » (nature et culture dans la perception musicale), *Muzica*, 2, pp. 36-39, 1998.

[VOGEL 1975] M. Vogel : *Die Lehre von den Tonbeziehungen*, Verlag für systematischen Musikwissenschaft, Bonn-Bad Godesberg, 1975.

[VRIEND 1981] J. Vriend, J : « "Nomos Alpha" for violoncello solo. Analysis and Comments », *Interface-Journal of new music research*, 10 (1), pp. 15-82, 1981.

[VUILLEMIN 1962/1993] J. Vuillemin : *La Philosophie de l'algèbre. Recherches sur quelques concepts et méthodes de l'algèbre moderne,* Presses Universitaires de France, 1962 (2e édition, 1993).

[VUZA1982-1986] D.T. Vuza : « Aspects mathématiques dans la théorie modale d'Anatol Vieru « (en 5 parties), *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées* Vol. 27, n°2, pp. 219-248 et n°10, pp. 1091-1099, 1982 ; Vol. 28, n°7, pp. 665-673 et n°8, pp. 757-773, 1983 ; Vol. 31, n°5, pp. 399-413, 1986.

[VUZA 1984] D. T. Vuza : « Propriétés des suites périodiques utilisées dans la pratique modale », *Muzica*, 2, pp. 44-48, 1984.

[VUZA 1985] D.T. Vuza : « Sur le rythme périodique «, *Revue Roumaine de Linguistique-Cahiers de linguistique Théorique et Appliquée* 23, n°1, pp. 73-103, 1985.

[VUZA 1988] D.T. Vuza : « Some Mathematical Aspects of David Lewin's Book *Generalized Musical Intervals and Transformations* «, *Perspectives of New Music* 26(1), pp. 258-287, 1988.

[VUZA 1991] D.T. Vuza : « Supplementary Sets and Regular Complementary Unending Canons I «, *Perspectives of New Music,* 29(2), pp. 22-49, 1991.

[VUZA 1992a] D.T. Vuza : « Supplementary Sets and Regular Complementary Unending Canons II «, *Perspectives of New Music,* 30(1), pp. 184-207, 1992.

[VUZA 1992b] D.T. Vuza : « Supplementary Sets and Regular Complementary Unending Canons III «, *Perspectives of New Music,* 30(2), pp. 102-125, 1992.

[VUZA 1993] D.T. Vuza : « Supplementary Sets and Regular Complementary Unending Canons IV «, *Perspectives of New Music,* 31(1), pp. 270-305, 1993.

[VUZA 1995] D.T. Vuza : « Supplementary Sets - Theory and Algorithms, Muzica n°1 «, pp. 75-99, 1995.

[WEYL 1952/1964] H. Weyl : *Symmetry,* Princeton University Press, 1952 (Traduction française : *Symétrie et mathématique moderne*, Flammarion, 1964).

[WILCOX 1983] J. Wilcox : « Group tables and the generalized hexachord theorem », *Perspective of new music,* 21/1-2, pp. 535-539, 1983.

[WILLE 1976] R. Wille : « Mathematik und Musiktheorie » (dans [SCHNITZLER 1976], pp. 233-264).

[WILLE 1980] R. Wille : « Mathematische Sprache in der Musiktheorie «, *Jahrbuch über Math.,* pp. 167-184, 1980.

[WILLE 1982] R. Wille : « Symmetrien in der Musik «, *Neue Zeitschrift für Musik,* pp. 12-19, Déc. 1982.

[WILLE 1985] R. Wille : « Musiktheorie und Mathematik « (dans [GÖTZE et WILLE 1985], pp. 4-31).

[WYSCHNEGRADSKY 1996] I. Wyschnegradsky : *Loi de la Pansonorité,* Editions Contrechamps, 1996.

[XENAKIS 1955] I. Xenakis : « La crise de la musique sérielle »**,** *Gravesaner Blätter,* 1, pp. 2-4, 1955.

[XENAKIS 1961] I. Xenakis : « La musique stochastique : éléments sur les procédés probabilistes de composition musicale », *Revue d'Esthétique*, vol. 14 n°4-5, 1961.

[XENAKIS 1963/1981] I. Xenakis : *Musiques Formelles,* Revue Musicale n° 252-254, Paris, 1963 (réédition Stock Musique, Paris, 1981).

[XENAKIS 1965] I. Xenakis : « La voie de la recherche et de la question «, *Preuves,* n° 177, novembre 1965 (repris dans [XENAKIS 1994], pp. 67-74).

[XENAKIS 1968a] I. Xenakis : « Une note », *La Revue Musicale,* p. 51, Octobre 1968.

[XENAKIS 1968b] I. Xenakis : « E.m.a.mu (Equipe de Mathématique et d'Automatique Musicale) », *La Revue Musicale*, pp. 53-59, Octobre 1968.

[XENAKIS 1971] I. Xenakis : *Formalized Music,* Indiana University Press, 1971.

[XENAKIS 1976] I. Xenakis : *Musique. Architecture,* Casterman, 1976.

[XENAKIS 1979] I. Xenakis : *Art/Sciences. Alliages,* (avec O. Messiaen, M. Ragon, O. Revault d'Allones, M. Serres, B. Teyssedre), Casterman, 1979.

[XENAKIS 1980] Iannis Xenakis : « Si Dieu existait, il serait bricoleur », Les Entretiens du Monde de la musique, pp. 93-97, 1980.

[XENAKIS 1981] I. Xenakis : « Les chemins de la composition musicale «, *Le Compositeur et l'ordinateur,* IRCAM, 1981.

[XENAKIS 1983] I. Xenakis : « Problèmes actuels de composition musicale «, Conférence, Saclay, 1983 (texte inédit).

[XENAKIS 1985] I. Xenakis : *Arts/Sciences - Alloys,* Stuyvesant: Pendragon Press, 1985 (traduction élargie de [XENAKIS 1979]).

[XENAKIS 1988] I. Xenakis : « Redécouvrir le temps », éditions de l'Université de Bruxelles, 1988 (repris dans [XENAKIS 1996], pp. 29-47)

[XENAKIS 1992] I. Xenakis : *Formalized Music,* (Revised Edition), Pendragon Press, Stuyvesant NY, 1992.

[XENAKIS 1994] I. Xenakis : *Kéleütha,* L'Arche éd., 1994.

[XENAKIS 1996] I. Xenakis : *Musique et originalité*, Nouvelles Editions Seguier, Paris, 1996.

[YUNG et REES 1999] B. Yung, H. Rees : *Understanding Charles Seeger, pioneer in American musicology*, Urbana, University of Illinois Press, 1999.

[ZALEWSKI 1972] M. Zalewski : *Harmonia Teoretyczna*, PWSM, 1972.

[ZWEIFEL 1996] P. E. Zweifel : « Generalized Diatonic and Pentatonic Scales: A Group-theoretic approach », *Perspectives of New Music*, 34(1), pp. 140-161, 1996.