MIRJANA VUKOVIĆ

JEDNAČINE

Diferencijalne Jednačine

parcijalne diferencijalne jednačine
jednačine matematičke fizike

2

Teorija i zadaci sa rješenjima

UNIVERZITETSKA KNJIGA

DR. MIRJANA VUKOVIĆ
redovni profesor Prirodno-matematičkog Fakuleta u Sarajevu

Diferencijalne Jednačine

- drugi dio -

parcijalne diferencijalne jednačine
jednačine matematičke fizike

Teorija i zadaci sa rješenjima

UNIVERZITETSKA KNJIGA
Sarajevo, 2001.

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE 2

– TEORIJA I ZADACI –

Autor:
prof. dr. Mirjana VUKOVIĆ

Odgovorni urednik:
Vladimir KOMANOVIĆ

Recenzenti:
Akad. Fikret VAJZOVIĆ,
redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu
Akad. Veselin PERIĆ,
redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Podgorici

Naslovna strana&DTP:
dipl. ing. Nino HASANOVIĆ

Korekturu izvršio autor

Tiraž:
500 primjeraka

Izdaje:
Studentska štamparija Univerziteta u Sarajevu

Štampa:
DES Sarajevo

Ova knjiga je štampana uz finansijsku pomoć:
- Federalnog ministarstva obrazovanja, nauke, kulture i sporta
- Kantonalnog ministarstva za obrazovanje, nauku i informisanje
- SOROS Fondacije "OTVORENO DRUŠTVO"
- Udruženja Matematičara BiH

CIP - Katalogizacija u publikaciji
Nacionalna i univerzitetska biblioteka Bosne i Hercegovine,
Sarajevo

517.9 (075.8) (076.1/.2)

VUKOVIĆ, Mirjana

Diferencijalne jednačine. : teorija i zadaci s rješenjima / Mirjana Vuković. - Sarajevo : Studentska štamparija Univerziteta, 2001. - Knj. 2 : graf. prikazi ; 24 cm.- (Univerzitetska knjiga) Dio 2 : Teorija i zadaci. - 258 str.

ISBN 9958-44-060-1

COBISS/BiH-ID 0

Objavljivanje ovog udžbenika odobrio je Senat Univerziteta u Sarajevu rješenjem br. 01-1274-8/00 od 06.12.2000. godine, a na osnovu mišljenja Federalnog ministarstva obrazovanja nauke i kulture broj 03-15-1088-1/01 od 12.03.2001. godine ovaj udžbeni je oslobođen plaćanja poreza na promet.

PREDGOVOR

Diferencijalne jednačine su jedna od najvažnijih oblasti, kako klasične, tako i moderne matematike, čije se metode koriste ne samo u velikom broju matematičkih disciplina, numeričkoj i primjenjenoj matematici i fizici, nego i u svim prirodnim naukama i tehnici. Mnogi problemi fizike, hemije, biologije i svih oblasti tehnike svode se na problem rješavanja nekih konkretnih diferencijalnih jednačina sa kojim se, u tolikoj mjeri, prožimaju da je često nemoguće odrediti gdje završava neka od njih i počinje matematika i obrnuto.

Udžbenik **Diferencijalne jednačine – Teorija i zadaci**, koji izlazi u ediciji "Univerzitetska knjiga" Univerziteta u Sarajevu, pisan je na temelju dugogodišnjeg iskustva, prema programu predmeta Diferencijalne jednačine i Analiza III iz kojih sam, tokom svoje univerzitetske karijere, držala vježbe, a zatim i predavanja studentima treće godine matematike, Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu.

Zadaci uključeni u ovu zbirku su zadaci koje sam radila na vježbama, ali je najviše onih koje sam davala na pismenim ispitima iz Diferencijalnih jednačina, kada sam na tom predmetu bila asistent akademika Fikreta Vajzovića (1972–79), odnosno Analize III, iz koje sam izvodila nastavu (predavanje i vježbe) već kao asistent (1976 –). Osim toga, u zbirku je uključen i izvjestan broj lijepih zadataka koje su, i prije mene, na ispitima davali i moji profesori akademici Mahmut Bajraktarević, iz Diferencijalnih jednačina, studentima matematike i Manojlo Maravić, iz Jednačina matematičke fizike, postdiplomcima na univerzitetima širom Bosne i Hercegovine.

U početku sam planirala da cjelokupan sadržaj uključim u jednu knjigu koja bi obuhvatala, kako obične, tako i parcijalne diferencijalne jednačine prvog i drugog reda, ali sam, kad je knjiga završena, zbog obimnosti materijala, odlučila da cjelokupan sadržaj podjelim na dva djela, prvi koji je već objavljen **Diferencijalne jednačine 1** (Obične diferencijalne jednačine i Sistemi diferencijalnih jednačina) i drugi **Diferencijalne jednačine 2** (Parcijalne diferencijalne jednačine prvog i drugog reda i Jednačine matematičke fizike) koji upravo izlazi iz štampe.

Osim toga, bilo je zamišljeno da ovaj udžbenik bude samo prateća zbirka zadataka odgovarajućeg teoretskog udžbenika, "ali je kraćim, ali preglednim, i za postavljeni cilj sasvim dovoljnim, elementima teorije, uz svaku grupu zadataka, ovaj udžbenik prevazišao zbirku zadataka i time, u velikoj mjeri učinjen samostalnim i nezavisnim od teoretskog udžbenika koji obično prati zbirke zadataka."

Udžbenik Diferencijalne jednačine 2 prekriva elementima teorije i zadacima osnovne oblasti parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog i drugog reda uključujući i jednačine matematičke fizike. Obuhvata 250 stranica teksta i oko 100 rješenih zadataka. Podjeljen je na tri glave:

I Parcijalne diferencijalne jednačine (9 – 110),

II Jednačine matematičke fizike (111 – 210) i

III Razni zadaci (211 – 232).

"Na početku svake glave dat je kratak, ali jasno iznesen, pregled teorije koja je potrebna za rješavanje zadataka te glave. Pored toga što taj koncizni pregled teorije pomaže rješavanju datih problema, on je, s obzirom da sadrži i materijale koji se na kursevima Diferencijalnih jednadžbi (običnih i parcijalnih) i Analize III ne izlažu, a potrebni su za potpunije upoznavanje s teorijom, istovremeno i dobra teoretska dopuna tim kursevima."

"Kao dobro obrazovan matematičar sa zavidnim obrazovanjem i iz oblasti fizike, autor je znalački odabrao znatan broj zadataka iz primjene, kako u fizici, tako i u tehnici. Preciznim formulacijama zadataka, od kojih neki imaju i opšti teorijski karakter, kao i pregledna, jasna i potpuna rješenja ovih zadataka, zadovoljiće upotpunosti potrebe širokog kruga studenata matematike, fizike i svih tehničkih fakulteta, kako drugog, tako i trećeg stepena, ali se toplo može preporučiti i nastavnicima ovog predmeta, kao i svim onim koji u svojoj profesionalnoj praksi koriste parcijalne diferencijalne jednačine." (iz recenzije)

U prvoj glavi, koja je posvećena parcijalnim diferencijalnim jednačinama prvog i drugog reda, najprije se uvodi pojam parcijalne diferencijalne jednačine i njenog opšteg i potpunog integrala. Posebno se razmatraju parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda (homogena i nehomogena) i za nju formuliše Cauchyev problem. Za homogenu linearnu diferencijalnu jednačinu opisuje se postupak za odredjivanje opšteg rješenja i za nju vezuje sistem običnih diferencijalnih jednačina u simetričnom obliku. Svaki od $(n\text{-}1)$ nezavisnih integrala toga sistema n-tog reda predstavlja neko rješenje pripadne parcijalne diferencijalne jednačine, a svaka, neprekidno diferencijabilna, funkcija tih integrala, predstavlja opšte rješenje pripadne parcijalne diferencijalne jednačine. Zatim se opisuje procedura kako se iz spomenutih prvih integrala pripadnog sistema običnih diferencijalnih jednačina dobija rješenje Cauchyevog problema date homogene parcijalne diferencijalne jednačine. Osim toga, nehomogena linearna parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda svodi se na homogenu tako što se njeno rješenje traži u implicitnom obliku. Nelinearni sistemi parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda promatraju se za slučaj funkcije dviju promjenljivih i za takav sistem odredjuje potreban i dovoljan uslov, poznat kao uslov potpune integrabilnosti, pod kojim sistem ima jednoparametarsku familiju rješenja. Uz taj uslov tražena jednoparametarska familija rješenja dobija se jednostavno. Zadatak da se odredi jednoparametarska familija površi, ortogonalnih na vektorskim linijama nekog vektorskog polja $\vec{F}$ u prostoru vodi na Pfaffovu diferencijalnu jednačinu. Problem koji je doveo do ove jednačine svodi se na odredjivanje funkcije $z = z(x,y)$ koja zadovoljava Pfaffovu diferencijalnu jednačinu. Ova jednačina, uz uslov $R(x,y,z) \neq 0$, svodi se na oblik $dz = -P/R\,dx - Q/R\,dy$, pa za svaku integralnu površ $z = z(x,y)$ vrijedi

$$\partial z/\partial x\,dx + \partial z/\partial y\,dy = -P/R\,dx - Q/R\,dy,$$

što vodi do sistema

$$\partial z/\partial x = -P/R, \quad \partial z/\partial y = -Q/R.$$

Dakle, Pfaffova jednačina ekvivalentna je posljednjem sistemu jednačina, tako da se problem njene potpune integrabilnosti svodi na uslov $\vec{F} \cdot rot\,\vec{F} = 0$, koji će sigurno biti ispunjen ako je polje $\vec{F}$ potencijalno, tj. $rot\,\vec{F} = 0$. U tom slučaju se integracija Pfaffove jednačine svodi na određivanje potencijala $u(x,y,z)$ polja $\vec{F}$ za koji je $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = du$. Ako polje nije potencijalno, onda postoji integracioni faktor $\mu(x,y,z)$ za koji je

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = udv \quad \left(u = 1/\mu(x,y,z)\right) \text{ itd.}$$

Pokazuje se da se, uopšte gledano, forma $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ može svesti na tri kanonska oblika: du, $u\,dv$, $du + v\,dw$, od kojih zavisi integracija Pfaffove jednačine. Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda, i to za funkcije samo dviju promjenljivih, razmatraju se u posebnoj sekciji glave. Iz potpunog integrala ove jednačine i jednakosti koje se dobiju njegovim parcijalnim diferenciranjem po x i y, se nakon eliminacije parametara a i b, dobija data diferencijalna jednačina. Kako je pokazao Lagrange, sva rješenja ove parcijalne diferencijalne jednačine mogu se dobiti iz njenog potpunog integrala metodom varijacije konstanti. Ako je

$$\partial a/\partial x = \partial b/\partial y = \partial b/\partial x = \partial a/\partial y = 0, \text{ onda je } a = const, \quad b = const,$$

pa se $V(x,y,z,a,b) = 0$ svodi na **potpuni integral**. Ako je $\partial V/\partial a = 0$ i $\partial V/\partial b = 0$ i ako se iz ovih dviju jednakosti i $V(x,y,z,a,b) = 0$ mogu eliminisati parametri a i b, tada se tako dobija **singularni integral** $z = z(x,y)$. Ako je, pak, $D(a,b)/D(x,y) = 0$, ali je bar jedan element ove determinante različit od nule, tada među elementima a i b postoji veza $b = \omega(a)$. U tom slučaju će rješenje biti dato sistemom $V(x,y,z,a,b) = 0$, $\partial V/\partial a + \partial V/\partial b\, \omega'(a) = 0$. Ono sadrži proizvoljnu funkciju i predstavlja **opšte rješenje**. Ako se za $\omega(a)$ odabere određena funkcija, onda se dobija **partikularno rješenje**. Sistem nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina sa funkcijom dviju promjenljivih rješava se i Lagrange-Charpitovom metodom. Za neke specijalne tipove jednačina navode se potpuni integrali u obliku tabele. Za parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda daje se geometrijska interpretacija uz upotrebu Mongeovog konusa i karakteristika. U ovoj interpretaciji Cauchyev problem rješava se određivanjem rješenja:

$$x = x(t,\tau),\ y = y(t,\tau),\ z = z(t,\tau),\ p = p(t,\tau),\ q = q(t,\tau)$$

sistema karakteristika koje zadovoljavaju početne uslove

$$x = x_o(\tau),\ y = y_o(\tau),\ z = z_o(\tau),\ p = p_o(\tau),\ q = q_o(\tau), \quad \text{za} \quad t = 0.$$

Ovdje se rješava tridesetak raznih zadataka vezanih za nelinearne parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda i desetak zadataka iz oblasti parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda koji se isključivo odnose na klasifikaciju ovih jednačina, tj. određivanje tipa (eliptički, parabolički i hiperbolički) jednačine. Na to se, sa malo izuzetaka, svodi i svaki od desetak zadataka ove sekcije.

Glava II sadrži tridesetak važnih primjera parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda koje spadaju u oblast Matematičke fizike. Za većinu njih nije lako naći opšte rješenje, pa se rješenje koje zadovoljava zadane *početne* i/ili *rubne uslove* traži direktno, bez poznavanja *opšteg rješenja*. Ovakvi problemi mogu imati samo jedno rješenje ili više rješenja, a može se desiti da neki od njih nema rješenja. Posebna pažnja posvećuje se onim problemima koji po svojoj prirodi imaju jedinstveno rješenje. Osim toga nameće se potreba da to rješenje bude neprekidno u odnosu na dopunske uslove.

Za rješavanje problema kružne membrane izvršena je teorijska priprema koja se odnosi na razvoj funkcije f(x) po Besselovim funkcijama prve vrste. U slučaju kada je poluprečnik posmatrane membrane $R = 1$

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_n(x\sqrt{\lambda_{nm}}),$$

gdje je $n > -1$ zadan broj, a $\sqrt{\lambda_{n1}}, \ldots$ su pozitivni korijeni jednačine $J_n(\sqrt{\lambda}) = 0$, dok se koeficijenti a_m određuju po formuli

$$a_m = \frac{2}{J_{n+1}^2(\sqrt{\lambda_{nm}})} \int_0^1 x\, f(x) J_n(x\sqrt{\lambda_{nm}})\, dx.$$

Slično se, i u slučaju kada je poluprečnik kruga $R \neq 1$, funkcija $f(x)$ može razviti u red

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_\nu(\mu_m x/R), \qquad \nu > -1,$$

gdje su $\mu_1, \ldots$ pozitivni korijeni jednačine $J_\nu(\mu) = 0$, svrstani po veličini, a koeficijenti a_m određeni sa

$$a_m = \frac{2}{R^2 J_{\nu+1}^2(\mu_m)} \int_0^R x\, f(x) J_\nu(\mu_m x/R)\, dx.$$

Ovaj razvitak funkcije $f(x)$ se zove razvitak funkcije u Fourier–Besselov red.

U raznim problemima matematičke fizike nailazi se i na razvoj oblika

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m J_\nu(\mu_m x/R),$$

gdje su $\mu_1, \ldots$ pozitivni korijeni jednačine

$$\alpha J_\nu(\mu) + \beta\mu J_\nu'(\mu) = 0,$$

napisani u rastućem nizu, uz uslov $\alpha/\beta + \nu > 0$.

S obzirom na ortogonalnost Besselovih funkcija i formulu $\int_0^R x J_\nu^2(\mu_m x/R)\, dx$, dobijaju se slično i koeficijenti b_m gornjeg reda koji se zove Dini–Besselov red.

U sekciji 2, druge glave, proučavaju se prvo oscilacije žice. Tako se u prvom primjeru tretira jednačina slobodnih oscilacija (podsekcija 2.1.), a u drugom prisilnih oscilacija žice (podsekcija 2.2.).

Sekcija 3 je posvećena oscilacijama membrane i to u prvom, odnosno drugom primjeru radi se o slobodnim oscilacijama pravougaone, odnosno kvadratne membrane (podsekcije 3.1. i 3.2.). Treći primjer odnosi se na slobodne oscilacije kružne membrane, a četvrti, specijalno na radijalne oscilacije te membrane kod kojih je, za sve tačke jedne kružnice, pomak isti, tj. pomjeranje tačaka ne zavisi od ugla (podsekcije 3.3. i 3.4.). U sastavu ove sekcije se, posebno, rješava i jedan problem u kome se traže sopstvene oscilacije homogene kružne membrane poluprečnika $R = 1$, učvršćene na konturi, ako u početnom momentu ona predstavlja površinu obrtnog paraboloida, a početna brzina joj je jednaka nuli.

U sekciji 4 se tretiraju razni problemi provođenja toplote. Tako je u podsekciji 4.1. riješen problem provođenja toplote u ograničenom štapu. Problem provođenja toplote u neograničenom, odnosno poluograničenom štapu, izlaže se u podsekciji 4.2, odnosno 4.3, dok se problem provođenja toplote u dvodimenzionalnom prostoru uključujući, specijalno, i primjer provođenja toplote kroz homogenu ploču uz odgovarajuće rubne i početne uslove rješava u podsekciji 4.4.

Laplaceova diferencijalna jednačina zauzima petu sekciju. Najprije se definišu Laplaceova diferencijalna jednačina i Laplaceov diferencijalni operator, i uvodi pojam harmonijske funkcije, a zatim i unutrašnji i spoljašnji Dirichletov problem. U podsekciji 5.1. rješava se određeni rubni problem za Laplaceovu diferencijalnu jednačinu u dvodimenzionalnom "poluprostoru" $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y < +\infty$, dok se u podsekciji 5.2. sličan problem rješava za paralelopiped. U podsekciji 5.3. rješava se Laplaceova diferencijalna jednačina zadana u cilindričnim koordinatama, uz određene rubne uslove i uslov ograničenosti nepoznate funkcije u na osi cilindra. U okviru podsekcije 5.4. proučava se problem stacionarnog rasporeda toplote u cilindru koji počiva na izolovanoj donjoj osnovi, dok mu se gornja osnova zagrijava ravnomjerno raspoređenom količinom toplote q, a bočna površina slobodno rashlađuje vazduhom čija je temperatura jednaka 0. Posebno se, u sastavu ove sekcije, proučavaju Dirichletov problem za krug (podsekcija 5.5.) i Dirichletov problem za kružni prsten (podsekcija 5.6.).

Rješiti Dirichletov problem za Laplaceovu jednačinu znači odrediti funkciju koja unutar tog kruga zadovoljava tu jednačinu, a na krugu prima unaprijed zadanu vrijednost. Dalje se pokazuje da se rješenje Dirichletovog problema dobiveno u obliku beskonačnog reda može napisati i u obliku određenog integrala poznatog kao Poissonov integral. Tako se dobiva još jedan oblik rješenja unutarnjeg Dirichletovog problema koji se naziva Poissonovom integralnom formulom.

Primjer sadržan u sekciji šest se odnosi na jedan rubni problem za Poissonovu diferencijalnu jednačinu na određenom pravougaoniku uz uslov da se rješenje tog problema poništava na rubu tog pravougaonika.

Sekcija sedam, odnosi se na rješavanje Laplaceove diferencijalne jednačine primjenom konformnih preslikavanja. Najprije se dokazuje invarijantnost Laplaceove jednačine u odnosu na konformno preslikavanje, a zatim se, ispitujući stacionarnost temperature T, u procesu provođenja toplote, dolazi do zaključka da ona zadovoljava Laplaceovu jednačinu u svakoj unutrašnjoj tački posmatranog tijela (podsekcija 7.1.) U podsekciji 7.2. se rješava Dirichletov problem za gornju poluravan, tj. određuje formula za stacionarnost temperature u tankoj, polubeskonačnoj ploči za koju je $y \geq 0$, čija je površina izolovana, a rub $y = 0$ zadržava temperaturu 0, svugdje, izuzev na djelu duži $-1 < x < 1$, $y = 0$, na kojem je jednaka 1. U podsekciji 7.3. se, zatim, rješava Dirichletov problem za dva nekoncentrična kruga, tj. traži potencijal unutar oblasti između dvije nekoncentrične kružnice u slučaju kada je potencijal na manjoj kružnici, radijusa 1, jednak 1, a na većoj, spoljašnjoj kružnici, jednak 2.

U sekciji 8. rješava se Schrödingerova jednačina, vezana za nalaženje nivoa energije i talasnih funkcija čestica koje se kreću u nekom polju sile. Dalje se, u podsekciji 8.1., posmatra specijalan slučaj Schrödingerove jednačine, poznate kao harmonijski oscilator, kada tražena talasna funkcija $\psi(x)$ zavisi samo od jedne promjenljive. Tražeći one vrijednosti energije za koje će rješenje $\psi(x)$ biti neprekidna funkcija, koja zadovoljava uslov $\int |\psi(x)|^2 dx = 1$ (dobiven fizikalnim rasuđivanjem), Schrödingerova jednačina će se, u slučaju harmonijskog oscilatora, svesti na rješavanje Hermiteove diferencijalne jednačine.

Posljednji primjer odnosi se na jednu parcijalnu diferencijalnu jednačinu u kojoj nepoznata funkcija u zavisi od vremena t i udaljenosti r od koordinatnog početka. Pri tome se na funkciju $u(r, t)$ postavljaju određeni rubni i početni uslovi.

"Svi, u ovoj glavi tretirani problemi odlikuju se značajem i ozbiljnošću. Uključivanjem ovih problema udžbenik je značajno obogaćen. Sadržajem ove glave posebno, ali u velikoj mjeri i sadržajem prethodne glave, u ovom udžbeniku je, na vrlo poželjan način, proširen okvir koji imaju uobičajene zbirke zadataka iz područja diferencijalnih jednačina i koje obično od parcijalnih diferencijalnih jednačina obuhvataju samo one prvog reda (zbog njihove tijesne veze sa običnim diferencijalnim jednačinama". (iz recenzije)

Koristim priliku da se zahvalim svima koji su, na bilo koji način, doprinijeli da se ovaj udžbenik pojavi. Posebno se zahvaljujem recenzentima, akademicima Fikretu Vajzoviću i Veselinu Periću na korisnim primjedbama koje su doprinijele poboljšanju teksta.

Među one kojim želim izraziti zahvalnost spadaju moje asistentice mr. Senada Kalabušić i Manuela Muzika, kao i student Vedad Letić, koji su mi pomogli u posljednoj korekturi teksta, odnosno studentica Mersiha Lonić koja je prevela predgovor ovog udžbenika na engleski.

Zahvalnost dugujem i glavnom uredniku Izdavačke kuće prof. Vladimiru Komanoviću i dipl. ing. Nini Hasanoviću koji je najzaslužniji za vrlo važan dio posla – unos teksta i izradu crteža, ukjučujući i estetski izgled i dizajn.

Svakako treba posebno istaći, da zaslugu za objavljivanje, odnosno nastanak udžbenika Diferencijalne jednačine 1 i 2 imaju Federalno ministarstvo obrazovanja, nauke, kulture i sporta te Kantonalno ministarstvo za obrazovanje, nauku i informisanje, jer su obezbjedili sredstva za izdavanje, odnosno, SOROS "Fondacija Otvoreno Društvo" koja mi je, na osnovu Plana za podršku istraživanja (*) Srednjoevropskog Univerziteta (**), zahvaljujući pozitivnoj ocjeni i prihvaćanju udžbenika od strane Komisije RSS-a, sa sjedištem u Pragu, dodjelila, finansijsku pomoć za njegovu izradu.

Osim toga, zahvalna sam i Udruženju Matematičara BiH koje je obezbjedilo sredstva za recenziju.

Na kraju, biću veoma zahvalna svim pažljivim i kritičnim čitaocima ove knjige na korisnim primjedbama i sugestijama, kako tehničke, tako i stručne prirode. O njima ću, svakako voditi računa, ukoliko dođe do novog izdanja ovog udžbenika.

U Sarajevu 2001. godine — A u t o r

(*) *Research Support Scheme, u daljem RSS*

(**) *Central European University*

I PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

1. Osnovni pojmovi teorije

Jednačina koja daje vezu između nezavisno promjenljivih $x_1, x_2, ..., x_n$, funkcije tih promjenljvih $\boldsymbol{u}$ i njenih parcijalnih izvoda po promjenljivim $x_1, x_2, ..., x_n$ naziva se **parcijalnom diferencijalnom jednačinom.** Dakle, to je jednačina oblika:

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0. \qquad (1)$$

Red najvišeg parcijalnog izvoda, koji stvarno figuriše u njoj, određuje red parcijalne diferencijalne jednačine. Parcijalna diferencijalna jednačina, kao i obična diferencijalna jednačina, može biti nepotpuna, ali mora obavezno sadržavati bar jedan od parcijalnih izvoda nepoznate funkcije.
Rješenjem te jednačine naziva se funkcija

$$u = u(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (2)$$

koja je definisana i neprekidna, zajedno sa svojim parcijalnim izvodima, u nekoj oblasti promjenljivih $x_1, x_2, ..., x_n$ i za koju jednačina (1) postaje identitet. Proces nalaženja rješenja naziva se integracijom. Integrisanjem parcijalne diferencijalne jednačine obično se dobiva familija rješenja koja zavisi od proizvoljnih funkcija a ne samo od proizvoljnih konstanti kao u slučaju običnih diferencijalnih jednačina.
Rješenju $z = z(x, y)$ parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0, \qquad (1')$$

koje sadrži nepoznatu funkciju z, od dvije nezavisno promjenljive x i y, odgovara neka površ u prostoru (x, y, z). Ta površ naziva se integralnom površi date jednačine koju nazivamo grafikom rješenja.

Opšte rješenje jednačine (1′) je rješenje te jednačine koje sadrži proizvoljnu funkciju.

Potpunim integralom jednačine (1′) naziva se svaka relacija $V(x, y, z, a, b) = 0$ između x, y, z, a, b, gdje su a i b konstante, takve da se iz

$$V(x, y, z, a, b) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

eliminacijom konstanti a i b, dobija jednačina (1').

2. Linearna parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda

Linearna parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda ima sljedeći oblik

$$X_1(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + X_n(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n} =$$
$$= R(x_1,x_2,\ldots,x_n,u) \qquad (3)$$

gdje je u nepoznata funkcija nezavisno promjenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i R zadane funkcije svojih argumenata. Jednačina (3) se često (iz više razloga) naziva i **kvazilinearnom jednačinom.**

Ako tražena funkcija u ne ulazi ni u jedan od koeficijenata $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jednačine (3), a njena desna strana je identički jednaka nuli, tada se jednačina (3) naziva **homogenom**. U protivnom slučaju ona je **nehomogena**.

2.1. Cauchyev problem

Jedan od najvažnijih problema koji smo posmatrali u slučaju običnih diferencijalnih jednačina bio je Cauchyev problem. Taj problem ćemo posmatrati i za parcijalne diferencijalne jednačine.

Za jednačinu (3) Cauchyev problem glasi:

Među svim rješenjima date jednačine naći ono rješenje

$$u = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

koje zadovoljava početni uslov

$$u = \varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}) \quad \text{za} \quad x_n = x_n^o,$$

gdje je $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$ zadana neprekidno diferencijabilna funkcija svojih argumenata.

Specijalno, u slučaju jednačine

$$P(x,y,z)\,\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z)\,\frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z)$$

Cauchyev problem se sastoji u traženju rješenja

$$z = f(x, y) \tag{4}$$

koje zadovoljava početni uslov

$$z = \varphi(y), \quad \text{za } x = x_o .$$

Geometrijski, traži se ona integralna površ (4) koja prolazi zadanom krivom $z = \varphi(y)$, $x = x_o$, koja leži u ravni $x = x_o$.

2.2. Homogena linearna parcijalna diferencijalna jednačina

1° **Postupak određivanja opšteg rješenja**: Posmatrajmo homogenu linearnu jednačinu

$$X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \tag{5}$$

Pretpostavimo da su koeficijenti $X_1, X_2, \ldots, X_n$, jednačine (5), neprekidno diferencijabilni u nekoj okolini zadane tačke $(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o)$ i da, osim toga, nisu svi istovremeno, u toj tački, jednaki nuli. Neka je recimo

$$X_n(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o) \neq 0 .$$

Primjetimo da jednačina (5) ima uvijek rješenje oblika:

$$u = C, \qquad C = const.$$

koje ćemo zvati očiglednim ili trivijalnim rješenjem.

Uz učinjene pretpostavke homogena jednačina (5) ima familiju rješenja koja sadrže proizvoljne funkcije.

Da bismo odredili tu familiju rješenja posmatraćemo sistem običnih diferencijalnih jednačina u simetričnom obliku:

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \tag{6}$$

koji odgovara homogenoj linearnoj parcijalnoj diferencijalnoj jednačini (5). Sistem (6) ima (n-1) nezavisnih integrala:

$$\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{7}$$

definisanih u nekoj okolini tačke $(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o)$.

Svaki od njih je rješenje jednačine (5). Svaka neprekidno diferencijabilna funkcija tih funkcija $\psi = F(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})$, biće integral sistema (6), pa prema tome i rješenje jednačine (5). Znači, jednačina (5) ima familiju rješenja

$$u = F(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}).$$

Familija rješenja koja zavisi od proizvoljne funkcije F naziva se **opštim rješenjem jednačine** (5).

U slučaju jednačine sa dvije nezavisno promjenljive

$$P(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{8}$$

sistem (6) svodi se na jednu jednačinu:

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)}.$$

Ako je $\psi(x,y)$ integral te jednačine, tada će opšte rješenje jednačine (8) biti

$$z = F\big(\psi(x,y)\big),$$

gdje je F proizvoljna, neprekidno diferencijabilna, funkcija.

2° Rješenje Cauchyevog problema

Traži se rješenje $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ koje zadovoljava početni uslov

$$u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \quad \text{za} \quad x_n = x_n^o.$$

Uvrstimo u integrale (7), sistema (6), $x_n = x_n^o$ i označimo dobivene funkcije sa $\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}$:

$$\left.\begin{aligned}
\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^o) &= \overline{\psi}_1 \\
\psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^o) &= \overline{\psi}_2 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^o) &= \overline{\psi}_{n-1}.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Rješavanjem sistema (9) po $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ dobićemo

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \omega_1(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}) \\
x_2 &= \omega_2(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{n-1} &= \omega_{n-1}(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}).
\end{aligned}
$$

Ako u desnu stranu jednakosti $u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, umjesto $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, uvrstimo $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$, zamjenivši prethodno u njima $\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}$ sa $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$, dobićemo funkciju

$$u = \varphi\big(\omega_1(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}),\ \omega_2(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}), \ldots,\ \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})\big) \tag{10}$$

koja predstavlja traženo rješenje.

Specijalno, u slučaju jednačine (8), s dvije nezavisno promjenljive Cauchyev problem se svodi na nalaženje rješenja $z = f(x, y)$ koje zadovoljava početni uslov $z = \varphi(y)$ za $x = x_o$. Sistem (9) svodi se na jednu jednačinu $\psi(x_o, y) = \overline{\psi}$, odakle je $y = \omega(\overline{\psi})$. Prema tome, traženo rješenje biće

$$z = \varphi\Big(\omega\big(\psi(x, y)\big)\Big).$$

2.3. Nehomogena linearna parcijalna diferencijalna jednačina

1° Postupak određivanja opšteg rješenja:

Posmatrajmo nehomogenu linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$
\begin{aligned}
X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} &= \\
= R(x_1, x_2, \ldots, x_n, u), &\qquad (11)
\end{aligned}
$$

u kojoj su funkcije $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i R neprekidno diferencijabilne u nekoj okolini tačke $(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o, u^o)$ i $X_n(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o, u^o) \neq 0$.

Tražeći njeno rješenje u implicitnom obliku

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0, \tag{12}$$

dobićemo homogenu linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu u odnosu na funkciju V:

$$X_1(x_1,x_2,\dots,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial x_1} + X_2(x_1,x_2,\dots,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial x_2} + \dots +$$

$$+ X_n(x_1,x_2,\dots,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial x_n} - R(x_1,x_2,\dots,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial u} = 0, \tag{13}$$

koja je ekvivalentna sistemu običnih diferencijalnih jednačina u simetričnom obliku

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{du}{R}. \tag{14}$$

Ako su:

$$\psi_1(x_1,x_2,\dots,x_n,u),\ \psi_2(x_1,x_2,\dots,x_n,u),\ \dots,\ \psi_n(x_1,x_2,\dots,x_n,u) \tag{15}$$

nezavisni integrali tog sistema, tada se jednakost

$$\Phi(\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_n) = 0,$$

gdje je Φ proizvoljna, neprekidno diferencijabilna funkcija, naziva **opštim rješenjem** jednačine (11) u implicitnom obliku. Njenim rješavanjem u odnosu na u dobiće se opšte rješenje u eksplicitnom obliku.

U slučaju jednačine

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z) \tag{16}$$

odgovarajući sistem običnih diferencijalnih jednačina svodi se na

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}. \tag{17}$$

Ako su $\psi_1(x,y,z) = C_1$ i $\psi_2(x,y,z) = C_2$ dva nezavisna prva integrala sistema (17), a F proizvoljna neprekidno diferencijabilna funkcija, tada će sa

$$F\big(\psi_1(x,y,z),\ \psi_2(x,y,z)\big) = 0$$

biti određeno opšte rješenje $z = z(x,y)$ jednačine (16).

Integralna površ jednačine (16), koja je određena rješenjem $z = z(x,y)$, ima u tački (x,y,z), vektor normale

$$\lambda\vec{n} = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} - \vec{k}.$$

Zato se jednačina (16) može napisati u obliku

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = 0, \tag{18}$$

pri čemu je $\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ zadana **vektorska funkcija (vektorsko polje).**

Riješiti jednačinu (16) znači naći sve površi za koje je vektor normale u svakoj tački okomit na vektor $\vec{F}$, gdje je $\vec{F}$ zadana vektorska funkcija. Integralne krive sistema (17) leže na integralnim površima jednačine (16).

3. Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačine.

3.1. Sistem dvije nelinearne parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda

Posmatrajmo sistem

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= A(x,y,z) \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= B(x,y,z) \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

čije desne strane su neprekidno diferencijabilne u nekoj okolini tačke (x_o, y_o, z_o). Ovaj sistem naziva se saglasnim ako postoji funkcija $z = z(x,y)$ za koju obje jednačine sistema (19) postaju identiteti, u nekoj okolini tačke (x_o, y_o, z_o).

Da bi sistem (19) imao familiju rješenja koja zavise bar od jedne proizvoljne konstante, potrebno je i dovoljno da uslov

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} B = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z} A \tag{20}$$

bude zadovoljen identički, u odnosu na x, y, z, u nekoj okolini tačke (x_o, y_o, z_o). Uslov (20) se naziva **uslovom potpune integrabilnosti sistema** (19). S obzirom na (19), taj uslov zahtjeva da bude

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Ako je ispunjen uslov (20), rješenje sistema (19) se traži po sljedećoj shemi: fiksirajući, u prvoj od jednačina (19), promjenljivu y, nakon njene integracije dobićemo

$$z = \varphi\left(x, C(y)\right), \tag{21}$$

gdje je $C(y)$ proizvoljna, neprekidno diferencijabilna, funkcija od y.

Izaberimo $C(y)$ tako da funkcija (21) zadovoljava i drugu od jednačina (19). Ispunjenost uslova (20) za sistem (19) je garancija da takvo $C(y)$ postoji. Kao rezultat dobivamo

$$z = z(x, y, C),$$

gdje je C proizvoljna konstanta.

3.2. Pfaffova jednačina

Često se postavlja zadatak da se odredi familija površi $z = z(x, y, C)$, ortogonalnih na vektorske linije polja $\vec{F} = (P, Q, R)$.

Ako sa $\vec{t} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$ označimo tangentni vektor koji leži u tangentnoj ravni tražene površi, zadatak će se svesti na traženje površi za koje je

$$\vec{F} \bullet \vec{t} = 0$$

ili u razvijenom obliku

$$P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = 0. \tag{1}$$

Jednačina oblika (1), s neprekidno diferencijabilnim koeficijentima P, Q i R, u nekoj oblasti za koje je $P^2 + Q^2 + R^2 \neq 0$, u svakoj tački te oblasti, naziva se Pfaffova jednačina.

Tako se postavljeni zadatak sveo na traženje funkcije $z = z(x, y)$ za koju važi (1). Dakle, traži se jedna zavisnost između x, y, z. Za jednačinu (1), koja ima rješenje u obliku jedne zavisnosti, kaže se da je **integrabilna jednom relacijom.**

Uz pretpostavku da je $R(x,y,z) \neq 0$, jednačina (1) može se napisati u obliku

$$dz = -\frac{P}{R}\,dx - \frac{Q}{R}\,dy. \tag{2}$$

S druge strane, pošto na svakoj integralnoj površi, $z = z(x, y)$ jednačine (1) važi osnovna relacija

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy, \tag{3}$$

za te integralne površi je

$$\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = -\frac{P}{R}dx - \frac{Q}{R}dy$$

što nas, zbog nezavisnosti dx i dy, dovodi do zaključka da integralne površi moraju zadovoljavati sistem jednačina

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{P}{R} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{Q}{R}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Dakle, Pfaffova jednačina (1) ekvivalentna je sistemu diferencijalnih jednačina (4).

Prema tome, problem se svodi na traženje uslova potpune integrabilnosti jednačine (1), koji prema (20) (§ 3.1.) za sistem (4) glasi:

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0, \tag{5}$$

ili kraće

$$\vec{F} \bullet rot\,\vec{F} = 0, \tag{5'}$$

gdje je

$$rot\,\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Time je dokazana

Teorema 1. Potreban i dovoljan uslov da bi Pfaffova jednačina bila integrabilna jednom relacijom je da relacija (5) važi identički.

Jednakost (5) može se zapisati i u obliku

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0. \tag{5''}$$

1° Specijalno, uslov teoreme je ispunjen ako je $rot\,\vec{F} = 0$, tj.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}. \tag{6}$$

U tom slučaju polje $\vec{F}$ je **potencijalno** pošto je

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz \tag{A}$$

potpuni diferencijal, pa se integracija jednačine (1) svodi na određivanje funkcije $u(x,y,z)$ **(potencijal polja $\vec{F}$)** za koju je

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = du. \tag{A$_1$}$$

Tražene površi su date jednačinom $u(x,y,z) = C$ i nazivaju se **površima nivoa.**

2° Ako, međutim, polje $\vec{F}$ nije potencijalno, tj.

$$rot\,\vec{F} \neq 0, \quad \text{ali je} \quad \vec{F} \cdot rot\,\vec{F} = 0,$$

tada za izraz (A) postoji integracioni faktor $\mu(x,y,z)$, tako da se on može svesti na oblik

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = u\,dv, \qquad u = \frac{1}{\mu(x,y,z)}. \tag{A$_2$}$$

3° Može se pokazati da je, i u slučaju $rot\,\vec{F} \neq 0$ i $\vec{F} \cdot rot\,\vec{F} \neq 0$, moguće od Pfaffove forme (A) oduzeti potpuni diferencijal tako da za dobivenu razliku bude ispunjen uslov (5). Dakle, tražimo takvu funkciju $u(x,y,z)$ da ako stavimo

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz - du = P_1\,dx + Q_1\,dy + R_1\,dz,$$

bude zadovoljena relacija (5) za P_1, Q_1 i R_1. Ako uzmemo u obzir da je

$$P_1 = P - \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q_1 = Q - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad R_1 = R - \frac{\partial u}{\partial z},$$

poslije sređivanja dobićemo jednačinu po u:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial z} = \\ = P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right).\end{aligned} \tag{B}$$

U svojstvu funkcije u može se uzeti bilo koje rješenje jednačine (B).

Ako forma $P_1\,dx + Q_1\,dy + R_1\,dz$ potpada pod slučaj 2°, u posmatranom slučaju dobivamo kanonski oblik Pfaffove forme:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = du + v\,dw. \tag{A$_3$}$$

Znači, forma (A) se može svesti na jedan od tri kanonska oblika

$$du, \quad u\,dv, \quad du + v\,dw\,.$$

Minimalan broj promjenljivih pomoću kojih je moguće izraziti Pfaffovu formu određuje njenu klasu. U skladu s tim Pfaffova forma triju promjenljivih može pripadati I, II ili III klasi.

U prva dva slučaja za Pfaffovu jednačinu postoji integrabilna relacija dviju veličina $u = const$ i $v = const$, dok u posljednjem slučaju postoji integrabilna relacija samo jedne promjenljve koja sadrži samo proizvoljnu funkciju i njen izvod i to u eksplicitnom obliku i nije pod znakom kvadrature.

Stvarno, ako u jednačini

$$du + v\,dw = 0$$

uzmemo $u = \varphi(w)$, gdje je φ proizvoljna funkcija, tada iz jednačine dobivamo drugu relaciju $v = -\varphi'(w)$.

Primjedba: Ako jednačinu (1) posmatramo nezavisno od postavljenog zadatka, onda njeno rješenje može biti određeno sa dvije veze koje određuju krivu liniju $y = y(x)$, $z = z(x)$. Naime, do jednačine (1) dovodi nas i zadatak: naći linije koje su ortogonalne na vektorskim linijama polja $\vec{F}$. Za određivanje ovih linija može se izabrati jedna površ (veza) $\varphi(x,y,z) = 0$, odnosno $z = z(x,y)$. Uvrštavanjem zadane funkcije $z = z(x,y)$ u jednačinu (1), problem se svodi na rješavanje jednačine

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{1'}$$

u kojoj je nepoznata funkcija $y = y(x)$. Ako sa $\psi(x,y,C) = 0$ obilježimo dato rješenje jednačine (1') onda su sa $\varphi(x,y,z) = 0$, $\psi(x,y,C) = 0$ date krive ortogonalne na vektor $\vec{F}$. Tako dobivena familija krivih zavisi od odabrane veze $\varphi(x,y,z) = 0$.

4. Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda

4.1. Potpuni integrali. Opšti, partikularni i singularni integrali

Posmatraćemo parcijalnu diferencijalnu jednačinu prvog reda

$$F(x,y,z,p,q) = 0 \quad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y},\ F_p^2 + F_q^2 \neq 0\right) \tag{1}$$

po nepoznatoj funkciji $z = z(x,y)$ u kojoj je F dvaput neprekidno diferencijabilna funkcija, a x, y, z Dekartove koordinate.

Neka je

$$V(x, y, z, a, b) = 0 \tag{2}$$

potpuni integral jednačine (1), u kojem su a i b proizvoljne konstante. Funkcija $z = z(x,y)$, određena sa (2), zadovoljava jednačinu (1). Osim toga, eliminacijom konstanti $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ iz (2) i jednačina

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} p = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} q = 0 \tag{3}$$

dobija se jednačina (1) .

Lagrange je pokazao da se sva rješenja parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda mogu dobiti iz potpunog integrala pomoću metode varijacije konstante. Taj metod se sastoji u tome da se umjesto konstanti a i b traže funkcije $a(x,y)$ i $b(x,y)$ za koje je

$$V\big(x,\ y,\ z(x,y),\ a(x,y),\ b(x,y)\big) = 0 \tag{2'}$$

rješenje jednačine (1).

Ako u jednačine, dobivene iz (2) diferenciranjem po x i y, uvrstimo (3) dobićemo sistem jednačina

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial b}\cdot\frac{\partial b}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial b}\cdot\frac{\partial b}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

iz kojeg se mogu odrediti funkcije $a(x,y)$ i $b(x,y)$.

Mogu nastupiti sljedeća tri slučaja:

1° Ako je

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial y} = 0 \tag{5}$$

tada je

$$a = const, \qquad b = const\,,$$

pa se *(2′)* svodi na (2), tj. **potpuni integral (potpuno rješenje)** jednačine (1).

2° $$\frac{\partial V}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial b} = 0. \tag{6}$$

Ako se iz (2) i (6) mogu eliminisati veličine a i b, dobiće se rješenje $z = z(x, y)$ koje se zove **singularno rješenje (singularni integral)** jednačine (1′) i predstavlja **obvojnicu dvoparametarske familije integralnih krivih.**

3° $$\frac{D(a,b)}{D(x,y)} = 0.$$

Ako je ova determinanta jednaka nuli, a pri tom barem jedan od njenih elemenata različit od nule, tada među veličinama a i b postoji zavisnost, na primjer $b = \omega(a)$, zbog čega se sistem (4) svodi na jednu jednačinu

$$\frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\,\omega'(a) = 0. \tag{7}$$

Prema tome, rješenje jednačine (1) će biti dato sistemom jednačina

$$\left.\begin{aligned} &V\big(x, y, z, a, \omega(a)\big) = 0 \\ &\frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\,\omega'(a) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Ono sadrži proizvoljnu funkciju i naziva se **opšte rješenje** jednačine (1).

Ako u (8), za funkciju $\omega(a)$ izaberemo određenu funkciju, dobićemo **partikularno rješenje** jednačine (1). Izdvajanje partikularnih rješenja se postiže zadavanjem odgovarajućih dopunskih uslova, tj. zahtjeva na funkciju V ili na funkciju V i njene izvode.

Dakle, svako rješenje jednačine (1) dobija se iz njenog potpunog integrala.

4.2. Rješavanje nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda (Lagrange – Charpitov metod)

Vidjeli smo da se iz potpunog integrala jednačine

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

mogu dobiti svi ostali integrali jednačine, što znači da se problem rješavanja jednačine (1) može svesti na određivanje jednog njenog potpunog integrala. Ovaj integral se može odrediti **metodom Lagrange – Charpita.**

Suština ovog metoda je u tome da se, za jednačinu (1), odredi jednačina

$$\Phi(x, y, z, p, q) = a\,, \tag{2}$$

gdje je a proizvoljna konstanta, tako da sistem (1) – (2) određuje funkcije, $p = p(x, y, z, a)$ i $q = q(x,y,z,a)$ za koje je Pfaffova jednačina

$$dz = p\,dx + q\,dy \tag{3}$$

integrabilna jednom relacijom. Integral $F(x, y, z, a, b) = 0$ jednačine (3) je potpuni integral jednačine (1), a konstanta b se dobija pri integraciji jednačine (3). Uslov integrabilnosti $\vec{F}\cdot rot\vec{F} = 0$, $\vec{F} = p\,\vec{i} + q\,\vec{j} - \vec{k}$, za jednačinu (3) dobija oblik:

$$p\,\frac{\partial q}{\partial z} - q\,\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0\,. \tag{4}$$

Diferenciranjem jednačina (1) i (2) po z, dobijamo

$$F_z + F_p\,\frac{\partial p}{\partial z} + F_q\,\frac{\partial q}{\partial z} = 0$$

$$\Phi_z + \Phi_p\,\frac{\partial p}{\partial z} + \Phi_q\,\frac{\partial q}{\partial z} = 0$$

odakle se, uz uslov $\dfrac{D(F,\Phi)}{D(p,q)} \neq 0$, dobiva

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\dfrac{D(F,\Phi)}{D(z,q)}}{\dfrac{D(F,\Phi)}{D(p,q)}}\,, \qquad \frac{\partial q}{\partial z} = -\frac{\dfrac{D(F,\Phi)}{D(p,z)}}{\dfrac{D(F,\Phi)}{D(p,q)}}\,.$$

Diferenciranjem jednačina (1) i (2) po x, odnosno y, dobivamo uz isti uslov:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\dfrac{D(F,\Phi)}{D(p,x)}}{\dfrac{D(F,\Phi)}{D(p,q)}}\,, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\dfrac{D(F,\Phi)}{D(y,q)}}{\dfrac{D(F,\Phi)}{D(p,q)}}\,.$$

Uvrštavanjem nađenih vrijednosti $\dfrac{\partial p}{\partial z}$, $\dfrac{\partial q}{\partial z}$, $\dfrac{\partial q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial p}{\partial y}$ u (4), dobićemo:

$$\begin{vmatrix} F_p F_x & F_z p \\ \Phi_p \Phi_x & \Phi_z p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_q F_y & F_z q \\ \Phi_q \Phi_y & \Phi_z q \end{vmatrix} = 0 . \tag{5}$$

Ovaj uslov mora biti zadovoljen identički u odnosu na x, y, z.

Iz uslova (5) slijedi da funkcija Φ mora zadovoljavati homogenu linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu prvog reda

$$F_p \frac{\partial \Phi}{\partial x} + F_q \frac{\partial \Phi}{\partial y} + (F_p p + F_q q)\frac{\partial \Phi}{\partial z} - (F_x + F_z p)\frac{\partial \Phi}{\partial p} - (F_y + F_z q)\frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0. \tag{6}$$

Ako radi kratkoće uvedemo oznake

$$F_x = X, \;\; F_y = Y, \;\; F_z = Z, \;\; F_p = P, \;\; F_q = Q,$$

pri čemu su X, Y, Z, P, Q poznate funkcije od x, y, z, p, q, pošto je funkcija F poznata, jednačina (6) se može napisati u obliku:

$$P\frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q\frac{\partial \Phi}{\partial y} + (Pp + Qq)\frac{\partial \Phi}{\partial z} - (X + Zp)\frac{\partial \Phi}{\partial p} - (Y + Zq)\frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0 .$$

Rješavanje ove linearne parcijalne diferencijalne jednačine se svodi na rješavanje sistema običnih diferencijalnih jednačina u simetričnom obliku

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{pP + qQ} = \frac{dp}{-(X + pZ)} = \frac{dq}{-(Y + qZ)} . \tag{7}$$

Sistem (7) naziva se **Lagrange-Charpitovim sistemom** jednačine (1).

Prema tome, potrebno je odrediti samo jedan prvi integral tog sistema $\Phi(x, y, z, p, q) = a$, gdje je a proizvoljna konstanta, a Φ funkcija koja zadovoljava gore navedene uslove.

Primjedba. Potpuni integral jednačine (1) može se odrediti bez integracije ukoliko su poznata dva prva integrala

$$\Phi_1 (x, y, z, p, q) = C_1$$
$$\Phi_2 (x, y, z, p, q) = C_2$$

sistema (7) koja su u **involuciji**, tj. za koje je

$$[\Phi_1, \Phi_2] = 0,$$

gdje je

$$[\Phi_1, \Phi_2] = \frac{D(\Phi_1, \Phi_2)}{D(p, x)} + \frac{D(\Phi_1, \Phi_2)}{D(q, y)}$$

U tom slučaju potpuni integral se dobiva eliminacijom parcijalnih izvoda p i q iz polazne jednačine i nađena dva prva integrala.

4.3. Potpuni integrali za neke specijalne tipove jednačina

U nekim slučajevima navedeni postupak određivanja potpunog integrala jednačine (1) je prostiji. To su slučajevi kada jednačina ne sadrži sve veličine x, y, z, p i q.

Tabela 1.

No	Tip jednačine	Jednačina	Potpuni integral $z = \Phi(x, y, \lambda, \mu)$
1	x, y, z se ne pojavljuju u jednačini	$F(p, q) = 0$	$z = \lambda x + \lambda' y + \mu$, gdje je $F(\lambda, \lambda') = 0$
2a	pojavljuje se samo jedna od promjenljivih x, y, z	$p = f(x, q)$ $q = f(y, p)$	$z = \int f(x,\lambda)\,dx + \lambda y + \mu$, $z = \int f(y,\lambda)\,dy + \lambda x + \mu$
2b		$p = f(z, q)$	$x + \lambda y = \int \frac{dz}{\varphi(z,\lambda)} + \mu$, gdje je $\varphi(z, \lambda)$ rješenje jednačine $p = f(z, \lambda)$
2c		$p = f(z)$	$x + \lambda y = \int \frac{dz}{f(z)} + \mu$
3	promjenljive su razdvojene	$F_1(x,p) = F_2(y,q) = \lambda$, ili $p = f_1(x, \lambda)$ $q = f_2(y, \lambda)$	$z = \int f_1(x,\lambda)\,dx +$ $+ \int f_2(y,\lambda)\,dy + \mu$
4	uopštena Clairautova jednačina	$z = px + qy + f(p,q)$	$z = \lambda x + \mu y + f(\lambda,\mu)$

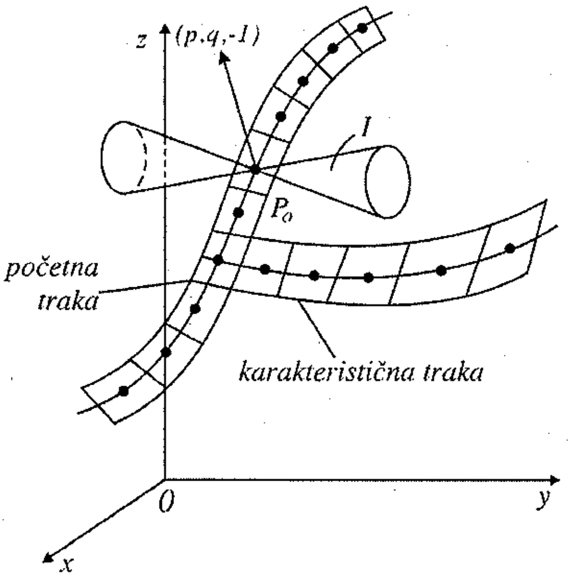
4.4. Geometrijska interpretacija parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda

Svako rješenje $z = z(x, y)$ parcijalne diferencijalne jednačine (1) predstavlja površ koju nazivamo **integralna površ**. Za svaku integralnu površ koja prolazi fiksnom tačkom $M\ (x, y, z)$, jednačina njene tangentne ravni data je sa

$$Z - z = p(X - x) + q\ (Y - y),$$

gdje su p i q povezani relacijom (1), dok se x, y, z smatraju fiksnim. Obvojnica familije tangentnih ravni je konus (**Mongeov konus**). Tangentna ravan svake integralne površi tangira i Mongeov konus duž jedne od njegovih generatrisa. Krive na integralnoj površi koje u svakoj svojoj tački dodiruju odgovarajuću generatrisu nazivaju se **karakterističnim krivama** ili **karakteristikama**. Duž karakteristika važi relacija:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q}.$$



(sl. 1)
početna traka i jedna karakteristična traka na integralnoj površi,
I - Mongeov konus u tački P_o

Kaže se da niz vrijednosti (x, y, z, p, q) opisuje **ravninski element** koji povezuje ugaone koeficijente p i q tangentne ravni s tačkom (x, y, z).

Prema tome, diferencijalna jednačina (1) određuje polje ravninskih elemenata (x, y, z, p, q) koji dodiruju Mongeov konus.

4.5. Trake i jednačine karakteristika.

Skup diferencijabilnih funkcija

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ p = p(t),\ q = q(t) \tag{1}$$

predstavlja ravninski element (tačke i tangentne ravni) duž trake regularne površi ako funkcije (1) zadovoljavaju uslov

$$\frac{dz}{dt} = p\frac{dx}{dt} + q\frac{dy}{dt}.$$

Za parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{2}$$

svaki skup funkcija (1) koje zadovoljavaju sistem običnih diferencijalnih jednačina

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dz}{dt} = p\frac{dx}{dt} + q\frac{dy}{dt}, \quad \frac{dx}{dt} = F_p, \quad \frac{dy}{dt} = F_q, \\ &\frac{dp}{dt} = -(pF_z + F_x), \quad \frac{dq}{dt} = -(qF_z + F_y) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

koji zovemo **sistemom karakterističnih jednačina** jednačine (2), opisuje, zajedno s jednačinom (2), **karakterističnu traku.** Karakteristična traka dodiruje Mongeov konus u svakoj tački (x, y, z). Odgovarajuća kriva

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

leži na integralnoj površi i naziva se **karakteristična kriva.** Integralne površi mogu se dodirivati međusobno jedino duž karakteristika.

Ukoliko je poznat potpuni integral jednačine (2), može se odrediti integralna površ te jednačine koja prolazi zadanom krivom.

4.6. Problem s početnim uslovima – Cauchyev problem

Traži se ono rješenje $z = z(x, y)$ jednačine (2) koje zadovoljava **početne uslove (granične uslove Cauchyevog tipa)**

$$x = x_o(\tau),\ y = y_o(\tau),\ z = z_o(\tau),\ p = p_o(\tau),\ q = q_o(\tau) \tag{4a}$$

za koje je

$$\left.\begin{aligned} &F\big(x_o(\tau),\, y_o(\tau),\, z_o(\tau),\, p_o(\tau),\, q_o(\tau)\big) = 0 \\ &\frac{dz_o}{d\tau} = p_o \frac{dx_o}{d\tau} + q_o \frac{dy_o}{d\tau}. \end{aligned}\right\} \tag{4b}$$

Ovim uslovima je zadana početna traka tj. tačke i tangentne ravni na traženu integralnu površ duž regularne krive C_o. Projekcija krive C_o na Oxy ravan je jednostavna kriva. Da bismo riješili početni problem potrebno je naći rješenje

$$x = x(t,\tau),\ y = y(t,\tau),\ z = z(t,\tau),\ p = p(t,\tau),\ q = q(t,\tau) \tag{5}$$

sistema karakterističnih jednačina (3) koje zadovoljava početne uslove (4a) i (4b) za $t = 0$. Tako određene funkcije (5) zadovoljavaju jednačinu (2).

Rješenje $z = z(x,y)$, ili u implicitnom obliku $\varphi(x,y,z) = 0$, dobiće se eliminacijom parametara t i τ.

Problem sa zadanim početnim uslovima imaće jedinstveno rješenje ako iz datih početnih uslova (4a) i (4b) slijedi

$$F_p \frac{dy}{d\tau} - F_q \frac{dx}{d\tau} \neq 0,\quad \frac{D(x,y)}{D(t,\tau)}\Big|_{t=0} \neq 0. \tag{6}$$

U suprotnom, problem će imati rješenje samo ako dati početni uslovi (4a) i (4b) opisuju karakterističnu traku. U tom slučaju postojaće beskonačan skup rješenja.

Primjedba: U postavci problema mogli bismo pretpostaviti da je zadana samo početna kriva C_o, dok bi vrijednosti p_o i q_o odredili iz relacija (4b). Ako te jednačine imaju više rješenja, kriva C_o može pripadati različitim polaznim trakama, pa se Cauchyev problem, za svaku od njih, rješava odvojeno.

5. Parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda

Jednačina u kojoj se pojavljuju nepoznata funkcija $u(x_1, x_2, ..., x_n)$, nezavisno promjenljivih $x_1, x_2, ..., x_n$, sa izvodima prvog i drugog reda naziva se **parcijalnom diferencijalnom jednačinom drugog reda.** Ona ima oblik

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) = 0. \tag{1}$$

Svaka funkcija $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ koja jednačinu (1) pretvara u identitet u nekoj oblasti tačaka $(x_1, x_2, ..., x_n)$ zove se **rješenje** te jednačine.

Specijalno, ako nepoznata funkcija zavisi od dva argumenta, jednačina (1) ima oblik

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \tag{2}$$

gdje je $z = z(x,y)$ i

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Za parcijalnu diferencijalnu jednačinu reći ćemo da je **kvazilinearna** ako je linearna u odnosu na najstarije izvode nepoznate funkcije. Tako je, na primjer, jednačina oblika

$$A(x,y,z,z_x,z_y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B(\ldots)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C(\ldots)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + f(x,y,z,z_x,z_y) = 0 \tag{3}$$

kvazilinearna parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda.

Parcijalnu diferencijalnu jednačinu drugog reda ćemo zvati **linearnom** ako je ona linearna u odnosu na nepoznatu funkciju i sve svoje parcijalne izvode. Tako je jednačina

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D\frac{\partial z}{\partial x} + E\frac{\partial z}{\partial y} + Gz = F, \tag{4}$$

gdje su $A, B, \ldots, F$ neprekidne funkcije od x i y, u nekoj oblasti ravni Oxy, **linearna parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda** u odnosu na nepoznatu funkciju $z(x,y)$.

Pošto je rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda mnogo složenije od rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda, ovdje ćemo se ograničiti na rješavanje samo nekih jednačina drugog reda koje se zovu **jednačine matematičke fizike**, jer se na njih svode mnogi problemi fizike. To su jednačine oblika

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x_1, ..., x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x_1, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x_1, ..., x_n)u = $$
$$= F(x_1, ..., x_n). \tag{5}$$

Jednačina drugog reda ima beskonačno mnogo rješenja. U rješavanju konkretnih problema fizike traži se ono rješenje koje zadovoljava neke **dodatne uslove** (**rubni i početni uslovi**), što zavisi od prirode problema. **Rubni uslovi** su oni uslovi koje funkcija (rješenje jednačine) treba da zadovolji na rubu posmatrane sredine u kojoj parcijalna diferencijalna jednačina opisuje određenu pojavu.

Početni uslovi su oni uslovi koje funkcija treba da zadovolji u datom trenutku vremena od koga počinjemo posmatrati (proučavati) pojavu koju opisuje parcijalna diferencijalna jednačina.

Neka je jednačina (2) data u obliku

$$Ar + 2Bs + Ct + F(x, y, z, p, q) = 0\,, \tag{6}$$

gdje su A, B, C funkcije od x i y s neprekidnim izvodima do drugog reda. Za jednačinu (6) ćemo reći da je u nekoj oblasti:

1) **hiperboličkog tipa** ako je $\boldsymbol{B^2 - AC > 0}$,

2) **paraboličkog tipa** ako je $\boldsymbol{B^2 - AC = 0}$,

3) **eliptičkog tipa** ako je $\boldsymbol{B^2 - AC < 0}$.

5.1. Svođenje jednačine na kanonski oblik

Kanonski ili **normalni oblik** jednačine (6) je:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = F_1\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right), \qquad \text{ako je } \boldsymbol{B^2 - AC > 0}; \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F_2\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right), \qquad \text{ako je } \boldsymbol{B^2 - AC = 0}; \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F_3\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad \text{ako je } \boldsymbol{B^2 - AC < 0}. \tag{9}$$

Da bismo jednačinu (6) sveli na kanonski oblik uvedimo, umjesto promjenljivih (x, y), nove nezavisno promjenljive (u, v), smjenom

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \tag{10}$$

pretpostavljajući, pri tom, da su one dvaput neprekidno diferencijabilne i da je jakobijan

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} \neq 0\,, \quad \text{u posmatranoj oblasti}\,. \tag{11}$$

U novim nezavisno promjenljivim u i v jednačina (6) se svodi na oblik

$$A^* \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2B^* \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + C^* \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + F^* \left(u, v, z, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) = 0, \quad (12)$$

pri čemu je

$$\left.\begin{aligned} A^*(u,v) &= A\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + C\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \\ C^*(u,v) &= A\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + C\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2, \\ B^*(u,v) &= A\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + B\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + C\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Lako se provjerava da je

$$B^{*2} - A^*C^* = (B^2 - AC)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2, \quad (14)$$

što znači da transformacija (10) ne mijenja tip jednačine (6).

Funkcije $u(x,y)$ i $v(x,y)$ mogu se odrediti, u zavisnosti od tipa jednačine (6), tako da bude ispunjen jedan od sljedeća tri uslova:

$$\begin{aligned} &(a) \quad A^* = 0, \quad C^* = 0, \\ &(b) \quad A^* = 0, \quad B^* = 0, \\ &(c) \quad A^* = C^*, \quad B^* = 0. \end{aligned}$$

Tako će se postići da jednačina (12) primi jednostavniji oblik.

Posmatrajući jednačinu

$$A\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} + C\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 = 0 \quad (15)$$

kao kvadratnu po $\frac{\partial h}{\partial x}$, zaključujemo da se ona, pod pretpostavkom $A \neq 0$, može napisati u obliku jednačine

$$\left[A\frac{\partial h}{\partial x} + (B + \sqrt{B^2 - AC})\frac{\partial h}{\partial y}\right]\left[A\frac{\partial h}{\partial x} + (B - \sqrt{B^2 - AC})\frac{\partial h}{\partial y}\right] = 0 \quad (15')$$

koja se raspada na sljedeće dvije linearne homogene jednačine prvog reda

$$A\frac{\partial h}{\partial x}+(B+\sqrt{B^2-AC})\frac{\partial h}{\partial y}=0 \tag{15a}$$

$$A\frac{\partial h}{\partial x}+(B-\sqrt{B^2-AC})\frac{\partial h}{\partial y}=0 \tag{15b}$$

koje su ekvivalentne sistemima običnih diferencijalnih jednačina redom

$$\frac{dx}{A}=\frac{dy}{B+\sqrt{B^2-AC}} \tag{16a}$$

$$\frac{dx}{A}=\frac{dy}{B-\sqrt{B^2-AC}}, \tag{16b}$$

odnosno

$$A\,dy-(B+\sqrt{B^2-AC})\,dx=0, \tag{17a}$$

$$A\,dy-(B-\sqrt{B^2-AC})\,dx=0. \tag{17b}$$

Jednačine (17a) i (17b) se mogu napisati u obliku jedne jednačine

$$A\,dy^2-2B\,dx\,dy+C\,dx^2=0. \tag{17}$$

Pošto je $A(x_o,y_o)\neq 0$, postoje integrali

$$h_1(x,y)=C_1 \quad \text{i} \quad h_2(x,y)=C_2 \tag{18}$$

jednačina (17a) i (17b). Njihove lijeve strane imaju neprekidne parcijalne izvode do drugog reda, u tački (x_o,y_o).

Lijeve strane integrala (18) su rješenja jednačina (15a) i (15b) redom, pa prema tome i jednačine (15).

Krive (18) zovu se **karakteristične krive** ili jednostavno **karakteristike jednačine** (6), dok je jednačina (15) poznata kao **jednačina karakteristika.**

U zavisnosti od znaka funkcije B^2-AC, u posmatranoj oblasti vrijednosti x, y, moguća su tri slučaja:

1° Jednačina hiperboličkog tipa : $B^2-AC>0$.

Opšti integrali (18) su realni i različiti. Njima su određene dvije različite jednoparametarske familije realnih karakteristika.

Ako za funkcije u i v, koje figurišu u transformaciji (10), uzmemo upravo

$$u = h_1(x,y), \qquad v = h_2(x,y), \tag{19}$$

pri čem su opšta rješenja $h_1(x,y)$ i $h_2(x,y)$ izabrana tako da je

$$\frac{D(h_1,h_2)}{D(x,y)} \neq 0, \tag{20}$$

tada će, saglasno (13), biti $A^* = C^* = 0$, dok će, zbog (14), (20) i $B^2 - AC > 0$, biti $B^* \neq 0$.

Prema tome, nakon djeljenja jednačine (12) s $2B^*$, dobićemo

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = F_1\left(u, v, z, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}\right), \tag{21a}$$

što predstavlja kanonski oblik hiperboličke jednačine (6).

Lako se uvjeravamo da smjenom

$$u = \xi + \eta, \quad v = \xi - \eta$$

jednačina (21a) prelazi u jednačinu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = G\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) \tag{21b}$$

koja je drugi kanonski oblik hiperboličke jednačine (6).

2° **Jednačina paraboličkog tipa : $B^2 - AC = 0$.**

U ovom slučaju jednačine (17a) i (17b) se podudaraju, dakle, svode na

$$A\frac{\partial h}{\partial x} + B\frac{\partial h}{\partial y} = 0. \tag{22}$$

Osim toga, lako se vidi da svako rješenje jednačine (22), saglasno sa $B^2 - AC = 0$, zadovoljava i jednačinu

$$B\frac{\partial h}{\partial x} + C\frac{\partial h}{\partial y} = 0. \tag{23}$$

Znači, parabolička jednačina ima jednu familiju karakteristika

$$h(x,y) = C_1 .$$

Ako sada, u transformaciji (10), uzmemo

$$u = h(x,y), \qquad v = v(x,y), \tag{24}$$

gdje je $\boldsymbol{h}$ rješenje jednačine (22) (pa prema tome i (23) i (15)), a $v(x,y)$ proizvoljna, dva put neprekidno diferencijabilna, funkcija takva da vrijedi (11), tada će, saglasno sa (13), pošto je $h(x,y)$ rješenje jednačine (15), biti $A^* = 0$. Na osnovu činjenice da je $u = h(x,y)$ rješenje jednačina (22) i (23) biće

$$B^* = \left(A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} \right)\frac{\partial v}{\partial x} + \left(B\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial y} \right)\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

dok će biti

$$C^* = \frac{1}{A}\left(A\frac{\partial v}{\partial x} + B\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \neq 0, \tag{25}$$

pošto funkcija $v(x,y)$ nije rješenje jednačine (22).

Djeljenjem jednačine (12) sa C^* dobićemo kanonski oblik

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = F_2\left(u, v, z, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) \tag{26}$$

paraboličke jednačine (6).

3° **Jednačina eliptičkog tipa :** $\boldsymbol{B^2 - AC < 0}$.

Opšti integrali (18) su kompleksno konjugovani i određuju dvije familije imaginarnih karakteristika. Ako pretpostavimo da su A, B, C analitičke funkcije od $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$, koeficijenti jednačina (15a) i (15b) biće, takođe, analitičke funkcije od $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$. Može se utvrditi da jednačina (15a) ima analitičko rješenje

$$h(x,y) = h_1(x,y) + ih_2(x,y),$$

u okolini tačke (x_o, y_o), i da je $\left|\frac{\partial h}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial h}{\partial y}\right| \neq 0$, u toj okolini.

Stavimo u transformaciji (10)

$$u = h_1(x,y), \qquad v = h_2(x,y).$$

Lako se dokazuje da je tada $\dfrac{D(h_1,h_2)}{D(x,y)} \neq 0$.

S obzirom da je $h(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ rješenje jednačine (15), ono je identički zadovoljava, tj.

$$A\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} + C\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 \equiv 0,$$

tako da razdvajanjem realnog i imaginarnog djela dobijamo

$$A\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + B\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + C\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

i

$$A\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + C\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = A\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + C\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2.$$

Odavde, u saglasnosti s (13), zaključujemo da je $A^* = C^*,\quad B^* = 0$.
Kvadratna forma

$$At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2 \qquad (B^2 - AC < 0)$$

prima vrijednost 0 samo za $t_1 = t_2 = 0$. Otuda $A^* = C^*$ može biti jednako nuli samo ako je

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{27}$$

Pošto smo rješenja $h(x,y)$ izabrali tako da jednakosti (27) ne mogu biti ispunjene istovremeno, biće $A^* = C^* \neq 0$, tako da, nakon djeljenja jednačine (12) sa A*, dobivamo kanonski oblik

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = F_3\left(u, v, z, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

eliptičke jednačine (6).

Primjedba: U slučaju kad je jednačina (6) mješovitog tipa, tj. kada $B^2 - AC$ mijenja znak, jednačina (6) pripada različitim tipovima.

Skupom tačaka oblasti D duž kojih je

$$B^2 - AC = 0 \tag{28}$$

određena je kriva σ koja se zove **parabolička kriva jednačine** (6). Ako pretpostavimo da je σ jednostavna, glatka kriva ona će djeliti oblast D na dva djela tako da u jednom od njih jednačina (6) pripada eliptičkom, a u drugom hiperboličkom tipu.

I - PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

Z A D A C I

Zadatak 1. Odrediti površinu koja prolazi kroz krivu $y = x$, $z = x^3$ čija jednačina zadovoljava sljedeću parcijalnu diferencijalnu jednačinu:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = z. \tag{1}$$

Rješenje: Da bismo dobili familiju rješenja jednačine (1) posmatraćemo sistem običnih diferencijalnih jednačina u simetričnom obliku

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}, \tag{2}$$

ekvivalentan sa (1).

Ovaj sistem ima dva nezavisna integrala

$$\left.\begin{aligned} xy &= C_1 \\ zy &= C_2 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

I način

Da bismo dobili površ koja prolazi krivom

$$\left.\begin{aligned} y &= x \\ z &= x^3 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

treba odrediti konstante C_1 i C_2. Uvrštavanjem y i z, iz (4) u (3), dobićemo

$$C_1 = x^2, \quad C_2 = x^4,$$

znači

$$C_2 = C_1^2,$$

dakle

$$zy = x^2y^2.$$

Prema tome, tražena površ je

$$z = x^2y. \tag{5}$$

II način

S obzirom da znamo dva nezavisna integrala sistema (2), opšte rješenje $z = z(x,y)$ sistema (2), pa prema tome i jednačine (1), biće određeno sa:

$$xy = f(zy). \tag{6}$$

Da bismo odredili površ koja prolazi kroz datu krivu, treba odrediti funkciju f.

Uvrstimo li y i z, iz (4) u (6), dobićemo

$$x^2 = f(x^4),$$

tj.

$$f(t) = \sqrt{t}.$$

Dakle,

$$\sqrt{zy} = xy,$$

odakle, nakon sređivanja, dobivamo traženu površ

$$z = x^2 y.$$

Zadatak 2. Odrediti površinu koja prolazi kroz krug $z = 0$, $x^2 + y^2 = y$ i koja zadovoljava sljedeću parcijalnu diferencijalnu jednačinu:

$$2yz\frac{\partial z}{\partial x} - xz\frac{\partial z}{\partial y} + xy = 0. \tag{1}$$

Rješenje: Posmatrana parcijalna diferencijalna jednačina je ekvivalentna sistemu običnih diferencijalnih jednačina u simetričnom obliku

$$\frac{dx}{2yz} = -\frac{dy}{xz} = -\frac{dz}{xy}. \tag{2}$$

Da bismo rješili ovaj sistem, odredimo dva njegova nezavisna prva integrala. Iz

$$\frac{dx}{2yz} = -\frac{dy}{xz}, \qquad -\frac{dy}{xz} = -\frac{dz}{xy}, \tag{3}$$

zaključujemo da su to

$$2y^2 + x^2 = C_1, \qquad y^2 - z^2 = C_2. \tag{4}$$

I način

Prema tome, opšte rješenje jednačine (1) biće određeno sa

$$2y^2 + x^2 = f(y^2 - z^2). \tag{5}$$

Da bismo dobili traženu površinu treba odrediti funkciju f tako da ta površina prolazi kroz krug

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 = y.$$

Uzimajući to u obzir dobijamo

$$2y^2 + y - y^2 = f(y^2). \tag{5'}$$

Stavljajući

$$y^2 = t,$$

dobijamo

$$f(t) = t + \sqrt{t}.$$

Dakle,

$$y^2 - z^2 + \sqrt{y^2 - z^2} = 2y^2 + x^2,$$

tj.

$$(y^2 + x^2 + z^2)^2 = y^2 - z^2.$$

II način:

Polazeći od dobijenih prvih integrala i zahtjeva da se odredi površina koja prolazi datim krugom, dobijamo

$$C_1 = 2y^2 + x^2 = 2y^2 - y^2 + y = y^2 - y,$$
$$C_2 = y^2,$$

odakle je

$$y = \sqrt{C_2}.$$

Znači

$$C_1 = C_2 + \sqrt{C_2}.$$

tako da, na osnovu (4), dobijamo traženu integralnu površinu

$$y^2 + x^2 + z^2 = \sqrt{y^2 - z^2}.$$

Zadatak 3. Odrediti površine čije jednačine zadovoljavaju parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$(x^2 + y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} = xz \tag{1}$$

i prolaze kroz krive $x = a,\ y^2 + z^2 = a^2$.

Rješenje: Posmatrana parcijalna diferencijalna jednačina ekvivalentna je sistemu diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{xz}. \tag{2}$$

Iz prve jednakosti, nakon sređivanja, dobijamo homogenu diferencijalnu jednačinu prvog reda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left[\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right]}, \tag{3}$$

koja se, smjenom $\frac{y}{x} = u,$ svodi na jednačinu

$$\frac{dx}{x} = \frac{1 + u^2}{u(1 - u^2)}du,$$

u kojoj su promjenljive razdvojene. Njenom integracijom dobijamo jedan integral sistema (2):

$$x^2 = \frac{u^2}{(1 - u^2)^2}C_1^2,$$

koji se, nakon povratka na staru funkciju, svodi na

$$x^2\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)^2 = \frac{y^2}{x^2}C_1^2,$$

odnosno

$$\frac{x^2-y^2}{y} = C_1. \tag{4}$$

S druge strane, iz posljednje jednakosti produžene proporcije

$$\frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{xz}$$

integracijom dobijamo još jedan integral

$$\frac{z^2}{y} = C_2. \tag{5}$$

Opšte rješenje parcijalne diferencijalne jednačine (1) biće

$$\frac{x^2-y^2}{y} = f\left(\frac{z^2}{y}\right).$$

Odredimo funkciju f tako da dobivena površina prolazi krivom

$$x = a, \qquad z^2 + y^2 = a^2.$$

Dobićemo

$$\frac{a^2-y^2}{y} = f\left(\frac{a^2-y^2}{y}\right),$$

odakle zaključujemo da je $f = 1$. Znači, tražena površ je

$$x^2 - y^2 = z^2.$$

Zadatak 4. Odrediti ono rješenje jednačine

$$z(x+z)\frac{\partial z}{\partial x} - y(y+z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

koje za $x = 1$ prima oblik $z = \sqrt{y}$.

Rješenje: Jednačina (1) ekvivalentna je sistemu

$$\frac{dx}{z(x+z)} = -\frac{dy}{y(y+z)} = \frac{dz}{0} \tag{2}$$

čiji je jedan integral očigledno

$$z = C_1 ,$$

a drugi ćemo dobiti pomoću prvog, uvrštavajući u prvu jednakost sistema $z = C_1$:

$$\frac{dx}{C_1(x+C_1)} = -\frac{dy}{y(y+C_1)} .$$

Integracijom ove jednačine dobićemo

$$\frac{1}{C_1}\ln(x+C_1) = -\frac{1}{C_1}\left[\ln y - \ln\left(y+C_1\right) + \ln C_2\right],$$

odnosno

$$y(x+C_1) = C_2(y+C_1) .$$

Zamjenom $C_1 = z$, dobićemo još jedan integral sistema (1), nezavisan od prethodnog

$$\frac{y(x+z)}{y+z} = C_2 .$$

Prema tome, opšte rješenje sistema (1) može se napisati u obliku

$$\frac{y(x+z)}{y+z} = f(z) .$$

Odredimo funkciju f tako da tražena površina za $x=1$, primi oblik $z=\sqrt{y}$. Uvrštavanjem $x=1$, $z=\sqrt{y}$, dobićemo:

$$\frac{y(1+\sqrt{y})}{y+\sqrt{y}} = f(\sqrt{y}), \quad \text{tj.}$$

$$f(\sqrt{y}) = \sqrt{y},$$

odakle je

$$\frac{y(x+z)}{y+z} = z,$$

dakle

$$z^2 = xy.$$

Zadatak 5. Odrediti opšti integral jednačine:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy\sqrt{a^2 - z^2} . \tag{1}$$

Rješenje: Posmatrana jednačina je ekvivalentna sistemu jednačina

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2xy\sqrt{a^2 - z^2}}, \tag{2}$$

čiji je jedan prvi integral $\frac{y}{x} = C_1$.

Smjenom $y = C_1 x$, dobićemo jednačinu u kojoj se promjenljive mogu razdvojiti:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{2xC_1x\sqrt{a^2 - z^2}}.$$

Integracijom jednačine

$$2C_1 x dx = \frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}} \tag{3}$$

dobićemo

$$C_1 x^2 = \arcsin\left(\frac{z}{a}\right) + C_2 ,$$

odakle, s obzirom da je $C_1 = y / x$, dobijamo još jedan integral

$$\frac{y}{x}x^2 = \arcsin\left(\frac{z}{a}\right) + C_2 ,$$

odnosno

$$xy - arc\sin\left(\frac{z}{a}\right) = C_2 .$$

Opšti integral jednačine (1) se, prema tome, može napisati u obliku

$$xy - arc\sin\frac{z}{a} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

odnosno, odavde je

$$z = a\sin\left[xy - f\left(\frac{y}{x}\right)\right].$$

Zadatak 6. Integrisati parcijalnu diferencijalnu jednačinu konusne površine

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \tag{1}$$

Pomoću dobijenog rezultata odrediti onu konusnu površinu koja prolazi kroz krug $x^2 + y^2 = ax, \quad z = 1$.

Rješenje: Parcijalna diferencijalna jednačina (1) ekvivalentna je sistemu običnih diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{0}. \tag{2}$$

Ovaj sistem ima tri sljedeća, nezavisna integrala:

$$u = C_1, \quad \frac{z}{x} = C_2 \quad \text{i} \quad \frac{y}{x} = C_3 , \tag{3}$$

tako da se njegovo opšte rješenje može napisati u obliku

$$u\,\frac{x}{y} = f\left(\frac{z}{x}\right). \tag{4}$$

Da bismo odredili funkciju *f*, uvedimo oznaku

$$\frac{z}{x} = t, \tag{5}$$

i uzmimo u obzir činjenicu da se traži konusna površina koja prolazi zadanim krugom: $z=1,\ x^2+y^2=ax$. Tako dobijamo

$$x=\frac{1}{t}, \quad y=\pm\sqrt{\frac{a}{t}-\frac{1}{t^2}}, \tag{6}$$

što nas, zajedno sa (4), dovodi do tražene funkcije f. Naime, na osnovu (6), (4) prima oblik

$$\frac{\frac{1}{t}}{\pm\sqrt{\frac{a}{t}-\frac{1}{t^2}}}u = f(t), \tag{7}$$

tako da, koristeći (4) i (7), dobijamo

$$u\frac{x}{y} = u\frac{\frac{x}{z}}{\pm\sqrt{a\frac{x}{z}-\frac{x^2}{z^2}}},$$

odnosno

$$axz - x^2 = y^2,$$

odakle je

$$y = \pm\sqrt{x(az-x)}.$$

Zadatak 7. Odrediti ono rješenje parcijalne diferencijalne jednačine

$$xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} + xy = 0 \tag{1}$$

koje prolazi kroz krivu: $xy=a^2,\ z=b$.

Rješenje: Da bismo odredili traženo rješenje, posmatrajmo sistem običnih diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = -\frac{dz}{xy}$$

koji je ekvivalentan polaznoj jednačini (1).

Njegovim rješavanjem dobićemo dva prva integrala, i to iz:

1° $$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz},$$

dobijamo

$$\ln x + \ln C_1 = \ln y,$$

odnosno

$$\frac{y}{x} = C_1 ; \tag{2}$$

2° $$\frac{dx}{xz} = -\frac{dz}{xy},$$

na osnovu (2) je

$$C_1 x\, dx = -z\, dz,$$

tako da je

$$C_1 \frac{x^2}{2} = -\frac{z^2}{2} + C_2' .$$

Odavde kada, saglasno sa (2), C_1 zamjenimo sa y/x, dobijamo

$$\frac{x^2}{2} \cdot \frac{y}{x} = -\frac{z^2}{2} + \frac{C_2}{2}, \quad \text{za} \quad C_2' = \frac{C_2}{2},$$

tj.

$$z^2 + xy = C_2 .$$

S obzirom da znamo dva nezavisna prva integrala sistema (2), opšte rješenje $z = z(x, y)$ toga sistema, pa prema tome i jednačine (1), biće:

$$z^2 + xy = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Odredimo funkciju f tako da dobivena površ prolazi zadanom krivom. Dobićemo

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = a^2 + b^2, \quad \text{za} \quad xy = a^2 .$$

Prema tome, tražena površ je

$$z^2 + xy = a^2 + b^2 .$$

Zadatak 8. Ispitati, da li je ispunjen uslov potpune integrabilnosti za sistem

$$\left.\begin{aligned} p &= z + yz \qquad (\equiv A(x,y,z)) \\ q &= z^2 + 2xz \qquad (\equiv B(x,y,z)), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

pa, zatim, odrediti njegovo rješenje.

Rješenje: Pošto

$$\begin{aligned} & A'_y + A'_z B - (B'_x + B'_z A) = \\ & = z + (1+y)(z^2 + 2xz) - 2z - 2(z+x)(z+yz) = \\ & = -z\left[1 + z(1+y)\right] \not\equiv 0, \end{aligned} \tag{2}$$

uslov potpune integrabilnosti nije ispunjen, tako da parcijalna diferencijalna jednačina može, eventualno, imati konačno mnogo rješenja. Potencijalna rješenja su, prema (2):

$$z = 0 \quad \text{i} \quad z = -\frac{1}{1+y}.$$

Neposrednom provjerom se zaključuje da je

1° $z = 0$ rješenje sistema (1), dok

2° $z = -\dfrac{1}{1+y}$ nije rješenje sistema (1).

Zadatak 9. Ispitati integrabilnost sistema diferencijalnih jednačina

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= ay^2 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{b}{2y^2} + \frac{2z}{y} - ay^2. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Rješenje: Uslov integrabilnosti

$$A'_y + A'_z B - B'_x - B'_z A = 2ay - \frac{2}{y}ay^2 = 0$$

je identički zadovoljen, tako da je sistem (1) rješiv.
Integracijom prve jednačine sistema (1) imamo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ay^2, \quad z = ay^2 x + \varphi(y). \tag{2}$$

Uvrštavanjem ovako dobivenog z, u drugu od jednačina sistema (1), dobićemo

$$2axy + \varphi'(y) = \frac{b}{2y^2} + 2axy + \frac{2\varphi(y)}{y} - ay^2,$$

ili

$$\frac{d\varphi}{dy} - 2\frac{\varphi}{y} = \frac{b}{2y^2} - ay^2 .$$

Ako, tako dobivenu jednačinu, koja je linearna prvog reda u odnosu na φ, napišemo u obliku:

$$y^{-2}\, d\varphi - 2y^{-3}\varphi\, dy = \frac{b}{2} y^{-4}\, dy - a\, dy$$

nalazimo

$$y^{-2}\varphi = -\frac{b}{6y^3} - ay + C,$$

odakle je

$$\varphi(y) = -\frac{b}{6y} - ay^3 + Cy^2.$$

Uvrštavanjem ovako dobivene vrijednosti za φ, u izraz za z, dobićemo opšte rješenje sistema

$$z = -\frac{b}{6y} + Cy^2 + ay^2(x - y).$$

Zadatak 10. Riješiti diferencijalnu jednačinu

$$(2x^2 + 2xy + 2xz^2 + 1)\,dx + dy + 2z dz = 0. \tag{1}$$

Rješenje: Uslov integrabilnosti

$$P\left[\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right]+Q\left[\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right]+R\left[\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right]=$$

$$=(2x^2+2xy+xz^2+1)(0-0)+1\cdot(0-4xz)+2z(2x-0)=0$$

je identički zadovoljen.

Ako pretpostavimo da je

$$x=const, \quad \text{dakle} \quad dx=0,$$

jednačina (1) će se svesti na

$$\frac{dy}{dz}=-2z, \qquad \text{odakle je} \qquad y+z^2=u(x). \tag{2}$$

Saglasno opštoj teoriji, ako tako dobiveno u uvrstimo u polaznu jednačinu, dobićemo običnu diferencijalnu jednačinu po x i u:

$$(2x^2+2xu+1)\,dx+du=0, \tag{3}$$

koja je linearna u odnosu na u. Njeno rješenje je

$$u=e^{-x^2}\left[C+\int e^{x^2}(-2x^2-1)\,dx\right]=Ce^{-x^2}-x\,.$$

Ako ovako dobiveno u uvrstimo u (2), imaćemo

$$y+z^2=Ce^{-x^2}-x\,.$$

Dakle,

$$(x+y+z^2)e^{x^2}=C\,.$$

Zadatak 11. Odrediti projekcije na xOy ravan familije krivih koje su definisane na elipsoidu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

Pfaffovom jednačinom

$$xdx+ydy+c\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}dz=0\,. \tag{2}$$

Rješenje: Data jednačina ne zadovoljava uslove integrabilnosti.

Zbog toga ćemo iz (1) odrediti z, pa izračunati dz i uvrstiti u jednačinu (2). Dobićemo

$$z = c\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$dz = -c\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}\right),$$

tako da je

$$xdx + ydy - c^2\left(\frac{xdx}{a^2}+\frac{ydy}{b^2}\right) = 0,$$

odakle je

$$\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)x^2 + \left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)y^2 = C.$$

Zadatak 12. Ispitati uslov integrabilnosti i naći integralne tvorevine jednačine

$$(3x^2 + yz)y\,dx + x^2 dy + (x+2z)y^2 dz = 0. \tag{1}$$

Rješenje: Ovdje je

$$P = 3x^2 y + y^2 z, \quad Q = x^2, \quad R = xy^2 + 2zy^2. \tag{2}$$

Ispitajmo da li je

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \tag{3}$$

i ako nije, pod kojim uslovima će vrijediti jednakost (3).

Uslov (3) nas dovodi do jednakosti:

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 + 2yz &= 2x, \\ y^2 &= y^2 \\ 0 &= 2xy + 4yz, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

redom. Prema tome, identički je zadovoljena samo druga od jednakosti (3). Pošto

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=$$
$$= y^2x(x+2z)(3x+2) \not\equiv 0,$$

jednačina (1) nije integrabilna jednom relacijom.

Ona će imati konačno mnogo rješenja i to, prema (4):

1° $\quad x=0, \quad y=0, \quad z$ proizvoljno;

2° $\quad x=-\frac{2}{3}, \quad y=0, \quad z$ proizvoljno;

3° $\quad x=-2z, \quad y=-\dfrac{3x^2+2x}{2z}=-\dfrac{3x^2+2x}{-x}=3x+2,$ tj.

$$x - \text{proizvoljno}, \quad y=3x+2, \quad z=-\frac{x}{2}.$$

Direktnom provjerom utvrđujemo da 1° i 2° zadovoljavaju jednačinu (1), dok za 3° dobijamo

$$\left[\left(3x^2-\frac{3}{2}x^2-x\right)(3x+2)-3x^2\right]dx \not\equiv 0,$$

tako da 3° nije rješenje jednačine.

Zadatak 13. Ispitati da li je jednačina

$$ydx + zdy + xdz = 0 \tag{1}$$

integrabilna, pa je zatim, ukoliko je to moguće, riješiti.

Rješenje: Za jednačinu (1) ni jedan od dva uslova integrabilnosti nije ispunjen. Pokušajmo odrediti funkciju $u=u(x,y,z)$, tako da za

$$Pdx + Qdy + Rdz - du = P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz \tag{2}$$

bude zadovoljen uslov

$$P_1\left(\frac{\partial Q_1}{\partial z}-\frac{\partial R_1}{\partial y}\right)+Q_1\left(\frac{\partial R_1}{\partial x}-\frac{\partial P_1}{\partial z}\right)+R_1\left(\frac{\partial P_1}{\partial y}-\frac{\partial Q_1}{\partial x}\right)\equiv 0. \tag{3}$$

Ako u relaciji (3) P_1, Q_1, R_1 zamjenimo izrazima

$$P_1=P-\frac{\partial u}{\partial x},\ Q_1=Q-\frac{\partial u}{\partial y},\ R_1=R-\frac{\partial u}{\partial z},$$

poslije provedenog računa, dobićemo jednačinu po u:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial z}=\\&=\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)P+\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)Q+\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)R,\end{aligned} \tag{3'}$$

koja u ovom, konkretnom, slučaju glasi:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=x+y+z. \tag{4}$$

Jednačina (4) ekvivalentna je sistemu jednačina

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{1}=\frac{du}{x+y+z}.$$

Njegova tri nezavisna prva integrala su

$$u-\frac{1}{6}(x+y+z)^2=C_1\quad x-y=C_2,\ y-z=C_3,$$

tako da je opšte rješenje jednačine (4):

$$u=\frac{1}{6}(x+y+z)^2+\varphi(x-y,\ y-z),$$

gdje je φ proizvoljna funkcija.
Uzmimo

$$u=\frac{1}{6}(x+y+z)^2-\frac{1}{12}(x-y)^2-\frac{1}{12}(y-z)^2-\frac{1}{12}\left[(x-y)+(y-z)\right]$$

tj.

$$u=\frac{1}{2}(xy+yz+zx).$$

Izračunajmo, iz lijevog dijela jednačine, du. Dobićemo Pfaffovu formu

$$ydx + zdy + xdz - du = \frac{1}{2}\left\{(y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz\right\}.$$

Za ovu formu je ispunjen uslov (3). Lako se provjerava da ona ima integracioni faktor $\mu = (x-y)^{-2}$, jer je

$$\frac{1}{2(x-y)^2}\left\{(y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz\right\} = \frac{1}{2}d\left[\frac{z-x}{x-y}\right].$$

Odavde je $v = (x-y)^2$, $w = \frac{1}{2}\frac{z-x}{x-y}$, a forma, koja stoji na lijevoj strani date jednačine, dopušta kanonski prikaz oblika

$$Pdx + Qdy + Rdz = du + v\,dw\,, \quad \text{tj.}$$

$$ydx + zdy + xdz = d\left[\frac{1}{2}(xy+yz+zx)\right] + (x-y)^2\, d\left[\frac{1}{2}\frac{z-x}{x-y}\right].$$

Odavde dobijamo dvije relacije

$$xy + yz + zx = \varphi\left[(z-x)(x-y)^{-1}\right],$$
$$(x-y)^2 = -\varphi'\left[(z-x)(x-y)^{-1}\right].$$

Zadatak 14. Data je Pfaffova jednačina

$$2xz\,dx + 2yz\,dy - (x^2+y^2+z^2)dz = 0. \tag{1}$$

Ispitati da li su ispunjeni uslovi potpune integrabilnosti i ako jesu odrediti onu integralnu površinu koja prolazi tačkom M (1,1,1).

Rješenje: Za jednačinu (1) je

$$P = 2xz, \quad Q = 2yz, \quad R = -(x^2+y^2+z^2), \tag{2}$$

dakle,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial P}{\partial z} = 2x; \ \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial Q}{\partial z} = 2y; \ \frac{\partial R}{\partial x} = -2x, \ \frac{\partial R}{\partial y} = -2y,$$

tako da je

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z}\neq\frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z}\neq\frac{\partial R}{\partial y}, \tag{3}$$

tj. $rot\,\vec{F}\neq 0$, pa polje $\vec{F}$ nije potencijalno.

Kako je, međutim

$$P(Q_z-R_y)+Q(R_x-P_z)+R(P_y-Q_x)\equiv$$
$$\equiv 2xz\cdot 4y+2yz\cdot(-4x)-(x^2+y^2+z^2)0 \equiv 0,$$

ispunjeni su uslovi integrabilnosti, pa postoji integracioni faktor μ, za jednačinu (1), kojeg treba odrediti. Množenjem jednačine (1) sa μ, dobićemo jednačinu

$$2xz\mu\,dx+2yz\mu\,dy-(x^2+y^2+z^2)\mu\,dz=0,$$

čija će lijeva strana biti totalni diferencijal ako je

$$\left.\begin{aligned}
&2xz\frac{\partial\mu}{\partial y}=2yz\frac{\partial\mu}{\partial x}\\
&2x\mu+2xz\frac{\partial\mu}{\partial z}=-2x\mu-(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial\mu}{\partial x}\\
&2y\mu+2yz\frac{\partial\mu}{\partial z}=-2y\mu-(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial\mu}{\partial y}.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ako postavimo uslov da je $\mu=\mu(z)$, biće

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial\mu}{\partial y}=0,$$

tako da će sistem (4) preći u

$$\left.\begin{aligned}
&2x\mu+2xz\frac{\partial\mu}{\partial z}=-2x\mu\\
&2y\mu+2yz\frac{\partial\mu}{\partial z}=-2y\mu.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Jednačine (5) se, nakon dijeljenja sa $2x$, odnosno $2y$, svode na istu jednačinu

$$2\mu+z\frac{d\mu}{dz}=0.$$

Odavde je

$$\frac{d\mu}{\mu} + 2\frac{dz}{z} = 0,$$

tj.

$$\ln\mu + 2\ln z = \ln\alpha, \qquad (\alpha = const),$$

dakle

$$\mu = \frac{\alpha}{z^2}.$$

Prema tome, za $\alpha = 1$, integracioni faktor jednačine (1) biće $\mu = \frac{1}{z^2}$, tako da, ako pomnožimo (1) sa z^{-2}, dobijamo:

$$\frac{2xdx + 2ydy}{z} - \left[1 + \frac{x^2+y^2}{z^2}\right]dz = 0,$$

ili

$$\frac{d(x^2+y^2)}{z} - \frac{(x^2+y^2)}{z^2}dz - dz = 0,$$

tj.

$$\frac{z\,d(x^2+y^2) - (x^2+y^2)\,dz}{z^2} - dz = 0.$$

Dakle,

$$d\left[\frac{x^2+y^2}{z} - z\right] = 0,$$

tako da je

$$\frac{x^2+y^2}{z} - z = C.$$

Iz uslova da integralna površ prolazi tačkom M (1,1,1) dobijamo $C = 1$, tako da je tražena integralna površ

$$x^2 + y^2 - z^2 = z.$$

Zadatak 15. Data je parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda

$$z - p^2x^2 - q^2y^2 = 0. \tag{1}$$

a) Metodom Lagrange-Charpita naći potpuni, opšti i singularni integral.

b) Cauchyevom metodom karakteristika odrediti ono rješenje koje zadovoljava početne uslove

$$x_o = y_o = z_o.$$

Rješenje: a) Jednačina (1) je ekvivalentna sistemu jednačina

$$\frac{dx}{-2x^2p} = \frac{dy}{-2y^2q} = \frac{dz}{-2z} = \frac{dp}{-(p-2xp^2)} = \frac{dq}{-(q-2yq^2)} \quad (=du). \tag{2}$$

Da bismo ga riješili dovoljno je naći dva prva integrala:

$$\frac{dx}{2x^2} = \frac{dp}{1-2xp},$$

$$\frac{dp}{dx} + \frac{1}{x}p = \frac{1}{2x^2}.$$

Odavde je

$$p = \frac{1}{x}\left(a + \frac{1}{2}\ln x\right),$$

dakle

$$\Phi \equiv px - \frac{1}{2}\ln x = a. \tag{3}$$

Slično je

$$q = \frac{1}{y}\left(b + \frac{1}{2}\ln y\right),$$

dakle

$$\psi \equiv qy - \frac{1}{2}\ln y = b. \tag{4}$$

Pošto su integrali Φ i ψ u involuciji, tj. pošto je $[\Phi, \psi] \equiv 0$, potpuni integral jednačine (1) biće određen tim integralima. Prema tome **potpuni integral** je

$$z = \left(a + \frac{1}{2}\ln x\right)^2 + \left(b + \frac{1}{2}\ln y\right)^2. \tag{5}$$

Opšti integral je

$$\left.\begin{aligned} z &= \left(a + \frac{1}{2}\ln x\right)^2 + \left(\omega(a) + \frac{1}{2}\ln y\right)^2 \\ &\left(a + \frac{1}{2}\ln x\right) + \left(\omega(a) + \frac{1}{2}\ln y\right)\omega'(a) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Singularni integral je dat sa

$$a + \frac{1}{2}\ln x = 0, \quad b + \frac{1}{2}\ln y = 0, \quad \text{tj.}$$

$$z = 0. \tag{7}$$

b) Metodom integralnih kombinacija se, iz sistema (2), dobija

$$\frac{pdx + xdp}{px} = -du,$$

$$\frac{qdy + ydq}{qy} = -du,$$

$$\frac{dz}{z} = -2du.$$

Odavde je

$$\left.\begin{aligned} px &= p_o x_o e^{-u}, \\ qy &= q_o y_o e^{-u}, \\ z &= z_o e^{-2u}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Iz (3) i (4) je

$$px - p_o x_o = \frac{1}{2} \ln \frac{x}{x_o},$$

$$qy - q_o y_o = \frac{1}{2} \ln \frac{y}{y_o},$$

dakle

$$x = x_o e^{2(px - p_o x_o)}$$

$$y = y_o e^{2(qy - q_o y_o)}.$$

Stoga je iz (8)

$$\left.\begin{aligned} x &= x_o \exp\left(2p_o x_o (e^{-u} - 1)\right), \\ y &= y_o \exp\left(2q_o y_o (e^{-u} - 1)\right), \\ z &= z_o \exp(-2u), \\ p &= p_o \exp\left(2p_o x_o (1 - e^{-u}) - u\right), \\ q &= q_o \exp\left(2q_o y_o (1 - e^{-u}) - u\right), \\ z_o &= p_o^2 x_o^2 + q_o^2 y_o^2 . \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Da bismo odredili rješenje, koje zadovoljava date početne uslove, uzimamo

$$x_o = v, \ y_o = v, \ z_o = v \tag{10}$$

i uvrstimo u posljednju od jednačina (9). Dobićemo

$$v = v^2 p_o^2 + v^2 q_o^2 ,$$

tako da je

$$p_o^2 + q_o^2 = \frac{1}{v}. \tag{11}$$

Osim toga iz

$$\frac{dz_o}{dv} = p_o \frac{dx_o}{dv} + q_o \frac{dy_o}{dv},$$

saglasno sa (10), dobijamo

$$p_o + q_o = 1. \tag{12}$$

Rješavanjem sistema (11) – (12) po p_o i q_o, dobićemo

$$p_o = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{2}{v}-1}\right),$$

$$q_o = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{2}{v}-1}\right),$$

tako da će rješenje Cauchyevog zadatka biti:

$$x = v\exp\left(v\left(1+(2v^{-1}-1)^{\frac{1}{2}}\right)(e^{-u}-1)\right)$$

$$y = v\exp\left(v\left(1-(2v^{-1}-1)^{\frac{1}{2}}\right)(e^{-u}-1)\right)$$

$$z = ve^{-2u} .$$

<u>Zadatak 16.</u> Po Cauchyevoj metodi karakteristika odrediti ono rješenje jednačine

$$z - xq - yp = 0, \tag{1}$$

koje zadovoljava početne uslove

$$x = 1, \quad z = y^2 . \tag{2}$$

<u>Rješenje:</u> Jednačina (1) ekvivalentna je sistemu karakteristika

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{-yp-xq} = -\frac{dp}{-q+p} = -\frac{dq}{-p+q} = du, \tag{3}$$

ili

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z} = \frac{dp}{p-q} = \frac{dq}{q-p} = -du. \tag{3'}$$

Iz (3′) dobijamo

$$\frac{dz}{z} = -du, \quad \text{tj.}$$

$$z = z_o e^{-u} \tag{4}$$

$$d(p+q) = 0, \quad \text{dakle}$$
$$p + q = p_o + q_o, \quad \text{tj.}$$
$$q = p_o + q_o - p, \tag{5}$$

tako da je

$$\frac{dp}{2p - p_o - q_o} = -du,$$

odnosno

$$\ln (2p - p_o - q_o)(p_o - q_o)^{-1} = -2u.$$

Prema tome

$$p = \frac{1}{2}\left\{(p_o - q_o)e^{-2u} + p_o + q_o\right\} \tag{6}$$

$$q = \frac{1}{2}\left\{(q_o - p_o)e^{-2u} + p_o + q_o\right\}. \tag{7}$$

Osim toga iz prve i druge jednakosti u (3′), dobivamo

$$x^2 - x_o^2 = y^2 - y_o^2$$

ili

$$y = \pm\sqrt{x^2 + y_o^2 - x_o^2},$$

tako da, uvrštavanjem ovako dobivenog y u jednakost $\dfrac{dx}{y} = -du$, dobivamo

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 + y_o^2 - x_o^2}} = \mp du,$$

odakle se, nakon integracije, nalazi

$$x + \sqrt{x^2 + y_o^2 - x_o^2} = (x_o \pm y_o)e^{\mp u},$$

odnosno

$$x \pm y = (x_o \pm y_o)e^{\mp u}.$$

Tako je:

$$x = \frac{1}{2}\left\{(x_o + y_o)e^{-u} + (x_o - y_o)e^{u}\right\} \tag{8}$$

$$y = \frac{1}{2}\left\{(x_o + y_o)e^{-u} - (x_o - y_o)e^{u}\right\}. \tag{8'}$$

Uslov (2) napišimo u obliku

$$x_o = 1,\ y_o = v,\ z_o = v^2, \tag{2'}$$

pa odredimo rješenje koje zadovoljava ovaj početni uslov. Imaćemo

$$\left.\begin{aligned} &z_o - p_o y_o - q_o x_o = 0 \\ &\frac{dz_o}{dv} = p_o\frac{dx_o}{dv} + q_o\frac{dy_o}{dv}, \end{aligned}\right\}$$

odakle se, u saglasnosti sa (2'), dobija

$$\left.\begin{aligned} &v^2 - p_o v - q_o = 0 \\ &2v = q_o. \end{aligned}\right\}$$

Odavde dobijamo

$$p_o = 2v,\quad q_o = v - 2.$$

Ako ovako dobivene p_o i q_o uvrstimo u (6) i (7) dobićemo rješenje Cauchyevog zadatka

$$x = \frac{1}{2}\left\{(1+v)e^{-u} + (1-v)e^{u}\right\},\quad p = \frac{1}{2}\left\{(v+2)e^{-2u} + 3v - 2\right\},$$

$$y = \frac{1}{2}\left\{(1+v)e^{-u} - (1-v)e^{u}\right\},\quad q = \frac{1}{2}\left\{(v+2)e^{-2u} - 3v - 2\right\},$$

$$z = v^2 e^{-u}.$$

koje zadovoljava početne uslove (2).

Zadatak 17. Odrediti krive L od kojih je svaka u svakoj svojoj tački M normalna na površinu S familije površina datih jednačinom

$$ax^2 + by^2 = Cz, \tag{1}$$

koja prolazi kroz M, gdje su a i b fiksne konstante, a C proizvoljna konstanta.

Rješenje: Napišimo jednačinu (1) u obliku

$$F(x,y,z) \equiv \frac{ax^2+by^2}{z} = C. \tag{1'}$$

Diferencijalna jednačina tražene familije krivih je ekvivalentna sistemu:

$$\frac{dx}{\frac{2ax}{z}} = \frac{dy}{\frac{2by}{z}} = \frac{dz}{-\frac{ax^2+by^2}{z^2}}. \tag{2}$$

Odavde se lako dobijaju 2 prva integrala. Jedan od njih integracijom jednačine

$$\frac{dx}{ax} = \frac{dy}{by},$$

odakle je

$$b\ln|x| = a\ln|y| - \ln\alpha,$$

tako da je

$$|y|^a = \alpha|x|^b. \tag{3}$$

Osim toga

$$\frac{xdx+ydy+2zdz}{\frac{2}{z}(ax^2+by^2)-\frac{2}{z}(ax^2+by^2)} = \frac{xdx+ydy+2zdz}{0},$$

dakle

$$d(x^2+y^2+2z^2) = 0,$$

pa je

$$x^2+y^2+2z^2 = \beta. \tag{4}$$

Prema tome, tražena familija krivih je data sa

$$x^2+y^2+2z^2 = \varphi\left(|y|^a|x|^{-b}\right).$$

Zadatak 18. Neka je M tačka površine S, N presjek normale, povučene na površinu S u tački M, sa ravni xOy i P projekcija tačke M na ravan xOy.

a) Odrediti parcijalnu diferencijalnu jednačinu površine S ako je, za svaku tačku M površine S, ispunjen uslov

$$\overline{ON} = \overline{NP}. \tag{1}$$

b) Naći opšte rješenje dobivene jednačine.

c) Odrediti onu površinu S koja prolazi kroz krivu:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = \sqrt{\frac{t-1}{2}} . \tag{$*$}$$

Rješenje: **a)** Jednačina normale na površ

$$S: \ z = z(x, y),$$

u tački $M(x, y, z)$ je određena sa

$$\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1},$$

tako da će koordinate tačke N, u kojoj ona probada xOy ravan, biti $(x+pz,\ y+qz,\ 0)$. Osim toga tačka P, kao projekcija tačke M na xOy ravan, ima koordinate $(x, y, 0)$.

S obzirom da je

$$\overline{NP}^2 = (p^2+q^2)z^2 \quad \text{i} \quad \overline{ON}^2 = (x+pz)^2 + (y+qz)^2,$$

na osnovu (1), dolazimo do parcijalne diferencijalne jednačine:

$$(p^2+q^2)z^2 = (x+pz)^2 + (y+qz)^2$$

koja se, nakon sređivanja, svodi na

$$2zpx + 2zqy = -(x^2+y^2). \tag{2}$$

b) Jednačina (2) je ekvivalentna sistemu karakteristika

$$\frac{dx}{2zx} = \frac{dy}{2zy} = \frac{dz}{-(x^2+y^2)}, \tag{3}$$

ili

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{2zdz}{-(x^2+y^2)}.$$

Iz

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y},$$

dobijamo

$$\frac{y}{x} = \alpha, \tag{4}$$

dok je, na osnovu

$$\frac{xdx+ydy+2zdz}{0} = \frac{dx}{x},$$

$$d(x^2+y^2+2z^2) = 0,$$

tj.

$$x^2+y^2+2z^2 = \beta. \tag{5}$$

Pošto su prvi integrali (4) i (5) nezavisni, opšte rješenje jednačine (2) biće

$$x^2+y^2+2z^2 = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{6}$$

c) Da bismo odredili površinu koja prolazi krivom $(*)$ uvrstićemo u (6)

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = \sqrt{\frac{t-1}{2}}.$$

To će nas dovesti do funkcije φ:

$$\varphi(tg\, t) = t,$$

odnosno, ako uvedemo smjenu $tg\, t = u$, biće

$$\varphi(u) = arc\, tg\, u.$$

Dakle, imamo

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = arc\, tg\frac{y}{x},$$

tako da je, u saglasnosti sa (6), tražena površ

$$arc\,tg\frac{y}{x} = x^2 + y^2 + 2z^2 \,,$$

odnosno

$$y = x\,tg(x^2 + y^2 + 2z^2)\,.$$

Zadatak 19. Jednačinom

$$(X-x)^2 + (Y-y)^2 + Z^2 = z^2 \,, \tag{1}$$

gdje su X, Y, Z tekuće koordinate, x, y dva parametra i $z = z(x,y)$ neka funkcija parametara x i y, određena je jedna familija lopti koja zavisi od tih dvaju parametara.

a) Naći uslov u obliku parcijalne diferencijalne jednačine koju mora zadovoljavati nepoznata funkcija $z = z(x,y)$ da bi konusna površina

$$Z^2 = X^2 + Y^2 \tag{2}$$

bila obvojnica familije (1).

b) Naći sva rješenja $z = z(x,y)$ dobivene parcijalne diferencijalne jednačine.

c) Dokazati da familija lopti (1) ima za obvojnicu konusnu površinu (2) samo u slučaju kada je $z(x,y)$ singularni integral navedene parcijalne diferencijalne jednačine.

d) Rezultat pod c) potvrditi elementarnim geometrijskim razmatranjem.

Rješenje: a) Diferenciranjem jednačine (1) po x, odnosno po y, dobićemo:

$$X - x = pz, \quad Y - y = qz\,. \tag{3}$$

Uvrštavanjem (3) u (1), dobićemo

$$Z^2 = (1 - p^2 - q^2)z^2\,. \tag{3'}$$

Da bi konusna površina (2) bila obvojnica familije lopti (1) potrebno je da X, Y, Z zadovoljavaju jednačinu (2), tj. da je ispunjen uslov:

$$z^2(1 - p^2 - q^2) = (x - zp)^2 + (y - zq)^2\,,$$

koji se može napisati u obliku

$$x^2 + y^2 - 2xzp - 2yzq + 2z^2p^2 + 2z^2q^2 - z^2 = 0. \qquad (4)$$

b) Uvodeći nove promjenljive ξ, η, ς, stavljajući

$$\xi = x^2, \quad \eta = y^2, \quad \varsigma = \varsigma(\xi, \eta),$$

jednačina (4) se svodi na

$$\xi(1 - 2p_1 + 2p_1^2) + \eta(1 - 2q_1 + 2q_1^2) - \varsigma = 0, \qquad (5)$$

gdje je $p_1 = \dfrac{d\varsigma}{d\xi}$, $q_1 = \dfrac{d\varsigma}{d\eta}$.

Odgovarajući sistem diferencijalnih jednačina glasi

$$\frac{d\xi}{2\xi(2p_1 - 1)} = \frac{d\eta}{2\eta(2q_1 - 1)} = \frac{d\varsigma}{2p_1\xi(2p_1 - 1) + 2q_1\eta(2q_1 - 1)} =$$
$$= \frac{dp_1}{(2p_1 - 1)(p_1 - 1)} = \frac{dq_1}{(2q_1 - 1)(q_1 - 1)}.$$

Izdvojimo jednačine

$$\frac{d\xi}{\xi} = \frac{2dp_1}{p_1 - 1}, \qquad \frac{d\eta}{\eta} = \frac{2dq_1}{q_1 - 1}.$$

Iz njih dobijamo dvije relacije

$$\Phi \equiv \xi(p_1 - 1)^2 = \alpha^2, \qquad \Psi \equiv \eta(q_1 - 1)^2 = \beta^2.$$

Lako se može vidjeti da su ova dva integrala u involuciji, tj. da je $[\Phi, \Psi] = 0$. Odavde je:

$$p_1 = 1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\xi}}, \qquad q_1 = 1 + \frac{\beta}{\sqrt{\eta}}. \qquad (6)$$

Uvrštavanjem (6) u (5), dobićemo

$$\varsigma = \xi\left(1 + 2\frac{\alpha}{\sqrt{\xi}} + 2\frac{\alpha^2}{\xi}\right) + \eta\left(1 + 2\frac{\beta}{\sqrt{\eta}} + 2\frac{\beta^2}{\eta}\right),$$

tj.

$$\varsigma = \xi + 2\alpha\sqrt{\xi} + 2\alpha^2 + \eta + 2\beta\sqrt{\eta} + 2\beta^2.$$

Vraćanjem na promjenljive x, y, z, dobija se **potpuni integral** jednačine (4):

$$z^2 = (x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2 + \alpha^2 + \beta^2 . \tag{7}$$

Singularni integral se dobija, eliminacijom α i β, iz jednačina

$$0 = x + \alpha + \alpha, \qquad 0 = y + \beta + \beta$$

i (7), tj. uvrštavanjem $\alpha = -\frac{x}{2}$ i $\beta = -\frac{y}{2}$ u (7). Tako dobijamo

$$z^2 = \frac{x^2+y^2}{2}. \tag{7'}$$

Opšti integral je

$$\left.\begin{aligned} z^2 &= (x+\alpha)^2 + [y+\varphi(\alpha)]^2 + \alpha^2 + \varphi^2(\alpha) \\ 0 &= (x+2\alpha) + [y+2\varphi(\alpha)]\,\varphi'(\alpha). \end{aligned}\right\} \tag{7''}$$

c) Iz

$$(X-x)^2 + (Y-y)^2 + Z^2 = (x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2 + \alpha^2 + \beta^2 ,$$
$$x - X = x + \alpha, \qquad y - Y = y + \beta ,$$

vidi se da je nemoguće izvršiti eliminaciju parametara x i y, pa prema tome potpuni integral ne može dati (2) kao obvojnicu familije lopti date sa (1).

Iz

$$(X-x)^2 + (Y-y)^2 + Z^2 = (x+\alpha)^2 + [y+\varphi(\alpha)]^2 + \alpha^2 + \varphi^2(\alpha) ,$$
$$(x+2\alpha) + [y+2\varphi(\alpha)]\varphi'(\alpha) = 0,$$
$$x - X = x + \alpha, \qquad y - Y = y + \varphi(\alpha) ,$$

se vidi da se, ni pomoću opšteg integrala (7″), ne može dobiti (2) kao obvojnica familije lopti date sa (1).

Na kraju iz jednačina

$$(X-x)^2 + (Y-y)^2 + Z^2 = \frac{x^2+y^2}{2}$$

$$x - X = \frac{x}{2}, \qquad y - Y = \frac{y}{2},$$

slijedi $x = 2X$, $y = 2Y$, što uvrštavanjem u prvu od ove tri jednačine daje upravo jednačinu konusne površine (2).

d) Pošto lopta radijusa z

$$(X-x)^2+(Y-y)^2+Z^2 = z^2,$$

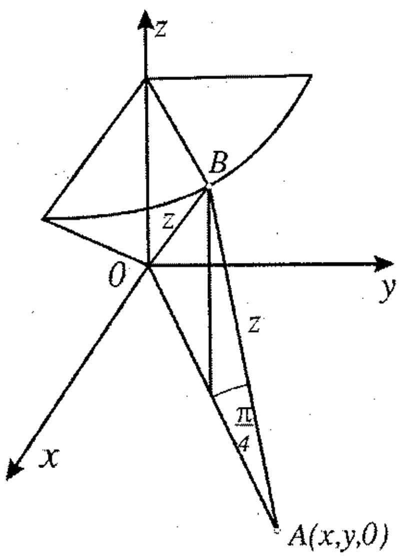
ima centar u tački $A\,(x, y, 0)$ i dodiruje konusnu površinu (2) u tački B, to je $\overline{OB}=\overline{AB}$, jer je trougao ABO pravougli ravnokraki, te je

$$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2+\overline{BA}^2, \quad \text{tj.}$$

$$x^2+y^2=2z^2,$$

odnosno

$$z^2 = \frac{x^2+y^2}{2}.$$



(sl. 2)

Zadatak 20. Normala u tački M površine S sječe ravan xOz u tački N, tako da je $ON = MN$.

a) Naći parcijalnu diferencijalnu jednačinu površine S.

b) Rješiti dobivenu parcijalnu diferencijalnu jednačinu.

c) Odrediti onu površinu S koja prolazi kroz krug $x^2+y^2=1, \quad z=1$.

Rješenje: a) Neka je $M(x,y,z)$. Tada je jednačina normale u tački $M(x,y,z)$ data sa

$$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1}.$$

Stavljajući $Y=0$, dobija se: $X=x-\frac{p}{q}y,\ Z=z+\frac{1}{q}y$. Prema tome, tada je $N\left(x-\frac{p}{q}y,\ 0,\ z+\frac{1}{q}y\right)$, pa je prema uslovu zadatka

$$\left(x-\frac{p}{q}y\right)^2+\left(z+\frac{1}{q}y\right)^2=\left(\frac{p}{q}\right)^2y^2+y^2+\frac{y^2}{q^2}.$$

Odavde se sređivanjem dolazi do parcijalne diferencijalne jednačine površine S:

$$2xyp+q(y^2-x^2-z^2)=2yz. \tag{1}$$

b) Jednačini (1) odgovara sistem običnih diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{2xy}=\frac{dy}{y^2-x^2-z^2}=\frac{dz}{2yz}, \tag{2}$$

koji je ekvivalentan sistemu

$$\frac{dx}{x}=\frac{d(y^2+x^2+z^2)}{y^2+x^2+z^2}=\frac{dz}{z}, \tag{2'}$$

čija su dva integrala

$$\frac{y^2+x^2+z^2}{x}=\alpha \quad \text{i} \quad \frac{z}{x}=\beta, \tag{3}$$

očigledno nezavisna. Odatle je opšti integral jednačine (1), pa prema tome i opšti oblik površine S

$$\frac{y^2+x^2+z^2}{x}=f\left(\frac{z}{x}\right), \tag{4}$$

gdje je f proizvoljna funkcija.

c) Stavljajući u (4) $x^2+y^2=1,\ z=1$, dobija se

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{x},$$

tako da jednačina površine koja prolazi kroz krug $x^2+y^2=1,\ z=1$, glasi

$$x^2+y^2+z^2=2z.$$

Zadatak 21. Odrediti parcijalnu diferencijalnu jednačinu površi čije normale sijeku kružnicu datu jednačinama

$$x=R\cos t,\quad y=R\sin t,\quad z=0, \tag{1}$$

gdje je R konstanta, a t parametar.
Odrediti potpuni i opšti integral dobivene parcijalne diferencijalne jednačine.

Rješenje: Jednačina normale u tački $M(x, y, z)$ tražene površi ima oblik

$$n:\quad \frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1},$$

gdje su X,Y,Z tekuće koordinate tačke na toj normali. Pošto normala n treba da sječe traženu kružnicu, to će biti

$$\frac{R\cos t-x}{p}=\frac{R\sin t-y}{q}=z,$$

dakle

$$\left.\begin{aligned} R\cos t &= x+zp \\ R\sin t &= y+zq, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

pa, prema tome, imamo

$$(x+pz)^2+(y+qz)^2=R^2.$$

Uvedimo novu funkciju u smjenom

$$2u=x^2+y^2+z^2.$$

Imaćemo

$$2\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x+zp)$$
$$2\frac{\partial u}{\partial y} = 2(y+zq),$$

dakle, prema (2)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = R\cos\alpha$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = R\sin\alpha,$$

gdje je α proizvoljna konstanta.
Prema tome

$$du = R\cos\alpha\, dx + R\sin\alpha\, dy,$$

znači

$$u = R(x\cos\alpha + y\sin\alpha) + \beta, \quad (\beta = const).$$

Povratkom na staru funkciju i promjenljive dobijamo

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2R(x\cos\alpha + y\sin\alpha) + 2\beta, \text{ tj.}$$
$$(x - R\cos\alpha)^2 + (y - R\sin\alpha)^2 + z^2 = R^2 + 2\beta . \tag{3}$$

Potpuni integral (3) predstavlja familiju lopti s centrom u tački $(R\cos\alpha, R\sin\alpha, 0)$ radijusa $\sqrt{R^2 + 2\beta}$.

Opšti integral glasi

$$\left.\begin{array}{l} (x - R\cos\alpha)^2 + (y - R\sin\alpha)^2 + z^2 - R^2 + 2\omega(\alpha) = 0 \\ R(x - R\cos\alpha)\sin\alpha - R(y - R\sin\alpha)\cos\alpha + \omega'(\alpha) = 0 . \end{array}\right\}$$

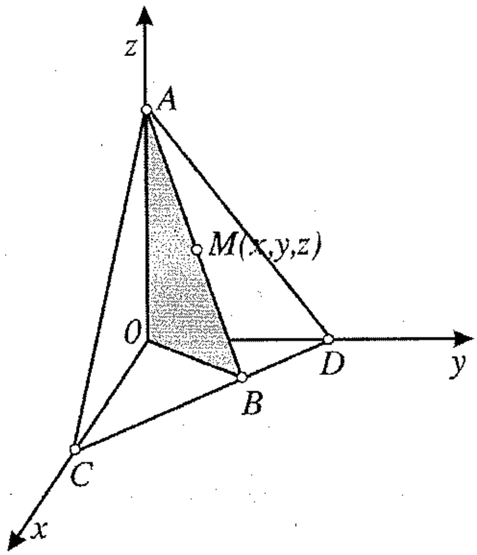
Zadatak 22. Odrediti parcijalnu diferencijalnu jednačinu površina čije tangencionalne ravni imaju osobinu da je trougao OAB ravnokrak, gdje je O koordinatni početak, A tačka u kojoj tangencionalna ravan siječe osu Oz, B tačka u kojoj prava AM, koja prolazi tačkom A i tačkom dodira M tangencionalne ravni sa odgovarajućom površinom, probada ravan xOy.

Odrediti onu integralnu površinu koja prolazi kroz krivu

$$y = 1, \; z = x^2 .$$

Pokazati da se stvarno dobiju dvije različite parcijalne diferencijalne jednačine. Posmatrati svaku od njih odvojeno !

Rješenje:



(sl. 3)

Napišimo, jednačinu tangencionalne ravni:

$$(X - x)p + (Y - y)q = Z - z,$$

jednačinu prave AM:

$$(X - x)p + (Y - y)q + z = 0,$$

i jednačinu prave OB:

$$Y = \frac{y}{x} X .$$

Rješavanjem posljednjih dviju jednačina dobijaju se kooridnatne tačke B:

$$B\left(\frac{(px+qy-z)}{px+qy}x,\ \frac{(px+qy-z)}{px+qy}y,\ 0\right),$$

dok je $A\ (0,\ 0,\ z-px-qy)$.

Iz uslova $\overline{OA}=\overline{OB}$ dobijamo:

$$z-px-qy\ =\ \pm\sqrt{\frac{(z-px-qy)^2\,(x^2+y^2)}{(px+qy)^2}}\,.$$

Prema tome, parcijalna diferencijalna jednačina površi s navedenom osobinom je

$$(z-px-qy)^2\,\left[(px+qy)^2-(x^2+y^2)\right]=0\,. \tag{1}$$

Ona se raspada na dvije jednačine:

$$z-px-qy=0 \quad \text{i} \tag{1'}$$

$$(px+qy)^2-(x^2+y^2)=0\,. \tag{1''}$$

1° Jednačina (1′) ima opšte rješenje

$$z\ =\ x\varphi\left(yx^{-1}\right). \tag{2}$$

Odredimo površ koja prolazi krivom: $y=1,\ z=x^2$. Pošto je

$$x^2\ =\ x\varphi\left(x^{-1}\right),$$

ako uvedemo smjenu $t=\dfrac{1}{x}$, dobićemo

$$\varphi(t)\ =\ \frac{1}{t},$$

tako da je

$$\frac{z}{x}\ =\ \varphi\left(yx^{-1}\right)\ =\ \frac{x}{y},$$

dakle,

$$x^2-yz\ =\ 0\,. \tag{2'}$$

Opšte rješenje (2) u ovom slučaju predstavlja jednačinu konusnih površina s tjemenom u tački O.

2^0 Jednačina (1″) se može napisati u obliku

$$px + qy = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

i ekvivalentna je sistemu diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{3}$$

s jednim prvim integralom

$$\frac{y}{x} = \alpha . \tag{4}$$

Pošto je iz (3)

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{2(x^2 + y^2)} = \frac{\pm dz}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

tj.

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \pm dz ,$$

još jedan prvi integral je

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2} + \beta . \tag{5}$$

S obzirom da su prvi integrali (4) i (5) jednačine (1″) nezavisni, njeno opšte rješenje biće:

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2} + f\left(yx^{-1}\right). \tag{6}$$

Da bismo odredili integralnu površinu koja prolazi datom krivom uvrstimo u (6) $y = 1, \quad z = x^2$. Dobićemo

$$x^2 = \pm\sqrt{1 + x^2} + f\left(x^{-1}\right),$$

odnosno

$$f\left(x^{-1}\right) = x^2 \mp \sqrt{1+x^2},$$

odakle je

$$f(t) = t^{-2} \mp \sqrt{1+t^{-2}}.$$

Zamjenjujući t sa yx^{-1} i uzimajući u obzir da je, prema (6),

$$f\left(yx^{-1}\right) = z \mp \sqrt{x^2+y^2},$$ dobićemo

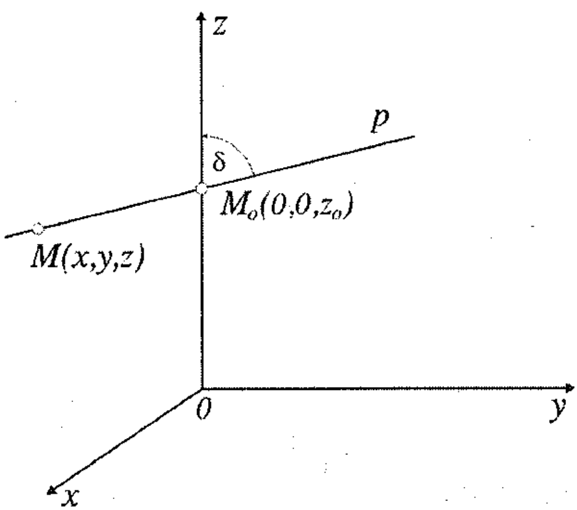
$$z \mp \sqrt{x^2+y^2} = \left(xy^{-1}\right)^2 \mp \sqrt{1+\left(xy^{-1}\right)^2},$$

dakle

$$z = \frac{x^2 \pm (y^2-y)\sqrt{x^2+y^2}}{y^2}.$$

Zadatak 23. Sastaviti parcijalnu diferencijalnu jednačinu površine koju opisuje prava linija koja se kreće tako da presjeca datu pravu pod datim uglom. Integrisati tako dobivenu jednačinu.

Rješenje: Neka je $M(x, y, z)$ bilo koja tačka na traženoj površini $z = z(x, y)$.



(sl. 4)

Rješenje: Za datu pravu liniju uzećemo Oz - osu.

Pretpostavimo da prava linija p opisuje traženu površinu. Jednačina prave p je

$$\frac{x}{k} = \frac{y}{l} = \frac{z - z_o}{m}. \tag{p}$$

Tangencionalna ravan, postavljena na traženu površinu u tački M_o, sadržavaće pravu p. Njena jednačina glasi:

$$z - z_o = px + qy, \tag{t}$$

gdje je

$$p = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_o}, \quad q = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_o}.$$

Iz (p) izlazi

$$\cos\delta = \frac{m}{\sqrt{k^2 + l^2 + m^2}},$$

a odavde slijedi

$$tg^2\delta = \frac{k^2 + l^2}{m^2}. \tag{*}$$

Uvedimo oznaku

$$tg\delta = a. \tag{**}$$

Iz (p) imamo

$$\frac{x^2}{k^2} = \frac{y^2}{l^2} = \frac{(z - z_o)^2}{m^2},$$

odnosno, prema osobini produžene proporcije:

$$\frac{x^2 + y^2}{k^2 + l^2} = \frac{(z - z_o)^2}{m^2}, \quad \text{tj.}$$

$$\frac{k^2 + l^2}{m^2} = \frac{x^2 + y^2}{(z - z_o)^2}. \tag{1}$$

S obzirom na (*) i (**) iz (1) dobivamo

$$\frac{x^2+y^2}{(z-z_o)^2} = a^2 ,$$

odnosno

$$z - z_o = \frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2} . \tag{2}$$

Iz relacija (t) i (2) izlazi

$$xp + yq = \frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2} . \tag{3}$$

(3) je tražena parcijalna diferencijalna jednačina koju treba rješiti. Njoj odgovarajući sistem običnih diferencijalnih jednačina glasi:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{a\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}} . \tag{4}$$

Odavde je

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} ,$$

znači

$$\ln y = \ln x + \ln C_1 , \quad \text{tj.} \quad y = C_1 x ,$$

odnosno

$$\frac{y}{x} = C_1 . \tag{5}$$

Dalje, iz

$$\frac{a\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{dx}{x} ,$$

pomoću (5), dobijamo

$$\frac{a\,dz}{\sqrt{x^2+C_1^2x^2}} = \frac{dx}{x} ,$$

odakle, nakon razdvajanja promjenljivih, imamo

$$dz = \frac{1}{a}\sqrt{1+C_1^2}\,dx .$$

Integracijom odavde dobivamo

$$z = \frac{1}{a}\sqrt{1+C_1^2}\,x + C_2 .$$

Pošto je prema (5) $C_1 = \frac{y}{x}$, to je

$$z = \frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2} + C_2 .$$

Dakle, opšte rješenje sistema (4) ima oblik

$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{x} &= C_1 \\ z - \frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2} &= C_2, \end{aligned}\right\}$$

pa je opšte rješenje parcijalne diferencijalne jednačine (3) dato sa

$$z - \frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2} = \psi\left(yx^{-1}\right),$$

odnosno

$$z = \frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2} + \psi\left(yx^{-1}\right),$$

gdje je ψ proizvoljna diferencijabilna funkcija.

<u>Zadatak 24.</u> Pokaži da jednačina

$$p(x-a) + q(y-b) = z-c \tag{1}$$

predstavlja familiju konusa koji prolaze fiksnom tačkom (a, b, c). Potraži ono rješenje parcijalne diferencijalne jednačine koje, u ravni xOy, prolazi krugom

$$x^2 + y^2 = 1 . \tag{2}$$

<u>Rješenje:</u> Odgovarajući sistem običnih diferencijalnih jednačina glasi:

$$\frac{dx}{x-a} = \frac{dy}{y-b} = \frac{dz}{z-c} . \tag{3}$$

Opšte rješenje sistema (3) ima oblik:

$$\frac{x-a}{z-c} = C_1 \quad \text{i} \quad \frac{y-b}{z-c} = C_2, \tag{4}$$

tako da je opšte rješenje parcijalne diferencijalne jednačine (3) dato sa:

$$\frac{x-a}{z-c} = \Phi\left(\frac{y-b}{z-c}\right). \tag{5}$$

Ono stvarno predstavlja familiju konusa koji prolaze tačkom (a, b, c).

No, tada se, ako se u jednačinu (5) uvrsti: $z = 0$ i $x = \pm\sqrt{1-y^2}$, dobija:

$$\Phi\left(\frac{b-y}{c}\right) = \frac{a \pm \sqrt{1-y^2}}{c}. \tag{6}$$

Stavimo $u = \dfrac{b-y}{c}$. Tada će biti $y = b - cu$.

Ako u uvrstimo u lijevu i y (izražen preko u) u desnu stranu jednakosti (6), dobićemo

$$\Phi(u) = \frac{a \pm \sqrt{1-(b-cu)^2}}{c},$$

odnosno

$$\Phi\left(\frac{y-b}{z-c}\right) = \frac{1}{c}\left[a \pm \sqrt{1-\left(b - c\,\frac{y-b}{z-c}\right)^2}\,\right],$$

tako da, saglasno sa (5), dobijamo

$$(az-cx)^2 + (bz-cy)^2 = (z-c)^2.$$

Zadatak 25. Data je parcijalna diferencijalna jednačina

$$z^2(2+p^2+q^2) = x^2+y^2+2z(xp+yq). \tag{1}$$

Odrediti potpuni integral jednačine (1), a zatim pomoću njega odrediti singularni i opšti integral jednačine (1).

Rješenje: Napišimo jednačinu (1) u obliku

$$4\left(\frac{1}{2}z^2\right)+(zp)^2+(zq)^2-x^2-y^2-2\left[x(zp)+y(zq)\right]=0. \qquad (1')$$

Poslije smjene

$$z_1=\frac{1}{2}z^2, \quad p_1=zp, \quad q_1=zq, \qquad (2)$$

jednačina (1) se svodi na:

$$4z_1+p_1^2+q_1^2-x^2-y^2-2(xp_1+yq_1)=0. \qquad (3)$$

Ovoj jednačini odgovara sistem diferencijalnih jednačina karakteristika

$$\frac{dx}{2(p_1-x)}=\frac{dy}{2(q_1-y)}=\frac{dz_1}{2(p_1^2-xp_1+q_1^2-yq_1)}=\frac{-dp_1}{2(p_1-x)}=\frac{-dq_1}{2(q_1-y)}. \qquad (4)$$

Njegova dva prva integrala su očigledno

$$F_1\equiv y+q_1=C_1, \quad F_2\equiv x+p_1=C_2, \qquad (5)$$

koja su u involuciji. Zaista

$$\left[F_1,F_2\right]=\frac{\partial F_1}{\partial p_1}\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial q_1}\frac{\partial F_2}{\partial y}-\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial p_1}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial q_1}=0.$$

Stoga se potpuni integral jednačine (3) dobija eliminacijom parcijalnih izvoda iz jednačina (3) i (5):

$$4z_1+C_1^2+C_2^2-4(C_2x+C_1y)+2(x^2+y^2)=0, \qquad (6)$$

dok će **potpuni integral** polazne jednačine biti

$$2z^2+C_1^2+C_2^2-4(C_2x+C_1y)+2(x^2+y^2)=0. \qquad (7)$$

Diferenciranje jednačine (7) po C_1 i C_2 daje : $C_1=2y$ i $C_2=2x$.

Unošenje ovih vrijednosti u jednačinu (7), prevodi ovu u **singularni integral**

$$z^2=x^2+y^2.$$

Opšti integral date parcijalne diferencijalne jednačine (1) glasi

$$\left.\begin{aligned} &2z^2 + C^2 + f^2(C) - 4\big(Cx + f(C)y\big) + 2(x^2+y^2) = 0 \\ &C + f(C)f'(C) - 2x - 2f'(C)y = 0. \end{aligned}\right\}$$

Zadatak 26. Riješiti parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = z^2. \tag{1}$$

Rješenje: Jednačina (1) se može napisati u obliku

$$\frac{x^2}{(2pz)^2} + \frac{y^2}{(2qz)^2} = \frac{1}{4}, \tag{1'}$$

što nas navodi da uvedemo novu funkciju

$$z_1 = z^2, \quad p_1 = 2pz, \quad q_1 = 2qz.$$

Ona će jednačinu (1') svesti na jednačinu

$$\frac{x^2}{p_1^2} + \frac{y^2}{q_1^2} = \frac{1}{4}. \tag{2}$$

Ovoj jednačini odgovara sistem običnih diferencijalnih jednačina:

$$\frac{dx}{-\frac{2x^2}{p_1^3}} = \frac{dy}{-\frac{2y^2}{q_1^3}} = \frac{dz_1}{-2\left(\frac{x^2}{p_1^2} + \frac{y^2}{q_1^2}\right)} = \frac{dp_1}{-2\frac{x}{p_1^2}} = \frac{dq_1}{-2\frac{y}{q_1^2}}. \tag{3}$$

Odavde je:

$$\frac{dx}{-\frac{2x^2}{p_1^3}} = \frac{dp_1}{-2\frac{x}{p_1^2}},$$

dakle

$$\frac{dx}{x} = \frac{dp_1}{p_1},$$

tako da je

$$\frac{x}{p_1} = C_1.$$

Ako u (2) uvrstimo $\dfrac{x}{p_1} = C_1$, dobićemo

$$q_1 = \frac{2y}{\pm\sqrt{1-4C_1^2}}.$$

Sada ćemo imati

$$dz_1 = p_1 dx + q_1 dy = \frac{x}{C_1}dx \pm \frac{2y}{\sqrt{1-4C_1^2}}dy =$$

$$= d\left[\frac{x^2}{2C_1} \pm \frac{y^2}{\sqrt{1-4C_1^2}} + C_2\right].$$

Dakle, potpuni integral jednačine (2) je

$$z_1 = \frac{x^2}{2C_1} \pm \frac{y^2}{\sqrt{1-4C_1^2}} + C_2,$$

pa će, potpuni integral jednačine (1), biti

$$z^2 = \frac{x^2}{2C_1} \pm \frac{y^2}{\sqrt{1-4C_1^2}} + C_2 .$$

Zadatak 27. Data je parcijalna diferencijalna jednačina

$$\left(\frac{p}{x}\right)^2 + \left(\frac{q}{y}\right)^2 = \frac{2}{z^2} . \tag{1}$$

i) Naći njen potpuni i opšti integral.

ii) Odrediti njen Cauchyev integral koji se za, $y = 0$, svodi na

$$z = x - 1 .$$

Rješenje: **i)** Iz (1) se dobija

$$\left(\frac{2zp}{x}\right)^2 + \left(\frac{2zq}{y}\right)^2 = 8,$$

tako da će smjena

$$z_1 = z^2, \quad p_1 = 2zp, \quad q_1 = 2zq_1,$$

jednačinu (1) prevesti u

$$\left(\frac{p_1}{x}\right)^2 + \left(\frac{q_1}{y}\right)^2 = 8. \tag{2}$$

Ako u (2) uvrstimo

$$p_1 = 2C_1 x, \tag{3}$$

dobićemo

$$q_1 = \pm 2\sqrt{2 - C_1^2}\, y,$$

tako da ćemo imati

$$dz_1 = p_1 dx + q_1 dy = 2C_1 x\, dx \pm 2y\sqrt{2 - C_1^2}\, dy.$$

Odavde je

$$z_1 = C_1 x^2 \pm \sqrt{2 - C_1^2}\, y^2 + C_2.$$

Prema tome, potpuni integral jednačine (1) je

$$z^2 = C_1 x^2 \pm \sqrt{2 - C_1^2}\, y^2 + C_2, \tag{4}$$

a njen opšti integral je

$$\left.\begin{aligned} z^2 &= Cx^2 \pm \sqrt{2 - C^2}\, y^2 + f(C) \\ 0 &= x^2 \mp \frac{Cy^2}{\sqrt{2 - C^2}} + f'(C), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

gdje je f proizvoljna funkcija.

ii) Ako se, u potpuni integral (4), uvrsti

$$y = 0, \quad z = x - 1,$$

dobiće se

$$(x-1)^2 = C_1 x^2 + C_2 .$$

Diferenciranjem po x odavde se nalazi

$$x - 1 = C_1 x,$$

tako da je

$$x = \frac{1}{1 - C_1}, \tag{6}$$

dakle,

$$\begin{aligned} C_2 &= (x-1)^2 - C_1 x^2 = \\ &= (C_1 x)^2 - C_1 x^2 = \\ &= -C_1 x = \frac{C_1}{C_1 - 1} . \end{aligned}$$

Prema tome, traženi Cauchyev integral u parametarskom obliku je

$$\left. \begin{aligned} z^2 &= C_1 x^2 \pm y^2 \sqrt{2 - C_1^2} + \frac{C_1}{C_1 - 1} \\ 0 &= x^2 \pm \frac{C_1 y^2}{\sqrt{2 - C_1^2}} - \frac{1}{(C_1 - 1)^2} . \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

Zadatak 28. Data je parcijalna diferencijalna jednačina

$$pq = z^n xy \tag{1}$$

u kojoj je n cio broj.

i) Naći njen potpuni i opšti integral.

ii) Ispitati za koje vrijednosti n dobijeni potpuni integral predstavlja površinu drugog reda.

iii) Za slučaj $n = 0$, naći Cauchyev integral koji prolazi kroz krivu

$$x = 1, \quad z = \sqrt{1+y^2} .$$

Rješenje: **i)** Pošto se jednačina (1) može napisati u obliku

$$(z^{-\frac{n}{2}} p)(z^{-\frac{n}{2}} q) = xy ,$$

smjena

$$u = \begin{cases} \dfrac{2}{2-n} z^{1-\frac{n}{2}}, & n \neq 2 \\ \log z, & n = 2 , \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p_1 , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q_1 ,$$

će je prevesti u parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$p_1 q_1 = xy . \tag{2}$$

Ovo je jednačina koja razdvaja promjenljive, tako da se dobija

$$\frac{p_1}{x} = C = \frac{y}{q_1} ,$$

pa je

$$du = Cx\,dx + \frac{y}{C} dy ,$$

dakle,

$$u = \frac{C}{2} x^2 + \frac{y^2}{2C} + C_1 .$$

Stoga je **potpuni integral** parcijalne diferencijalne jednačine (1)

$$\frac{2}{2-n} z^{1-\frac{n}{2}} = \frac{C}{2} x^2 + \frac{1}{2C} y^2 + C_1 \quad (n \neq 2) , \tag{3}$$

odnosno

$$\log z = \frac{C}{2}x^2 + \frac{1}{2C}y^2 + C_1 \qquad (n = 2). \tag{3'}$$

Opšti integral date parcijalne diferencijalne jednačine je za

***n* ≠ 2 :**

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{2-n} z^{1-\frac{n}{2}} &= \frac{C}{2}x^2 + \frac{1}{2C}y^2 + f(C) \\ 0 &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2C^2}y^2 + f'(C), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

***n* = 2 :**

$$\left.\begin{aligned} \log z &= \frac{C}{2}x^2 + \frac{1}{2C}y^2 + f(C) \\ 0 &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2C^2}y^2 + f'(C), \end{aligned}\right\} \tag{4'}$$

gdje je f proizvoljna funkcija.

ii) Iz potpunog integrala (4), odnosno (4′), se vidi da će on predstavljati površ drugog reda ako i samo ako je

$$1 - \frac{n}{2} = 1 \quad \text{tj.} \quad n = 0$$

$$1 - \frac{n}{2} = 2, \quad \text{tj.} \quad n = -2.$$

iii) Za ***n* = 0**, potpuni integral postaje

$$z = \frac{C}{2}x^2 + \frac{1}{2C}y^2 + C_1 .$$

Uvrštavajući u posljednju jednakost $x = 1$, $z = \sqrt{1+y^2}$, dobićemo

$$\sqrt{1+y^2} = \frac{C}{2} + \frac{y^2}{2C} + C_1, \tag{5}$$

odakle se nakon diferenciranja po y, dobija

$$\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{y}{C}. \tag{5'}$$

Iz (5') dobijamo $y^2 = C^2 - 1$, tako da nas uvrštavanje te vrijednosti u (5), dovodi do

$$C_1 = \frac{1}{2C}.$$

Za ovako određenu funkciju $f(C) = \dfrac{1}{2C}$, opšti integral postaje:

$$\left.\begin{aligned} 2z &= Cx^2 + \frac{y^2}{C} + \frac{1}{C} \\ 0 &= x^2 - \frac{y^2+1}{C^2}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Iz druge od jednačina (6) dobijamo

$$C = \frac{\sqrt{y^2+1}}{x}.$$

Uvrštavanjem ovako dobivenog C u prvu od jednačina (6), dobićemo

$$z = x\sqrt{y^2+1},$$

što predstavlja traženi Cauchyev integral.

Zadatak 29. Data je parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda

$$z^2 - pq = 0. \tag{1}$$

a) Cauchyevom metodom karakteristika odrediti ono rješenje koje zadovoljava početne uslove: $x_o = 1$, $z_o = y_o^2$.

b) Metodom Lagrange-Charpita odrediti njen potpuni i opšti integral.

Rješenje: a) Jednačina (1) je ekvivalentna sistemu karakteristika

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2z^2} = \frac{dp}{2zp} = \frac{dq}{2zq} = -du. \tag{2}$$

Odavde imamo

$$\frac{dz}{z^2} = -2du, \quad \frac{dp}{p} = -2zdu, \quad \frac{dq}{q} = -2zdu, \quad dx = -qdu, \quad dy = -pdu,$$

dakle

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{z_o}{2uz_o+1}, \\ p &= \frac{p_o}{2uz_o+1}, \\ q &= \frac{q_o}{2uz_o+1}, \\ x &= -\frac{q_o}{2z_o}\ln(2uz_o+1)+x_o, \\ y &= -\frac{p_o}{2z_o}\ln(2uz_o+1)+y_o. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Da bismo odredili partikularno rješenje koje zadovoljava date početne uslove, uvrstimo u (3): $x_o = 1$, $y_o = v$, $z_o = v^2$. Dobićemo najprije, iz

$$z_o^2 - p_o q_o = 0 \qquad \text{i} \tag{*}$$

$$\frac{dz_o}{dv} = p_o\frac{dx_o}{dv} + q_o\frac{dy_o}{dv}, \tag{**}$$

$$q_o = 2v, \qquad p_o = \frac{v^3}{2}, \tag{4}$$

tako da će rješenje biti

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 - v^{-1}\ln(2uv^2+1) \\ y &= v - \frac{v}{4}\ln(2uv^2+1) \\ z &= \frac{v^2}{2uv^2+1}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

b) Polazeći od

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$$

dobijamo

$$p = aq.$$

Prema tome,

$$q = \frac{z}{\sqrt{a}}, \quad p = z\sqrt{a},$$

dakle

$$dz = z\left(\sqrt{a}\,dx + \frac{1}{\sqrt{a}}dy\right),$$

tj.

$$\ln z = x\sqrt{a} + \frac{y}{\sqrt{a}} + \ln b,$$

tako da je **potpuni integral** jednačine (1)

$$z = b\exp\left((ax+y)/\sqrt{a}\right),$$

gdje su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ proizvoljne konstante.

Opšti integral jednačine (1) biće:

$$\left.\begin{aligned} & z = \omega(a)\exp\left((ax+y)/\sqrt{a}\right) \\ & \exp\left((ax+y)/\sqrt{a}\right)\left[\omega'(a) + \frac{1}{2\sqrt{a}}(x-y/a)\omega(a)\right] = 0. \end{aligned}\right\}$$

Zadatak 30. Data je parcijalna diferencijalna jednačina

$$z^2 - p^2x^2 - q^2y^2 = 0. \tag{1}$$

a) Metodom Lagrange-Charpita odrediti potpuni i opšti integral.

b) Cauchyevom metodom karakteristika odrediti partikularno rješenje koje zadovoljava početne uslove

$$z = x^2, \quad y = x^2. \tag{2}$$

Rješenje: a) Jednačinu (1) napišimo u obliku

$$\left(\frac{p}{z}\right)^2 x^2 + \left(\frac{q}{z}\right)^2 y^2 = 1. \tag{1'}$$

Ako uvedemo novu funkciju

$$Z = \ln z \quad \text{ili} \quad z = e^Z,$$

i stavimo

$$P = \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{p}{z}, \quad Q = \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{q}{z},$$

ona će jednačinu (1′) prevesti u

$$P^2x^2 + Q^2y^2 - 1 = 0. \tag{3}$$

Neka je

$$Px = \cos\alpha \quad \text{i} \quad Qy = \sin\alpha,$$

tada će biti

$$dZ = \frac{\cos\alpha}{x}dx + \frac{\sin\alpha}{y}dy,$$

dakle,

$$Z = \cos\alpha \ln x + \sin\alpha \ln y + \ln\beta,$$

pa prema tome

$$z = \beta x^{\cos\alpha} y^{\sin\alpha}, \tag{4}$$

što predstavlja **potpuni integral** jednačine (1).

Opšti integral date jednačine biće određen sa

$$\left.\begin{aligned} &z = \omega(\alpha)x^{\cos\alpha}y^{\sin\alpha} \\ &\omega'(\alpha) + (\cos\alpha \ln y - \sin\alpha \ln x)\omega(\alpha) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

b) Jednačina (3) ekvivalentna je sistemu karakteristika

$$\frac{dx}{2Px^2} = \frac{dy}{2Qy^2} = \frac{dZ}{2} = -\frac{dP}{2xP^2} = -\frac{dQ}{2yQ^2} = du. \tag{6}$$

Odavde je:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dP}{P}, \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dQ}{Q}, \quad dZ = 2du,$$

dakle

$$\ln Px = \ln P_o x_o, \quad \ln Qy = \ln Q_o y_o, \quad Z = Z_o + 2u,$$

tako da je

$$Px = P_o x_o, \quad Qy = Q_o y_o, \quad z = e^{Z_o + 2u} = z_o e^{2u}. \tag{6'}$$

Osim toga, u saglasnosti sa (6′) , dobija se

$$\frac{dx}{x} = 2P_o x_o du \quad \text{i} \quad \frac{dy}{y} = 2Q_o y_o du,$$

odakle je

$$x = x_o e^{2P_o x_o u}, \quad y = y_o e^{2Q_o y_o u}. \tag{6''}$$

Na osnovu (*6″*) ćemo imati

$$P = P_o e^{-2P_o x_o u} \ \text{i} \ Q = Q_o e^{-2Q_o y_o u},$$

dakle,

$$\left.\begin{aligned} p &= Pz = P_o z_o \exp\left[2u\left(1 - p_o x_o z_o^{-1}\right)\right] \\ q &= Qz = Q_o z_o \exp\left[2u\left(1 - q_o y_o z_o^{-1}\right)\right]. \end{aligned}\right. \tag{6'''}$$

Da bismo odredili rješenje koje zadovoljava date početne uslove

$$x_o = v, \ y_o = v^2, \ z_o = v^2,$$

poći ćemo od jednakosti

$$z_o^2 - p_o^2 x_o^2 - q_o^2 y_o^2 = 0 \tag{7}$$

iz koje dobijamo

$$\frac{dz_o}{dv} = p_o \frac{dx_o}{dv} + q_o \frac{dy_o}{dv}, \quad \text{tj.}$$

$$2v = p_o + 2vq_o, \quad p_o = 2v(1 - q_o).$$

Ako ovako dobiveno $\boldsymbol{p_o}$ uvrstimo u (7), dobićemo

$$\left.\begin{aligned} q_o &= \frac{4v^2 x_o^2 \pm \sqrt{4v^2 x_o^2 (z_o^2 - y_o^2) + y_o^2 z_o^2}}{4v^2 x_o^2 + y_o^2} \\ p_o &= 2v \frac{y_o^2 \mp \sqrt{4v^2 x_o^2 (z_o^2 - y_o^2) + y_o^2 z_o^2}}{4v^2 x_o^2 + y_o^2}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Uzimajući u obzir da je

$$P_o = \frac{p_o}{z_o}, \quad Q_o = \frac{q_o}{z_o}, \quad \frac{z}{z_o} = e^{2u}$$

dobićemo

$$x = x_o\left(\frac{z}{z_o}\right)^{\frac{p_o x_o}{z_o}} = v\left(\frac{z}{v^2}\right)^{\frac{1}{v}p_o}$$

$$y = y_o\left(\frac{z}{z_o}\right)^{\frac{q_o y_o}{z_o}} = v^2\left(\frac{z}{v^2}\right)^{q_o},$$

gdje su $\boldsymbol{p}_o$ i $\boldsymbol{q}_o$ dati sa (8).

Zadatak 31. Po metodi Lagrange-Charpita rješi jednačinu

$$xp + yq - e^z pq = 0. \tag{1}$$

Odredi njen potpuni, opšti i singularni integral (ako ovaj postoji).

Rješenje: Jednačina (1) ekvivalenta je sistemu diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{x - e^z q} = \frac{dy}{y - e^z p} = \frac{dz}{xp + yq - 2e^z pq} = \frac{dp}{-(p - e^z p^2 q)} = \frac{dq}{-(q - e^z pq^2)}, \tag{2}$$

koji, korištenjem (1) prelazi u

$$\frac{dx}{x - e^z q} = \frac{dy}{y - e^z p} = \frac{dz}{-e^z pq} = \frac{dp}{-p(1 - e^z pq)} = \frac{dq}{-q(1 - e^z pq)}. \tag{2'}$$

Iz posljednje jednakosti u (2′) dobijamo

$$p = a\,q. \tag{3}$$

Ako $\boldsymbol{p}$ zamijenimo sa $\boldsymbol{a\,q}$ u (1), dobićemo

$$(ax + y - aqe^z)q = 0.$$

Odavde dobijamo:

1° $\quad q = 0$, pa je i $p = a\,q = 0$, dakle

$$dz = p\,dx + q\,dy = 0\,,$$

tako da je jedno rješenje $z = const$.

2° $$q = \frac{ax+y}{ae^z}, \quad p = \frac{ax+y}{e^z}\,,$$

dakle,

$$dz = \frac{ax+y}{e^z}\,dx + \frac{ax+y}{ae^z}\,dy,$$

odnosno

$$ae^z dz = (ax+y)(a\,dx+dy),$$

tj.

$$2ae^z dz = 2(ax+y)\;d(ax+y),$$

odakle integracijom dobijamo

$$2ae^z = (ax+y)^2 + b\,.$$

Prema tome, **potpuni integral** jednačine (1) je

$$z = \ln\frac{1}{2a}\left[(ax+y)^2 + b\right]. \tag{4}$$

Singularni integral, ako postoji, biće određen sistemom jednačina

$$\left.\begin{aligned} z &= \ln\left[(ax+y)^2 + b\right] - \ln 2a,\\ &\frac{2x(ax+y)}{(ax+y)^2+b} - \frac{1}{a} = 0\,,\\ &\frac{1}{(ax+y)^2+b} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Pošto posljednja jednačina sistema (3) nije moguća, zaključujemo da **singularno rješenje ne postoji.**

Opšte rješenje jednačine (1) je

$$\left.\begin{aligned} z &= \ln\left[(ax+y)^2 + \omega(a)\right] - \ln a - \ln 2\\ &\frac{2x(ax+y)+\omega'(a)}{(ax+y)^2+\omega(a)} - \frac{1}{a} = 0\,. \end{aligned}\right\}$$

Zadatak 32. Svesti jednačinu

$$tg^2x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2ytgx\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+tg^3x\frac{\partial z}{\partial x}=0 \qquad (1)$$

na kanonski oblik.

Rješenje: Jednačina (1) je paraboličkog tipa jer je za

$$A=tg^2x,\quad B=-ytgx,\quad C=y^2,$$

$$B^2-AC\equiv 0.$$

Parabolička jednačina ima jednu familiju karakteristika $h(x,y)=C$, pri čem je $h(x,y)$ rješenje jednačine

$$A\frac{\partial h}{\partial x}+B\frac{\partial h}{\partial y}=tg^2x\frac{\partial h}{\partial x}-ytgx\frac{\partial h}{\partial y}=0. \qquad (2)$$

Rješenje jednačine (2) dobija se rješavanjem jednačine

$$\frac{dx}{tg^2x}=-\frac{dy}{ytgx}\qquad (tgx\neq 0).$$

Odavde je

$$\ln\sin x+\ln y=\ln C,$$

tj.

$$y\sin x=C.$$

Uzmimo

$$u(x,y)=y\sin x,\qquad v(x,y)=y,$$

pri čemu je funkcija $v(x,y)$ izabrana proizvoljno, ali tako da

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix} y\cos x & \sin x\\ 0 & 1\end{vmatrix}=y\cos x\neq 0,$$

šro će biti ispunjeno za $y\neq 0$ i $x\neq\frac{(2k+1)\pi}{2}$.

Pomoću transformacije

$$u = y\sin x, \qquad v = y$$

data jednačina (1) se svodi na kanonski oblik

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{2u}{v^2}\frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

u svakoj oblasti u kojoj je $y \neq 0$ i $x \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$.

Zadatak 33. Datu parcijalnu diferencijalnu jednačinu svesti na kanonski oblik

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \qquad (1)$$

Rješenje: Jednačina (1) je parabolička jer je:

$$A = x^2 \quad B = -xy \quad C = y^2 \text{ i}$$

$$B^2 - AC = x^2y^2 - x^2y^2 \equiv 0.$$

Parabolička jednačina ima jednu familiju karakteristika koju ćemo tražiti kao rješenje jednačine

$$A\,dy - B\,dx = 0,$$

tj.

$$x^2dy + xydx = 0,$$

odakle dobijamo,

$$\ln y + \ln x = \ln C.$$

Dakle,

$$xy = C.$$

Uzimajući $u = xy$, $v = y$, dobićemo:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}xy + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}x + \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}x^2 + 2x\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Uvrštavanjem ovako dobivenih parcijalnih izvoda u polaznu jednačinu, dobićemo kanonski oblik jednačine (1):

$$v\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Zadatak 34. Datu parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \alpha\frac{\partial z}{\partial x} + \beta\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0. \quad (1)$$

svesti na kanonski oblik.

Rješenje: S obzirom da je

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 1 \quad \text{i}$$

$$B^2 - AC \equiv 0,$$

jednačina (1) pripada tipu paraboličkih jednačina. Jedinu familiju karakteristika dobijamo kao rješenje jednačine

$$dy + dx = 0,$$

odakle je

$$x + y = C_1.$$

Uvedimo nove nezavisno promjenljive u i v sa:

$$u = x + y$$
$$v = x.$$

Za njih je

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}.$$

Uvrštavanjem dobivenih parcijalnih izvoda u jednačinu (1), ona će se svesti na kanonski oblik

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (\alpha + \beta)\frac{\partial z}{\partial u} + \alpha\frac{\partial z}{\partial v} + cz = 0.$$

Zadatak 35. Odrediti kanonski oblik jednačine

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\frac{\partial z}{\partial x} + 6\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

Rješenje: Za ovu jednačinu je:

$$A = 1, \quad B = 1, \quad C = -3,$$

pa je

$$B^2 - AC = 4 > 0,$$

tako da je data jednačina hiperboličkog tipa.

Odredimo funkcije

$$u = h_1(x,y) \quad \text{i} \quad v = h_2(x,y),$$

pomoću kojih se data funkcija svodi na kanonski oblik. Ovu funkciju ćemo odrediti pomoću jednačina:

$$(B + \sqrt{B^2 - AC})\,dx - A\,dy = 3dx - dy = 0,$$
$$(B - \sqrt{B^2 - AC})\,dx - A\,dy = -dx - dy = 0.$$

Integracijom ovih jednačina dobijamo

$$3x - y = C_1$$
$$x + y = C_2,$$

tako da smjena:

$$u = 3x - y$$
$$v = x + y$$

jednačinu (1) prevodi na kanonski oblik u kojem će biti

$$A^* = A\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + C\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0,$$

$$B^* = A\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + B\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + C\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 8,$$

$$C^* = A\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + C\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Kako je, osim toga

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v},$$

jednačina (1) se svodi na

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Zadatak 36. Jednačinu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad (y > 0) \tag{1}$$

svesti na normalni oblik.

Rješenje: Ova jednačina je hiperbolička jer je:

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = -y, \quad \text{tj.} \quad B^2 - AC = y > 0 \quad \text{za } y > 0.$$

Prema tome:

$$A(y')^2 + C = 0, \quad \text{tj.}$$

$$(y')^2 - y = 0.$$

Odavde je

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{y}, \quad \text{ili}$$

$$\frac{dy}{\pm\sqrt{y}} = dx.$$

Otuda je

$$\pm 2\sqrt{y} = x + C_1.$$

Uvedimo smjenu:

$$\xi = x - 2\sqrt{y}, \qquad \eta = x + 2\sqrt{y}. \tag{2}$$

Diferenciranjem dobijamo

$$\xi_x = \eta_x = 1, \qquad \xi_y = -\eta_y = -\frac{1}{\sqrt{y}}.$$

Rješavanjem jednačina (2) po x i y, dobićemo

$$\sqrt{y} = \frac{\eta - \xi}{4}, \qquad x = \frac{\eta + \xi}{2}.$$

Odredimo, sada

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi}\right) = \frac{4}{\eta - \xi}\left(\frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi}\right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\right)\frac{1}{y} + \frac{1}{2\sqrt{y^3}}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta}\right).$$

Iz posljednje od ovih jednakosti dobijamo

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + \frac{2}{\eta - \xi}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta}\right), \tag{5}$$

tako da je, prema (3), (4) i (5):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y} \equiv 4\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Tražena jednačina je

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

a njeno rješenje je

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \varphi'(\eta),$$

dakle

$$z = \varphi(\eta) + \Psi(\xi).$$

Prema tome, rješenje polazne jednačine biće oblika:

$$z = \varphi(x + 2\sqrt{y}) + \Psi(x - 2\sqrt{y}),$$

gdje su φ i Ψ proizvoljne funkcije.

Zadatak 37. Datu parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2y\frac{\partial z}{\partial y}=0, \tag{1}$$

svesti na kanonski oblik.

Rješenje: Za jednačinu (1) je

$$A=x^2,\quad B=0,\quad C=-y^2.$$

Kako je

$$B^2-AC=x^2y^2>0$$

u svakoj oblasti xy-ravni koja ne siječe koordinatne ose, jednačina (1) je hiperboličkog tipa.

Rješavanjem sistema

$$A\,dy-(B+\sqrt{B^2-AC})\,dx=x^2dy-xydx=0$$
$$A\,dy-(B-\sqrt{B^2-AC})\,dx=x^2dy+xydx=0,$$

dobijamo

$$\frac{y}{x}=C_1,\quad xy=C_2.$$

Jednačinu (1) ćemo zato transformisati pomoću smjene

$$u=\frac{y}{x},\quad v=xy.$$

Izrazimo izvode koji figurišu u polaznoj jednačini, pomoću novih promjenljivih. Dobićemo

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u}+y\frac{\partial z}{\partial v}, \tag{2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u}+x\frac{\partial z}{\partial v}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{2y}{x^3}\frac{\partial z}{\partial u}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + x^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}. \tag{4}$$

Uvrštavanjem (2), (3) i (4) u (1), polazna jednačina će se transformisati na kanonski oblik

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Zadatak 38. Datu parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial z}{\partial x}\right) = x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \tag{1}$$

svesti na kanonski oblik.

Rješenje: Napišimo jednačinu (1) u obliku

$$2\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \tag{1'}$$

Jednačina (1) je hiperbolička, u svakoj oblasti koja ne sječe y-osu, jer je

$$A = x^2, \quad B = 0, \quad C = x, \quad \text{tj.}$$

$$B^2 - AC = x^2 > 0 \quad (\forall x \neq 0).$$

Rješavanjem jednačina

$$A\,dy - (B + \sqrt{B^2 - AC})\,dx = x\,dy - x\,dx = 0$$

$$A\,dy - (B - \sqrt{B^2 - AC})\,dx = x\,dy + x\,dx = 0,$$

dobićemo dva integrala

$$x - y = C_1, \quad x + y = C_2.$$

Data jednačina će se smjenom

$$x - y = u, \quad x + y = v$$

svesti na kanonski oblik. Naime, poslije uvrštavanja izvoda

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v},$$

u jednačinu (1'), dobićemo

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2x}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{2x}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Ako, sada, u njoj x i y zamijenimo izrazima

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad \text{odnosno} \quad y = \frac{v-u}{2},$$

dobićemo kanonski oblik jednačine (1), koji glasi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{1}{u+v}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{u+v}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Zadatak 39. Svesti datu parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\cos x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - (3+\sin^2 x)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

na kanonski oblik.

Rješenje: Jednačina je hiperbolička u svakoj oblasti, jer je

$$A = 1, \quad B = -\cos x, \quad C = -3 - \sin^2 x, \quad \text{tj.}$$

$$B^2 - AC = \cos^2 x + 3 + \sin^2 x = 4 > 0.$$

Problem rješavanja jednačine (1) se time svodi na rješavanje sistema

$$A\,dy - (B + \sqrt{B^2 - AC})\,dx = dy + \cos x\,dx + 2dx = 0$$
$$A\,dy - (B - \sqrt{B^2 - AC})\,dx = dy + \cos x\,dx - 2dx = 0.$$

Integrali ovih jednačina su

$$y + \sin x + 2x = C_1$$
$$y + \sin x - 2x = C_2\,.$$

Uvedimo smjenu

$$u = y + \sin x + 2x$$
$$v = y + \sin x - 2x$$

i izrazimo parcijalne izvode koji se pojavljuju u datoj jednačini, pomoću parcijalnih izvoda po novim promjenljivim ***u*** i ***v***. Dobićemo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}(2+\cos x) - \frac{\partial z}{\partial v}(2-\cos x),$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\partial z}{\partial u}\sin x - \frac{\partial z}{\partial v}\sin x + (2+\cos x)^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} -$$
$$- 2(4-\cos^2 x)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + (2-\cos x)^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = (\cos x + 2)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\cos x\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + (\cos x - 2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\,.$$

Uvrštavanjem ovako dobivenih parcijalnih izvoda u datu jednačinu, nakon sređivanja, dobićemo njen kanonski oblik

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{u+v}{32}\left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right) = 0\,.$$

Zadatak 40. Datu parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0. \tag{1}$$

svesti na kanonski oblik.

Rješenje: Jednačina (1) je eliptičkog tipa, za $y > 0$, jer je

$$A = y, \quad B = 0 \quad C = 1, \quad \text{tj.}$$

$$B^2 - AC = -y < 0 \quad \text{za} \quad y > 0.$$

Da bismo datu jednačinu sveli na kanonski oblik treba rješiti sljedeći sistem jednačina

$$A\,dy-(B+\sqrt{B^2-AC})\,dx = 0,$$
$$A\,dy-(B-\sqrt{B^2-AC})\,dx = 0,$$

tj.

$$y\,dy - i\sqrt{y}\,dx = 0,$$
$$y\,dy + i\sqrt{y}\,dx = 0.$$

Njihovom integracijom dobivamo dva integrala

$$\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = ix + C_1 \quad \text{i} \quad \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = -ix + C_2\,.$$

Uvođenjem novih promjenljivih, smjenom

$$u = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$$
$$v = x$$

i uvrštavanjem, u polaznu jednačinu, izvoda

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial v}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{y}\,\frac{\partial z}{\partial u}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}y$$

dobićemo kanonski oblik date jednačine

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{1}{3u}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=0\,.$$

Zadatak 41. Svesti na kanonski oblik datu parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$(1+x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0\,. \tag{1}$$

Rješenje: Jednačina (1) je oblika

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+f\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0\,.$$

S obzirom da je

$$B^2-AC=-(1+x^2)(1+y^2)<0,\qquad (\forall x,y)\,,$$

jednačina (1) je eliptičkog tipa. Funkcije

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y)\,,$$

pomoću kojih se data jednačina svodi na kanonski oblik, ćemo odrediti pomoću jednačina:

$$\left.\begin{aligned}A\,dy-(B+\sqrt{B^2-AC})\,dx&=0\\ A\,dy-(B-\sqrt{B^2-AC})\,dx&=0.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Konkretno, u ovom slučaju, te jednačine glase

$$\left.\begin{aligned} (1+x^2)\,dy - (i\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2})\,dx &= 0 \\ (1+x^2)\,dy + (i\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2})\,dx &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2')$$

One su ekvivalentne sistemu diferencijalnih jednačina:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} &= i\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} &= -i\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Njihovim rješavanjem dobivamo dva nezavisna prva integrala:

$$\left.\begin{aligned} \ln(y+\sqrt{y^2+1}) - i\ln(x+\sqrt{x^2+1}) &= C_1 \\ \ln(y+\sqrt{y^2+1}) + i\ln(x+\sqrt{x^2+1}) &= C_2. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Uzmimo

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \ln(y+\sqrt{y^2+1}), \\ v(x,y) &= \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \qquad \text{i} \\ z &= z(u,v). \end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

Kako je

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}},$$

biće:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \frac{\partial z}{\partial u}.$$

Prema tome, imaćemo:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{1}{x^2+1} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{y}{\sqrt{(y^2+1)^3}} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{y^2+1} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}.$$

Uvrštavanjem, ovako dobivenih parcijalnih izvoda u jednačinu (1), ćemo, nakon jednostavnog računa, dobiti kanonski oblik polazne parcijalne diferencijalne jednačine:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0.$$

Zadatak 42. Datu parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

svesti na kanonski oblik.

Rješenje: S obzirom da je

$$A = y^2, \quad B = xy, \quad C = 2x^2,$$

dakle

$$B^2 - AC = -x^2y^2 < 0 \quad (\forall x, y \neq 0),$$

polazna jednačina je eliptičkog tipa. Da bismo je sveli na kanonski oblik treba rješiti jednačine:

$$\left.\begin{aligned} A\,dy - (B - \sqrt{B^2 - AC})\,dx &= 0 \\ A\,dy - (B + \sqrt{B^2 - AC})\,dx &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

koje u konkretnom slučaju glase

$$\left.\begin{aligned} y\,dy &= (x + ix)\,dx \\ y\,dy &= (x - ix)\,dx. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Njihovom integracijom dobijamo:

$$(y^2 - x^2) - ix^2 = C_1$$
$$(y^2 - x^2) + ix^2 = C_2 .$$

Uvedimo nove nezavisno promjenljvie

$$u = y^2 - x^2$$
$$v = x^2$$

i izrazimo parcijalne izvode, koji se pojavljuju u datoj jednačini, pomoću parcijalnih izvoda po novim promjenljivim u i v:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x\frac{\partial z}{\partial u} + 2x\frac{\partial z}{\partial v},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\frac{\partial z}{\partial u},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 8x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + 4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - 2\frac{\partial z}{\partial u} + 2\frac{\partial z}{\partial v},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4xy\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial z}{\partial u}.$$

Njihovim uvrštavanjem u polaznu jednačinu dobićemo kanonski oblik te jednačine

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{1}{u+v}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{2v}\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Zadatak 43. Datu parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + 5\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

svesti na kanonski oblik.

Rješenje: Ova jednačina je eliptičkog tipa jer je

$$B^2 - AC = 4 - 5 < 0.$$

Da bismo je sveli na kanonski oblik potrebno je riješiti sljedeće dvije jednačine:

$$\begin{aligned} dy - 2dx - idx &= 0 \\ dy - 2dx + idx &= 0. \end{aligned}$$

Njihovo rješenje je

$$\begin{aligned} y - 2x - ix &= C_1 \\ y - 2x + ix &= C_2. \end{aligned}$$

Uzimajući sada

$$\begin{aligned} u &= y - 2x, \\ v &= x, \end{aligned}$$

dobićemo

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -2\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}. \end{aligned}$$

Njihovim uvrštavanjem u jednačinu (1), nakon sređivanja, dobićemo kanonski oblik polazne jednačine

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

II JEDNAČINE MATEMATIČKE FIZIKE

Ova glava sadrži tridesetak primjera parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda koje spadaju u oblast Matematičke fizike.

Za većinu tih jednačina se ne može, u opštem slučaju, odrediti rješenje.

Pri rješavanju jednačina matematičke fizike postavljaju se dodatni zahtjevi, takozvani **početni** i **rubni uslovi**, tj. traži ono rješenje date jednačine koje zadovoljava te dodatne uslove. Pritom, ne koristimo opšte rješenje da bismo došli do rješenja koje zadovoljava dodatne uslove, nego direktno tražimo odgovarajuće partikularno rješenje.

Kao i svaki drugi matematički problem, tako i problemi matematičke fizike mogu imati samo jedno rješenje, više rješenja ili nemati ni jedno rješenje. Dok je u dosadašnjem rješavanju problema takozvane "čiste matematike" posvećivana ista pažnja problemima s jednim, više ili nijednim rješenjem, u matematičkoj fizici se posebna pažnja poklanja samo onim problemima koji imaju jedinstveno rješenje, jer su oni formulisani tako da opisuju samo jednu fizikalnu pojavu.

Osim toga, praksa nameće zahtjev da dobiveno rješenje bude neprekidno u odnosu na dodatne uslove, tj. da malim promjenama u dodatnim uslovima odgovaraju samo male promjene u rješenju. Naime, diferencijalna jednačina kojom se opisuje izvjesna fizikalna pojava se najčešće izvodi teorijski, korištenjem odgovarajućih aproksimacija kako bi dobivena jednačina bila što jednostavnija, dok se dodatni uslovi dobijaju uglavnom eksperimentalno, tako da propisane vrijednosti za funkciju nisu tačne nego samo približno tačne. To je, naravno, razlog zbog kojeg je važno da rješenje bude neprekidno u odnosu na dodatne uslove jer bi u suprotnom mala nepreciznost u mjerenju mogla dovesti do velike greške u rezultatu.

Saglasno ranije datoj klasifikaciji parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda i jednačine matematičke fizike se mogu svrstati u tri grupe i to:

1. jednačine eliptičkog tipa:

$\Delta u = 0$	**Laplaceova jednačina**
$\Delta u + \lambda^2 u = 0$	**Helmholtzova jednačina**
$\Delta u = k$	**Poissonova jednačina**
$\Delta u + k(E - V)u = 0$	**Schrödingerova jednačina**

2. jednačine hiperboličkog tipa:

$u_{tt} = c^2 u_{xx}$	**jednačina slobodnih oscilacija žice**
$u_{tt} = c^2 u_{xx} - hu_t$	**jednačina oscilacija s trenjem**
$u_{tt} = c^2 u_{xx} - hu_t - ku$	**telegrafska jednačina**
$u_{tt} = c^2 \Delta u$	**višedimenzionalna talasna jednačina**
$u_{tt} = c^2 \Delta u - hu_t$	**talasna jednačina s trenjem**
$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x, t)$	**jednačina prisilnih oscilacija (tj. pod djelovanjem vanjske sile)**

3. jednačine paraboličkog tipa:

$u_t = \alpha^2 u_{xx}$	**jednačina jednodimenzionalne difuzije**
$u_t = \alpha^2 u_{xx} - hu_x$	**jednačina konvektivne difuzije**
$u_t = \alpha^2 u_{xx} - ku$	**jednačina provođenja toplote s apsorbovanjem**
$u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x, t)$	**jednačina provođenja toplote s izvorom toplote**

1. Teorija potrebna za priložene zadatke

1.1. Razvitak funkcije u Fourierov red

Fourierovi redovi igraju važnu ulogu u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačina jer se periodična funkcija, definisana na intervalu $(-\infty, \infty)$, kao i funkcija, definisana na konačnom intervalu, može razviti u red po sinusima i kosinusima.

Pokazuje se da se **2T** – periodična, realna funkcija $f(x)$, definisana na intervalu $(-T, T)$, može predstaviti u obliku beskonačnog **trigonometrijskog reda (po sinusima i kosinusima):**

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\pi x / T) + b_k \sin(k\pi x / T) \right] \tag{1}$$

u kojem su koeficijenti $\boldsymbol{a_k}$ i $\boldsymbol{b_k}$ određeni formulama

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos(k\pi x/T)\,dx \\ b_k &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin(k\pi x/T)\,dx \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

za $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Razvitak funkcije $f(x)$ predstavljen redom (1), u kojem su koeficijenti a_k i b_k određeni sa (2), zove se **razvitak funkcije $f(x)$ u Fourierov red. Fourierovi koeficijenti a_k i b_k** su ovdje realni.

Specijalno, kada je funkcija $f(x)$ 2π –periodična, treba u (1) i (2) samo T zamjeniti sa π.

Recimo još da se 2T – periodična, realna funkcija $f(x)$ može predstaviti i u obliku

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\pi x/T},$$

gdje je

$$c_k = \bar{c}_{-k} = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)e^{-ikx}\,dx,$$

a koeficijenti c_k uopšte uzev kompleksni.

1.2. Razvitak funkcije po Besselovim funkcijama prve vrste

Ako se funkcija $f(x)$ može razviti po Besselovim funkcijama prve vrste, onda je

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_n(x\sqrt{\lambda_{nm}}), \tag{1}$$

gdje je n čvrst broj $(n > -1)$, a $\sqrt{\lambda_{n1}}$, $\sqrt{\lambda_{n2}}, \ldots$, pozitivni korijeni jednačine

$$J_n(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Koeficijenti a_m, u redu (1), određuju se po obrascu

$$a_m = \frac{2}{J_{n+1}^2(\sqrt{\lambda_{nm}})}\int_0^1 x\, f(x) J_n(x\sqrt{\lambda_{nm}})\,dx\,.$$

Na ovakav razvitak naići ćemo pri rješavanju problema oscilacija kružne membrane poluprečnika $R = 1$.

Uzmimo sada da je poluprečnik posmatrane kružne membrane R. Pretpostavimo da se funkcija $f(x)$ može predstaviti u obliku reda

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_\nu\left(\mu_m x/R\right), \qquad (\nu > -1), \tag{1'}$$

gdje su $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ pozitivni korijeni jednačine $J_\nu(\mu) = 0$, svrstani po veličini. Da bismo odredili koeficijente a_m, pomnožićemo (1′) sa $x J_\nu\left(x\mu_m/R\right)$, a zatim integrisati u razmaku $\left[O, R\right]$, pretpostavljajući pri tome da je moguća integracija član po član.

Tada, s obzirom na obrazac

$$\int_O^R x J_\nu\left(x\mu_m/R\right) J_\nu\left(x\mu_n/R\right)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{R^2}{2} J_\nu'^2(\mu_m) = \dfrac{R^2}{2} J_{\nu+1}^2(\mu_m), & m = n \end{cases} \tag{2}$$

dobivamo

$$a_m = \frac{2}{R^2 J_{\nu+1}^2(\mu_m)}\int_O^R x\, f(x) J_\nu\left(x\mu_m/R\right)dx\,. \tag{3}$$

Razvitak funkcije $f(x)$, predstavljen redom (1), u kojem su koeficijenti a_m određeni sa (3), zove se **razvitak funkcije $f(x)$ u Fourier – Besselov red.**

U problemima matematičke fizike često se nailazi na sljedeće redove po Besselovim funkcijama:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m J_\nu\left(x\mu_m/R\right), \tag{4}$$

u kojim su $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ pozitivni korijeni jednačine

$$\alpha J_\nu(\mu) + \beta\mu J_\nu'(\mu) = 0 \tag{5}$$

napisani u rastućem nizu, uz uslov da je $\alpha\beta^{-1} + \nu > 0$.

S obzirom na ortogonalnost Besselovih funkcija i s obzirom na formulu

$$\int_0^R x J_\nu^2\left(x\mu_m/R\right)dx = \frac{R^2}{2}\left(1+\frac{\alpha^2-\beta^2\nu^2}{\beta^2\mu_m^2}\right)J_\nu^2(\mu_m), \tag{6}$$

gdje su μ_m pozitivni korijeni jednačine (5), dobivamo

$$b_m = \frac{2}{R^2\left(1+\dfrac{\alpha^2-\beta^2\nu^2}{\beta^2\mu_m^2}\right)J_\nu^2(\mu_m)}\int_0^R x f(x) J_\nu\left(x\mu_m/R\right)dx. \tag{7}$$

Razvitak (4), u kome su koeficijenti određeni obrascem (7), zove se **razvitak funkcije $f(x)$ u Dini – Besselov red.**

2. Oscilacije žice

2.1. Jednačina slobodnih oscilacija žice

Jednačina slobodnih oscilacija homogene žice ima oblik

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (c \neq 0), \tag{1}$$

pri čemu je sa $u(x,t)$ određen položaj tačke s apscisom x u momentu t.
Sve tačke žice osciluju u jednoj ravni krećući se okomito na x-osu.
Jednačinu (1) rješavaćemo D'Alambertovom metodom koristeći smjenu

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct,$$

pomoću koje se jednačina (1) svodi na jednačinu oblika

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0. \tag{2}$$

Napišemo li jednačinu (2) u obliku

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right) = 0,$$

zaključićemo da funkcija $\dfrac{\partial u}{\partial\xi}$ ne zavisi od η, tj. da je

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \varphi(\xi).$$

Integracijom ove jednačine dobićemo

$$u = \int \varphi(\xi)\,d\xi + \varphi_2(\eta),$$

gdje je φ_2 proizvoljna funkcija od η.

Prema tome, rješenje jednačine (2) se može napisati u obliku

$$u(\xi,\eta) = \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\eta), \tag{3}$$

gdje su φ_1 i φ_2 proizvoljne funkcije svojih argumenata.
Povratkom na stare promjenljive dobićemo opšte rješenje polazne jednačine

$$u(x,t) = \varphi_1(x-ct) + \varphi_2(x+ct), \tag{4}$$

koje se naziva **D'Alambertovim rješenjem.**

1° Potražimo ono rješenje jednačine (1) koje zadovoljava **početne uslove**:

$$u(x,0) = f_1(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f_2(x), \tag{5}$$

gdje su $f_1(x)$ i $f_2(x)$ unaprijed zadane funkcije.
Zahtjev da opšte rješenje (4) zadovoljava početne uslove (5) nas dovodi do jednakosti:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x) + \varphi_2(x) &= f_1(x), \\ \varphi_2'(x) - \varphi_1'(x) &= \frac{1}{c} f_2(x). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Integracijom druge od ovih jednačina dobijamo

$$\varphi_2(x) - \varphi_1(x) = \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} f_2(v)\,dv. \tag{7}$$

Sabiranjem, odnosno oduzimanjem prve od jednakosti (6) i (7) dobićemo

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2(x) &= \frac{1}{2} f_1(x) + \frac{1}{2c}\int_{x_o}^{x} f_2(v)\,dv \\ \varphi_1(x) &= \frac{1}{2} f_1(x) - \frac{1}{2c}\int_{x_o}^{x} f_2(v)\,dv. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Uvrštavanjem ovako dobivenih funkcija $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ u (4), nakon sređivanja, dobijamo traženo rješenje jednačine (1) :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f_1(x-ct) + f_2(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} f_2(v)\,dv\,. \tag{9}$$

2° Ukoliko su krajnje tačke žice (strune), koja osciluje, fiksirane (nepokretne), traženo rješenje će, pored uslova (5), zadovoljavati i **rubne uslove:**

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0 \qquad (t > 0)\,. \tag{10}$$

Jednačina (1) se, u ovom slučaju, može rješavati primjenom **Fourierove metode,** tj. razvitkom funkcija $f_1(x)$ i $f_2(x)$ u Fourierov red.

2.2. Jednačina prisilnih oscilacija žice

Pod prisilnim oscilacijama žice podrazumijevamo oscilacije izazvane djelovanjem neke vanjske sile. U slučaju kada su **krajevi žice učvršćeni (nepokretni),** proučavanje prisilnih oscilacija se svodi na rješavanje parcijalne diferencijalne jednačine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\,, \tag{1}$$

uz rubne uslove:

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0 \qquad (t > 0) \tag{1'}$$

i početne uslove:

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \qquad 0 \le x \le L\,, \tag{1''}$$

gdje su $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ zadane funkcije.

Ako rješenje parcijalne diferencijalne jednačine (1) potražimo u obliku zbira dviju funkcija

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t), \tag{2}$$

rješavanje problema (1) + (1′) + (1″) će se svesti na rješavanje dva problema i to:

I jednačine prisilnih oscilacija žice

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{3}$$

uz rubne uslove:

$$v(0,t) = 0, \quad v(L,t) = 0 \tag{3'}$$

i početne uslove:

$$v(x,0) = 0, \quad \frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = 0 \tag{3''}$$

i

II jednačine slobodnih oscilacija žice

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{4}$$

uz rubne uslove:

$$w(0,t) = 0, \quad w(L,t) = 0 \tag{4'}$$

i početne uslove:

$$w(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = \psi(x). \tag{4''}$$

Time smo rješavanje problema (1) + (1′) + (1″) prisilnih oscilacija žice, sa zadanim početnim i rubnim uslovima, razbili na zbir prisilnih oscilacija žice uz nulte rubne i početne uslove i slobodnih oscilacija žice sa početnim i nultim rubnim uslovima.

Problemi I i II se mogu rješavati Fourierovom metodom razdvajanja promjenljivih. Tražeći rješenje jednačine (4) u obliku proizvoda

$$w(x,t) = X(x)T(t) \tag{5}$$

jednačina (4) se svodi na dvije obične diferencijalne jednačine:

$$X'' - \frac{\lambda}{c^2} X = 0 \tag{$*$}$$

$$T'' - \lambda T = 0, \tag{$**$}$$

kojim odgovaraju opšta rješenja

$$X(x) = C\cos\left(\sqrt{\lambda}x/c\right) + D\sin\left(\sqrt{\lambda}x/c\right)$$

$$T(t) = A\cos(\sqrt{\lambda}\,t) + B\sin(\sqrt{\lambda}\,t),$$

redom. Rubni uslovi za jednačinu ($*$) primaju oblik

$$X(0) = 0, \quad X(L) = 0, \tag{6}$$

tako da njihovim uvrštavanjem u opšte rješenje te jednačine, dobijamo

$$C = 0 \quad \text{i} \quad D\sin\left(\sqrt{\lambda}L/c\right) = 0,$$

tj.

$$\lambda_k = \left(k\pi c/L\right)^2, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

dakle

$$X_k(x) = \sin\left(k\pi x/L\right), \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Za ovako dobivene svojstvene vrijednosti λ_k će rješenje jednačine ($**$) biti

$$T_k(t) = A_k\cos\left(k\pi ct/L\right) + B_k\sin\left(k\pi ct/L\right), \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Dakle, na osnovu (5), (7) i (8) funkcije

$$w_k(x,t) = \sin\left(k\pi x/L\right)\left[A_k\cos\left(k\pi ct/L\right) + B_k\sin\left(k\pi ct/L\right)\right], \quad k = 1, 2, \ldots$$

u kojima su A_k, B_k konstante, predstavljaju opšta rješenja problema (4) + (4'). Superpozicijom ovako dobivenih rješenja dobićemo rješenje problema (4) + (4''):

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(k\pi x/L\right)\left[A_k\cos\left(k\pi ct/L\right) + B_k\sin\left(k\pi ct/L\right)\right], \tag{9}$$

gdje su A_k, B_k proizvoljne konstante. Koristeći preostale uslove (4') dobićemo:

$$\left.\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin(k\pi x/L)\,dx \\ B_k &= \frac{2}{L}\int_0^L \psi(x)\sin(k\pi x/L)\,dx, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$k = 1, 2, \ldots$, tako da će rješenje problema $(4)+(4')+(4'')$ biti potpuno određeno sa (9) i (10).

Riješimo sada problem I. Rješenje jednačine prisilnih oscilacija ćemo tražiti u obliku

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)\sin\frac{k\pi x}{L}, \tag{11}$$

pri čemu ćemo koeficijente $v_k(t)$ odrediti iz uslova da funkcija $v(x,t)$ zadovoljava jednačinu (3) i uslov (3″), pošto su uslovi (3′) automatski zadovoljeni, nezavisno od koeficijenata $v_k(t)$.

Uvrštavanjem izraza $v(x,t)$, datog sa (11), u (3), dobijamo

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[v_k''(t) + A^2(k)\,v_k(t)\right]\sin\frac{k\pi x}{L} = f(x,t), \tag{12}$$

gdje je

$$A(k) = \frac{k\pi c}{L}. \tag{13}$$

Da bismo odredili, zasad nepoznate, koeficijente $v_k(t)$ razvićemo funkciju $f(x,t)$ (kao funkciju od x), u intervalu $(0, L)$, u Fourierov red po sinusima :

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{k\pi x}{L}, \tag{14}$$

gdje je

$$f_k(t) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x,t)\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx. \tag{15}$$

Uvrštavanje ovako dobivenog razvitka u (11) dovešće nas do linearne nehomogene diferencijalne jednačine s konstantnim koeficijentima oblika:

$$v_k''(t) + A^2(k)\,v_k(t) = f_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

čijim rješavanjem dobijamo nepoznate koeficijente $v_k(t)$.

Lagrangeovom metodom varijacije konstanti dobijamo opšte rješenje jednačine (16):

$$v_k(t) = C_1 \cos A(k)t + C_2 \sin A(k)t + \frac{1}{A(k)} \int_{t_o}^{t} f_k(y) \sin\left[A(k)(t-y)\right] dy \,. \quad (17)$$

Da bismo odredili konstante C_1 i C_2 postavimo zahtjev da rješenje (17) zadovoljava uslove (3″), tj. da je

$$v_k(0) = 0, \quad v_k'(0) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{18}$$

Lako se uvjeriti da funkcija

$$v_k(t) = \frac{1}{A(k)} \int_{t_o}^{t} f_k(y) \sin\left[A(k)(t-y)\right] dy \tag{19}$$

zadovoljava uslove (18) ako u formuli (19) stavimo $t_o = 0$.

Pomoću formule (15) se iz (19), konačno dobija sljedeći izraz za koeficijente $v_k(t)$:

$$v_k(t) = \frac{2}{L\,A(k)} \int_0^t \sin\left[A(k)(t-y)\right] dy \int_0^L f(x,y) \sin\frac{k\pi x}{L}\, dx \,. \tag{20}$$

Prema tome, rješenje jednačine (3), koje zadovoljava uslove (3′) i (3″), dato je pomoću reda (11), u kojem su koeficijenti $v_k(x)$ određeni sa (20), a $A(k)$ sa (13).

3. Oscilacije membrane. Talasna jednačina

Sada ćemo rješavati talasnu jednačinu kao **jednačinu poprečnih oscilacija membrane** (tanke opne) koja se rasteže, ali ne savija, tj. kreće paralelno s Oz osom pod ravnomjernim djelovanjem sile rastezanja f_0 i koja, kad se nalazi u stanju ravnoteže, leži u xOy ravni. U tom slučaju je položaj ***u***, tačke membrane, funkcija od ***x***, ***y*** i **t** koja zadovoljava jednačinu analognu jednačini strune

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x,y,t)\,, \tag{1}$$

u kojoj je $c^2 = f_o/\rho$, ρ površinska gustoća, a ρf vanjska sila.

Tražićemo ono rješenje jednačine (1) koje, na konturi (C) – rubu membrane, zadovoljava tzv. **rubni uslov:**

$$u = 0 \quad \text{na (C)}, \tag{2}$$

tj. posmatrati slučaj kada je rub membrane učvršćen.

Osim toga, potrebno je dati i **početne uslove** kojim su određeni kretanje i brzina svih tačaka membrane u početnom momentu:

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_1(x,y) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_2(x,y). \tag{3}$$

Oscilacije membrane, koje nastaju bez uticaja vanjskih sila, tj. $f = 0$, poznate su kao **slobodne oscilacije membrane**. Prema tome, slobodne oscilacije membrane se mogu predstaviti talasnom jednačinom

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{1'}$$

koja, u polarnim koordinatama, glasi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right). \tag{1''}$$

Rješenje ove jednačine se može tražiti pomoću **Fourierove metode razdvajanja promjenljivih**, tj. u obliku

$$u(r,\theta,t) = R(r)\Theta(\theta)T(t).$$

Jednačina (1″) se tada raspada na tri obične diferencijalne jednačine:

$$T''(t) + \lambda^2 c^2 T(t) = 0 \qquad \text{(jednačina harmonijskih oscilacija)}$$

$$\Theta''(\theta) + n^2\Theta(\theta) = 0 \qquad \text{(jednačina harmonijskih oscilacija)}$$

$$r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda^2 r^2 - n^2)R(r) = 0 \qquad \text{(Besselova jednačina).}$$

Svi proizvodi $R(r)\Theta(\theta)T(t)$ rješenjâ ove tri obične diferencijalne jednačine opisuju osnovne oscilacije membrane, dok funkcije $R(r)$, $\Theta(\theta)$ opisuju oblik te membrane.

Da bismo odredili oscilacije date membrane pod određenim početnim uslovima, biramo kombinaciju fundamentalnih rješenja tako da budu zadovoljeni ti početni uslovi.

Sada ćemo posmatrati rubni problem za ravan u dva specijalna slučaja kada je oblast u kojoj rješavamo problem krug ili pravougaonik.

Slučaj kružne membrane je ujedno primjer razlaganja date funkcije po Besselovim funkcijama koji je značajan i zbog toga što se takva razlaganja veoma često koriste i u rješavanju drugih važnih problema matematičke fizike.

3.1. Slobodne oscilacije pravougaone membrane

Posmatraćemo slobodne oscilacije membrane tj. slučaj oscilacija koje nastaju bez uticaja vanjske sile ($f = 0$) za koje je kontura pravougaonik koji leži u xy ravni, sa stranama paralelnim y, odnosno x osi, određenim sa:

$$(P): \quad x=0,\ x=a\,; \quad y=0,\ y=b\,.$$

Znači, tražićemo ono rješenje jednačine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{1'}$$

koje zadovoljava uslove

$$u = 0 \qquad \text{na } (P) \quad \text{i} \tag{2}$$

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial u}\Big|_{t=0} = \varphi_2(t)\,. \tag{3}$$

Primjenjujući Fourierov metod, potražimo partikularno rješenje jednačine (1') u obliku

$$u(x,y,t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)\,v(x,y)\,. \tag{4}$$

To će nas dovesti do jednačine

$$-\omega^2(A\cos\omega t + B\sin\omega t)\,v(x,y) = c^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)(A\cos\omega t + B\sin\omega t),$$

koja se, ako uvedemo oznaku

$$k^2 = \omega^2/c^2\,, \tag{5}$$

svodi na jednačinu po v:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + k^2 v = 0\,.$$

Potražimo njeno rješenje u obliku proizvoda

$$v(x,y) = X(x)Y(y)\,. \tag{6}$$

Dobićemo jednačinu

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) + k^2 X(x)Y(y) = 0$$

koja se može napisati u obliku

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''+k^2 Y}{Y} = -\lambda^2 ,$$

gdje je λ zasad neodređena konstanta.

Odavde se dobijaju dvije obične diferencijalne jednačine

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad \text{i} \quad Y'' + \mu^2 Y = 0, \tag{7}$$

gdje je

$$\mu^2 = k^2 - \lambda^2, \quad \text{tj.} \quad \lambda^2 + \mu^2 = k^2. \tag{*}$$

Opšta rješenja jednačina (7) su redom:

$$\left.\begin{aligned} X(x) &= C_1 \sin\lambda x + C_2 \cos\lambda x \\ Y(y) &= D_1 \sin\mu y + D_2 \cos\mu y \,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Na osnovu uslova $u = 0$, na konturi (P), dolazimo do zaključka da je

$$v(x,y) = 0 \quad \text{na} \quad (\text{P}),$$

iz kojeg, s obzirom na (6) i (8), dobijamo po dva uslova za funkcije $X(x)$ i $Y(y)$ i to

$$\begin{aligned} X(0) &= 0, & X(a) &= 0, \\ Y(0) &= 0, & Y(b) &= 0, \end{aligned}$$

što ima za posljedicu $C_2 = D_2 = 0$. Ako za preostale konstante, u (8), uzmemo $C_1 = D_1 = 1$, (8) će se svesti na

$$X(x) = \sin\lambda x, \qquad Y(y) = \sin\mu y, \tag{9}$$

uz uslov da je

$$\sin\lambda a = 0, \quad \sin\mu b = 0 . \tag{10}$$

Iz jednačina (10) dobijamo beskonačno mnogo vrijednosti:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \ldots, & \lambda_m &= m\pi / a \\ \mu &= \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots, & \mu_n &= n\pi / b \,. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Izaberemo li po jednu od vrijednosti λ i μ iz nizova (11), odgovarajuća vrijednost konstante k^2 će, prema (*), biti jednaka

$$k_{mn}^2 = \lambda_m^2 + \mu_n^2 = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right),$$

dok će njima, prema (5), odgovarati frekvencije

$$\omega_{mn}^2 = c^2 k_{mn}^2 = c^2\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right). \tag{12}$$

Ako sada zamjenimo, u izrazu (4), λ sa λ_m, odnosno μ sa μ_n i označimo sa $\boldsymbol{A}_{mn}$ i $\boldsymbol{B}_{mn}$ odgovarajuće vrijednosti konstanti $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$, redom, dobićemo beskonačno mnogo rješenja problema (1′) + (2), oblika

$$(A_{mn}\cos\omega_{mn}t + B_{mn}\sin\omega_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{13}$$

tj. beskonačno mnogo svojstvenih (slobodnih) harmonijskih oscilacija membrane koje, inače, ulaze i u sastav oscilirajuće žice.

Odredimo konstante $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$, pomoću početnih uslova, uvrštavanjem $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}$, u rješenje $u = u(x,y,t)$, dobiveno linearnom superpozicijom rješenja (13), i u njegov izvod $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, tj. u formule:

$$u = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(A_{mn}\cos\omega_{mn}t + B_{mn}\sin\omega_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{mn}(B_{mn}\cos\omega_{mn}t - A_{mn}\sin\omega_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

U saglasnosti sa (3), dobićemo

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_1(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_2(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\,\omega_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

Pošto ove formule predstavljaju razvitak funkcija φ_1 i φ_2 u dvostruki Fourierov red, lako se zaključuje da se koeficijenti A i B mogu odrediti pomoću formula

$$\left.\begin{aligned} \omega_{mn} A_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \varphi_1(\xi, \eta) \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} d\xi\, d\eta \\ \omega_{mn} B_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \varphi_2(\xi, \eta) \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} d\xi\, d\eta \,, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

čime je riješen postavljeni problem.

U slučaju membrane pokazuje se da jednoj te istoj frekvenciji odgovara više figura membrane s različitim položajima čvornih linija, tj. onih linija na kojima je amplituda oscilacija jednaka nuli, tako da tačke koje leže na njima ne osciluju. To je najjednostavnije posmatrati na primjeru **kvadratne membrane**, tj. kada je $\boldsymbol{b = a}$.

U tom slučaju je frekvencija

$$\omega_{mn} = \frac{c\pi}{a}\sqrt{m^2 + n^2} = \alpha\sqrt{m^2 + n^2} \,, \tag{15}$$

gdje je $\alpha = \frac{c\pi}{\boldsymbol{a}}$ faktor koji ne zavisi od $\boldsymbol{m}$ i $\boldsymbol{n}$.

Uzimajući

$$\boldsymbol{m = n = 1,}$$

dobićemo osnovni ton membrane

$$u_{11} = N_1 \sin(\omega_{11} t + \alpha_{11}) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \,,$$

frekvencije $\omega_{11} = \alpha\sqrt{2}$.

U ovom slučaju, unutar membrane nema čvornih linija.

Uzimajući, zatim

$$\boldsymbol{m = 1, \quad n = 2} \quad \text{ili} \quad \boldsymbol{m = 2, \quad n = 1}$$

dobićemo druga dva, međusobno jednaka, tona

$$u_{12} = N_{12} \sin(\omega_{12} t + \alpha_{12}) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a}$$

$$u_{21} = N_{21} \sin(\omega_{21} t + \alpha_{21}) \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \,,$$

frekvencije $\omega_{21} = \omega_{12} = \alpha\sqrt{5}$.

Čvorne linije ovih prostih oscilacija su redom:

$$y = \frac{a}{2} \quad \text{ili} \quad x = \frac{a}{2}.$$

Pored oscilacija u_{12} i u_{21} postoji još beskonačno mnogo drugih oscilacija te iste frekvencije ω_{12} koje se dobijaju iz njih kao njihova linearna kombinacija. Uzmemo li, radi jednostavnosti $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$, i uvedemo li oznake $\omega = \omega_{12} = \omega_{21}$, $N_1 = N_{12}$ i $N_2 = N_{21}$, dobićemo oscilacije oblika

$$\left[N_1 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{2\pi y}{a} + N_2 \sin\frac{2\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{a} \right] \sin \omega t .$$

Za $N_1 = N_2$, čvorne linije će biti određene jednačinom

$$\sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{2\pi y}{a} + \sin\frac{2\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{a} =$$

$$= 2\sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{a} \left(\cos\frac{\pi x}{a} + \cos\frac{\pi y}{a} \right) = 0 .$$

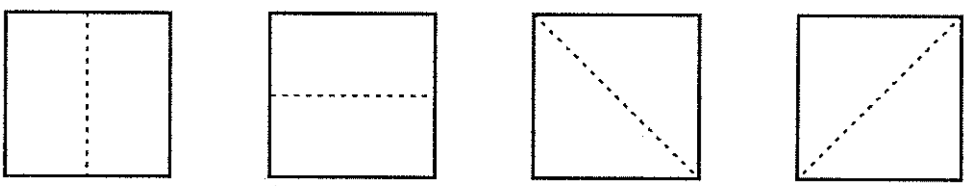
Rješavanjem ove jednačine dobijamo čvorne linije

$$x + y = a .$$

Za $N_2 = -N_1$ bi se, na isti način, dobile čvorne linije

$$x - y = a .$$

Jednostavniji slučajevi čvornih linija frekvencije $\omega = \alpha\sqrt{5}$, predstavljeni su iscrtkano na slici 5.



$N_1 = 0$ $N_2 = 0$ $N_2 = N_1$ $N_2 = -N_1$

(sl. 5)

Složeniji slučajevi čvornih linija iste frekvencije dobijaju se za $N_2 \neq \pm N_1$ i $N_1, N_2 \neq 0$. Sve one su određene jednačinom

$$N_2 \cos\frac{\pi x}{a} + N_1 \cos\frac{\pi y}{a} = 0 .$$

Uzimajući $m = 2$, $n = 2$, dobićemo jedinstveni ton frekvencije $\omega_{22} = \alpha\sqrt{8}$, čije su čvorne linije (sl. 6) određene sa

$$x = \frac{a}{2}, \qquad y = \frac{a}{2} .$$

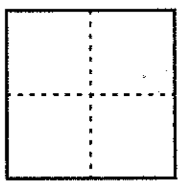
Sljedeći slučaj

$$m = 1,\ n = 3; \qquad m = 3,\ n = 1$$

nas opet dovodi do beskonačnog broja oscilacija iste frekvencije

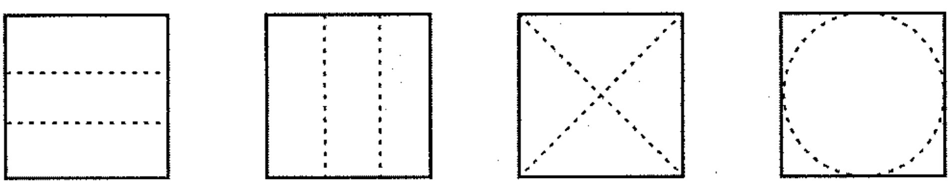
$$\omega_{13} = \omega_{31} = \alpha\sqrt{10}.$$

Analogno slučaju čvornih linija frekvencije $\omega_{12} = \omega_{21} = \alpha\sqrt{5}$ (sl. 5), predstavljeni su, na slici 6, odnosno 7, neki od jednostavnijih slučajeva čvornih linija frekvencije $\omega = \alpha\sqrt{8}$, odnosno $\omega = \alpha\sqrt{10}$.



$\omega = \alpha\sqrt{8}$

(sl. 6)



$N_1 = 0$ $\qquad$ $N_2 = 0$ $\qquad$ $N_2 = -N_1$ $\qquad$ $N_2 = N_1$

(sl. 7)

3.2. Slobodne oscilacije kvadratne membrane

Homogena kvadratna membrana koja u početnom momentu $t = 0$ ima oblik $Axy(b-x)(b-y)$, gdje je A dati pozitivan broj, počela je da osciluje bez početne brzine. Ispitati slobodne oscilacije membrane učvršćene na konturi.

Rješenje: Da bismo ispitali slobodne oscilacije ove membrane treba rješiti odgovarajući rubni problem, tj. parcijalnu diferencijalnu jednačinu poznatu kao jednačina malih slobodnih oscilacija ravne homogene membrane koja glasi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1}$$

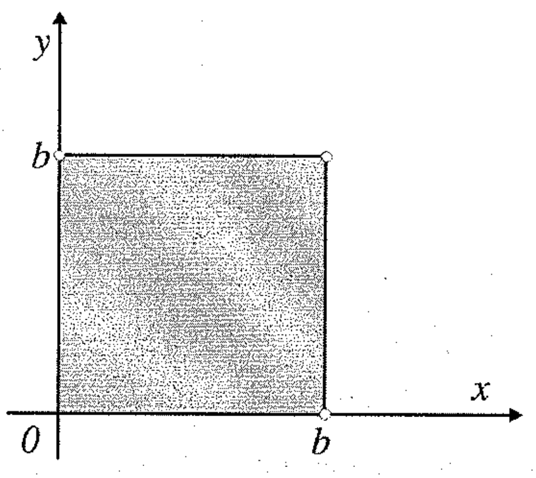
uz rubne uslove:

$$\left.\begin{array}{ll} u(0,y,t) = 0 & u(b,y,t) = 0 \\ u(x,0,t) = 0 & u(x,b,t) = 0 \end{array}\right\} \tag{2}$$

i početne uslove:

$$\left.\begin{array}{l} u(x,y,0) = Axy(b-x)(b-y) \\ \dfrac{\partial u(x,y,0)}{\partial t} = 0. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Dakle, treba rješiti problem (1) + (2) + (3).



(sl. 8)

Ovdje je sa $u(x,y,t)$ označena udaljenost tačke (x,y) membrane od ravnotežnog položaja, u momentu t, dok je $a \neq 0$ konstanta koja zavisi od osobina elastičnosti membrane.

Ovaj problem ima jedinstveno rješenje.

Jednačinu (1) rješavaćemo metodom razdvajanja promjenljivih, tj. tražeći rješenje u obliku

$$u(x,y,t) = v(x,y)\,T(t). \tag{4}$$

Najprije ćemo koristiti samo rubne uslove (2), dok ćemo početne uslove (3) koristiti kasnije.

Ako (4) uvrstimo u (1), rubni problem (1) + (2) će se svesti na dva problema. Naime, dobićemo

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) T = \frac{1}{a^2}\, v T'',$$

odakle, razdvajanjem promjenljivih, izlazi

$$\frac{\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}}{v} = \frac{1}{a^2}\,\frac{T''}{T} = -\lambda,$$

tj. dobijamo dvije jednačine :

$$T'' + a^2\lambda T = 0 \quad \text{i} \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \lambda v = 0, \tag{6}$$

uz rubne uslove za funkciju $v(x,y)$:

$$\left.\begin{array}{ll} v(0,y) = 0, & v(b,y) = 0 \\ v(x,0) = 0\,, & v(x,b) = 0\,. \end{array}\right\} \tag{6'}$$

Jednačina (5) ima opšte rješenje

$$T = C_1 \cos(at\sqrt{\lambda}) + C_2 \sin(at\sqrt{\lambda}).$$

Sada treba da rješimo rubni problem (6) + (6'). I ovdje ćemo upotrijebiti metod razdvajanja promjenljivih. Stavimo li u (6)

$$v(x,y) = X(x)\,Y(y),$$

dobićemo

$$X''Y + XY'' + \lambda XY = 0,$$

odnosno

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \lambda = 0.$$

Ako uzmemo $\lambda = \mu + \nu$, posljednju jednačinu možemo pisati u obliku

$$\left(\frac{X''}{X} + \mu\right) + \left(\frac{Y''}{Y} + \nu\right) = 0,$$

odakle dobijamo dvije obične diferencijalne jednačine sa odgovarajućim rubnim uslovima koji se dobijaju iz (6'):

$$X'' + \mu X = 0, \qquad X(0) = X(b) = 0 \tag{7}$$

$$Y'' + \nu Y = 0, \qquad Y(0) = Y(b) = 0. \tag{8}$$

Sopstvene vrijednosti i sopstvene funkcije rubnih problema (7) i (8) će očigledno biti:

$$\mu_n = (n\pi/b)^2 \quad \text{i} \quad \nu_m = (m\pi/b)^2 \tag{9}$$

odnosno

$$X_n(x) = \sin(n\pi x/b) \quad \text{i} \quad Y_m(y) = \sin(m\pi y/b), \tag{9'}$$

za $n, m = 1, 2, \dots$.

Odavde dobivamo sopstvene vrijednosti rubnog problema (6) + (6') :

$$\lambda_{nm} = \mu_n + \nu_m = (n^2 + m^2)(\pi/b)^2, \quad n, m = 1, 2, \dots . \tag{10}$$

i odgovarajuće sopstvene funkcije

$$v_{nm}(x,y) = A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right), \qquad n, m = 1, 2, \dots, \tag{10'}$$

tog rubnog problema.

Da bismo dobili normirane sopstvene funkcije, moramo uzeti

$$A_{nm} = \frac{2}{\sqrt{b \cdot b}} = \frac{2}{b}, \quad n, m = 1, 2, \dots .$$

Naime, tada će biti

$$v_{nm}(x,y) = \frac{2}{b}\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right), \quad n,\ m = 1, 2, \dots .$$

tako da ćemo imati:

$$\int_0^b\int_0^b v_{nm}^2(x,y)\,dx\,dy = \frac{4}{b^2}\int_0^b \sin^2\left(\frac{n\pi x}{b}\right)dx\int_0^b \sin^2\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dy = 1 .$$

Sada možemo napisati sopstvene funkcije rubnog problema (1) + (2) u obliku:

$$u_{nm}(x,y,t) = \frac{2}{b}\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\left[M_{nm}\cos(at\sqrt{\lambda_{nm}}) + N_{nm}\sin(at\sqrt{\lambda_{nm}})\right].$$

Superpozicijom ovih rješenja dobićemo opšte rješenje našeg problema (1) + (2):

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[M_{nm}\cos(at\sqrt{\lambda_{nm}}) + N_{nm}\sin(at\sqrt{\lambda_{nm}})\right]\cdot$$

$$\cdot\ \frac{2}{b}\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\cdot\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right), \tag{11}$$

gdje su M_{nm} i N_{nm} proizvoljne konstante.
Iz (11) nalazimo

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[-a\sqrt{\lambda_{nm}}M_{nm}\sin(at\sqrt{\lambda_{nm}}) + a\sqrt{\lambda_{nm}}N_{nm}\cos(at\sqrt{\lambda_{nm}})\right]\cdot$$

$$\cdot\ \frac{2}{b}\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\cdot\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right). \tag{11'}$$

Naš problem (1) + (2) + (3) biće upotpunosti rješen tek kad odredimo konstante M_{nm} i N_{nm}. Njih ćemo odrediti iz (11) i (11'), koristeći početne uslove (3). Stavljajući, u (11) i (11'), $t = 0$ dobijamo:

$$Axy(b-x)(b-y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}M_{nm}\frac{2}{b}\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right),$$

$$M_{nm} = \frac{2A}{b}\int_0^b\int_0^b xy(b-x)(b-y)\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dx\,dy =$$

$$= \frac{2A}{b}\int_0^b x(b-x)\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)dx\int_0^b y(b-y)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dy$$

i

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a\sqrt{\lambda_{nm}}\, N_{nm}\,\frac{2}{b}\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right).$$

Iz ove posljednje jednakosti se, odmah, vidi da je

$$N_{nm} = 0, \qquad n, m = 1, 2, \ldots , \tag{12}$$

jer su Fourierovi koeficijenti od "0" jednaki nuli.

Ostalo je još da odredimo konstante M_{nm}.

Kako je:

$$\int_0^b x(b-x)\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)dx = \left[1-(-1)^n\right]\frac{2b^3}{(n\pi)^3}$$

i

$$\int_0^b y(b-y)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dy = \left[1-(-1)^m\right]\frac{2b^3}{(m\pi)^3} \ ,$$

biće

$$M_{nm} = \frac{2A}{b}\left[1-(-1)^n\right]\frac{2b^3}{(n\pi)^3}\left[1-(-1)^m\right]\frac{2b^3}{(m\pi)^3} \ .$$

Dakle,

$$M_{2k,2r} = 0, \qquad k, r = 1, 2, 3, \ldots \ \text{ i}$$

$$M_{2n+1,2m+1} = \frac{2A}{b}\,2\frac{2b^3}{\left[(2n+1)\pi\right]^3}\cdot 2\,\frac{2b^3}{\left[(2m+1)\pi\right]^3} \ ,$$

tj.

$$M_{2n+1,2m+1} = \frac{32Ab^5}{\pi^6}\,\frac{1}{(2n+1)^3\,(2m+1)^3}\ , \quad m,n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{13}$$

Ako (10), (12) i (13) uvrstimo u (11), nakon jednostavnog računa dobićemo

$$u(x,y,t) = \frac{64\,Ab^4}{\pi^6} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left[\sin(2n+1)\pi x/b\right]\cdot\left[\sin(2m+1)\pi y/b\right]}{(2n+1)^3\,(2m+1)^3}\cdot$$

$$\cdot\cos\left[\sqrt{(2n+1)^2+(2m+1)^2}\;a\pi t/b\right].$$

3.3. Jednačina slobodnih oscilacija kružne membrane

Problem oscilovanja kružne membrane radijusa $r = 1$[1], zategnute duž konture, tako da je pomjeranje na rubu jednako 0, svodi se na rješavanje talasne jednačine koja u polarnim koordinatama glasi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{1}$$

Kažemo da rješenje $u(r,\varphi,t)$, jednačine (1) koje zadovoljava

rubni uslov:

$$u(r,\varphi,t)\big|_{r=1} = 0, \qquad 0 < t < \infty \tag{2}$$

i **početne uslove:**

$$\left.\begin{aligned} u(r,\varphi,t)\big|_{t=0} &= f(r,\varphi) \\ \frac{\partial u(r,\varphi,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} &= F(r,\varphi) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

opisuje **slobodne oscilacije kružne membrane učvršćene na rubu.**

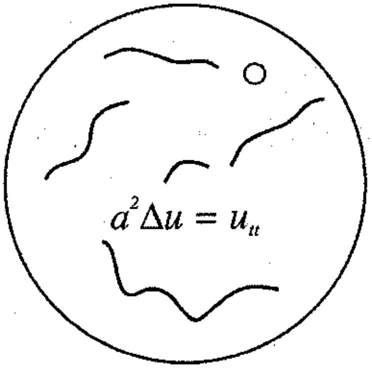
Uzimajući u obzir fizikalni smisao zadatka zaključujemo da rješenje $u(r,\varphi,t)$ mora biti 2π - periodična funkcija, kako u svakoj tački membrane, tako i u njenom centru $r = 0$. To će biti samo ukoliko su konstante razdvajanja pozitivne.

Potražimo rješenje jednačine (1) u obliku proizvoda

$$u(r,\varphi,t) = T(t)\,v(r,\varphi). \tag{4}$$

---

(1) *Radi jednostavnosti možemo uzeti da je radijus kružne membrane $r = 1$.*



(sl. 9)

Vidjećemo da je oblik traženih oscilacija određen funkcijom $v(r,\varphi)$, dok njihov karakter zavisi od faktora $T(t)$.

Ako uvrstimo (4) u talasnu jednačinu (1) dobićemo jednakost koja se može pisati u obliku

$$\frac{\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}}{v}=\frac{T''}{a^2T} \quad (=-\lambda^2), \tag{5}$$

koja se raspada na dvije diferencijalne jednačine:

1. jednačinu harmonijskih oscilacija

$$T''+\lambda^2a^2T=0 \tag{6}$$

koja ima opšte rješenje

$$T(t)=C_1\cos(a\lambda t)+C_2\sin(a\lambda t); \tag{7}$$

2. Helmholtzovu jednačinu:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}+\lambda^2 v=0, \tag{8}$$

koja zadovoljava odgovarajući rubni uslov i početne uslove koje ćemo dobiti uvrštavanjem smjene (4) u (2):

$$u(1,\varphi,t)=v(1,\varphi)\,T(t)=0, \qquad 0<t<\infty,$$

odakle je

$$v(1,\varphi) = 0 .$$

Prema tome, da bismo odredili oblik slobodnih oscilacija membrane potrebno je rješiti rubni problem:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta v + \lambda^2 v = 0 && (u\ krugu) \\ &v(r,\varphi)\big|_{r=1} = 0 && (na\ rubu\ kruga). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Rješenje jednačine (8) ćemo, takođe, tražiti u obliku proizvoda

$$v(r,\varphi) = R(r)\,\phi(\varphi) . \tag{10}$$

Uvrštavanjem (10) u (8) dobijamo izraz koji se može pisati u obliku jednakosti

$$\frac{\phi''(\varphi)}{\phi(\varphi)} = -\frac{r^2 R''(r) + r R'(r) + \lambda^2 r^2 R(r)}{R(r)} \quad (= n^2)$$

u kojoj lijeva strana zavisi samo od φ, a desna samo od r. Pošto su r i φ nezavisni, obje strane moraju biti jednake istoj konstanti (konstanta razdvajanja). To nas dovodi od dvije obične diferencijalne jednačine, i to:

2.1. Besselove jednačine:

$$r^2 R'' + r R' + (\lambda^2 r^2 - n^2) R = 0 \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} &R(r)\big|_{r=1} = 0 \\ &R(0) < \infty && \text{(fizikalno ograničenje)} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

2.2. Jednačine harmonijskih oscilacija

$$\phi'' + n^2 \phi = 0, \tag{13}$$

u kojim je iz fizikalnih razloga, za konstantu razdvajanja uzeto n^2, $n = 0, 1, 2, \dots$, kako bi funkcija $\phi(\varphi)$ bila 2π – periodična. Prema tome, opšte rješenje jednačine (13) biće

$$\phi(\varphi) = a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) . \tag{14}$$

Ranije smo vidjeli ([24], str. 384) da su dva linearno nezavisna rješenja Besselove jednačine **Besselove funkcije prve i druge vrste, *n*-tog reda:**

$$R_1(r) = J_n(\lambda r) \quad \text{i} \quad R_2(r) = K_n(\lambda r).$$

Prema tome, njeno opšte rješenje je oblika

$$R(r) = AJ_n(\lambda r) + BK_n(\lambda r), \tag{15}$$

i zavisi od dva proizvoljna parametra r i λ.

S obzirom da

$$K_n(\lambda r) \to \infty, \quad \text{kad} \quad r \to 0,$$

a prema fizikalnom smislu zadatka $R(r)$ je konačan broj, treba u (15) uzeti $B = 0$. Prema tome, rješenje jednačine (11) biće

$$R(r) = AJ_n(\lambda r), \qquad A \neq 0. \tag{16}$$

Vrijednost λ odredićemo pomoću rubnog uslova

$$R(1) = 0,$$

zanemarujući zasada konstantu A. Uvrštavanjem $r = 1$, u

$$R(r) = J_n(\lambda r),$$

dobićemo transcedentnu jednačinu po λ,

$$J_n(\lambda) = 0 \tag{17}$$

koja ima beskonačno mnogo pozitivnih korijena. Drugim riječima da bi se funkcija $R(r)$ poništavala na rubu kruga radijusa $r = 1$, treba odrediti konstante razdvajanja tako da budu nule jednačine (17). Rješavanjem te jednačine dobićemo

$$\lambda = k_{nm} \qquad (m = 1, 2, \ldots, \; n = 0, 1, 2, \ldots),$$

pri čemu je sa k_{nm} označen m-ti korijen.

U tabeli 2 je navedeno prvih sedam nula za prvih pet Besselovih funkcija $J_n(r)$.

Korijeni jednačine $J_n(r) = 0$					
m	n				
	0	1	2	3	4
1	2,404	3,832	5,135	6,379	7,586
2	5,520	7,016	8,417	9,760	11,064
3	8,654	10,173	11,620	13,017	14,373
4	11,792	13,323	14,798	16,224	17,616
5	14,931	16,470	17,960	19,410	20,827
6	18,076	19,616	21,117	22,583	24,018
7	21,212	22,760	24,270	25,749	27,200

Tabela br. 2

Preostale nule se mogu približno izračunati pomoću formule

$$k_{nm} = \frac{1}{4}\pi(2n-1+4m) - \frac{4n^2-1}{\pi(2n-1+4m)},$$

koja će, za dato n, biti utoliko tačnija što je m veće.

Sada je jasno da pošto znamo korijene k_{nm}, možemo konstruisati rješenja rubnog problema za Helmholtzovu jednačinu (8).

Naime, svojstvenim vrijednostima $\lambda = k_{nm}$ odgovaraju svojstvene funkcije

$$v_{nm}(r,\varphi) = J_n(k_{nm}r)\left[A\cos n\varphi + B\sin n\varphi\right]. \tag{18}$$

Na slici 10 su za različite vrijednosti n i m, predstavljene samo neke od funkcija $v_{nm}(r,\varphi)$, koje, inače, ne zavise od konstanti A i B.

Ove konstante utiču na amplitudu oscilacija i raspored čvornih linija u odnosu na $\varphi = 0$. Svaka funkcija, sama za sebe, predstavlja fundamentalnu oscilaciju kružne membrane frekvencije ω_{nm}, određene sa

$$\omega_{nm} = \frac{k_{nm}\,a}{2\pi}.$$

Ove frekvencije se dobivaju iz rješenja

$$T_{nm}(t) = A\sin(k_{nm}at) + B\cos(k_{nm}at) \tag{7'}$$

jednačine

$$T'' + k_{nm}^2 a^2 T = 0. \qquad (6')$$

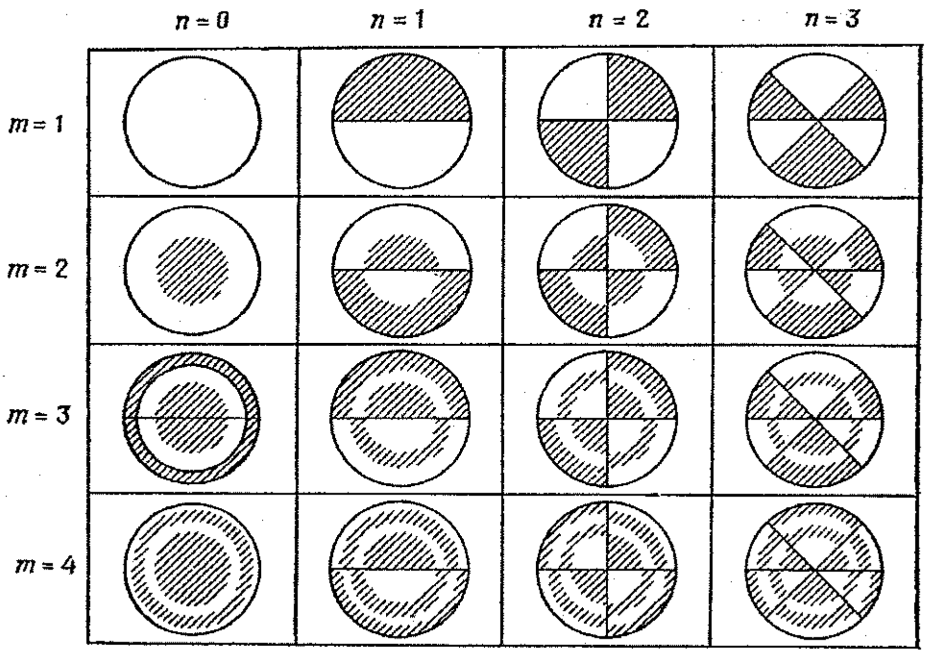
Interesantno je da za razliku od jednodimenzionalnog slučaja odnos frekvencije oscilacija $\nu_{nm}(r,\varphi)$ i frekvencije osnovne oscilacije $\nu_{01}(r,\varphi)$, tj.

$$\frac{\omega_{nm}}{\omega_{01}} = \frac{k_{nm}}{k_{01}}$$

nije cio broj. Osim toga, broj ***m*** se podudara s brojem kružnih čvornih linija frekvencija $\nu_{nm}(r,\varphi)$.

Radijusi tih čvornih linija su određeni sa:

$$\frac{k_{01}}{k_{0m}}, \frac{k_{02}}{k_{0m}}, \frac{k_{03}}{k_{0m}}, \ldots, 1.$$



Čvorne linije za osnovne harmonijske oscilacije kružne membrane (sl. 10)

Ako sada, postupajući saglasno sa (4), svojstvene funkcije $v_{nm}(r,\varphi)$, jednačine (9), označene sa (18), pomnožimo funkcijom vremena $T_{nm}(t)$, koja je rješenje jednačine (6) za $\lambda = k_{nm}$, i potpuno određena sá (7'), dobićemo beskonačno mnogo rješenja jednačine (1), koja zadovoljavaju rubni uslov (2) i imaju oblik:

$$u_{nm}(r,\varphi,t) = \Big\{ \big[A_{nm}\cos(k_{nm}at) + B_{nm}\sin(k_{nm}at)\big]\cos n\varphi + \\ + \big[C_{nm}\cos(k_{nm}at) + B_{nm}\sin(k_{nm}at)\big]\sin n\varphi \Big\} J_n(k_{nm}r).$$

Primjenom principa linearne superpozicije dolazimo do zaključka da je i funkcija

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \big[A_{nm}\cos(k_{nm}at) + B_{nm}\sin(k_{nm}at)\big]\cos n\varphi\, J_n(k_{nm}r) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \big[C_{nm}\cos(k_{nm}at) + D_{nm}\sin(k_{nm}at)\big]\sin n\varphi\, J_n(k_{nm}r) \qquad (19)$$

rješenje rubnog problema (1) + (2).

Konstante A_{nm}, B_{nm}, C_{nm} i D_{nm} ćemo odrediti iz početnih uslova (3).

Naime, ako stavimo $t = 0$, u (19) i uzmemo u obzir početni uslov (3), dobićemo

$$f(r,\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{om}J_o(k_{om}r) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}J_n(k_{nm}r)\cos n\varphi + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{nm}J_n(k_{nm}r)\sin n\varphi, \qquad (20)$$

što predstavlja razvitak 2π – periodične funkcije $f(r,\varphi)$ u Fourier - Besselov red, u intervalu $(0, 2\pi)$. Zbog toga je

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\varphi)\,d\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} A_{om}J_o(k_{om}r), \qquad (21)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}J_n(k_{nm}r), \qquad (22)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm}J_n(k_{nm}r). \qquad (23)$$

Vidimo da se ovdje radi o razvitku proizvoljne funkcije $\phi(r)$ u red po Besselovim funkcijama. Prema tome, koeficijenti A_{om}, A_{nm} i B_{nm} će na osnovu teorije o razvitku funkcije u Fourier – Besselov red (§ 1.2, str. 114) biti određeni sa:

$$A_{om} = \frac{2}{\pi J_{n+1}^2(k_{nm})} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r f(r,\varphi) J_o(k_{nm} r)\, dr\, d\varphi\,, \tag{24}$$

$$A_{nm} = \frac{2}{\pi J_{n+1}^2(k_{nm})} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r f(r,\varphi) J_n(k_{nm} r) \cos n\varphi\, dr\, d\varphi. \tag{25}$$

$$C_{nm} = \frac{2}{\pi J_{n+1}^2(k_{nm})} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r f(r,\varphi) J_n(k_{nm} r) \sin n\varphi\, dr\, d\varphi. \tag{26}$$

Na isti način bismo, ponavljajući analogan postupak za funkciju $F(r,\varphi)$, dobili konstante B_{om}, B_{nm}, D_{nm} .

Za tako određene konstante se može traženo rješenje problema (1) + (2) + (3) pisati u obliku

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} M_{nm} J_n(k_{nm} r) \sin(n\varphi + \psi_{nm}) \sin(k_{nm} a t + \nu_{nm}), \tag{27}$$

ako uvedemo oznake:

$$\begin{aligned} A_{nm} &= M_{nm} \sin\psi_{nm} \sin\nu_{nm} \\ B_{nm} &= M_{nm} \sin\psi_{nm} \cos\nu_{nm} \\ C_{nm} &= M_{nm} \cos\psi_{nm} \sin\nu_{nm} \\ D_{nm} &= M_{nm} \cos\psi_{nm} \cos\nu_{nm} \,. \end{aligned}$$

Iz (27) se vidi da se opšte oscilacije kružne membrane sastoje od beskonačno mnogo svojstvenih harmonijskih oscilacija.

3.4. Radijalne oscilacije kružne membrane

Vidjeli smo da je proučavanje slobodnih oscilacija kružne membrane

$$\left\{ (x,y) \mid x^2 + y^2 \le R^2 \right\},$$

učvršćene na konturi, vezano za rješavanje talasne jednačine

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,, \tag{1}$$

uz neke dodatne uslove. U našem slučaju su to bili:

rubni uslov, za $R = 1$

$$u(1,\varphi,t) = 0\,, \tag{2}$$

i početni uslovi, za $t = 0$:

$$\left.\begin{aligned} u(\rho,\varphi,0) &= f(\rho,\varphi) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\rho,\varphi,0) &= F(\rho,\varphi)\,. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Sada ćemo ispitivati one oscilacije kružne membrane kod kojih je, za sve tačke jedne kružnice, pomak isti, tj. pomjeranje tačaka ne zavisi od ugla φ. Takve oscilacije se nazivaju **radijalnim oscilacijama**.

Prema tome, pošto su radijalne oscilacije specijalan slučaj slobodnih oscilacija kružne membrane, za koje je $\varphi = const$, tako da početna funkcija zavisi samo od ρ, ispitivanje radijalnih oscilacija biće vezano za rješavanje rubnog problema:

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1'}$$

$$u(R,0) = 0 \tag{2'}$$

$$\left.\begin{aligned} u(\rho,0) &= f(\rho) \\ \frac{\partial u(\rho,0)}{\partial t} &= F(\rho)\,. \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

S obzirom da se radi o specijalnom slučaju slobodnih oscilacija kružne membrane, postupak rješavanja ovog problema biće potpuno analogan postupku rješavanja prethodnog problema.

Prema tome, tražićemo rješenje jednačine (1′) u obliku

$$u(\rho,t) = T(t)\,V(\rho)\,. \tag{4}$$

i dobiti jednačinu

$$\frac{V''(\rho) + \rho^{-1}V'(\rho)}{V(\rho)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} \quad (= -\lambda^2) \tag{5}$$

koja, zbog nezavisnosti ρ i t, ima smisla samo ako su joj obje strane jednake istoj konstanti. Saglasno tome, jednačina (5) se raspada na dvije obične diferencijalne jednačine, i to:

1. Besselovu jednačinu:

$$V'' + \frac{1}{\rho}V' + \lambda^2 V = 0 \quad \text{i} \tag{6}$$

2. jednačinu harmonijskih oscilacija:

$$T'' + \lambda^2 a^2 T = 0. \tag{7}$$

Na isti način, kao u prethodnom slučaju, zaključujemo da će, zbog $K_o(\lambda\rho) \to \infty$, kada $\rho \to 0$, rješenje jednačine (6) biti

$$V(\rho) = C_1 J_o(\lambda R), \qquad C_1 \neq 0, \tag{8}$$

kao i da, da bi bio zadovoljen rubni uslov (2), mora biti

$$V(R) = C_1 J_o(\lambda R) = 0,$$

odakle, zbog $C_1 \neq 0$, dobijamo jednačinu

$$J_o(\lambda R) = 0, \tag{9}$$

koju treba rješiti po λ. Iz teorije o Besselovim funkcijama je poznato da funkcija $J_o(\mu)$ ima beskonačno, ali prebrojivo mnogo, realnih, pozitivnih nula (str. 138). Ako ih označimo sa $\mu_1, \mu_2, \ldots$, redom, jasno je da će tada korijeni jednačine (9) biti

$$\lambda_n = \frac{\mu_n}{R}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

kao i da rješenja jednačine (7) treba tražiti samo za te λ, tj. među rješenjima jednačine

$$T'' + a^2 \mu_n^2 R^{-2} T = 0. \tag{11}$$

Poznato nam je, od ranije, da je rješenje ove jednačine

$$T_n(t) = a_n \cos\left(a\mu_n t/R\right) + b_n \sin\left(a\mu_n t/R\right), \tag{12}$$

gdje su a_n i b_n proizvoljne konstante. Uvrstimo li, sada, (8), (12) i (10) u (4), zaključićemo da su rješenja problema (1′) + (2′) oblika:

$$u_n(\rho,t) = \left[a_n \cos\left(a\mu_n t/R\right) + b_n \sin\left(a\mu_n t/R\right)\right] J_o\left(\mu_n\rho/R\right) , \quad (13)$$

gdje su a_n i b_n zasada neodređene konstante.

Primjenom principa linearne superpozicije dolazimo do zaključka da je i funkcija

$$u(\rho,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(a\mu_n t/R\right) + b_n \sin\left(a\mu_n t/R\right)\right] J_o\left(\mu_n\rho/R\right), \quad (14)$$

rješenje problema $(1') + (2')$.

Konstante a_n i b_n, koje figurišu u (14), odredimo pomoću početnih uslova $(3')$, tj. razvijanjem datih funkcija $f(\rho)$ i $F(\rho)$ u red po Besselovim funkcijama. Dobićemo

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_o\left(\mu_n\rho/R\right) \quad (15)$$

$$F(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\mu_n b_n}{R} J_o\left(\mu_n\rho/R\right). \quad (16)$$

Izračunavanje koeficijenata a_n i b_n, pomoću formula (15) i (16), je povezano s problemom razvitka date funkcije u beskonačan red po Besselovim funkcijama. Pri tome se koristi, kao poznata, činjenica da su Besselove funkcije ortogonalne, tj. da vrijedi

$$\int_0^R J_o\left(\mu_n\rho/R\right) J_o\left(\mu_k\rho/R\right) \rho\, d\rho = 0, \qquad \text{za } k \neq n. \quad (17)$$

Integracijom, član po član, reda dobivenog iz (15), nakon množenja sa $\rho J_o\left(\mu_k\rho/R\right)$, i primjene relacije ortogonalnosti (17), dobićemo

$$\int_0^R f(\rho) J_o\left(\mu_k\rho/R\right) \rho\, d\rho = a_k \int_0^R J_o^2\left(\mu_k\rho/R\right) \rho\, d\rho .$$

Znači

$$a_n = \frac{\int_0^R f(\rho) J_o\left(\mu_n\rho/R\right) \rho\, d\rho}{\int_0^R J_o^2\left(\mu_n\rho/R\right) \rho\, d\rho} . \quad (18)$$

Na isti način bismo, polazeći od (16), došli do zaključka da je

$$b_n = \frac{R}{a\mu_n} \frac{\int_0^R F(\rho) J_o\left(\mu_n \rho / R\right) \rho \, d\rho}{\int_0^R J_o^2\left(\mu_n \rho / R\right) \rho \, d\rho} . \tag{19}$$

Na kraju zaključimo: rješenje problema (1′) + (2′) + (3′) biće funkcija $u(\rho,t)$, data sa (13) u kojoj su koeficijenti $\boldsymbol{a}_n$ i $\boldsymbol{b}_n$ određeni sa (18) i (19).

Napomena:

U određivanju korijena (nula) Besselovih funkcija (ovdje nula jednačine (9)) pomažu nam tablice i formula za njihovo približno računanje (vidi prethodni zadatak, str. 138).

Umjesto formula (18) i (19) za računanje koeficijenata $\boldsymbol{a}_n$ i $\boldsymbol{b}_n$ mogu se koristiti i formule:

$$a_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R f(\rho) J_o\left(\mu_n \rho / R\right) \rho \, d\rho \tag{18'}$$

$$b_n = \frac{2}{a\mu_n R J_1^2(\mu_n)} \int_0^R F(\rho) J_o\left(\mu_n \rho / R\right) \rho \, d\rho . \tag{19'}$$

Primjer 1. Naći sopstvene oscilacije homogene kružne membrane poluprečnika $R = 1$, učvršćene na konturi ako u početnom momentu ona predstavlja površinu obrtnog paraboloida, a početna brzina joj je jednaka nuli.

Rješenje: Radijalne oscilacije kružne membrane radijusa $R = 1$ određene su, u našem slučaju, prema (18′) i (19′), sa

$$u(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[M_{om} \cos(a\mu_{om} t) + N_{om} \sin(a\mu_{om} t) \right] J_o(r\mu_{om}) , \tag{1}$$

gdje su

$$M_{om} = \frac{2}{J_1^2(\mu_{om})} \int_0^1 r f(r) J_o(r\mu_{om}) \, dr ,$$

$$N_{om} = \frac{2}{a\mu_{om} J_1^2(\mu_{om})} \int_0^1 r F(r) J_o(r\mu_{om}) \, dr ,$$

a μ_{om} pozitivne nule Besselove funkcije $J_o(\mu)$.

Funkcije $f(r)$ i $F(r)$ su određene početnim uslovima

$$u\Big|_{t=0} = f(r), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(r). \tag{2}$$

U našem slučaju je

$$u\Big|_{t=0} = A(1-r^2), \tag{2'}$$

jer je jednačina obrtnog paraboloida sa slike data sa

$$\frac{1}{A}(A-u) = x^2 + y^2,$$

tako da je

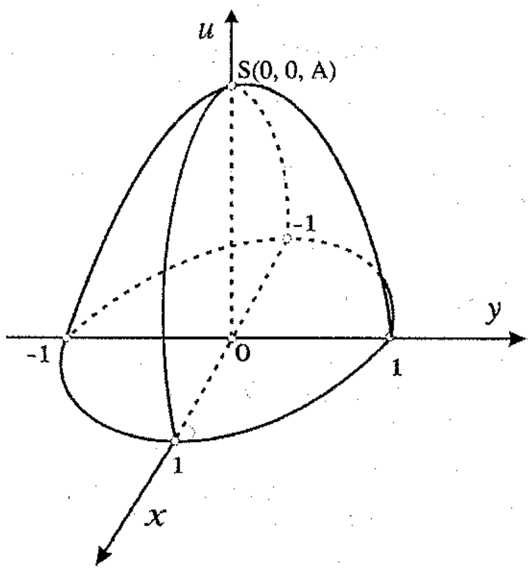
$$u(x,y) = A\left[1-(x^2+y^2)\right], \tag{3}$$

pa funkcija $u(x,y)$, u cilindričnim koorinatama (r, θ, u), ima oblik

$$u(r) = A(1-r^2). \tag{3'}$$

Prema tome, drugi od uslova (2) glasi:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \tag{2''}$$



(sl. 11)

S obzirom da je, prema (2), (2') i (2'')

$$f(r) = A(1-r^2) \quad \text{i}$$
$$F(r) = 0,$$

koeficijenti M_{om} i N_{om}, reda (1), biće određeni sa:

$$M_{om} = \frac{2A}{J_1^2(\mu_{om})} \int_0^1 r(1-r^2) J_o(r\mu_{om})\, dr \quad \text{i}$$
$$N_{om} = 0.$$

Da bismo izračunali koeficijente M_{om} , razbićemo integral, pomoću kojeg su oni izraženi, na dva sabirka:

$$\begin{aligned} M_{om} &= \frac{2A}{J_1^2(\mu_{om})} \int_0^1 r(1-r^2) J_o(r\mu_{om})\, dr = \\ &= \frac{2A}{J_1^2(\mu_{om})} \left\{ \int_0^1 r J_o(r\mu_{om})\, dr - \int_0^1 r^3 J_o(r\mu_{om})\, dr \right\} = \\ &= \frac{2A}{J_1^2(\mu_{om})} (I_1 + I_2). \end{aligned} \tag{4}$$

U njihovom računanju koristićemo sljedeće, dobro poznate, formule:

$$\int_0^x t J_o(t)\, dt = x J_1(x),$$
$$\int_0^x t^3 J_o(t)\, dt = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x) J_1(x)$$

i smjenu $r = t/\mu_{om}$. Dobićemo

$$I_1 = \frac{1}{\mu_{om}^2} \int_0^{\mu_{om}} t J_o(t)\, dt = \frac{1}{\mu_{om}} J_1(\mu_{om})$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\mu_{om}^4} \int_0^{\mu_{om}} t^3 J_o(t)\, dt = \\ &= \frac{2}{\mu_{om}^2} J_0(\mu_{om}) + \frac{1}{\mu_{om}} J_1(\mu_{om}) - \frac{4}{\mu_{om}^3} J_1(\mu_{om}). \end{aligned}$$

Uzimajući u obzir činjenicu da je $J_o(\mu_{om}) = 0$, imaćemo

$$I_1 + I_2 = \frac{4}{\mu_{om}^3} J_1(\mu_{om}).$$

Prema tome,

$$M_{om} = \frac{8A}{\mu_{om}^3 J_1(\mu_{om})},$$

a na osnovu toga će traženo rješenje biti

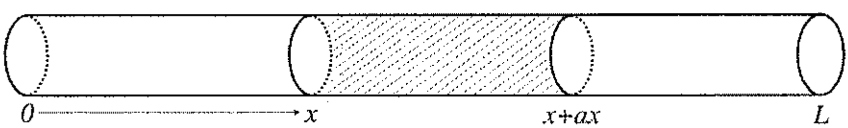
$$u(r,t) = 8A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_o(\mu_{om} r)}{\mu_{om}^3 J_1(\mu_{om})} \cos(a\mu_{om} t).$$

4. Jednačine provođenja toplote

Sada ćemo posmatrati razne tipove jednačina provođenja toplote i dati njihova rješenja, u obliku reda ili integrala, kada su pored jednačine dati i početni i rubni uslovi. Sve ove jednačine su **paraboličkog tipa**.

4.1. Jednačina provođenja toplote u ograničenom štapu

Širenje toplote kroz štap ograničene dužine može se opisati pomoću funkcije $u(x,t)$ koja predstavlja temperaturu u momentu t u tačkama poprečnog presjeka štapa, koje se nalaze na rastojanju x od kraja koji je uzet za koordinatni početak. Da bi temperatura u svim tačkama posmatranog presjeka bila jednaka, u datom momentu t, pretpostavićemo da je štap dovoljno uzak i toplotno izolovan s bočnih strana, tj. da se toplota širi samo duž x-ose.



(sl. 12)

Pomoću zakona fizike se dolazi do zaključka da će funkcija $u(x,t)$, u tom slučaju, biti rješenje parcijalne diferencijalne jednačine paraboličkog tipa

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t) = c\,\rho\,\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{1}$$

u kojoj su $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}$, ρ fizikalni parametri, a $\boldsymbol{f(x,t)}$ toplota koju isijava toplotni izvor u tački $\boldsymbol{x}$, u momentu $\boldsymbol{t}$.

Za homogeni štap su parametri $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}$, ρ konstantni, tako da jednačina (1) prima oblik

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t), \tag{2}$$

gdje je $a^2 = k(c\,\rho)^{-1}$ koeficijent provodljivosti toplote, a $F(x,t) = (c\,\rho)^{-1} f(x,t)$.

Ako ne postoji toplotni izvor, tj. ako je $f(x,t) = 0$, jednačina (2) se svodi na jednačinu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{3}$$

Potražimo ono rješenje $u(x,t)$ parcijalne diferencijalne jednačine (3) koje zadovoljava

početni uslov:

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le L, \tag{4}$$

gdje je $\varphi(x)$ neprekidna funkcija za koju je

$$\varphi(0) = \varphi(L) = 0$$

i rubne (granične) uslove:

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T. \tag{5}$$

Rješenje problema (3) + (4) + (5) ćemo tražiti Fourierovom metodom razdvajanja promjenljivih, tj. u obliku:

$$u(x,t) = X(x)\,T(t). \tag{6}$$

Uvrstimo li (6) u (3), dobićemo

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Vidimo da su ovdje promjenljive razdvojene, tj. lijeva strana jednakosti zavisi samo od t, a desna samo od x. Pošto su promjenljive x i t nezavisne, obje strane ove jednačine moraju biti konstantne. Označimo li tu konstantu sa $-\lambda$, dobićemo jednakost

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda ,$$

koja se raspada na dvije obične diferencijalne jednačine:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad \lambda > 0^{1)} \tag{$*$}$$

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0. \tag{$**$}$$

Opšte rješenje jednačine $(*)$ je

$$X(x) = A\sin(\sqrt{\lambda}\, x) + B\cos(\sqrt{\lambda}\, x), \qquad \text{za } \lambda > 0,$$

gdje su A i B proizvoljne konstante, koje ćemo odrediti pomoću rubnih uslova. Rubni uslovi za jednačinu $(*)$ primaju oblik

$$X(0) = 0 \quad \text{i} \quad X(L) = 0. \tag{5'}$$

Njihovim uvrštavanjem u opšte rješenje jednačine $(*)$, dobijamo

$$B = 0 \quad \text{i} \quad A\sin(\sqrt{\lambda}\, L) = 0,$$

tako da će svojstvene vrijednosti problema $(*)$ + (5') biti

$$\lambda_n = \left(n\pi/L\right)^2, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

i njima odgovarajuće svojstvene funkcije

$$X_n(x) = \sin\left(n\pi x/L\right), \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{7}$$

Za ovako dobivene svojstvene vrijednosti λ_n je rješenje jednačine $(**)$

$$T_n(t) = a_n \exp\left[-\left(n\pi a/L\right)^2 t\right], \tag{8}$$

gdje su a_n proizvoljne konstante.

(1) *U suprotnom bi jednačina* $(*)$, *uz rubni uslov* $X(0) = X(L) = 0$, *imala samo trivijalno rješenje* $X(x) \equiv 0$.

Prema tome, rješenje problema (3) + (5) će biti svaka funkcija oblika:

$$u_n(x,t) = a_n \exp\left[-\left(n\pi a / L\right)^2 t\right] \sin\left(n\pi x / L\right), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

u kojoj su a_n proizvoljne konstante.

S obzirom na linearnost jednačine (3) i homogenost dosad korištenih rubnih uslova biće i funkcija

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t), \tag{10}$$

dobivena superpozicijom funkcija (9), takođe rješenje problema (3) + (5′).

Konstante a_n ćemo odrediti pomoću početnih uslova (4) koji nas dovode do jednakosti:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(n\pi x/L\right). \tag{4'}$$

Odavde vidimo da su konstante a_n Fourierovi koeficijenti razvitka funkcije $\varphi(x)$ u Fourierov red, po sinusima. Prema tome,

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(v) \sin\left(n\pi v/L\right) dv. \tag{11}$$

S obzirom da redovi dobiveni formalnim diferenciranjem reda (10) po x i t, ravnomjerno konvergiraju na skupu $\left\{(x,t) : 0 \le x \le L,\ 0 \le t \le T\right\}$, red (10) se može diferencirati "član po član".

Prema tome, funkcija $u(x,t)$, određena sa (9), (10) i (11), je stvarno rješenje problema (3) + (4) + (5).

Uvrstimo li izraz za a_n u (9), dobićemo

$$u(x,t) = \int_0^L \left[\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-\left(n\pi a / L\right)^2 t\right] \sin\left(n\pi v/L\right) \sin\left(n\pi x/L\right)\right] \varphi(v)\, dv =$$

$$= \int_0^L G(x,v,t)\, \varphi(v)\, dv$$

ako sa $G(x,v,t)$ obilježimo izraz u uglatoj zagradi.

Funkcija $G(x, v, t)$ je poznata kao **funkcija temperaturnog djelovanja** trenutnog izvora toplote.

4.2. Jednačina provođenja toplote u neograničenom štapu

Matematički problem provođenja toplote kroz neograničeni štap svodi se na rješavanje jednačine paraboličkog tipa

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

čije rješenje $u(x,t)$ treba da zadovoljava početni uslov

$$u(x,0) = f(x), \qquad -\infty < x < \infty, \tag{2}$$

u kojem je $f(x)$ data funkcija.

Rješenje jednačine (1) ćemo tražiti u obliku

$$u(x,t) = T(t)\cos b(x-a), \tag{3}$$

gdje su $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ konstante, a $\boldsymbol{T}$ zasad neodređena funkcija od $\boldsymbol{t}$, odstupajući pri tome donekle od uobičajenog metoda da se rješenje traži u obliku $u(x,t) = T(t)X(x)$, gdje su i $T(t)$ i $X(x)$ neodređene funkcije. Iz (3), diferenciranjem, dobijamo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= T'\cos b(x-a) \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= -T\, b\sin b(x-a) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -T\, b^2 \cos b(x-a). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ako uvrstimo (4) u (1), dobićemo jednačinu

$$T' = -k^2 b^2 T,$$

čije je rješenje

$$T(t) = \exp\left(-k^2 b^2 t\right),$$

u kojem je za konstantu integracije uzeta jedinica.

Prema tome, dobili smo rješenje jednačine (1) u obliku

$$u(x,t) = \exp(-k^2 b^2 t)\cos b(x-a).$$

Na osnovu principa linearne superpozicije, jasno je da će i

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(a,b) e^{-k^2 b^2 t} \cos b(x-a)\, da\, db\,, \tag{5}$$

biti rješenje jednačine (1), gdje je F proizvoljna funkcija.
Uzmemo li $F(a,b) = G(a)$, iz (5) ćemo dobiti

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(a)\, da \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-k^2 b^2 t)\cos b(x-a)\, db\,.$$

Odavde, korištenjem rezultata

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-k^2 b^2 t)\cos b(x-a)\, db = \frac{\sqrt{\pi}}{k\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{4k^2 t}\right),$$

dobijamo

$$u(x,t) = \frac{\sqrt{\pi}}{k\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(a) \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{4k^2 t}\right) da\,. \tag{6}$$

Ako uvrstimo $\dfrac{a-x}{2k\sqrt{t}} = \xi$ u (6), dobićemo

$$u(\xi, t) = 2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x + 2k\xi\sqrt{t}) e^{-\xi^2}\, d\xi\,. \tag{7}$$

Zahtjev da (7) zadovoljava početni uslov (2) će nas dovesti do zaključka da je tada

$$f(x) = 2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) e^{-\xi^2}\, d\xi\,,$$

odakle, uzimajući u obzir da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi = \sqrt{\pi}\,,$$

dobijamo

$$G(x) = \frac{1}{2\pi} f(x)\,.$$

Prema tome, rješenje problema (1) + (2) je dato sa

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + 2k\xi\sqrt{t})\, e^{-\xi^2}\, d\xi .$$

4.3. Jednačina provođenja toplote u poluograničenom štapu

Ovaj problem se svodi na rješavanje jednačine

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (x \geq 0,\ t \geq 0), \tag{1}$$

s početnim uslovom

$$u(x,0) = f(x) \qquad (x \geq 0), \tag{2}$$

gdje je f poznata funkcija, i **rubnim uslovom**

$$u(0,t) = 0 \qquad (t \geq 0). \tag{3}$$

Potražimo rješenje u obliku

$$u(x,t) = e^{-bt} \sin ax , \tag{4}$$

gdje su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ konstante. Diferenciranjem izraza (4), dobijamo izvode

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -b e^{-bt} \sin ax, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= a e^{-bt} \cos ax, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -a^2 e^{-bt} \sin ax. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Njihovim uvrštavanjem u (1) dobićemo

$$b = (ak)^2 ,$$

tako da je rješenje jednačine (1), koje smo tražili u obliku (4)

$$u(x,t) = e^{-(ak)^2 t} \sin a x.$$

Prema principu linearne superpozicije, rješenje jednačine (1) će biti i

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} F(a)\, e^{-(ak)^2 t} \sin ax\, da , \tag{6}$$

gdje je F proizvoljna funkcija.

Očigledno ono zadovoljava i rubni uslov (3).

Da bismo obezbjedili da i uslov (2) bude zadovoljen, uvrstimo (6) u (2). Dobićemo

$$f(x) = \int_0^{+\infty} F(a)\sin ax\, da\,,$$

odakle, koristeći teoriju Fourierovih integrala, dobijamo

$$F(a) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x)\sin ax\, dx\,. \tag{7}$$

Prema tome, rješenje problema (1) + (2) + (3) je dato sa (6), gdje je funkcija F određena sa (7).

4.4. Provođenje toplote u dvodimenzionalnom prostoru

Proces širenja toplote, u ploči $(D) = \{(x,y) \mid 0 < x < a,\ 0 < y < b\}$, se može opisati funkcijom $u(x,y,t)$ koja pokazuje temperaturu u tački (x,y) ploče, u trenutku t. Primjenom fizikalnih zakona se pokazuje da je funkcija $u(x,y,t)$ rješenje parcijalne diferencijalne jednačine hiperboličkog tipa

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{1}$$

u kojoj je a^2 koeficijent temperaturne provodljivosti. U slučaju kada je ploča napravljena od homogenog materijala $a^2 = const$.

Jednačina (1) je poznata kao **jednačina provođenja toplote kroz ploču**. Njeno fundamentalno rješenje je eksponencijalna funkcija

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^2}\exp\left[-\left((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right)/4a^2t\right]. \tag{2}$$

Pokazuje se da je, za po dijelovima neprekidnu i ograničenu funkciju $\varphi(x,y)$, i funkcija

$$u(x,y,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,y,\xi,\eta,t)\,\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \tag{3}$$

rješenje jednačine (1) i da zadovoljava početni uslov

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y)\,.$$

Osim toga, u je ograničena funkcija, neprekidna u tačkama neprekidnosti funkcije $\varphi(x,y)$.

Kao ilustraciju rješavanja jednačine toplotne provodljivosti u dvodimenzionalnom prostoru navešćemo sljedeći primjer:

Primjer 1. Riješiti problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \quad t>0 \qquad (k=const) \tag{1}$$

provođenja toplote kroz homogenu ploču

$$(D): \quad 0<x<a, \ 0<y<b,$$

tražeći, pri tome, ono rješenje $u(x,y,t)$ koje zadovoljava sljedeće **rubne uslove:**

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{ll} u(0,y,t) & = 0 \\ \dfrac{\partial u(a,y,t)}{\partial x} & = 0 \end{array}\right\} \quad 0<y<b, \ t>0 \\ \left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u(x,0,t)}{\partial y} & = 0 \\ \dfrac{\partial u(x,b,t)}{\partial y} & = 0 \end{array}\right\} \quad 0<x<a, \ t>0 \end{array}\right\} \tag{1'}$$

i **početni uslov:**

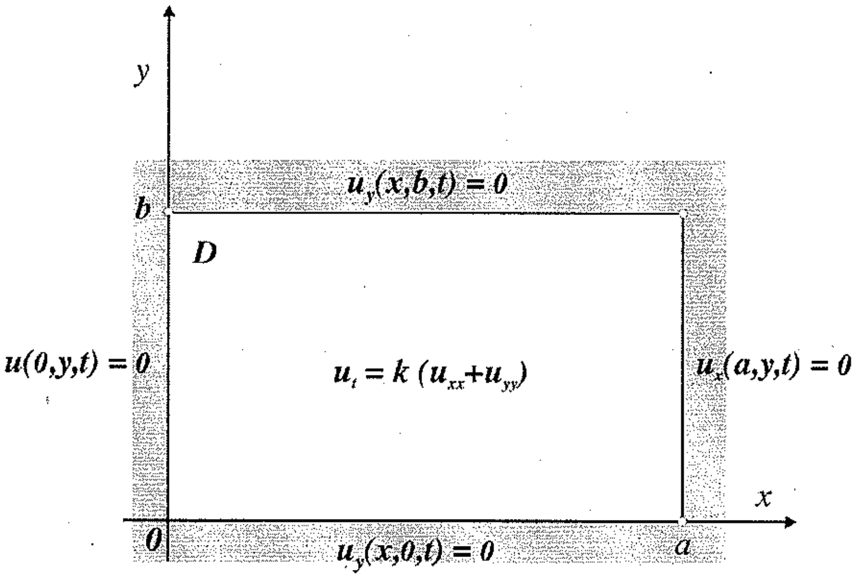
$$u(x,y,0)=x+y, \quad 0<x<a, \ 0<y<b. \tag{1''}$$

Rješenje: Na slici 13 je prikazan tipičan unutrašnji problem provođenja toplote za pravougaonik.

U ovom zadatku je temperatura $u(x,y,t)$ na rubu pravougaonika $x=0, \quad 0<y<b$, jednaka nuli, dok će proces širenja toplote kroz datu pravougaonu ploču:

$$D=\{(x,y) \ : \ 0<x<a, \ 0<y<b\},$$

u bilo kom trenutku $0<t<\infty$, biti određen parcijalnom diferencijalnom jednačinom (1) i rubnim uslovima (1').



(sl. 13)

Da bismo rješili rubni problem (1) + (1'), sa početnim uslovom (1''), poslužićemo se metodom razdvajanja promjenljivih, znači tražiti rješenje u obliku

$$u(x,y,t) = \psi(t)\,\phi(x,y). \tag{2}$$

Stavimo li (2) u (1), dobićemo

$$\frac{1}{k}\,\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \left[\frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial y^2}\right]\frac{1}{\phi} = -\lambda\,.$$

Odavde dobijamo dvije diferencijalne jednačine:

$$\psi'(t) + k\lambda\,\psi(t) = 0, \qquad t > 0 \tag{3}$$

i

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \lambda\phi = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \tag{4}$$

uz rubne uslove

$$\left.\begin{aligned} \phi(0,y) &= 0, \quad 0 < y < b \\ \frac{\partial \phi(a,y)}{\partial x} &= 0, \quad 0 < y < b \\ \frac{\partial \phi(x,0)}{\partial y} &= 0, \quad 0 < x < a \\ \frac{\partial \phi(x,b)}{\partial y} &= 0, \quad 0 < x < a. \end{aligned}\right\} \tag{4'}$$

Time se rubni problem (1) + (1') sveo na rubni problem (4) + (4') koji je jednostavniji. I ovdje ćemo primjeniti metod razdvajanja promjenljivih, tj. tražiti rješenje u obliku

$$\phi(x,y) = X(x)\,Y(y). \tag{5}$$

Ako ovo uvrstimo u jednačinu (4), dobićemo

$$X''Y + XY'' + \lambda XY = 0, \quad \text{tj.}$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \lambda = 0.$$

Stavimo li $\lambda = \mu + \nu$, dobićemo

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\mu - \nu, \qquad \text{tj.}$$

$$\frac{X''}{X} = -\mu, \quad \frac{Y''}{Y} = -\nu.$$

Tako će se rubni problem (4) + (4') raspasti na dva rubna problema: jednačinu

$$X'' + \mu X = 0 \tag{6}$$

s rubnim uslovima:

$$\left.\begin{aligned} X(0) &= 0 \\ X'(a) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{6'}$$

i jednačinu

$$Y'' + \nu Y = 0 \tag{7}$$

s rubnim uslovima:

$$\left.\begin{aligned} Y'(0) &= 0 \\ Y'(b) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7'}$$

Opšte rješenje jednačine (6) ima oblik

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\mu}x) + B\sin(\sqrt{\mu}x).$$

Odavde je

$$X'(x) = -A\sqrt{\mu}\sin(\sqrt{\mu}x) + B\sqrt{\mu}\cos(\sqrt{\mu}x).$$

Kako je, prema (6′)

$$X(0) = 0, \quad \text{tj.} \quad A = 0,$$

ostaje:

$$\begin{aligned} X(x) &= B\sin(\sqrt{\mu}x) \\ X'(x) &= B\sqrt{\mu}\cos(\sqrt{\mu}x). \end{aligned}$$

S obzirom da, prema (6′), treba da bude

$$X'(a) = 0, \quad \text{tj.} \quad B\sqrt{\mu}\cos(\sqrt{\mu}\,a) = 0,$$

dobijamo

$$\sqrt{\mu}\,a = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

znači

$$\mu_m = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{a^2}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots . \tag{8}$$

Sopstvene vrijednosti rubnog problema (6) + (6′) date su sa (8), a odgovarajuće im sopstvene funkcije imaju oblik

$$X_m(x) = \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{a}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots . \tag{9}$$

Sada ćemo rješiti rubni problem (7) + (7′). Opšte rješenje jednačine (7) ima oblik

$$Y(y) = C\cos(\sqrt{\nu}y) + D\sin(\sqrt{\nu}y),$$

a odavde je

$$Y'(y) = -C\sqrt{\nu}\sin(\sqrt{\nu}y) + D\sqrt{\nu}\cos(\sqrt{\nu}y).$$

Na osnovu (7′) je

$$Y'(0) = 0, \quad \text{tj.} \quad D = 0,$$

tako da je

$$Y(y) = C\cos(\sqrt{\nu}y),$$

$$Y'(y) = -C\sqrt{\nu}\sin(\sqrt{\nu}y).$$

Dalje

$$Y'(b) = 0, \quad \text{povlači} \quad \sin(\sqrt{\nu}b) = 0,$$

odakle slijedi

$$\sqrt{\nu}b = n\pi, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

odnosno

$$\nu_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{10}$$

Sa (10) su određene sopstvene vrijednosti rubnog problema (7) + (7′), a odgovarajuće im sopstvene funkcije su

$$Y_n(y) = \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{11}$$

S obzirom na (5) i činjenicu da je $\lambda = \mu + \nu$, dobivamo sopstvene vrijednosti rubnog problema (4) + (4′)

$$\lambda_{mn} = \left[\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right]\pi^2, \tag{12}$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

i odgovarajuće im sopstvene funkcije

$$\phi_{mn}(x,y) = X_m(x)Y_n(y) = \sin\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{a}\right]\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \tag{13}$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Prema tome, opšte rješenje jednačine (3), u kojoj moramo uzeti da je $\lambda = \lambda_{mn}$, jer rubni problem (4) + (4′) nema rješenje za svako λ, već samo za $\lambda = \lambda_{mn}$, glasi

$$\psi(t) = C \exp(-k\lambda t),$$

odnosno

$$\psi_{mn}(t) = C_{mn} \exp(-k\lambda_{mn} t), \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{14}$$

Dakle, sopstvene funkcije rubnog problema (1) + (1′) su

$$u_{mn}(x,y,t) = C_{mn} \exp(-k\lambda_{mn} t) \sin\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{a}\right] \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \tag{15}$$

gdje su λ_{mn} dati sa (12). Superpozicijom rješenja (15), dobićemo funkciju

$$u(x,y,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \exp(-k\lambda_{mn} t) \sin\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{a}\right] \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{16}$$

koja je, takođe, rješenje tog problema. Koeficijenti C_{mn} su zasada neodređene konstante, koje ćemo odrediti pomoću početnog uslova (1″), tj. iz jednakosti

$$x + y = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{a}\right] \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \tag{17}$$

Ako jednakost (17) pomnožimo sa

$$\phi_{mn}(x,y) = \sin\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{a}\right] \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

i integrišemo, član po član, dobićemo

$$C_{mn} = \frac{\iint\limits_D (x+y)\, \Phi_{mn}(x,y)\, dx\, dy}{\iint\limits_D \left[\Phi_{mn}(x,y)\right]^2 dx\, dy}.$$

S obzirom da je

$$\iint\limits_D \left[\phi_{mn}(x,y)\right]^2 dx\, dy = \int_0^a \sin^2\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{a}\right] dx \int_0^b \cos^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy = \frac{ab}{4},$$

biće

$$C_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b (x+y)\sin\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{a}\right]\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dx\,dy =$$

$$= \frac{4}{ab}\left[\int_0^a x\sin\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{a}\right]dx\int_0^b \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dy + \right.$$

$$\left. + \int_0^a \sin\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{a}\right]dx\int_0^b y\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dy\right]$$

i konačno

$$C_{mn} = \frac{4b\left[(-1)^n-1\right]}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 n^2\pi^3}, \qquad m=0,1,2,\dots,\ n=1,2,\dots. \tag{18}$$

Odavde je očigledno, za:

$$\left.\begin{aligned} n &= 2k, & C_{m2k} &= 0 \\ n &= 2k+1, & C_{m2k+1} &= \frac{b}{(2m+1)(2n+1)^2\pi^3} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$m=0,1,2,\dots,\ n=0,1,2,\dots.$$

Konačno, rješenje rubnog problema (1) + (1′) s početnim uslovom (1″) je, prema (17) i (19), funkcija

$$u(x,y,t) = -\frac{16b}{\pi^3}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)(2n+1)^2}\exp\left\{-\left[\left(\frac{2m+1}{2a}\right)^2+\left(\frac{2n+1}{b}\right)^2\right]k\pi^2 t\right\}\cdot$$

$$\cdot\sin\left[(2m+1)\pi x/2a\right]\cos\left[(2n+1)\pi y/b\right].$$

5. Laplaceov operator. Laplaceova jednačina.

Diferencijalni operator drugog reda

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1}$$

nazivamo **Laplaceovim operatorom** ili **laplasianom** i on je, vjerovatno, najznačajniji operator matematičke fizike.

U najvažnijim koordinatnim sistemima dvo– i tro– dimenzionalnog prostora, laplasian izgleda ovako

u dvodimenzionalnom prostoru:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \text{(u pravouglim koordinatama)}$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \qquad \text{(u polarnim koordinatama)}$$

u trodimenzionalnom prostoru:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad \text{(u pravouglim koordinatama)}$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad \text{(u cilindričnim koordinatama)}$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{ctg\,\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

(u sfernim koordinatama)

Laplasian se može smatrati poopštenim izvodom, izvoda drugog reda, funkcije jedne promjenljive, na višedimenzionalni slučaj.

Jednačina

$$\Delta u = 0 , \tag{2}$$

u kojoj je u nepoznata funkcija, naziva se **Laplaceovom jednačinom**.

Laplaceova jednačina ima beskonačno mnogo rješenja. Rješava se na isti način kao i prethodno rješavani problemi matematičke fizike, primjenom metode razdvajanja promjenljivih, što ćemo vidjeti na primjerima.

Recimo još da se svaka funkcija koja je neprekidna i ima neprekidne izvode prvog i drugog reda, u nekoj oblasti D, i pored toga, zadovoljava Laplaceovu jednačinu u toj oblasti, naziva **harmonijskom funkcijom.**

Pokazuje se da je funkcija

$$u(x,y,z) = \frac{1}{r} , \quad \text{gdje je} \quad r = \sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + (z-z_o)^2} ,$$

harmonijska u svakoj oblasti koja ne sadrži tačku (x_o, y_o, z_o). Funkcija $u = \frac{1}{r}$ se zove **fundamentalnim rješenjem Laplaceove jednačine** (1).

Analogno bi se došlo do zaključka da je i funkcija

$$u(x,y) = \frac{1}{r} , \quad \text{gdje je} \quad r = \sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2} ,$$

harmonijska u svakoj oblasti, koja ne sadrži tačku (x_o, y_o). I ona se zove fundamentalnim rješenjem Laplaceove jednačine u dvodimenzionalnom prostoru.

Dobro je poznata i veza između harmonijskih i analitičkih funkcija:

ako je funkcija

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \qquad z = x + iy \quad (x, y \in R)$$

analitička u nekoj oblasti, tada su njen realni dio $u(x,y)$ i imaginarni dio $v(x,y)$ harmonijske funkcije u toj oblasti.

Vidimo da su za Laplaceov operator jedino u Descartesovom koordinatnom sistemu koeficijenti uz izvode konstantni, što ima za posljedicu da se problemi u drugim koordinatnim sistemima rješavaju teže.

Postavlja se pitanje kakav je smisao Laplaceovog operatora i u kakvom je odnosu suma tri parcijalna izvoda drugog reda prema zakonima prirode?

Odgovor na postavljeno pitanje je povezan sa činjenicom da laplasijan funkcije omogućava da se izvrši procjena funkcije u nekoj tački pomoću vrijednosti koje ona prima u susjednim tačkama.

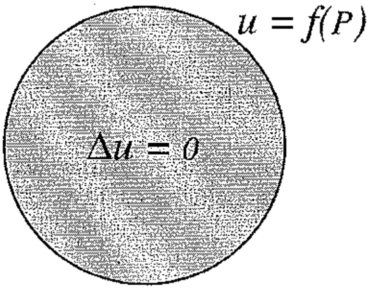
Prema tome, može se odrediti rješenje jednačine u nekoj oblasti prostora koje na rubu oblasti prima unaprijed zadane vrijednosti.

Tako se, u vezi s Laplaceovom jednačinom, mogu formulisati sljedeći problemi:

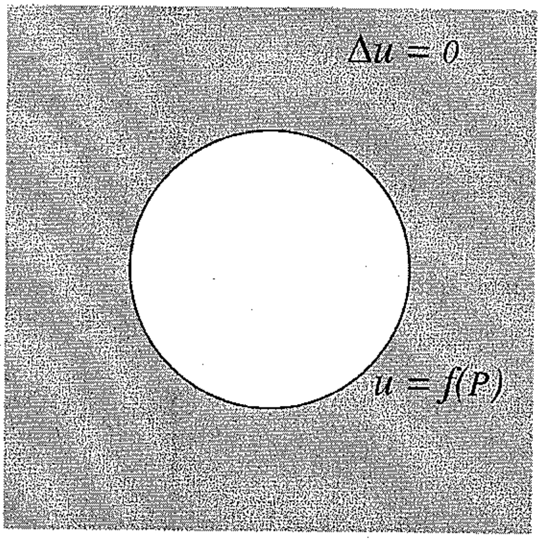
1° **Unutrašnji Dirichletov problem** kojim se traži funkcija $u(x,y,z)$ koja zadovoljava Laplaceovu jednačinu u oblasti $\boldsymbol{D}$ uključujući i površ $\boldsymbol{S}$ koja je ograničava, a podudara se s datom neprekidnom funkcijom $f = f(x,y,z)$ u tačkama $\boldsymbol{P}$ rubne površi $\boldsymbol{S}$, tj. $u(P) = f(P), \quad (\forall\ P \in S)$.

2° **Spoljašnji Dirichletov problem** se definiše analogno, s tim što se u ovom slučaju pretpostavlja da funkcija $u(x,y,z)$ zadovoljava Laplaceovu jednačinu izvan oblasti $\boldsymbol{D}$ i da postoji $\lim u(P)$, kada se tačka P neograničeno udaljava.

Ilustrujmo to slikom u slučaju dvodimenzionalnog prostora



(sl. 14)



(sl. 15)

Sada ćemo navesti primjere rubnih problema za Laplaceovu jednačinu koji se rješavaju primjenom metode razdvajanja promjenljivih.

5.1. Laplaceova jednačina u Descartesovim koordinatama za dvodimenzionalni prostor

Naći ono rješenje Laplaceove jednačine

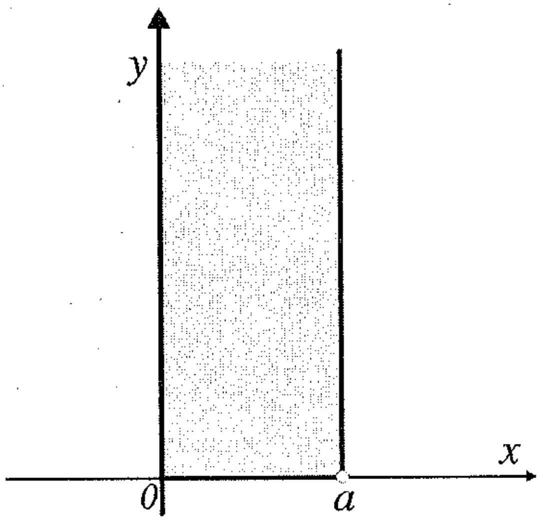
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

u poluprostoru $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le \infty,$ koje zadovoljava rubne uslove

$$\left.\begin{aligned} u(0,y) &= 0, & u(a,y) &= 0 \\ u(x,0) &= A\left(1-\frac{x}{a}\right), & u(x,\infty) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Rješenje: U rješavanju jednačine (1) poslužićemo se metodom razdvajanja promjenljivih. Potražimo rješenje u obliku

$$u(x,y) = X(x)\,Y(y). \tag{3}$$



(sl. 16)

Uvrstimo li (3) u (1), dobićemo

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda, \quad \text{tj.}$$

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{4}$$

$$Y'' - \lambda Y = 0. \tag{5}$$

Opšte rješenje jednačine (4) ima oblik

$$X(x) = A_1\, e^{x\sqrt{-\lambda}} + A_2\, e^{-x\sqrt{-\lambda}}, \tag{6}$$

a opšte rješenje jednačine (5) biće

$$Y(y) = B_1\, e^{y\sqrt{\lambda}} + B_2\, e^{-y\sqrt{\lambda}}. \tag{7}$$

Na osnovu (2) rubni uslovi za jednačinu (4) glase

$$\left.\begin{array}{l} X(0) = 0 \\ X(a) = 0. \end{array}\right\}$$

Ako ovo uvrstimo u (6), dobićemo sistem po A_1 i A_2:

$$\left.\begin{array}{lll} A_1 & + A_2 & = 0 \\ A_1\, e^{a\sqrt{-\lambda}} & + A_2\, e^{-a\sqrt{-\lambda}} & = 0\,. \end{array}\right\} \tag{8}$$

Ovaj sistem od dvije linearne homogene algebarske jednačine po A_1 i A_2, imaće netrivijalnih rješenja samo ako je determinanta tog sistema jednaka nuli

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{a\sqrt{-\lambda}} & e^{-a\sqrt{-\lambda}} \end{vmatrix} = 0\,, \quad \text{tj.}$$

$$e^{-a\sqrt{-\lambda}} = e^{a\sqrt{-\lambda}}, \qquad \text{odnosno} \quad e^{2a\sqrt{-\lambda}} = 1\,, \qquad \text{tj.}$$

$$e^{2a\sqrt{-\lambda}} = e^{2n\pi i}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\,.$$

Odavde izlazi

$$\sqrt{-\lambda} = \frac{n\pi i}{a}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\,, \quad \text{tj.} \tag{9}$$

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

tako da je

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{a}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\,,$$

pa (7) prima oblik

$$Y(y) = B_1 e^{\frac{n\pi y}{a}} + B_2 e^{-\frac{n\pi y}{a}}. \tag{10}$$

Kako je $A_2 = -A_1$, rješenje (6), jednačine (4), biće

$$X(x) = A_1 \left(e^{\frac{n\pi i x}{a}} - e^{-\frac{n\pi i x}{a}} \right) = 2A_1 i \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right). \tag{11}$$

Ovdje je još iskorišten i Eulerov obrazac, koji glasi:

$$e^{\alpha i} = \cos\alpha + i\sin\alpha, \tag{$*$}$$

dakle

$$e^{-\alpha i} = \cos\alpha - i\sin\alpha, \tag{$**$}$$

tako da iz $(*)$ i $(**)$ (sabiranjem, odnosno oduzimanjem) dobivamo

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}(e^{\alpha i} + e^{-\alpha i}), \quad \sin\alpha = \frac{1}{2i}(e^{\alpha i} - e^{-\alpha i}).$$

Za različite n uzećemo različite konstante, pa s obzirom na (3), (10) i (11) imamo

$$u_n(x,y) = \left(a_n e^{\frac{n\pi y}{a}} + b_n e^{-\frac{n\pi y}{a}} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right).$$

Zbog linearnosti jednačine (1) i homogenosti dosad iskorištenih rubnih uslova, rješenje našeg problema biće i funkcija

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y), \quad \text{tj.}$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n e^{\frac{n\pi y}{a}} + b_n e^{-\frac{n\pi y}{a}} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right). \tag{12}$$

Za određivanje konstanti a_n i b_n iskoristićemo još dva preostala uslova iz (2), prema kojim je:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad \text{tj.}$$

$$A\left(1-\frac{x}{a}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right).$$

S obzirom da je ovo razvitak funkcije $A\left(1-\frac{x}{a}\right)$ u Fourierov red, koeficijente (a_n+b_n) možemo izračunati prema poznatom obrascu

$$a_n+b_n=\frac{2A}{a}\int_0^a\left(1-\frac{x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx,$$

odakle dobijamo

$$a_n+b_n=\frac{2A}{\pi n}. \tag{13}$$

Da bi bio ispunjen uslov $u(x,\infty)=0$, iz (12) je očigledno da mora biti

$$a_n=0, \qquad n=1,2,3,\ldots,$$

pa na osnovu toga u (13) ostaje

$$b_n=\frac{2A}{\pi n}, \qquad n=1,2,3,\ldots . \tag{14}$$

Dakle, traženo rješenje je

$$u(x,y)=\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi y}{a}}\sin\left(n\pi x/a\right), \tag{15}$$

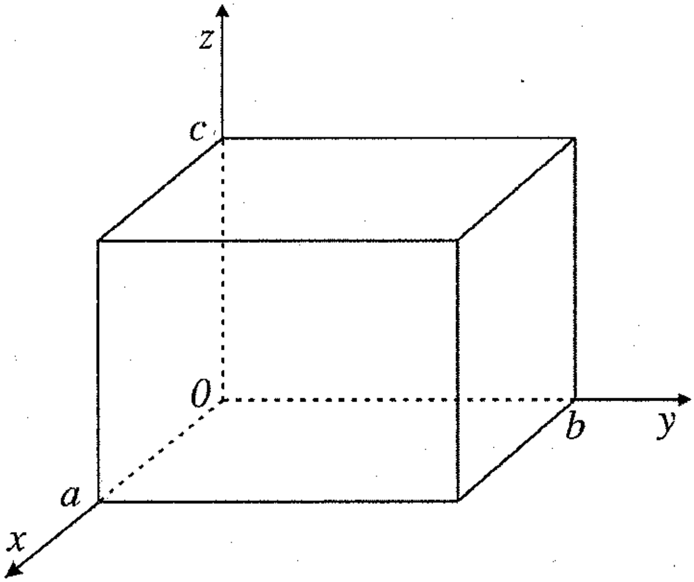
čime je postavljeni problem rješen.

5.2. Laplaceova jednačina u Descartesovim koordinatama za trodimenzionalni prostor

Naći rješenje Laplaceove jednačine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{1}$$

unutar pravouglog paralelepipeda, uz rubne uslove



(sl. 17)

$$\left.\begin{array}{ll} u(0,y,z) = 0, & u(a,y,z) = 0 \\ u(x,0,z) = 0, & u(x,b,z) = 0 \\ u(x,y,0) = \delta, & u(x,y,c) = 0. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Rješenje:

Rješenje ove jednačine tražićemo u obliku

$$u(x,y,z) = v(x,y)\, Z(z). \tag{3}$$

Ako (3) uvrstimo u (1), dobićemo

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) Z + v Z'' = 0,$$

a odavde izlazi

$$\frac{\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}}{v} = -\frac{Z''}{Z} = -\lambda .$$

Na osnovu zadanih rubnih uslova (2) za funkciju $u(x,y,z)$, preformulisaćemo rubni problem za funkciju $v(x,y)$ koja je rješenje jednačine

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\lambda v = 0 \tag{4}$$

i tako dobiti

$$\left.\begin{array}{ll} v(0,y)=0, & v(a,y)=0 \\ v(x,0)=0, & v(x,b)=0. \end{array}\right\} \tag{5}$$

S rubnim problemom (4) + (5) smo se već sreli u slučaju pravougaone membrane. Tada smo našli da su sopstvene funkcije tog problema

$$v_{nm}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right), \tag{6}$$

ortonormirane i da su njima odgovarajuće sopstvene vrijednosti

$$\lambda_{nm} = \pi^2\left[\left(\frac{n}{a}\right)^2+\left(\frac{m}{b}\right)^2\right]. \tag{7}$$

Ostalo je još da riješimo jednačinu $Z''-\lambda Z=0$, zapravo

$$Z''-\lambda_{nm}Z=0 .$$

Njenim rješavanjem dobićemo

$$Z(z) = A_{nm}e^{z\sqrt{\lambda_{nm}}}+B_{nm}e^{-z\sqrt{\lambda_{nm}}} . \tag{8}$$

Na osnovu (3), (6) i (8) imamo:

$$u(x,y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_{nm}e^{z\sqrt{\lambda_{nm}}}+B_{nm}e^{-z\sqrt{\lambda_{nm}}}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right). \tag{9}$$

Sada ćemo da odredimo proizvoljne konstante A_{nm} i B_{nm} pomoću posljednja dva, od rubnih uslova (2), koje dosad nismo koristili:

$$\delta = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_{nm} + B_{nm}\right) \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \tag{10}$$

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_{nm}\, e^{c\sqrt{\lambda_{nm}}} + B_{nm}\, e^{-c\sqrt{\lambda_{nm}}}\right)\frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right). \tag{11}$$

Prema obrascima za izračunavanje koeficijenata dvostrukog Fourierovog reda, dobivamo, iz (10) i (11):

$$\begin{aligned} A_{nm} + B_{nm} &= \frac{2\delta}{\sqrt{ab}} \int_0^a \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dx\, dy = \\ &= \frac{2\delta}{\sqrt{ab}} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \int_0^b \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy = \\ &= \frac{2\delta\sqrt{ab}}{nm\pi^2}\left[1-(-1)^n\right]\left[1-(-1)^m\right] \end{aligned}$$

$$A_{nm}\, e^{c\sqrt{\lambda_{nm}}} + B_{nm}\, e^{-c\sqrt{\lambda_{nm}}} = 0,$$

odnosno, sistem po A_{nm} i B_{nm}:

$$\left.\begin{aligned} A_{nm} + B_{nm} &= \frac{2\delta\sqrt{ab}}{nm\pi^2}\left[1-(-1)^n\right]\left[1-(-1)^m\right] \\ A_{nm}\, e^{c\sqrt{\lambda_{nm}}} + B_{nm}\, e^{-c\sqrt{\lambda_{nm}}} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Rješavanjem sistema (12) dobivamo

$$A_{nm} = -\frac{\delta\sqrt{ab}}{nm\pi^2}\left[1-(-1)^n\right]\left[1-(-1)^m\right] \frac{e^{-c\sqrt{\lambda_{nm}}}}{sh(c\sqrt{\lambda_{nm}})}, \tag{13}$$

$$B_{nm} = \frac{\delta\sqrt{ab}}{nm\pi^2}\left[1-(-1)^n\right]\left[1-(-1)^m\right] \frac{e^{c\sqrt{\lambda_{nm}}}}{sh(c\sqrt{\lambda_{nm}})}. \tag{14}$$

Iz (13) i (14) vidimo da su samo oni koeficijenti A_{nm} i B_{nm} različiti od nule koji imaju **obadva** indeksa neparna. Prema tome, traženo rješenje Laplaceove jednačine (1) biće:

$$u(x,y,z) = \frac{\delta}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{-4}{(2n+1)(2m+1)}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{a}\sin\frac{(2m+1)\pi y}{b}\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{e^{-c\sqrt{\lambda_{2n+1,2m+1}}}}{sh(c\sqrt{\lambda_{2n+1,2m+1}})}e^{z\sqrt{\lambda_{2n+1,2m+1}}}-\frac{e^{c\sqrt{\lambda_{2n+1,2m+1}}}}{sh(c\sqrt{\lambda_{2n+1,2m+1}})}e^{-z\sqrt{\lambda_{2n+1,2m+1}}}\right\}.$$

Kako je prema (7)

$$\sqrt{\lambda_{2n+1,2m+1}} = \pi\sqrt{\left(\frac{2n+1}{a}\right)^2+\left(\frac{2m+1}{b}\right)^2}.$$

to definitivno dobijamo

$$u(x,y,z) = \frac{4\delta}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{(c-z)\sqrt{\lambda_{2n+1,2m+1}}}-e^{-(c-z)\sqrt{\lambda_{2n+1,2m+1}}}}{(2n+1)(2m+1)\ sh(c\sqrt{\lambda_{2n+1,2m+1}})}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{a}\sin\frac{(2m+1)\pi y}{b}.$$

Primjenom "hiperbolnog analogona" za Eulerov obrazac, prema kojem je

$$sh\,z = (e^z - e^{-z})/2,$$

traženo rješenje primiće oblik:

$$u(x,y,z) = \frac{8\delta}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{a}\sin\frac{(2m+1)\pi y}{b}\ sh\left[\pi(c-z)\sqrt{\left(\frac{2n+1}{a}\right)^2+\left(\frac{2m+1}{b}\right)^2}\right]}{(2n+1)(2m+1)\ sh\left[\pi c\sqrt{\left(\frac{2n+1}{a}\right)^2+\left(\frac{2m+1}{b}\right)^2}\right]}.$$

5.3. Laplaceova jednačina u cilindričnim koordinatama

Rješiti Laplaceovu jednačinu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

uz uslove

$$\left|u(0,z)\right| < +\infty, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r} + \gamma u\right|_{r=1} = 0 \tag{2}$$

$$u(r,0) = \alpha, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z} + \beta u\right|_{Z=H} = 0 . \tag{3}$$

Rješenje: Rješenje jednačine (1) tražićemo u obliku

$$u(r,z) = R(r)\,Z(z). \tag{4}$$

Uvrstimo li (4) u (1), dobićemo

$$R''Z + \frac{1}{r}R'Z + RZ'' = 0, \quad \text{tj.}$$

$$\left(R'' + \frac{1}{r}R'\right)Z = -RZ'',$$

što nas, razdvajanjem promjenljivih, dovodi do zaključka da mora biti

$$\frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} = -\frac{Z''}{Z} = -\lambda .$$

Tako dobijamo dvije obične diferencijalne jednačine

$$Z'' - \lambda Z = 0 \qquad \text{i}$$

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \lambda R = 0,$$

kojim odgovaraju, redom, rješenja

$$\begin{aligned} Z(z) &= A\,ch(z\sqrt{\lambda}) + B\,sh(z\sqrt{\lambda}) \\ \mathrm{R}(\mathrm{r}) &= \mathrm{C}\,\mathrm{J}_0(r\sqrt{\lambda}) + D N_o(r\sqrt{\lambda}). \end{aligned} \tag{5}$$

Prema tome, rješenje jednačine (1) biće

$$u(r,z) = \left[\mathrm{C}\,\mathrm{J}_0(r\sqrt{\lambda}) + D N_o(r\sqrt{\lambda})\right]\left[A\,ch(z\sqrt{\lambda}) + B\,sh(z\sqrt{\lambda})\right].$$

S obzirom na uslov $\left|u(0,z)\right| < +\infty$, zaključujemo da mora biti $D = 0$. Ako uzmemo $C = 1$, dobićemo

$$R(r) = J_o(r\sqrt{\lambda}), \tag{6}$$

znači

$$u(r,z) = \mathrm{J}_o(r\sqrt{\lambda})\left[Ach(z\sqrt{\lambda}) + B\,sh(z\sqrt{\lambda})\right].$$

Kako je

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \gamma u\Big|_{r=1} = 0,$$

to je

$$R'(r)\,Z(z) + \gamma R(r) Z(z)\Big|_{r=1} = 0,$$

tj.

$$R'(1) + \gamma R(1) = 0. \tag{7}$$

Pošto je

$$R'(r) = \sqrt{\lambda}\,J_o'(r\sqrt{\lambda}), \tag{8}$$

to (7), na osnovu (6) i (8), prelazi u

$$\sqrt{\lambda}\,J_o'(\sqrt{\lambda}) + \gamma J_o(\sqrt{\lambda}) = 0. \tag{9}$$

Označimo sa $\lambda_{01}, \lambda_{02}, \lambda_{03}, \ldots$ kvadrate pozitivnih korijena jednačine (9). To će biti sopstvene vrijednosti našeg problema, dok će odgovarajuće im sopstvene funkcije biti

$$u_m(r,z) = \left[A_m\, ch(z\sqrt{\lambda_{om}}) + B_m\, sh(z\sqrt{\lambda_{om}})\right]\mathrm{J}_o(r\sqrt{\lambda_{om}}).$$

Superpozicijom ovih rješenja dobivamo rješenje

$$u(r,z) = \sum_{m=1}^{\infty}\left[A_m\, ch(z\sqrt{\lambda_{om}}) + B_m\, sh(z\sqrt{\lambda_{om}})\right]\mathrm{J}_o(r\sqrt{\lambda_{om}}), \tag{10}$$

za koje je

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \sum_{m=1}^{\infty}\left[A_m\, sh(z\sqrt{\lambda_{om}}) + B_m\, ch(z\sqrt{\lambda_{om}})\right]\sqrt{\lambda_{om}}\,\mathrm{J}_o(r\sqrt{\lambda_{om}}). \tag{11}$$

S obzirom na uslove (3), odavde imamo:

$$\alpha = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_o(r\sqrt{\lambda_{om}})$$

$$0 = \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m\, sh(H\sqrt{\lambda_{om}}) + B_m\, ch(H\sqrt{\lambda_{om}})\right]\sqrt{\lambda_{om}}\, \mathrm{J}_o(r\sqrt{\lambda_{om}}) +$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\beta \left[A_m\, ch(H\sqrt{\lambda_{om}}) + B_m\, sh(H\sqrt{\lambda_{om}})\right] \mathrm{J}_o(r\sqrt{\lambda_{om}}).$$

Sada ćemo funkciju $\phi(r) \equiv \alpha$ razviti u **Dini–Besselov red.** Pošto je $\gamma > 0$, saglasno s tim biće $\alpha / \beta + \nu > 0$. Dobićemo

$$A_m = \frac{2\alpha}{\left(1+\dfrac{\gamma^2}{\lambda_{om}}\right) J_o^2(\sqrt{\lambda_{om}})} \int_0^1 r\, J_o(r\sqrt{\lambda_{om}})\, dr =$$

$$= \frac{2\alpha}{\left(\lambda_{om}+\gamma^2\right) J_o^2(\sqrt{\lambda_{om}})} \int_0^{\sqrt{\lambda_{om}}} z J_o(z)\, dz\,.$$

Ranije smo vidjeli da je

$$\int z J_o(z)\, dz = z J_1(z)\,.$$

Dakle,

$$A_m = \frac{2\alpha\sqrt{\lambda_{om}}\, J_1(\sqrt{\lambda_{om}})}{(\gamma^2+\lambda_{om}) J_o^2(\sqrt{\lambda_{om}})} = -\frac{2\alpha\sqrt{\lambda_{om}}\, J_0'(\sqrt{\lambda_{om}})}{(\gamma^2+\lambda_{om}) J_o^2(\sqrt{\lambda_{om}})}\,.$$

S obzirom na (9) imamo

$$\sqrt{\lambda_{om}}\, J_o'(\sqrt{\lambda_{om}}) = -\gamma J_o(\sqrt{\lambda_{om}}),$$

tako da je

$$A_m = \frac{2\alpha\gamma}{(\gamma^2+\lambda_{om}) J_o(\sqrt{\lambda_{om}})}\,. \tag{12}$$

Iz (11), koristeći drugi uslov iz (3), dobivamo

$$0 = \sum_{m=1}^{\infty}\left\{A_m\left[\beta ch(H\sqrt{\lambda_{om}})+\sqrt{\lambda_{om}}\, sh(H\sqrt{\lambda_{om}})\right]+\right.$$

$$\left.+B_m\left[\beta sh(H\sqrt{\lambda_{om}})+\sqrt{\lambda_{om}}\, ch(H\sqrt{\lambda_{om}})\right]\right\}J_o(r\sqrt{\lambda_{om}}).$$

Odavde izlazi

$$B_m = -A_m\frac{\beta ch(H\sqrt{\lambda_{om}})+\sqrt{\lambda_{om}}\, sh(H\sqrt{\lambda_{om}})}{\beta sh(H\sqrt{\lambda_{om}})+\sqrt{\lambda_{om}}\, ch(H\sqrt{\lambda_{om}})}. \tag{13}$$

Na osnovu rezultata (12) i (13), rješenje (10) možemo konačno napisati u obliku:

$$u(r,z) = 2\alpha\gamma\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_o(r\sqrt{\lambda_{om}})}{(\gamma^2+\lambda_{om})J_o(r\sqrt{\lambda_{om}})}\cdot$$

$$\cdot\left[ch(z\sqrt{\lambda_{om}})-\frac{\beta ch(H\sqrt{\lambda_{om}})+\sqrt{\lambda_{om}}\, sh(H\sqrt{\lambda_{om}})}{\beta sh(H\sqrt{\lambda_{om}})+\sqrt{\lambda_{om}}\, ch(H\sqrt{\lambda_{om}})}sh(z\sqrt{\lambda_{om}})\right],$$

odnosno

$$u(r,z) = 2\alpha\gamma\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_o(r\sqrt{\lambda_{om}})}{(\gamma^2+\lambda_{om})J_o(\sqrt{\lambda_{om}})}\cdot$$

$$\cdot\frac{\beta sh\left[(H-z)\sqrt{\lambda_{om}}\right]+\sqrt{\lambda_{om}}\, ch\left[(H-z)\sqrt{\lambda_{om}}\right]}{\beta sh(H\sqrt{\lambda_{om}})+\sqrt{\lambda_{om}}\, ch(H\sqrt{\lambda_{om}})}.$$

5.4. Laplaceova jednačina u cilindričnim koordinatama u slučaju radijalnih oscilacija

Gornja osnova cilindara koji stoji na izolovanoj osnovi, zagrijava se ravnomjerno raspoređenim protokom toplote gustine q u pravcu paralelnom osi cilindra. Bočna površina cilindara slobodno se rashlađuje vazduhom čija je temperatura nula. Naći stacionarni raspored temperature u cilindru.

Rješenje: Matematički se ovaj zadatak svodi na rješavanje Laplaceove jednačine u cilindričnim koordinatama, za $\theta = const$, tj. jednačine oblika

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{1}$$

uz uslove

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0; \quad \left.-k\frac{\partial u}{\partial z} + q\right|_{z=H} = 0; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r} + \gamma u\right|_{r=R} = 0 \quad (\gamma > 0). \tag{2}$$

Rješenje jednačine (1) tražićemo u obliku

$$u(r,z) = f(r)g(z). \tag{3}$$

Ako uvrstimo (3) u (1), dobićemo

$$f''g + \frac{1}{r}f'g + fg'' = 0,$$

odakle, razdvajanjem promjenljivih, dobijamo

$$\frac{f'' + f'r^{-1}}{f} = -\frac{g''}{g} = -\lambda,$$

tj. dvije jednačine

$$r^2 f'' + rf' + r^2\lambda f = 0 \quad \text{i} \tag{4}$$

$$g'' - \lambda g = 0. \tag{5}$$

Ranije smo pokazali ([24], str. 383) da Besselova jednačina

$$r^2 f'' + rf' + (r^2\lambda - n^2)f = 0 \tag{6}$$

ima jedno partikularno rješenje oblika

$$J_n(r\sqrt{\lambda}).$$

Jednačina (4) je specijalan slučaj jednačine (6) kad se u njoj stavi $n = 0$, pa prema tome, rješenje jednačine (4) biće oblika

$$f(r) = J_o(r\sqrt{\lambda}). \tag{6'}$$

Jasno je da, s obzirom na treći uslov u (2), ovo rješenje neće postojati za svako λ.

Opšte rješenje jednačine (5) ima oblik

$$g(z) = Ae^{z\sqrt{\lambda}} + Be^{-z\sqrt{\lambda}}, \tag{*}$$

gdje su A i B proizvoljne konstante.

Sada ćemo iskoristiti treći od uslova iz (2), tj. zahtjev da je

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} + \gamma u \right|_{r=R} = 0 . \tag{6''}$$

S obzirom na (3), (6′) i (6″), imamo

$$\sqrt{\lambda}\, J_o'(R\sqrt{\lambda}) + \gamma J_o(R\sqrt{\lambda}) = 0 . \tag{7}$$

Ako radi pojednostavljenja daljnjeg računa stavimo

$$R\sqrt{\lambda} = \mu, \quad \text{tj.} \quad \sqrt{\lambda} = \frac{\mu}{R},$$

(7) će primiti oblik:

$$\mu J_o'(\mu) + \gamma R J_o(\mu) = 0 . \tag{8}$$

Označimo sa $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ pozitivne korijene ove jednačine. Tada, u jednakosti (6′), koja je oblika

$$f(r) = J_o\left(r\mu/R\right),$$

mora, s obzirom na (6″), da bude $\mu = \mu_m$. Tako je

$$f_m(r) = J_o\left(r\mu_m/R\right), \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

pa će, prema (3) u (∗), funkcije u_m biti definisane sa:

$$u_m(r,z) = J_o\left(r\mu_m/R\right)\left(A_m e^{z\mu_m/R} + B_m e^{-z\mu_m/R}\right),$$

gdje su A_m i B_m proizvoljne konstante.
Superpozicijom rješenja dobićemo

$$u(r,z) = \sum_{m=1}^{\infty} J_o\left(r\mu_m/R\right)\left(A_m e^{z\mu_m/R} + B_m e^{-z\mu_m/R}\right). \tag{9}$$

Sada treba još da odredimo proizvoljne konstante A_m i B_m, a za to ćemo koristiti još ona dva preostala uslova iz (2).
Znači

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \sum_{m=1}^{\infty} J_o\left(r\mu_m/R\right) \frac{\mu_m}{R}\left(A_m e^{z\mu_m/R} - B_m e^{-z\mu_m/R}\right), \tag{10}$$

pa iz $\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$, tj.

$$\sum_{m=1}^{\infty} J_o\left(r\mu_m/R\right)\left(A_m - B_m\right)\mu_m/R = 0,$$

izlazi

$$B_m = A_m . \tag{11}$$

Ako sada (11) uvrstimo u (9), dobićemo

$$u(r,z) = 2\sum_{m=1}^{\infty} J_o\left(r\mu_m/R\right) A_m ch\left(z\mu_m/R\right), \tag{12}$$

tako da će biti

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2\sum_{m=1}^{\infty} \mu_m A_m \, sh\left(z\mu_m/R\right) J_o\left(r\mu_m/R\right) / R.$$

S obzirom na drugi uslov iz (2), tj. zahtjev da je

$$q = k\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=H},$$

imamo

$$q = 2k\sum_{m=1}^{\infty} \mu_m A_m \cdot sh\left(H\mu_m/R\right) J_o\left(r\mu_m/R\right) / R. \tag{13}$$

Odavde ćemo izračunati koeficijente A_m na sljedeći način:
Funkciju $\Phi(r) \equiv q$ razvićemo u Dini–Besselov red i staviti

$$a_m = 2k\frac{\mu_m}{R} sh\left(H\mu_m/R\right) A_m. \tag{14}$$

Tako ćemo dobiti

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_o\left(r\mu_m/R\right). \tag{15}$$

Ako u jednačinu

$$\alpha J_\nu(\mu) + \beta\mu J_\nu'(\mu) = 0,$$

saglasno sa (8), stavimo $\nu = 0$, $\dfrac{\alpha}{\beta} = \gamma R$, dobićemo

$$a_m = \frac{2q}{R^2\left(1+(\gamma R/\mu_m)^2\right)J_o^2(\mu_m)} \int_0^R r J_o\left(r\mu_m/R\right)\,dr =$$

$$= \frac{2q\,\mu_m^2}{R^2\,(R^2\gamma^2+\mu_m^2)J_o^2(\mu_m)}\,\frac{R^2}{\mu_m^2}\int_0^{\mu_m} zJ_o(z)\,dz =$$

$$= \frac{2q}{(R^2\gamma^2+\mu_m^2)J_o^2(\mu_m)}\int_0^{\mu_m} zJ_o(z)\,dz\,.$$

U računanju integrala

$$Q = \int zJ_o(z)\,dz$$

koristićemo poznate relacije

$$\left.\begin{aligned} J_1(z) &= -J_o'(z) \\ zJ_{\nu-1}(z) &= zJ_\nu'(z)+\nu J_\nu(z)\,. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Ako u ovom posljednjem obrascu stavimo $\nu = 1$, dobićemo

$$zJ_o(z) = zJ_1'(z)+J_1(z)\,,$$

a odavde, s obzirom na (16):

$$zJ_o(z) = zJ_1'(z) - J_o'(z)\,. \tag{17}$$

Prema tome

$$Q = \int zJ_o(z)\,dz = \int zJ_1'(z)\,dz - J_o(z) = zJ_1(z)\,,$$

tako da je

$$\int_0^{\mu_m} zJ_o(z)\,dz = zJ_1(z)\Big|_0^{\mu_m} = \mu_m J_1(\mu_m) = -\mu_m J_0'(\mu_m)\,.$$

Dakle,

$$a_m = -\frac{2q\,\mu_m J_o'(\mu_m)}{(R^2\gamma^2+\mu_m^2)J_0^2(\mu_m)}\,.$$

Prema (8), je dalje

$$a_m = \frac{2R\gamma q}{(R^2\gamma^2 + \mu_m^2)J_0(\mu_m)}.$$

Odavde, s obzirom na (14), dobijamo

$$\frac{2R\gamma q}{(R^2\gamma^2 + \mu_m^2)J_0(\mu_m)} = 2k\ \mu_m A_m\ sh\left(H\mu_m/R\right)/R,$$

tako da na kraju izlazi

$$A_m = \frac{R^2 q\gamma}{k\mu_m(R^2\gamma^2 + \mu_m^2)\ sh\left(H\mu_m/R\right)\ J_o(\mu_m)}. \tag{18}$$

Uvrstimo li (18) u (12), dobićemo traženo rješenje

$$u(r,z) = \frac{2qR^2\gamma}{k}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_o\left(r\mu_m/R\right)}{\mu_m(R^2\gamma^2 + \mu_m^2)J_o(\mu_m)}\frac{ch\left(z\mu_m/R\right)}{sh\left(H\mu_m/R\right)}.$$

5.5. Dirichletov problem za krug

Riješiti unutrašnji Dirichletov problem za Laplaceovu jednačinu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

znači, odrediti funkciju $u = u(x,y)$ koja, unutar kruga

$$C = \left\{(x,y)\middle|\ x^2 + y^2 = R^2\right\},$$

zadovoljava tu jednačinu, a na krugu C prima unaprijed zadanu vrijednost. Ovaj problem ćemo riješiti u polarnim koordinatama ρ, θ, definisanim sa:

$$x = \rho\cos\theta,\quad y = \rho\sin\theta.$$

Jednačina (1) u polarnim koordinatama glasi:

$$\rho^2\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \rho\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = 0. \tag{2}$$

Tražeći njeno rješenje u obliku proizvoda

$$u(\rho,\theta) = R(\rho)T(\theta), \tag{3}$$

dobićemo jednačinu

$$\rho^2 R''T + \rho R'T + RT'' = 0,$$

u kojoj se promjenljive mogu razdvojiti, tj. ona se može pisati u obliku:

$$\frac{-\rho^2 R'' - \rho R'}{R} = \frac{T''}{T} = -k^2,$$

gdje je $\boldsymbol{k = const.}$

Odavde dobijamo dvije obične diferencijalne jednačine

$$T''(\theta) + k^2 T(\theta) = 0 \quad \text{i} \tag{4}$$

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - k^2 R(\rho) = 0. \tag{5}$$

Opšte rješenje jednačine (4) je za $\boldsymbol{k \neq 0}$, dato sa

$$T(\theta) = a\cos k\theta + b\sin k\theta,$$

a jednačine (5), koja je Eulerovog tipa, sa

$$R(\rho) = c\rho^k + d\rho^{-k},$$

gdje su $\boldsymbol{a, b, c, d}$ proizvoljne konstante.

U slučaju $\boldsymbol{k = 0}$, rješenja jednačina (4) i (5) biće

$$T(\theta) = a + b\theta \quad \text{i}$$

$$R(\rho) = c + d\ln\rho,$$

redom. Znači, dobili smo sljedeća rješenja jednačine (1) :

$$u = (a\cos k\theta + b\sin k\theta)(c\rho^k + d\rho^{-k}) \quad \text{za } \boldsymbol{k \neq 0} \tag{6}$$

$$u = (a + b\theta)(c + d\ln\rho) \quad \text{za } \boldsymbol{k = 0} \tag{7}$$

gdje su $\boldsymbol{a, b, c}$, i $\boldsymbol{d}$ proizvoljne konstante.

Konstante a, b, c, d odredimo tako da dobijemo rješenje postavljenog problema.

S obzirom da dodavanje broja 2π promjenljivoj θ, odgovara jednom obilasku oko kruga i da pri tom funkcija $u(\rho, \theta + 2\pi)$ mora primiti istu vrijednosti da bi funkcija u bila periodična s periodom 2π, konstanta k, koja se pojavljuje u (6), mora biti cio broj, znači $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, a, u (7), konstanta $b = 0$.

Tako dobijamo sljedeća rješenja

$$u_n(\rho,\theta) = (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)(c_n \rho^n + d_n \rho^{-n}), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

$$u_o(\rho,\theta) = a_o(c_o + d_o \ln \rho). \tag{9}$$

Pošto tražena funkcija mora biti neprekidna u svakoj tački unutrašnje oblasti kruga C, pa prema tome i u tački $\rho = 0$, jasno je, da mora biti $d_o = d_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Uvedemo li oznake

$$A_o = 2a_o c_o, \quad A_n = a_n c_n, \quad B_n = b_n c_n,$$

na osnovu (8) i (9) dobićemo sljedeća rješenja

$$u_o(\rho,\theta) = A_o/2$$
$$u_n(\rho,\theta) = (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)\rho^n, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Na osnovu principa linearne superpozicije dobićemo rješenje

$$u(\rho,\theta) = \frac{A_o}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)\rho^n. \tag{10}$$

S obzirom na pretpostavku da funkcija u unutar kruga C prima unaprijed zadanu vrijednost, recimo

$$u(\rho,\theta) = g(\theta),$$

gdje je $g(\theta)$ data funkcija, iz (10) dobijamo

$$g(\theta) = \frac{A_o}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)\rho^n,$$

odakle slijedi da je

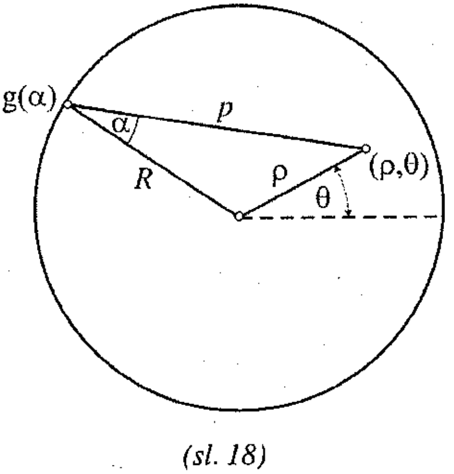
$$\left.\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi\rho^n} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \cos n\theta \, d\theta \\ B_n &= \frac{1}{\pi\rho^n} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \sin n\theta \, d\theta. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Napomena: Umjesto beskonačnog reda (10) rješenje Dirichletovog problema se može predstaviti u obliku određenog integrala poznatog kao **Poissonov integral**. Do tog prikaza se dolazi uvrštavanjem izraza za koeficijente A_n i B_n, datih u (11), u rješenje (10). Tako dobijamo:

$$
\begin{aligned}
u(\rho,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \int_0^{2\pi} g(\alpha)\left[\cos(n\alpha)\cos(n\theta)+\sin(n\alpha)\sin(n\theta)\right]d\alpha = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}(\rho/R)^n\cos\left[n(\theta-\alpha)\right]\right\}g(\alpha)\,d\alpha = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}(\rho/R)^n\left[e^{n(\theta-\alpha)i}+e^{-n(\theta-\alpha)i}\right]\right\}g(\alpha)\,d\alpha = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(\rho/R)^n e^{n(\theta-\alpha)i}+\sum_{n=1}^{\infty}(\rho/R)^n e^{-n(\theta-\alpha)i}\right]g(\alpha)\,d\alpha = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[1+\frac{\rho e^{i(\theta-\alpha)}}{\rho-Re^{i(\theta-\alpha)}}+\frac{\rho e^{-i(\theta-\alpha)}}{\rho-Re^{-i(\theta-\alpha)}}\right]g(\alpha)\,d\alpha = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2\rho R\cos(\theta-\alpha)+\rho^2}\right]g(\alpha)\,d\alpha. \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Time smo dobili još jedan oblik rješenja unutrašnjeg Dirichletovog problema koji se naziva **Poissonovom integralnom formulom**.

Prema Poissonovoj formuli se potencijal $\boldsymbol{u}$ u tački (ρ,θ) može smatrati težinskom sredinom potencijala susjednih tačaka. **Težinska funkcija**, koja je oblika



(sl. 18)

$$\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2\rho R\cos(\theta-\alpha)+\rho^2}$$

naziva se **Poissonovim jezgrom.**

Iz Poissonovog jezgra se može vidjeti koliko utiče položaj tačke na potencijal (sl. 18). Pošto je nazivnik Poissonovog izraza jednak kvadratu rastojanja između tačaka (ρ,θ) i (R,α), za granične vrijednosti (R,α) bliske (ρ,θ), on će biti veoma malen, tako da će jezgro biti veoma veliko. U tom slučaju, vrijednost $g(\alpha)$ bitno utiče na vrijednost integrala. Nažalost, kada se tačka (ρ,θ) nalazi po volji blizu ruba $\rho = R$, Poissonovo jezgro neograničeno raste, pa zbog toga, nije podesno za računanje vrijednosti rješenja. U tom slučaju zgodnije je koristiti redove.

Pošto je potencijal u centru kruga, prema Poissonovoj formuli

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\alpha)\,d\alpha\,,$$

vidimo da je **potencijal u centru kruga** jednak srednjoj vrijednosti potencijala na kružnici.

Samo na prvi pogled bi neupućenima moglo izgledati da Dirichletov problem možda i nije tako važan s obzirom da je oblast u kojoj se on rješava jednostavna. To je, naravno, povezano s činjenicom da se Laplaceova jednačina pojednostavljuje ako je oblast u kojoj se problem rješava krug, kvadrat, poluravan ... .

5.6. Rješavanje Dirichletovog problema u kružnom prstenu

Rješiti Dirichletov problem za Laplaceovu jednačinu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

u oblasti između dva kruga poluprečnika R_1 i R_2, uz rubne uslove

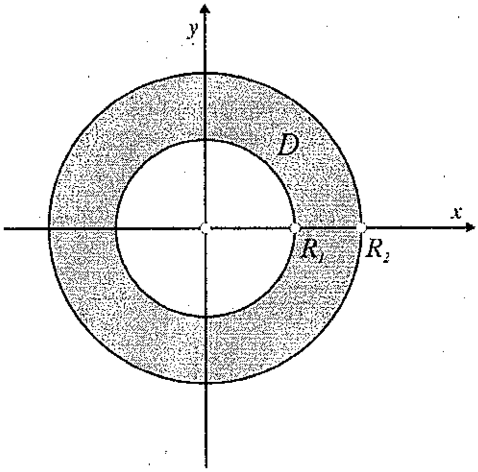
$$u\big|_{r=R_1}=\varphi_1(\theta),\quad u\big|_{r=R_2}=\varphi_2(\theta).$$

<u>**Rješenje:**</u> Uvođenjem polarnih koordinata (r,θ) jednačina (1) će primiti oblik

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0\,, \tag{2}$$

a rubni uslovi biti:

$$\left.\begin{aligned} u(R_1,\theta) &= \varphi_1(\theta) \\ u(R_2,\theta) &= \varphi_2(\theta). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$



(sl. 19)

Dakle, treba riješiti rubni problem (2) + (3).

Za rješavanje ovog problema treba koristiti prethodni problem, tj. "Dirichletov problem za krug".

S obzirom na prirodu problema rješenje mora da bude 2π-periodična funkcija od θ, tj. mora biti

$$u(r, \theta + 2\pi) = u(r,\theta) \quad \text{za svako } \boldsymbol{r}.$$

Na osnovu prethodnog primjera rješenje jednačine (2) biće

$$u(r,\theta) = (A_o + B_o \ln r) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(A_n r^n + B_n r^{-n})\cos n\theta + (C_n r^n + D_n r^{-n})\sin n\theta\right]. \qquad (4)$$

Pošto je $R_1 \leq r \leq R_2$, ovdje mogu ostati koeficijenti B_o, B_n i D_n za $n = 1, 2, \ldots$

Za određivanje koeficijenata A_o, A_n, B_o, B_n, C_n i D_n koristićemo date rubne uslove (3), tj.

$$\varphi_1(\theta) = (A_o + B_o \ln r) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(A_n R_1^n + B_n R_1^{-n})\cos n\theta + (C_n R_1^n + D_n R_1^{-n})\sin n\theta\right] \quad (5)$$

$$\varphi_2(\theta) = (A_o + B_o \ln r) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(A_n R_2^n + B_n R_2^{-n})\cos n\theta + (C_n R_2^n + D_n R_2^{-n})\sin n\theta\right]. \quad (6)$$

Izrazi na desnim stranama (5) i (6) predstavljaju razvitak u Fourierov red funkcije $\varphi_1(\theta)$, odnosno funkcije $\varphi_2(\theta)$. Izračunajmo koeficijente tih razvitaka:

$$\alpha_n^{(1)} \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_1(\theta)\cos n\theta\, d\theta = A_n R_1^n + B_n R_1^{-n}$$

$$\alpha_0^{(1)} \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_1(\theta)\, d\theta = A_o + B_o \ln R_1$$

$$\beta_n^{(1)} \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_1(\theta)\sin n\theta\, d\theta = C_n R_1^n + D_n R_1^{-n}$$

$$\alpha_n^{(2)} \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_2(\theta)\cos n\theta\, d\theta = A_n R_2^n + B_n R_2^{-n}$$

$$\alpha_0^{(2)} \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_2(\theta)\, d\theta = A_o + B_o \ln R_2$$

$$\beta_n^{(2)} \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_2(\theta)\sin n\theta\, d\theta = C_n R_2^n + D_n R_2^{-n},$$

gdje su $\alpha_n^{(1)}, \alpha_o^{(1)}, \beta_n^{(1)}, \alpha_n^{(2)}, \alpha_o^{(2)}, \beta_n^{(2)}$ određeni brojevi. Ove oznake smo uveli radi kraćeg pisanja. Rješavanjem sistema

$$\left.\begin{aligned} A_n R_1^n + B_n R_1^{-n} &= \alpha_n^{(1)} \\ A_n R_2^n + B_n R_2^{-n} &= \alpha_n^{(2)} \end{aligned}\right\}$$

se dobija

$$A_n = \frac{\alpha_n^{(1)} R_2^{-n} - \alpha_n^{(2)} R_1^{-n}}{R_1^n R_2^{-n} - R_1^{-n} R_2^n}, \quad \mathrm{B}_n = -\frac{\alpha_n^{(1)} R_2^n - \alpha_n^{(2)} R_1^n}{R_1^n R_2^{-n} - R_1^{-n} R_2^n}. \quad (7)$$

Isto tako, rješavanjem sistema

$$\left.\begin{aligned} C_n R_1^n + D_n R_1^{-n} &= \beta_n^{(1)} \\ C_n R_2^n + D_n R_2^{-n} &= \beta_n^{(2)}, \end{aligned}\right\}$$

dobijamo

$$C_n = \frac{\beta_n^{(1)} R_2^{-n} + \beta_n^{(2)} R_1^{-n}}{R_1^n R_2^{-n} - R_1^{-n} R_2^n}, \quad D_n = -\frac{\beta_n^{(1)} R_2^n - \beta_n^{(2)} R_1^n}{R_1^n R_2^{-n} - R_1^{-n} R_2^n}. \tag{8}$$

Analogno, iz

$$\left.\begin{aligned} A_o + B_o \ln R_1 &= \alpha_o^{(1)} \\ A_o + B_o \ln R_2 &= \alpha_o^{(2)}, \end{aligned}\right\}$$

nalazimo

$$A_o = \frac{\alpha_o^{(1)} \ln R_2 - \alpha_o^{(2)} \ln R_1}{\ln R_2 - \ln R_1}, \quad B_o = \frac{\alpha_o^{(2)} - \alpha_o^{(1)}}{\ln R_2 - \ln R_1}. \tag{9}$$

Sada, na osnovu (4), (7), (8) i (9) dobivamo rješenje našeg rubnog problema (2)+(3):

$$u(r,\theta) = \frac{\alpha_o^{(1)} \ln R_2 - \alpha_o^{(2)} \ln R_1}{\ln R_2 - \ln R_1} + \frac{\alpha_o^{(2)} - \alpha_o^{(1)}}{\ln R_2 - \ln R_1} \ln r +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(\alpha_n^{(1)} R_2^{-n} - \alpha_n^{(2)} R_1^{-n}) r^n - (\alpha_n^{(1)} R_2^n - \alpha_n^{(2)} R_1^n) r^{-n}}{R_1^n R_2^{-n} - R_1^{-n} R_2^n} \cos n\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{(\beta_n^{(1)} R_2^{-n} - \beta_n^{(2)} R_1^{-n}) r^n - (\beta_n^{(1)} R_2^n - \beta_n^{(2)} R_1^n) r^{-n}}{R_1^n R_2^{-n} - R_1^{-n} R_2^n} \sin n\theta \right\}.$$

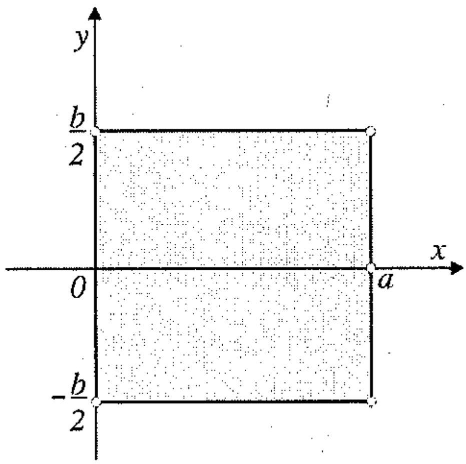
6. Poissonova jednačina

Naći rješenje Poissonove jednačine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \tag{1}$$

u pravougaoniku $0 \le x \le a, \ -\frac{b}{2} \le y \le \frac{b}{2}$ ako je ono na rubu tog pravougaonika jednako nuli.

Rješenje: Znači, rubni uslovi za ovaj problem su dati sa:



(sl. 20)

$$\left.\begin{array}{ll} u(0,y) = 0, & u(a,y) = 0 \\ u(x,-b/2) = 0, & u(x,b/2) = 0\,. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Pošto jednačina (1) nije homogena njeno rješenje ćemo tražiti u obliku zbira jednog rješenje te jednačine, koje ćemo označiti sa $v(x,y)$, i rješenja $w(x,y)$ pridružene joj homogene jednačine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, \tag{1'}$$

tj. u obliku

$$u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)\,. \tag{3}$$

Potražimo rješenje jednačine (1) u obliku polinoma

$$v(x,y) = Ax^2 + Bx + C,$$

zahtjevajući pri tome da zadovoljava rubne uslove:

$$v(0,y) = 0, \qquad v(a,y) = 0\,, \tag{4}$$

dok će rješenje $w(x,y)$, na rubu pravougaonika, uzimati vrjednosti

$$\left.\begin{array}{ll} w(0,y) = 0, & w(a,y) = 0 \\ w(x,-b/2) = -v(x), & w(x,b/2) = -v(x). \end{array}\right\} \tag{5}$$

S obzirom na (3), uslovi (4) i (5) proizilaze iz zadanih rubnih uslova (2).
Najprije ćemo odrediti funkciju v :

$$v = Ax^2 + Bx + C, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2A, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0\,.$$

Prema (1) dobivamo

$$2A + 0 = -2, \quad \text{znači} \quad A = -1.$$

Da bismo odredili B i C, iskoristićemo rubne uslove (4):

$$v(0,y) = C = 0, \quad v(a,y) = -a^2 + Ba = 0, \quad \text{tj. } B = a.$$

Prema tome, imamo

$$v(x,y) = v(x) = x(a-x)\,. \tag{6}$$

Posmatrajmo sada jednačinu

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0\,. \tag{7}$$

Da bismo riješili rubni problem (5) + (7), rješenje jednačine (7) ćemo potražiti u obliku

$$w(x,y) = X(x)\,Y(y)\,. \tag{8}$$

Tako će se jednačina (7) raspasti na dvije jednačine

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{$*$}$$

$$Y'' - \lambda Y = 0 \tag{$**$}$$

kojim odgovaraju rješenja

$$X(x) = A_1 e^{x\sqrt{-\lambda}} + A_2 e^{-x\sqrt{-\lambda}} \tag{9}$$

$$Y(y) = B_1 e^{y\sqrt{\lambda}} + B_2 e^{-y\sqrt{\lambda}} \tag{10}$$

redom. Rubni uslovi za jednačinu (*) imaju oblik $X(0) = 0$ i $X(a) = 0$. Ako ih uvrstimo u opšte rješenje $X(x)$ te jednačine, dobićemo sistem po A_1 i A_2:

$$\left.\begin{aligned} A_1 \quad + A_2 \quad &= 0 \\ A_1 e^{a\sqrt{-\lambda}} + A_2 e^{-a\sqrt{-\lambda}} &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Ovaj homogeni linearni sistem jednačina imaće netrivijalnih rješenja ako je determinanta sistema jednaka nuli, tj.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{a\sqrt{-\lambda}} & e^{-a\sqrt{-\lambda}} \end{vmatrix} = 0 .$$

Odavde se dobija

$$\sqrt{-\lambda} = \frac{n\pi i}{a}, \quad \text{tj.} \quad \lambda = \left(n\pi/a\right)^2,$$

dakle

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{a}. \tag{Δ}$$

Kako je $A_2 = -A_1$, to je

$$X(x) = A_1\left(e^{\frac{n\pi x i}{a}} - e^{-\frac{n\pi x i}{a}}\right) = 2i A_1 \sin\left(n\pi x/a\right) . \tag{9'}$$

S obzirom na (8), (Δ), (9') i (10), dobivamo

$$w_n(x,y) = \left(a_n e^{\frac{n\pi y}{a}} + b_n e^{-\frac{n\pi y}{a}}\right)\sin\left(n\pi x/a\right).$$

Superpozicijom ovih rješenja dobivamo rješenje

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n e^{\frac{n\pi y}{a}} + b_n e^{-\frac{n\pi y}{a}}\right)\sin\left(n\pi x/a\right), \tag{11}$$

gdje su a_n i b_n proizvoljne konstante koje ćemo odrediti iz rubnih uslova (5) koristeći relaciju (6). Prema tome:

$$w\left(x,-\frac{b}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n e^{-\frac{n\pi b}{2a}} + b_n e^{\frac{n\pi b}{2a}}\right)\sin\left(n\pi x/a\right) = -v(x)$$

$$w\left(x,\frac{b}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n e^{\frac{n\pi b}{2a}} + b_n e^{-\frac{n\pi b}{2a}}\right)\sin\left(n\pi x/a\right) = -v(x) .$$

Fourierove koeficijente funkcije $-v(x)$, koji stoje u zagradama, izračunaćemo po formuli

$$a_n e^{-\frac{n\pi b}{2a}} + b_n e^{\frac{n\pi b}{2a}} = -\frac{2}{a}\int_0^a v(x)\sin(n\pi x/a)\,dx,$$

odnosno, iz druge relacije

$$a_n e^{\frac{n\pi b}{2a}} + b_n e^{-\frac{n\pi b}{2a}} = -\frac{2}{a}\int_0^a v(x)\sin(n\pi x/a)\,dx.$$

Iz ovih posljednjih dviju jednačina dobivamo

$$b_n\left(e^{\frac{n\pi b}{2a}} - e^{-\frac{n\pi b}{2a}}\right) = a_n\left(e^{\frac{n\pi b}{2a}} - e^{-\frac{n\pi b}{2a}}\right),$$

odakle izlazi

$$b_n = a_n.$$

Koristeći ovo imamo

$$a_n\left(e^{\frac{n\pi b}{2a}} + e^{-\frac{n\pi b}{2a}}\right) = -\frac{2}{a}\int_0^a v(x)\sin(n\pi x/a)\,dx,$$

tj.

$$a_n = \frac{1}{a\,ch(n\pi b/2a)}\int_0^a x(x-a)\sin(n\pi x/a)\,dx.$$

Kada se ovaj integral izračuna, dobiće se

$$a_n = \frac{1}{a\,ch(n\pi b/2a)}\left[\frac{-2a^3\left[1-(-1)^n\right]}{n^3\pi^3}\right].$$

Dakle, svi koeficijenti s parnim indeksima biće jednaki nuli, tj.

$$a_{2n} = 0, \quad \text{za} \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{12}$$

tako da će ostati samo koeficijenti s neparnim indeksima

$$a_{2n+1} = -\frac{4a^2}{\pi^2}\frac{1}{(2n+1)^3}\frac{1}{ch\left[(2n+1)\pi b/2a\right]}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \qquad (13)$$

Na osnovu (11), (12) i (13) dobivamo

$$w(x,y) = -\frac{8a^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2n+1)\pi x/a\right]}{(2n+1)^3}\frac{ch\left[(2n+1)\pi y/a\right]}{ch\left[(2n+1)\pi b/2a\right]}. \qquad (14)$$

Prema (3), (6) i (14), rješenje našeg rubnog problema biće

$$u(x,y) = x(a-x) - \frac{8a^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2n+1)\pi x/a\right]}{(2n+1)^3}\frac{ch\left[(2n+1)\pi y/a\right]}{ch\left[(2n+1)\pi b/2a\right]}.$$

7. Rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina primjenom metoda konformnih preslikavanja

Uvedimo, najprije, pojam konformnog preslikavanja:

Preslikavanje $w = f(z)$ kompleksne ravni (z) u kompleksnu ravan (w) **zvaćemo konformnim preslikavanjem u tački z_o ravni (z) (ili konformnim preslikavanjem prve vrste)** ako je funkcija $w = f(z)$ analitička u tački z_o i $f'(z_o) \neq 0$. Preslikavanje $w = f(z)$ biće konformno u oblasti G ako je ono konformno u svakoj tački te oblasti.

Svako konformno preslikavanje koje se vrši pomoću neke analitičke funkcije f ima sljedeće osobine:

1° ono čuva, tj. ne mjenja uglove po veličini i smjeru

2° koeficijent deformacije za fiksnu tačku, ne zavisi od pravca.

Preslikavanje koje se od konformnog razlikuje samo po tome što mjenja orijentaciju ugla nazivamo **antikonformnim preslikavanjem** ili **konformnim preslikavanjem druge vrste**.

Metod konformnih preslikavanja nam omogućava da rješimo neke dvodimenzionalne rubne probleme za bilo koju oblast G, tako da ovu oblast konformno preslikamo u drugu, jednostavniju oblast G': krug, kružni prsten, kvadrat, ... , pa problem rješimo za tu novu oblast.

Prednost ovog metoda u odnosu na dosad najčešće korišćeni Fourierov metod razdvajanja promjenljivih, koji se primjenjivao samo na slučajeve specijalnih kontura je u tome što se on može primjenjivati na znatno širu klasu oblasti. Njegov

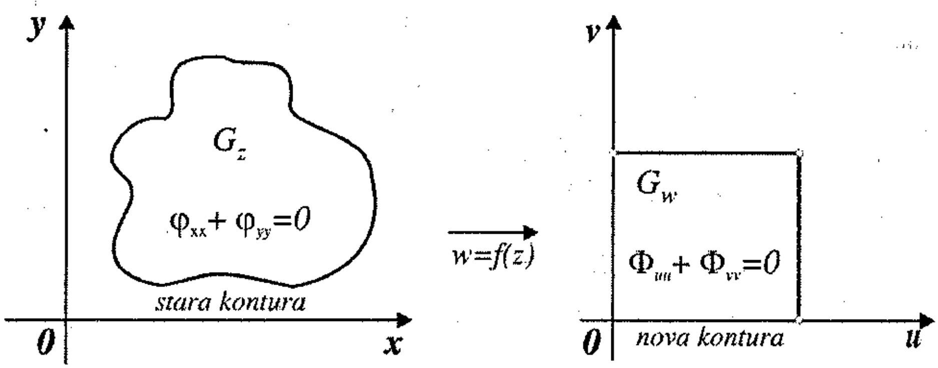
značaj je utoliko veći jer se on koristi u rješavanju brojnih fizikalnih problema, uključujući Laplaceovu jednačinu u dvodimenzionalnom prostoru.
Tako, na primjer, ako se od nas traži da riješimo Laplaceovu jednačinu

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0,$$

sa zadanim rubnim uslovima za neku oblast G_z nepravilnog oblika, sadržanu u (z)–ravni, tada treba taj problem transformisati u neki novi problem čije bi rješenje bilo, takođe, rješenje Laplaceove jednačine

$$\Phi_{uu} + \Phi_{vv} = 0,$$

ali sada, u nekoj jednostavnijoj oblasti G_w, (w) ravni.



(sl. 21)

Primjetimo važnu činjenicu:
Laplaceova jednačina je invarijantna u odnosu na konformno preslikavanje, i dokažimo tu važnu tvrdnju:
Tvrdnja: Ako je preslikavanje

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \tag{1}$$

konformno prve ili druge vrste (tj. konformno ili antikonformno), tada ono Laplaceovu jednačinu

$$\Delta\varphi = 0, \quad \text{za funkciju} \quad \varphi = \varphi(x,y) \tag{2}$$

prevodi u Laplaceovu jednačinu

$$\Delta\Phi = 0, \quad \text{za funkciju} \quad \Phi = \Phi(u,v), \tag{3}$$

gdje je $\Phi(u,v) = \varphi\big(x(u,v),\, y(u,v)\big)$.

Dokaz: Zbog pretpostavke da je funkcija $f(z)$ analitička u oblasti G_z i da je $f'(z) \neq 0$ u toj oblasti, biće i

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \left|f'(z)\right|^2 \neq 0, \tag{4}$$

pa se jednačine

$$u = u(x,y), \qquad v = v(x,y)$$

mogu rješiti po $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$. Tako dobijamo

$$x = x(u,v), \qquad y = y(u,v).$$

Tada je:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{xx} &= \Phi_{uu}u_x^2 + 2\Phi_{uv}u_x v_x + \Phi_{vv}v_x^2 + \Phi_u u_{xx} + \Phi_v v_{xx}\\ \varphi_{yy} &= \Phi_{uu}u_y^2 + 2\Phi_{uv}u_y v_y + \Phi_{vv}v_y^2 + \Phi_u u_{yy} + \Phi_v v_{yy}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Uvrštavanjem ovako dobivenih izraza φ_{xx} i φ_{yy} u Laplaceovu jednačinu $\Delta\varphi = 0$, dobićemo

$$\left.\begin{aligned}(u_x^2 + u_y^2)\Phi_{uu} + 2(u_x v_x + u_y v_y)\Phi_{uv} + (v_x^2 + v_y^2)\Phi_{vv} +\\ + (u_{xx} + u_{yy})\Phi_u + (v_{xx} + v_{yy})\Phi_v = 0.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

S obzirom da za konformno preslikavanje f važe Cauchy-Riemannove jednačine

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x,$$

a slično i za antikonformno preslikavanje

$$u_x = -v_y, \quad u_y = v_x,$$

i činjenicu da su realni i imaginarni dio $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$ analitičke funkcije harmonijske funkcije, imamo

$$\left.\begin{aligned}u_x^2 + u_y^2 &= v_x^2 + v_y^2, & u_x v_x + u_y v_y &= 0,\\ u_{xx} + u_{yy} &= 0, & v_{xx} + v_{yy} &= 0,\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

tako da se jednačina (6) svodi na Laplaceovu jednačinu

$$\Phi_{uu} + \Phi_{vv} = 0,$$

što je i trebalo dokazati.

Sada ćemo reći nešto o tome kako se:

1) određuje konformno preslikavanje za neke oblasti i

2) rješava dati problem primjenom metoda konformnih preslikavanja.

Što se tiče prvog pitanja, treba znati da nije uvijek lako naći odgovarajuće konformno preslikavanje. Međutim, postoje priručnici o konformnim preslikavanjima koji sadrže veliki broj primjera preslikavanja različitih oblasti jednih na druge, pa se često, uz malo truda, može naći odgovarajuće preslikavanje za konkretan slučaj.

Na drugo pitanje daćemo odgovor rješavanjem konkretnih problema. To se može ilustrovati rješavanjem brojnih fizikalnih problema, kao što su problemi provođenja toplote, elektrostatičkog potencijala i protoka tečnosti, koji se svode na rješavanje Laplaceove jednačine u dvodimenzionalnom prostoru.

Da bismo došli do problema stacionarnosti, recimo najprije šta je

7.1. Stacionarnost temperature

U teoriji provođenja toplote fluksom nazivamo količinu toplote koja protekne tačkom površine nekog čvrstog tijela, u jedinici vremena, u pravcu normale na tu površinu.

Pošto se fluks mjenja kao izvod temperature, u pravcu normale na površinu, ako ga označimo sa Φ, biće

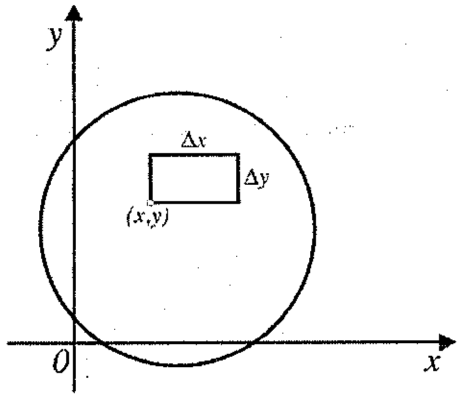
$$\Phi = k\frac{dT}{dn}, \tag{1}$$

gdje je k koeficijent proporcionalnosti koji zavisi od toplotne provodljivosti materijala čvrstog tjela za koji se, inače, pretpostavlja da je homogen.

Posmatranje ćemo vršiti u 3–dimenzionalnom prostoru ograničavajući se, pri tome, na slučaj kada temperatura varira samo u odnosu na x i y koordinate, tj. ne zavisi od koordinate koja je okomita na xy ravan. Pretpostavimo, osim toga, da je ona i stacionarna, tj. nezavisna od vremena i da su funkcija $T(x,y)$ i njeni parcijalni izvodi prvog i drugog reda neprekidni u svakoj unutrašnjoj tački tog tijela.

Ovo, zajedno s formulom (1), predstavlja matematički postulat teorije provođenja toplote za neku čvrstu tačku tijela u koju fluks neprekidno "uvire" i iz nje "izvire".

Dalje ćemo, posmatrati unutrašnji element tog tjela koji ima oblik pravougaone prizme jedinične visine, okomite na xy–ravan i bazu Δx sa Δy, u toj ravni (sl. 22).



(sl. 22)

Jasno je da će promjena temeprature protoka toplote, zavisno od toga da li se posmatranoj tački približavamo s lijeve ili desne strane, biti jednaka

$$-kT_x(x,y)\,\Delta y \quad \text{ili} \quad -kT_x(x+\Delta x,y)\,\Delta y\,.$$

Njihova rezultanta se može iskazati u obliku

$$-k\left[\frac{T_x(x+\Delta x,y)-T_x(x,y)}{\Delta x}\right]\Delta x\,\Delta y,$$

odnosno

$$-kT_{xx}(x,y)\,\Delta x\,\Delta y\,, \tag{2}$$

ukoliko je Δx veoma malo.

Jasno je da su svi ovi izrazi aproksimativni i da će njihova tačnost biti utoliko veća što su Δx i Δy manji.

Do sličnog bi se zaključka došlo ukoliko bi se radilo o gubljenju toplote kroz "donji", odnosno "gornji" element posmatrane površine. Uzimajući u obzir tu činjenicu, dobićemo

$$-kT_{yy}(x,y)\,\Delta x\,\Delta y\,. \tag{3}$$

S obzirom da toplota "ulazi" ili "izlazi" u posmatrani element površine samo s ove četiri strane, kao i da se temperatura unutar tog elementa površine ne mjenja, suma izraza (1) i (2) biće jednaka 0, tj.

$$T_{xx}(x,y) + T_{yy}(x,y) = 0\,, \tag{4}$$

što znači da funkcija T zadovoljava Laplaceovu jednačinu u svakoj unutrašnjoj tački posmatranog tjela.

S obzirom na činjenicu da su funkcija $T(x,y)$ i njeni parcijalni izvodi neprekidne funkcije, jasno je da je u unutrašnjosti posmatranog tjela T harmonijska funkcija od x i y.

Površine određene jednačinom $T(x,y) = C$, gdje je C realna konstanta, su izoterme raspoređene na tom čvrstom tjelu. Možemo ih posmatrati kao krive u xy–ravni.

$T(x,y)$ se može interpretirati kao temperatura pločice napravljene od tankog, termički izolovanog materijala.

Gradijent od T je okomit na izoterme u svakoj tački, a maksimalan fluks će, u svakoj tački, biti okomit na njega.

Ako sa $T(x,y)$ obilježimo temperaturu tanke pločice i ako je funkcija $S(x,y)$ harmonijski konjugovana funkciji $T(x,y)$, tada će vektor tangente na krivu $S(x,y) = C$ biti jednak gradijentu funkcije $T(x,y)$ u svakoj tački (x,y) u kojoj je analitičkom funkcijom

$$T(x,y) + iS(x,y)$$

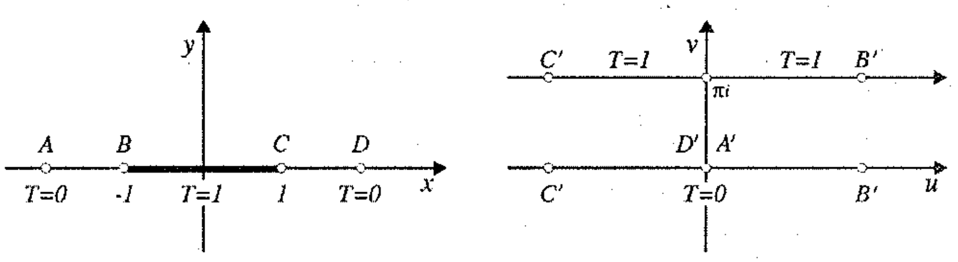
određeno konformno preslikavanje.

Ako je izvod u pravcu normale dT/dn jednak nuli duž dijela ruba ploče, tada će i fluks toplote, kroz taj dio ruba biti jednak nuli.

Time smo izvršili pripremu za rješavanje problema stacionarnosti temperature u poluograničenoj ploči, poznatog kao

7.2. Dirichletov problem za gornju poluravan

Odredimo, sada, formulu za stacionarnost temperature u tankoj polubeskonačnoj ploči za koju je $y \geq 0$, čija je površina izolovana, a rub $y = 0$ zadržava temperaturu 0 svugdje izuzev djela duži: $-1 < x < 1$, $y = 0$, na kojem je ona jednaka 1 (sl. 23).



(sl. 23)

Funkcija T biće ograničena. Ovaj uslov je prirodan ako se uzme da je posmatrana ploča granični slučaj ploče: $-\infty < x < +\infty, \quad 0 \le y \le y_o$, čiji gornji rub, kada y_o raste, zadržava fiksnu temperaturu. Ovaj rubni problem se može matematički formulisati na sljedeći način:

Problem 1.

Riješiti Laplaceovu jednačinu

$$T_{xx}(x,y) + T_{yy}(x,y) = 0, \quad (-\infty < x < +\infty, \quad 0 \le y < +\infty) \quad (1)$$

uz rubne uslove

$$T(x,0) = \begin{cases} 0, & za \ |x| > 1 \\ 1, & za \ |x| \le 1. \end{cases} \quad (2)$$

i $|T(x,y)| < M$ za $-\infty < x < +\infty$, gdje je M pozitivna konstanta.

Ovaj problem je poznat kao **Dirichletov problem za gornju poluravan.**

Rješenje: Lako se može provjeriti da se funkcijom

$$w = \ln\left[\frac{z-1}{z+1}\right]^{1)} \quad (*)$$

gornja poluravan (z)-ravni konformno preslikava na traku širine π (w)-ravni, tj. skup tačaka

$$\{(u,v) : -\infty < u < +\infty, \quad 0 < v < \pi\},$$

pri čemu:

1) dio prave: $\mathbf{y = 0, \ -1 \le x \le 1}$, (z)-ravni, na kojem je potencijal $T = 1$, prelazi u pravu $\mathbf{v = \pi, \ -\infty < u < +\infty}$, u (w)-ravni, dok

2) dvije zrake: $\mathbf{y = 0, \ x > 1}$ i $\mathbf{y = 0, \ x < -1}$ (z)-ravni prelaze redom u pozitivnu i negativnu poluosu realne ose, (w)-ravni.

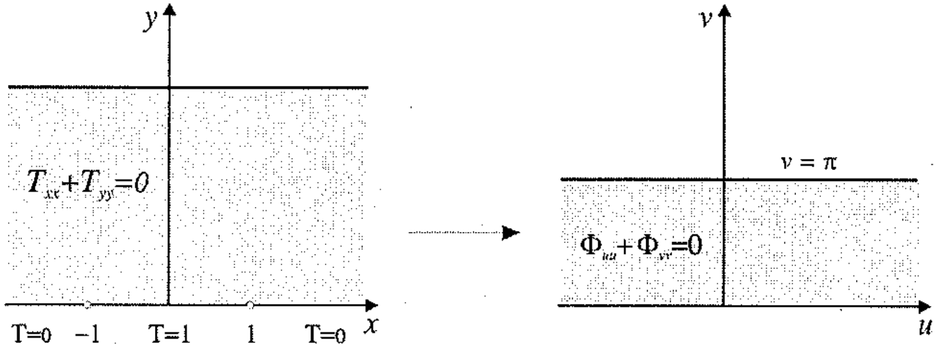
Time je rješavanje problema (1) + (2) svedeno na rješavanje mnogo jednostavnijeg problema

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} = 0, \quad -\infty < u < +\infty, \quad 0 < v < \pi, \quad (3)$$

(1) *R. V. Churchill: "Introduction to complex variables and applications", 1948, Tabela transformacija oblasti, str. 209.*

uz rubni uslov

$$\left.\begin{aligned} \Phi(u,0) &= 0 \\ \Phi(u,\pi) &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$



(sl. 24)

Rješenje rubnog problema (3) + (4) je

$$\Phi(u,v) = \frac{v}{\pi}. \tag{5}$$

Da bismo dobili rješenje polaznog rubnog problema potrebno je v izraziti preko x i y, pa tako dobiven izraz uvrstiti u (5).

Kako je

$$w = u + iv = \ln\left[\frac{z-1}{z+1}\right] =$$

$$= \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + i\arg\left[\frac{z-1}{z+1}\right],$$

kad se uzme u obzir da je

$$\arg(x+iy) = arc\,tg(y/x)$$

dobija se

$$v = \arg\left[\frac{z-1}{z+1}\right] = \arg\left[\frac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy}\right] =$$

$$= \arg\left[\frac{(x^2+y^2-1)+2iy}{(x+1)^2+y^2}\right] =$$

$$= arc\,tg\left[\frac{2y}{x^2+y^2-1}\right].$$

Uvrštavanjem ovako dobivenog $v = v(x,y)$ u (5), dobićemo rješenje rubnog problema (1) + (2)

$$T(x,y) = \frac{1}{\pi} arc\,tg\left[\frac{2y}{x^2+y^2-1}\right].$$

7.3. Dirichletov problem za dva nekoncentrična kruga

Odrediti potencijal unutar oblasti između dvije nekoncentrične kružnice

$$C': \; x^2 + y^2 = 1$$

$$C: \; (x-1)^2 + y^2 = 9,$$

ako je potencijal na manjoj (unutrašnjoj) kružnici radijusa **1** jednak **1**, a na većoj (spoljašnjoj) kružnici jednak **2**.

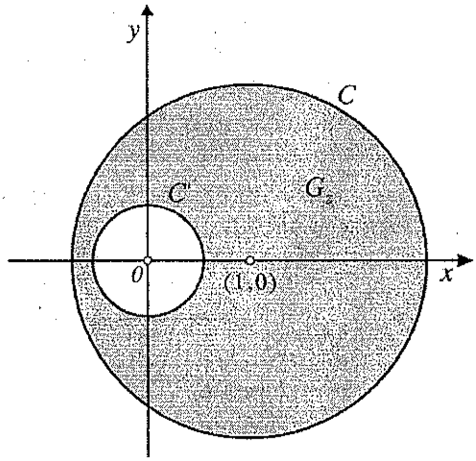
Rješenje: Drugim riječima treba rješiti problem:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \text{unutar oblasti } \mathbf{G}, \tag{1}$$

uz rubne uslove

$$\left.\begin{array}{lll} \varphi(x,y) = 1 & \text{na kružnici C}' \\ \varphi(x,y) = 2 & \text{na kružnici C.} \end{array}\right\} \tag{2}$$

Problem se svodi na traženje odgovarajućeg konformnog preslikavanja koje će oblast G_z preslikati u neku jednostavniju oblast G_w u kojoj se postavljeni problem može lakše rješiti.



(sl. 25)

U ovom slučaju je ta, jednostavnija, oblast kružni prsten, ali se traženo preslikavanje ne može tako lako odrediti. Koristeći ranije spominjane tabele (str. 234), dolazimo do zaključka da se, u ovom slučaju, radi o preslikavanju koje se ostvaruje pomoću bilinearne funkcije

$$w = 2\beta \frac{z-\alpha}{z-\beta}, \tag{3}$$

u kojoj je $\alpha = -0{,}146$, a $\beta = -6{,}85$.

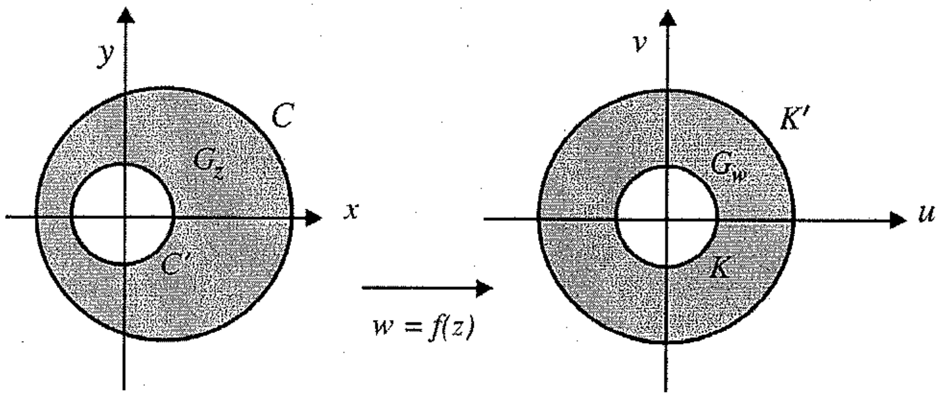
Postupajući analogno prethodnom slučaju, tj. uvrštavajući $z = x + iy$, u relaciju (3) ona će se, nakon izdvajanja realnog i imaginarnog dijela kompleksnog broja $w = u + iv$, svesti na ekvivalentan realni oblik:

$$\left.\begin{aligned} u &= 2\beta \frac{(x-\alpha)(x-\beta)+y^2}{(x-\beta)^2+y^2} \\ v &= 2\beta \frac{(\alpha-\beta)y}{(x-\beta)^2+y^2} \quad . \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

Ovakvim konformnim preslikavanjem se oblast G_z, između dvije nekoncentrične kružnice C' i C, preslikava u kružni prsten G_w (sl. 26), između kružnica

$$K:\ u^2 + v^2 = 1 \text{ i} \tag{5'}$$

$$K': \; u^2 + v^2 = 6{,}86. \qquad (5'')$$



(sl. 26)

Tako se, primjenom konformnog preslikavanja (3), Dirichletov problem (1) + (2) svodi na Dirichletov problem za kružni prsten, tj. rješavanje Laplaceove jednačine

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = 0$$

u prstenu određenom kružnicama K i K', uz rubne uslove:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(u,v) &= 1 && \text{na kružnici } K \\ \varphi(u,v) &= 6{,}86 && \text{na kružnici } K'. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Pošto rješenje treba da bude radijalno-simetrično, ovaj problem neće biti teško rješiti. Ranije smo vidjeli da radijalno-simetrično rješenje Laplaceove jednačine ima oblik

$$\varphi(r) = A \ln r + B, \qquad r^2 = u^2 + v^2.$$

Odavde, uzimajući u obzir rubne uslove (6), dobijamo

$$\varphi(u,v) = 0{,}57 \ln(u^2 + v^2) + 1.$$

Povratkom na stare promjenljive x i y, u saglasnosti s preslikavanjem (3'), dobićemo rješenje polaznog problema (1) + (2):

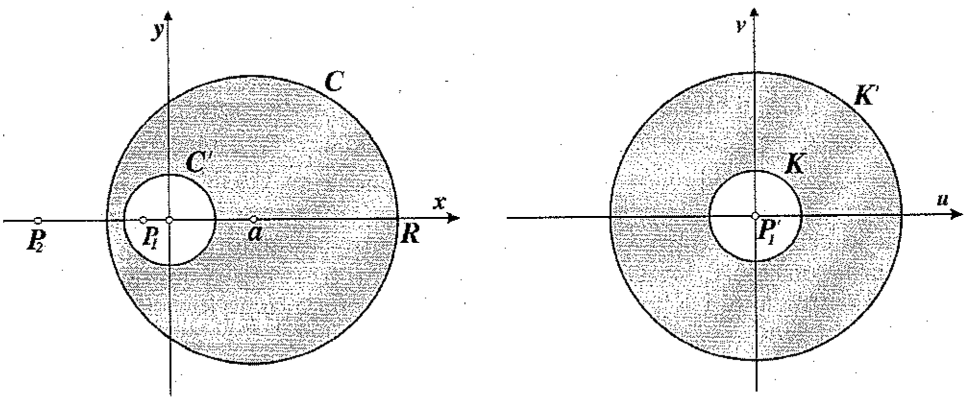
$$\varphi(x,y) = 0{,}57 \ln(u^2 + v^2) + 1,$$

gdje su u i v određeni sa (3′).

Primjedba: Traženo konformno preslikavanje, kojim se oblast između dvije nekoncentrične kružnice preslikava u oblast između dvije koncentrične kružnice, se moglo odrediti i direktno, tj. bez primjene tablica, pomoću preslikavanja poznatih kao **kružna** ili **inverzna preslikavanja** ili samo kratko **inverzije**.

S obzirom da se ovdje radi o dvostruko povezanoj oblasti, ne možemo primjeniti Riemannovu teoremu o egzistenciji konformnog preslikavanja prema kojoj omjer radijusa koncentričnih kružnica, dobivenih pomoću tog preslikavanja, može biti bilo koji broj.

Radi jednostavnosti se može uzeti da se centri obje zadane kružnice nalaze na realnoj osi i to, recimo da se centar veće kružnice C, radijusa R, nalazi u tački $z = a$, a centar manje kružnice C', radijusa r, u tački $z = 0$.



(sl. 27)

Uzmemo li, sada, dvije tačke P_1 i P_2, istovremeno, simetrične u odnosu na obje kružnice C i C', one će ležati na realnoj osi, a njihove apscise x_1 i x_2 će zadovoljavati relacije:

$$(-x_1 + a)(-x_2 + a) = R^2 \tag{7}$$

$$x_1 x_2 = r^2, \tag{8}$$

pa prema tome i relaciju

$$x_1 + x_2 = -(R^2 - r^2 - a^2)/a, \tag{9}$$

tako da će, prema Vieteovim formulama, x_1 i x_2 biti korijeni kvadratne jednačine

$$ax^2 + (R^2 - r^2 - a^2)x + ar^2 = 0. \tag{10}$$

Diskriminanta ove jednačine

$$D = (R^2 - r^2 - a^2)^2 - 4a^2 r^2$$

je pozitivna jer je

$$R - r > 0.$$

Posmatrajmo sada bilinearnu funkciju

$$w = \frac{z - x_1}{z - x_2},$$

u kojoj su x_1 i x_2 apscise tačaka P_1 i P_2 redom, određene jednačinom (10). Preslikavanje, zadano relacijom (11), preslikava date kružnice C i C' u koncentrične kručnice K i K' (w)-ravni, prevodeći pri tom, tačku P_2, koja leži izvan kružnica C i C', u beskonačno daleku tačku $w = \infty$, a njoj simetričnu, u odnosu na kružnice C i C', tačku P_1, u tačku simetričnu tački $w = \infty$, u odnosu na kružnice K i K'. Kako je tački $w = \infty$, simetrična, u odnosu na kružnice K i K', tačka $w = 0$, preslikavanje (11) će tačku P_1 prevesti u tačku $w = 0$, koja predstavlja zajednički centar kružnica K i K'. Ukoliko zanemarimo faktor proporcionalnosti λ, čija promjena može dovesti samo do "rastezanja" u (w)-ravni, ali ne utiče na omjer radijusa kružnica K i K', možemo smatrati da je time traženo konformno preslikavanje određeno.

Konkretno, u našem slučaju je: $\boldsymbol{a = 1}$, $\boldsymbol{R = 3}$ i $\boldsymbol{r = 1}$, tako da je

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= -7. \end{aligned}$$

Prema tome, x_1 i x_2 se mogu dobiti kao korijeni kvadratne jednačine

$$x^2 + 7x + 1 = 0. \tag{10'}$$

Znači

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{45}}{2}, \quad \text{tj.}$$

$$x_1 = -0{,}146, \qquad x_2 = -6{,}86, \tag{12}$$

što nas, ako uzmemo $\alpha = x_1$ i $\beta = x_2$, dovodi do istog rezultata kao i u slučaju kad smo do traženog preslikavanja došli pomoću tabele za određivanje konformnih preslikavanja.

8. Schrödingerova jednačina

U kvantnoj mehanici se često pojavljuju problemi vezani za nalaženje nivoa energije i talasnih funkcija čestica koje se kreću u nekom polju sila. Pretpostavimo da se radi o čestici mase μ, koja se kreće u vanjskom polju sile potencijala $U(x)$, da je $\psi(x,t)$ **talasna funkcija** te čestice, a $|\psi(x,t)|^2\, dV$ vjerovatnoća da će se ona naći u okolini dV tačke x, u momentu t, gdje je dV element zapremine.

Da bi se odredila talasna funkcija $\psi(x,t)$, koja opisuje položaj čestice i njoj odgovarajući nivoi energije, treba rješiti **Schrödingerovu jednačinu**

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\Psi + U\Psi, \tag{1}$$

u kojoj je $\hbar$ ($= 1{,}054 \cdot 10^{-27}\, erg \cdot \mathrm{sec}$) Planckova konstanta.

Ako energija E, posmatrane čestice, ima određenu vrjednost, tada njeno stanje nazivamo **stacionarnim.** U tom slučaju talasna funkcija $\Psi(x,t)$ ima oblik

$$\Psi(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\,\Psi(x), \tag{2}$$

pa talasna funkcija $\Psi(x)$, koja sada zavisi samo od jedne promjenljive, saglasno sa (1), **zadovoljava stacionarnu Schrödingerovu jednačinu**

$$\Delta\Psi - \frac{2\mu}{\hbar^2}(E-U)\Psi = 0. \tag{3}$$

Osim toga, funkcija $\Psi(x)$ mora biti ograničena za bilo koju konačnu vrjednost x i zadovoljavati uslov $\int|\Psi|^2\, dx = 1$, dobiven fizikalnim rasuđivanjem.

Ukoliko vanjske sile zadržavaju česticu u ograničenoj oblasti prostora, tako da ona ne može otići u beskonačnost, radiće se o vezanom ili neslobodnom stanju čestice.

Sada ćemo rješavati problem harmonijskog oscilatora koji igra fundamentalnu ulogu u kvantnoj elektrodinamici, a nalazi i veliku primjenu u proučavanju raznih vrsta oscilacija u kristalima i molekulama.

8.1. Harmonijski oscilator

U slučaju harmonijskog oscilatora funkcija Ψ zavisi samo od jedne promjenljive, a čestica mase μ se kreće u polju potencijalne energije $U = 1/2\,\mu\omega_o^2 x^2$, gdje je x otklon od ravnotežnog položaja, a ω_o **svojstvena** (ili **kružna**) **frekvencija oscilatora.** Prema tome, Schrödingerova jednačina, za talasnu funkciju $\Psi(x)$, u slučaju harmonijskog oscilatora glasi:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E - \mu\omega_o^2 x^2/2\right)\Psi = 0, \qquad (-\infty < x < +\infty). \tag{4}$$

Tražićemo, pri tome, one vrjednosti energije E za koje je funkcija $\Psi(x)$ neprekidna i zadovoljava uslov

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^2 dx = 1. \tag{5}$$

Ako uvedemo smjenu

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega_o}}\,\xi = \alpha\xi, \qquad \alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega_o}} \tag{$*$}$$

i, radi pojednostavljenja jednačine, oznaku

$$\lambda = \frac{2\mu\alpha^2}{\hbar^2}E, \qquad \frac{\mu^2\omega_o^2\alpha^4}{\hbar^2} = 1, \tag{$**$}$$

Schrödingerova jednačina (4), odnosno uslov (5) će se svesti na sljedeći oblik:

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2)\Psi = 0, \quad \text{odnosno} \tag{4'}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^2 dx = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\mu\omega_o/\hbar}. \tag{5'}$$

Time je rješavanje Schrödingerove jednačine, u slučaju harmonijskog oscilatora, svedeno na rješavanje jednačine (4'), uz uslov (5'), koji ima ulogu rubnog uslova. Pomoću tog uslova mogu se odrediti one vrjednosti λ (svojstvene vrjednosti problema) za koje problem (4') + (5') ima rješenje.

Uvođenjem nove funkcije z smjenom

$$\Psi = z\exp(-\xi^2/2),$$

jednačina (4') će preći u jednačinu

$$z'' - 2\xi z' + (\lambda - 1)z = 0. \tag{6}$$

Tražeći njeno rješenje u obliku stepenog reda

$$z = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \xi^n, \tag{7}$$

dobićemo

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n\xi^{n-2} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n\xi^n + (\lambda-1)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\xi^n \equiv 0,$$

tj.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2} - 2n a_n + (\lambda-1)\, a_n\right]\xi^n \equiv 0.$$

Odavde slijedi

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} - 2n a_n + (\lambda-1)\, a_n = 0,$$

dakle

$$a_{n+2} = -\frac{\lambda-(2n+1)}{(n+1)(n+2)}\, a_n \qquad (n = 0, 1, \dots). \tag{8}$$

Pokazuje se da je rješenje z ograničeno na skupu $\boldsymbol{R}$ samo u slučaju kad je z polinom što ima za posljedicu integrabilnost funkcije Ψ^2 na $\boldsymbol{R}$.

S obzirom da se iz (9) vidi da će z biti polinom samo ako je λ neparan broj, tj. $\lambda_n = 2n+1$, $(n \in N)$, jednačina (6) će se, u tom slučaju, svesti na **Hermiteovu diferencijalnu jednačinu**

$$z'' - 2\xi z' + 2nz = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \dots. \tag{9}$$

Jedno njeno partikularno rješenje je **Hermiteov polinom**

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n}\left(e^{-\xi^2}\right),$$

tako da će i funkcija z_n, definisana sa

$$z_n = A_n H_n(\xi), \tag{10}$$

zadovoljavati jednačinu (9). Konstante A_n odredićemo iz uslova (5′), uzimajući pri tome, u obzir da je $\Psi_n = z_n \exp(-\xi^2/2)$, tj.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_n^2\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(z_n \exp(\xi^2/2)\right)^2 d\xi = \sqrt{\frac{\mu\omega_o}{\hbar}}.$$

Odavde dobijamo

$$A_n = \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n!}\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\mu\omega_o}{\hbar}}.$$

Znači, rješenje jednačine (9) će, prema (10), biti

$$z_n = \sqrt{\frac{\mu\omega_o}{\hbar}}\frac{(-1)^n}{2^{n/2}\sqrt{n!}\sqrt{\pi}}e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}\left(e^{-\xi^2}\right)$$

Povratkom na promjenljivu x, koristeći (*), dobićemo svojstvene funkcije problema (4) – (5):

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{\mu\omega_o}{\hbar}}e^{(\mu\omega_o/2\hbar)x^2}\frac{(-1)^n}{2^{n/2}\sqrt{n!}\sqrt{\pi}}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-(\mu\omega_o/\hbar)x^2}\right),$$

tj.

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{\mu\omega_o}{\hbar}}e^{-(\mu\omega_o/2\hbar)x^2}\frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n!}\sqrt{\pi}}H_n\left(\sqrt{\frac{\mu\omega_o}{\hbar}}x\right),$$

gdje je H_n Hermiteov polinom, a odgovarajuće svojstvene vrijednosti

$$\lambda_n = 2n+1, \quad (n \in N).$$

S obzirom na vezu energije E i λ, koja je data sa (**), mogu se izračunati i svojstvene vrjednosti energije

$$E_n = \hbar\omega_o(n+1/2).$$

Prirodan broj n koji se ovdje pojavljuje naziva se **kvantni broj**.

RAZNI ZADACI

Zadatak 1. Neka je sa

$$(x-a\cos\alpha)^2+(y-a\sin\alpha)^2+z^2=\lambda^2a^2 \tag{1}$$

gdje je $\lambda(\neq 1)$ unaprijed zadana konstanta, dat potpuni integral neke parcijalne diferencijalne jednačine.

a) Naći tu parcijalnu diferencijalnu jednačinu.

b) Naći njen singularni integral.

Rješenje: a) Da bismo odredili parcijalnu diferencijalnu jednačinu čiji je potpuni integral dat sa (1), potrebno je eliminisati promjenljive parametre a i α. Da bismo to postigli, diferencirajmo jednakost (1) po x, odnosno po y, To će nas dovesti do sistema jednakosti:

$$\left.\begin{aligned} x-a\cos\alpha+zp&=0\\ y-a\sin\alpha+zq&=0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

iz kojeg se, nakon kvadriranja i sabiranja, dobija jednačina

$$z^2(p^2+q^2)=(x-a\cos\alpha)^2+(y-a\sin\alpha)^2, \tag{4}$$

koja će se, kad se uzme u obzir (1), svesti na jednačinu

$$z^2(p^2+q^2+1)=\lambda^2a^2. \tag{5}$$

Kako je, osim toga, iz (3), očigledno

$$(x+zp)^2+(y+zq)^2=a^2, \tag{6}$$

to će tražena parcijalna diferencijalna jednačina, na osnovu (5) i (6), biti

$$z^2(1+p^2+q^2)=\lambda^2\left[(x+zp)^2+(y+zq)^2\right]. \tag{7}$$

b) S obzirom da je singularni integral obvojnica familije potpunih integrala, on se može odrediti eliminacijom parametara a i α iz jednačine (1) i jednačina koje se iz (1) dobijaju diferenciranjem po a, odnosno po α, tj. iz sistema jednačina:

$$\left.\begin{aligned} (x-a\cos\alpha)^2+(y-a\sin\alpha)^2+z^2-\lambda^2a^2&=0\\ x\cos\alpha+y\sin\alpha&=(1-\lambda^2)a\\ x\sin\alpha-y\cos\alpha&=0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Odavde, množenjem druge jednačine sa $\cos\alpha$ (odnosno $\sin\alpha$), a treće jednačine sa $\sin\alpha$ (odnosno $\cos\alpha$), nakon sabiranja (odnosno oduzimanja) dobijamo

$$\left.\begin{aligned} x &= (1-\lambda^2)a\cos\alpha \\ y &= (1-\lambda^2)a\sin\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

odakle je očigledno

$$\left.\begin{aligned} &\frac{y}{x} = tg\,\alpha \\ &\frac{x^2+y^2}{(1-\lambda^2)^2} = a^2. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Uvrstimo li sada ovako dobiveno $\boldsymbol{a}$ i α u prvu od jednačina sistema (8), nakon jednostavnog računa, dobićemo singularni integral jednačine (7):

$$\lambda^2(x^2+y^2+z^2) = z^2 \tag{11}$$

Primjedba: Singularni integral se može odrediti i direktno iz parcijalne diferencijalne jednačine i jednačina koje se iz nije dobijaju diferenciranjem po $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$, redom, tj. eliminacijom $\boldsymbol{p}$ i $\boldsymbol{q}$ iz sistema:

$$\begin{aligned} &(1+p^2+q^2)z^2 - \lambda^2\left[(x+pz)^2+(y+qz)^2\right] = 0, \\ &2pz^2 - 2\lambda^2 z(x+pz) = 0, \\ &2qz^2 - 2\lambda^2 z(y+qz) = 0, \\ &z(1+p^2+q^2)p = \lambda^2(x+pz)(1+pq+p^2) \text{ i} \\ &z(1+p^2+q^2)q = \lambda^2(y+qz)(1+pq+q^2). \end{aligned}$$

Odavde se dobija

$$\begin{aligned} &pz - \lambda^2(x+pz) = 0 \\ &qz - \lambda^2(y+qz) = 0. \end{aligned}$$

Eliminacijom $\boldsymbol{p}$ i $\boldsymbol{q}$, iz polazne jednačine, koristeći posljednje dvije jednakosti, dobićemo traženi singularni integral

$$\lambda^2(x^2+y^2+z^2) = z^2.$$

Zadatak 2. Riješiti parcijalnu diferencijalnu jednačinu drugog reda:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Rješenje: Napišimo jednačinu (1) u obliku

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right) + 3\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0. \tag{1'}$$

Ako uvedemo novu funkciju u sa

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = u, \tag{*}$$

jednačina (1) će se svesti na jednačinu

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

Ona je ekvivalentna sistemu običnih diferencijalnih jednačina u simetričnom obliku

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{3} = \frac{du}{0}, \tag{3}$$

koji, očigledno, ima dva nezavisna integrala:

$$y - 3x = a \quad \text{i} \quad u = b. \tag{4}$$

Opšte rješenje sistema (3), pa prema tome i jednačine (2), biće:

$$u = \varphi'(y - 3x). \tag{5}$$

S obzirom na (*), odavde dobijamo parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(y - 3x),$$

koja se svodi na sistem običnih diferencijalnih jednačina u simetričnom obliku

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1} = \frac{dz}{\varphi'(y - 3x)}. \tag{6}$$

Odavde, koristeći pravila koja važe za računanje s produženim proporcijama, dobijamo

$$\frac{dy - 3dx}{-1 - 3} = \frac{dz}{\varphi'(y - 3x)} \quad \text{i} \quad dx + dy = 0,$$

tako da će, dva nezavisna prva integrala sistema (6), biti:

$$-4z = \varphi(y-3x)+\alpha \quad \text{i} \quad x+y=\beta. \tag{7}$$

Oni nas dovode do opšteg rješenja sistema (6), pa prema tome i jednačine (1), koje glasi

$$-4z = \varphi(y-3x)+\Psi(x+y), \quad \text{tj.}$$
$$z = \Phi(3x-y)+\Psi(x+y),$$

gdje su Φ i Ψ proizvoljne funkcije od $3x-y$, odnosno $x+y$.

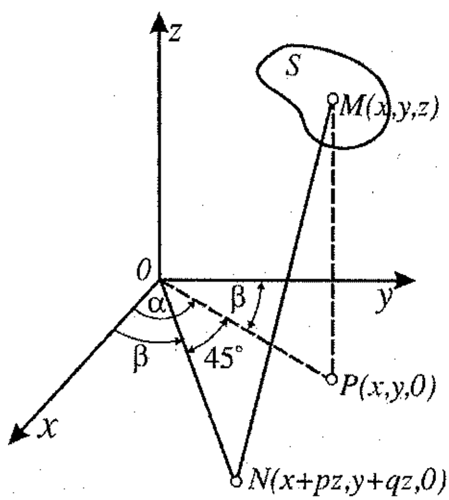
Zadatak 3. Neka je M tačka površi S, P njena ortogonalna projekcija na xOy ravan, N prodor normale, povučene u tački M, na površ S, sa xOy ravni i O koordinatni početak.

a) Naći opšti oblik površi za koje je $\measuredangle NOP = 45^o$, u Descartesovim i polarno–cilindričnim koordinatama.

b) Odrediti onu površ koja ima navedenu osobinu i prolazi Ox-osom.

c) Koje površi drugog reda imaju gornju osobinu?

Riješenje: a)



sl. 28

Ako je $M(x, y, z)$, tada će njena ortogonalna projekcija na xOy ravan biti $P(x, y, 0)$. Iz jednačine normale povučene na površ S u tački M:

$$\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1}$$

se, za $Z = 0$, dobijaju koordinate tačke

$$N: \quad X = x + pz, \; Y = y + qz, \quad Z = 0.$$

Uz oznake za uglove

$$\alpha = \sphericalangle xOP, \quad \beta = \sphericalangle xON,$$

dobićemo

$$tg\alpha = \frac{y+qz}{x+pz}, \qquad tg\beta = \frac{y}{x}, \tag{*}$$

tako da, prema uslovu zadatka i (*), imamo

$$1 = tg\, 45^o = tg(\alpha - \beta) = \frac{qzx - pzy}{x^2 + y^2 + pzx + qzy}.$$

Odavde, na osnovu jednostavnog računa, dobijamo traženu parcijalnu diferencijalnu jednačinu:

$$pz(x+y) + qz(y-x) = -(x^2 + y^2). \tag{1}$$

Ova linearna parcijalna diferencijalna jednačina ekvivalentna je sistemu diferencijalnih jednačina karakteristika:

$$\frac{dx}{z(x+y)} = \frac{dy}{z(y-x)} = -\frac{dz}{x^2+y^2}. \tag{2}$$

Odavde je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}. \tag{3}$$

Pošto je (3) homogena diferencijalna jednačina, rješavaćemo je smjenom

$$y / x = t \tag{**}$$

koja je svodi na jednačinu

$$\frac{t+1}{t^2+1}dt = -\frac{dx}{x} \tag{3'}$$

u kojoj su promjenljive razdvojene. Iz njenog rješenja

$$\ln\sqrt{t^2+1} + arctg\, t = C_1 / x\,,$$

nakon povratka na "stare" promjenljive dobićemo rješenje jednačine (3):

$$\sqrt{x^2+y^2}\exp\left(arc\,tg(y/x)\right) = C_1 \tag{4}$$

koje istovremeno predstavlja jedan prvi integral sistema (2), pa prema tome i parcijalne diferencijalne jednačine (1).

S druge strane, iz (2), koristeći osobine produžene proporcije, dobićemo

$$-\frac{dz}{x^2+y^2} = \frac{x\,dx + y\,dy}{zx^2+zy^2}, \quad \text{tj.}$$

$$-2z\,dz = d(x^2+y^2)\,,$$

odakle dobijamo još jedan prvi integral

$$x^2+y^2+z^2 = C_2. \tag{4'}$$

Prema tome, opšti oblik tražene površine, koja ispunjava uslov zadatka, u Descartesovim koordinatama biće:

$$F\left(\sqrt{x^2+y^2}\exp(arc\,tg(y/x))\right) = x^2+y^2+z^2\,, \tag{5}$$

dok, u polarno-cilindričnim koordinatama, prima oblik:

$$F(\rho\exp\theta) = \rho^2+z^2\,, \tag{5'}$$

gdje je F proizvoljna funkcija.

b) Da bismo dobili površ koja prolazi Ox-osom, uvrstićemo u (5): $y = 0,\ z = 0,$ i tako odrediti funkciju F:

$$F(x) = x^2.$$

Prema tome, jednačina površi koja prolazi Ox-osom biće, u Descartesovim koordinatama oblika:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x^2 + y^2)\exp\left(2 arc\,tg(y/x)\right),$$

a u polarno-cilindričnim koordinatama:

$$\rho^2 + z^2 = \rho^2 \exp(2\theta), \quad \text{tj.}$$

$$z^2 = \rho^2 \left(\exp(2\theta) - 1\right).$$

c) Očigledno će traženi, opšti oblik jednačine površi drugog reda, s navedenom osobinom, biti sfere:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Zadatak 4. Za Mongeovu jednačinu

$$dz^2 = dx^2 + dy^2 \tag{1}$$

odrediti jednačinu odgovarajućeg konusa T i odgovarajuću parcijalnu diferencijalnu jedančinu prvog reda. Zatim, odrediti jedan potpuni integral parcijalne diferencijalne jednačine pa, pomoću njega, odrediti Mongeove krive linije.

Rješenje: Jednačinu (1) možemo napisati u obliku

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2. \tag{1'}$$

Jednačina konusa T

$$(Z - z)^2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2 \tag{2}$$

se može napisati u obliku

$$Z - z = \sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2}. \tag{2'}$$

Odavde, diferenciranjem po x, odnosno y, dobijamo

$$p = \frac{X - x}{Z - z}, \quad \text{odnosno}$$

$$q = \frac{Y - y}{Z - z},$$

tako da će odgovarajuća parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda biti

$$p^2 + q^2 = 1. \tag{3}$$

Uzmemo li, sada

$$p = \cos a, \quad q = \sin a, \tag{4}$$

dobićemo

$$dz = \cos a\, dx + \sin a\, dy,$$

tako da će jedan potpuni integral jednačine (3) biti:

$$\left.\begin{aligned} z &= x\cos a + y\sin a + b \\ b &= \omega(a). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Mongeove krive su određene sistemom jednačina

$$\left.\begin{aligned} z &= \quad x\cos a + y\sin a + \omega(a) \\ 0 &= -x\sin a + y\cos a + \omega'(a) \\ 0 &= -x\cos a - y\sin a + \omega''(a) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

u kojem je prva od jednakosti potpuni integral (5), a preostale dvije dobijene iz nje, uzastopnim diferenciranjem 2 puta po a. Sabiranjem prve i posljednje jednakosti u (6) dobićemo

$$z = \omega(a) + \omega''(a).$$

Ako sada pomnožimo drugu od jednakosti (6) sa $\sin a$, a treću sa $\cos a$ (odnosno drugu sa $\cos a$, a treću sa $-\sin a$), dobićemo, nakon sabiranja

$$\begin{aligned} x &= \omega'(a)\sin a + \omega''(a)\cos a \\ y &= \omega''(a)\sin a - \omega'(a)\cos a. \end{aligned}$$

Prema tome, Mongeove krive u parametarskom obliku biće određene sa:

$$\begin{aligned} x &= \omega'(a)\sin a + \omega''(a)\cos a \\ y &= \omega''(a)\sin a - \omega'(a)\cos a. \\ z &= \omega''(a) + \omega(a). \end{aligned}$$

Zadatak 5. Metodom sukcesivnih aproksimacija odrediti ono rješenje jednačine

$$s - xp - yq - z = 0 \tag{1}$$

koje se svodi za:

$$\left.\begin{aligned} y &= 0 \quad \text{na} \quad z = x, \\ x &= 0 \quad \text{na} \quad z = y. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Rješenje: Po metodi sukcesivnih aproksimacija, se za jednačinu

$$s + ap + bq + cz = h \tag{1'}$$

rješenje, koje zadovoljava uslove:

$$\left.\begin{aligned} z &= f(x), \quad za \quad y = y_o \\ z &= g(y), \quad za \quad x = x_o \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

traži u obliku:

$$\varphi_o(x,y) = f(x) + g(y) - f(x_o), \tag{3}$$

$$\varphi_n(x,y) = \varphi_o(x,y) - \int_{x_o}^{x}\int_{y_o}^{y} \left(a\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial y} + c\,\varphi_{n-1} - h \right) dx\,dy. \tag{4}$$

S obzirom da je u konkretnom slučaju, prema (1):

$$a = -x, \;\; b = -y, \;\; c = -1, \;\; h = 0,$$

i prema (2)

$$f(x) \equiv x, \;\; g(y) \equiv y, \;\; x_o = y_o = 0,$$

jasno je da će biti

$$\varphi_o(x,y) = x + y.$$

Lako se dokazuje da je:

$$\varphi_1(x,y) = (x+y)(1+xy) = \varphi_o(x,y) + xy(x+y),$$

$$\varphi_2(x,y) = \varphi_1(x,y) + \frac{2}{3}(xy)^2(x+y).$$

Prema tome, za očekivati je da će biti

$$\varphi_n(x,y) = \varphi_{n-1}(x,y) + a_n(xy)^n(x+y),$$

gdje su koeficijenti a_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ zasada neodređeni. Uz uvedene oznake, će biti

$$\varphi_n(x,y) = (x+y)\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu (xy)^\nu,$$

tako da bi, ako pustimo da $n \to \infty$, rješenje bilo dato sa

$$\begin{aligned} z = \varphi(x,y) &= (x+y)\sum_{n=0}^{\infty} a_n (xy)^n = \\ &= a_o(x+y) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x^{n+1}y^n + x^n y^{n+1}). \end{aligned} \tag{5}$$

Pod pretpostavkom da je ovaj red uniformno konvergentan, dobija se:

$$p = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[(n+1)x^n y^n + n x^{n-1} y^{n+1}\right], \tag{6}$$

$$q = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[n x^{n+1} y^{n-1} + (n+1)x^n y^n\right] \quad \text{i} \tag{6'}$$

$$\begin{aligned} s &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[n(n+1)x^n y^{n-1} + n(n+1)x^{n-1}y^n\right] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) a_n (x^n y^{n-1} + x^{n-1} y^n). \end{aligned} \tag{6''}$$

Pretpostavka da je $z = \varphi(x,y)$, dato sa (5), rješenje problema (1) - (2), i da su, u tom slučaju, $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ i $s = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ određeni sa (6), (6′) i (6″) nas, nakon jednostavnog računa, dovodi do jednakosti

$$(x+y)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left[(n+2)a_{n+1} - 2a_n\right](xy)^n \equiv 0.$$

Da bi ova jednakost bila identički zadovoljena, potrebno i dovoljno je da bude

$$(n+2)a_{n+1} - 2a_n = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad \text{tj.}$$

$$a_{n+1} = \frac{2}{n+2} a_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

odakle dobijamo

$$a_n = \frac{2 \cdot 2 \cdots 2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n+1)} a_o = \frac{2^n}{(n+1)!} a_o .$$

Prema tome

$$z = (x+y) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2xy)^n}{(n+1)!} a_o =$$

$$= \frac{(x+y)}{2xy} \left[\exp(2xy) - 1\right] a_o .$$

Iz početnih uslova (2) slijedi da je $a_o = 1$, dakle traženo rješenje je

$$z = \frac{x+y}{2xy} \left(\exp(2xy) - 1\right),$$

s tim da je

$$z(0,0) = 0 .$$

Napomena: Do rješenja se moglo doći koristeći "do kraja" metod sukcesivnih aproksimacija. Naime, ako

$$\varphi_n(x,y) = \varphi_{n-1}(x,y) + a_n (xy)^n (x+y)$$

uvrstimo u (5), dobićemo

$$\varphi_{n+1}(x,y) = x + y + \int_0^x \int_0^y \left(x \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial y} + \varphi_{n-1} \right) dx\, dy +$$

$$+ 2(n+1) a_n \int_0^x \int_0^y \left(x^{n+1} y^n + x^n y^{n+1} \right) dx\, dy ,$$

odnosno

$$\varphi_{n+1}(x,y) = \varphi_n(x,y) + 2(n+1) a_n \frac{x^{n+2} y^{n+1} + x^{n+1} y^{n+2}}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \varphi_n(x,y) + \frac{2}{n+2} a_n (xy)^{n+1} (x+y).$$

Znači

$$a_{n+1} = \frac{2}{n+2} a_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

sa

$$a_o = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{2}{3},$$

što se slaže s dobivenim rezultatom.

Prema tome

$$a_n = \frac{2}{n+1}\, a_{n-1} = \frac{2}{n+1} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2^n}{(n+1)!},$$

tako da je

$$\varphi_n(x,y) = (x+y) \sum_{\nu=0}^{n} \frac{2^\nu}{(\nu+1)!} x^\nu y^\nu .$$

Prema tome

$$\varphi(x,y) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x,y) = \frac{(x+y)}{2xy} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2xy)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x+y}{2xy}(e^{2xy} - 1),$$

uz uslov $\varphi(0,0) = 0$.

Dobiveni red je uniformno konvergentan u cjeloj ravni xOy. Lako se uvjeriti da je dobivena funkcija traženo rješenje.

Zadatak 6. Naći funkciju harmonijsku unutar cilindra visine $\boldsymbol{h}$, poluprečnika $\boldsymbol{a}$, koja se anulira na obje njegove baze i prima unaprijed zadane vrijednosti na njegovom omotaču, tj.

$$u\Big|_{r=a} = f(z).$$

Specijalno rješiti problem u slučaju kada je

a) $f(z) = C$

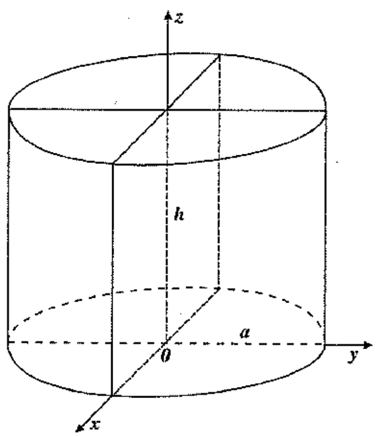
b) $f(z) = Az\left(1 - \dfrac{z}{h}\right)$

Rješenje: Da bi neka funkcija bila harmonijska mora zadovoljavati Laplaceovu jednačinu. U cilindričnim koordinatama (r, θ, z) Laplaceova jednačina ima oblik

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 . \tag{1}$$

Pošto se u našem slučaju radi o radijalnim oscilacijama, funkcija u ne zavisi od θ, tako da je $u = u(r, z)$ i jednačina (1) prima oblik

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 . \tag{2}$$



(sl. 29)

Prema tome, rješavanje datog problema se svodi na rješavanje jednačine (2), uz početne uslove:

$$\left.\begin{aligned} u\Big|_{r=a} &= f(z) \\ u\Big|_{z=0} &= 0 \\ u\Big|_{z=h} &= 0 . \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Rješenje jednačine (2) tražićemo u obliku proizvoda

$$u = R(r)\, Z(z) . \tag{4}$$

Sada početni uslovi (3) primaju oblik

$$Z(0) = 0, \quad Z(h) = 0. \tag{5}$$

Uvrštavanjem (4) u (2), dobivamo diferencijalnu jednačinu

$$Z\left(\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right) = -R\frac{d^2Z}{dz^2}$$

koja se može pisati u obliku jednakosti

$$\frac{\dfrac{d^2R}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dR}{dr}}{R} = -\frac{\dfrac{d^2Z}{dz^2}}{Z} = \lambda^2,$$

i koja se raspada na dvije diferencijalne jednačine:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - \lambda^2 R = 0 \quad \text{i} \tag{6}$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + \lambda^2 Z = 0. \tag{7}$$

Opšte rješenje jednačine (7) je

$$Z(z) = A\cos\lambda z + B\sin\lambda z.$$

Uslov (5)

$$Z(0) = 0, \quad \text{povlači} \quad A = 0,$$

tako da je

$$Z(z) = B\sin\lambda z. \tag{8}$$

Opštost se neće umanjiti ako uzmemo $B = 1$. Osim toga iz $Z(h) = 0$, sljedi

$$\sin\lambda h = 0, \qquad \text{znači}$$

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{h}, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Dakle,

$$Z(z) = \sin\left(k\pi z/h\right), \quad k = 1, 2, \dots .$$

Ranije smo vidjeli da je opšte rješenje jednačine (6) oblika

$$R(r) = C\,J_o(\lambda r) + D\,K_o(\lambda r) \tag{9}$$

i da, pošto $K_o(\lambda r) \to \infty$, kad $r \to 0$, a traženo rješenje treba da bude ograničeno, mora da bude $D = 0$. Ako uzmemo $C = 1$, dobićemo

$$R(r) = J_o(\lambda r) = J_o\left(k\pi r/h\right).$$

Prema tome, na osnovu (4), (8) i (9), imamo

$$u_k(r,z) = J_o\left(k\pi r/h\right)\sin\left(k\pi z/h\right),$$

pa će i svaka funkcija, dobivena linearnom superpozicijom rješenja $u_k(r, z)$

$$u(r,z) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m J_o\left(m\pi r/h\right)\sin\left(m\pi z/h\right), \tag{10}$$

biti rješenje posmatranog problema.

Ostalo je još samo da se iskoristi i prvi od uslova (3), prema kojem je

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m J_o\left(m\pi a/h\right)\sin\left(m\pi z/h\right). \tag{11}$$

Pošto je ovo razvitak funkcije $f(z)$ u Fourierov red, koeficijente $\boldsymbol{C}_m$ možemo odrediti pomoću formule

$$C_m J_o\left(m\pi a/h\right) = \frac{2}{h}\int_0^h f(z)\sin\left(m\pi z/h\right)dz, \quad \text{tj.}$$

$$C_m = \frac{2}{h\,J_o\left(m\pi a/h\right)}\int_0^h f(z)\sin\left(m\pi z/h\right)dz. \tag{12}$$

Prema tome, rješenje problema (2) + (3), dato sa (10), će primiti oblik:

$$u(r,z) = \frac{2}{h}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_o\left(m\pi r/h\right)}{J_o\left(m\pi a/h\right)}\sin\left(m\pi z/h\right)\int_0^h f(z)\sin\left(m\pi z/h\right)dz. \tag{13}$$

Specijalno, imaćemo, za:

a) $\qquad f(z) = C, \quad C = const,$

$$C_m J_o\left(m\pi a/h\right) = \frac{2}{h}\int_0^h C\sin\left(m\pi z/h\right)dz =$$

$$= -\frac{2C}{m\pi}\cos\left(m\pi z/h\right)\Big|_0^h = \left[1-(-1)^m\right]\frac{2C}{m\pi}.$$

S obzirom da je

$$\left[1-(-1)^m\right]\frac{2C}{m\pi} = \begin{cases} 0 & za \quad m = 2n \\ \dfrac{4C}{m\pi} & za \quad m = 2n+1, \end{cases}$$

biće

$$C_{2n+1} = \frac{4C}{(2n+1)\pi}\,\frac{1}{J_o\left((2n+1)\pi a/h\right)}.$$

Dakle, u ovom slučaju, rješenje posmatranog problema je

$$u(r,z) = \frac{4C}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{J_o\left((2n+1)\pi r/h\right)}{J_o\left((2n+1)\pi a/h\right)}\,\frac{\sin\left((2n+1)\pi z/h\right)}{2n+1}.$$

b) $$f(z) = Az\left(1-\frac{z}{h}\right), \quad A = const.$$

$$C_m J_o\left(m\pi\, a/h\right) = \frac{2}{h}\int_0^h Az\left(1-\frac{z}{h}\right)\sin\left(m\pi\, z/h\right)dz =$$

$$= \frac{2A}{h}\left[\int_0^h z\sin\left(m\pi\, z/h\right)dz - \frac{1}{h^2}\int_0^h z^2\sin\left(m\pi\, z/h\right)dz\right] =$$

$$= \frac{2A}{h}I_1 - \frac{2A}{h^2}I_2.$$

Da bismo izračunali integrale I_1 i I_2 koristićemo parcijalnu integraciju uzimajući, pri tome, u prvom integralu $\boldsymbol{u = z}$, odnosno, drugom $\boldsymbol{u = z^2}$, a u oba

$$\boldsymbol{dv = \sin\left(m\pi\, z/h\right)dz}.$$

Nakon jednostavnog računa, dobićemo

$$I_1 = (-1)^{m+1} \frac{h^2}{m\pi}$$

$$I_2 = (-1)^{m+1} \frac{h^3}{m\pi} + 2\left[(-1)^m - 1\right]\left(\frac{h}{m\pi}\right)^3,$$

Prema tome

$$C_m J_o\left(m\pi\, a/h\right) = \frac{2A}{h} I_1 - \frac{2A}{h^2} I_2 =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2A}{h}\left(-\dfrac{h^2}{m\pi}\right) + \dfrac{2A}{h^2}\dfrac{h^3}{m\pi} = 0, & za \ \boldsymbol{m = 2n} \\ \dfrac{2A}{h}\dfrac{h^2}{m\pi} - \dfrac{2A}{h^2}\left[\dfrac{h^3}{m\pi} - \dfrac{4h^3}{(m\pi)^3}\right] = \dfrac{8Ah}{(m\pi)^3}, & za \ \boldsymbol{m = 2n+1} \end{cases}$$

tako da je rješenje problema (2) + (3), u slučaju b), dato sa:

$$u(r,z) = \frac{8Ah}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_o\left((2n+1)\pi\, z/h\right)}{J_o\left((2n+1)\pi\, a/h\right)} \frac{\sin\left((2n+1)\pi\, z/h\right)}{(2n+1)^3}.$$

<u>Zadatak 7.</u> Riješiti rubni problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) - 2\alpha^2 \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 \le r \le 1, \ \ 0 < t < \infty \tag{1}$$

$$\left|u(0,t)\right| < +\infty; \quad u(1,t) = 0, \qquad 0 < t < \infty; \tag{2}$$

$$u(r,0) = 1 - r^2, \quad \frac{\partial u(r,0)}{\partial t} = 2r^2, \qquad 0 < r < 1. \tag{3}$$

<u>Rješenje:</u> Dakle, treba riješiti jednačinu (1) sa zadanim rubnim uslovom (2) i početnim uslovima (3).

Jednačinu (1) rješavaćemo metodom razdvajanja promjenljivih, tražeći rješenje u obliku:

$$u(r,t) = R(r)\, T(t). \tag{4}$$

Uvrstimo li (4) u (1), dobićemo

$$\frac{1}{a^2}\,\frac{T''+2\alpha^2 T'}{T} = \frac{R''+\frac{1}{r}R'}{R} = -\lambda\,,$$

tj. polazna parcijalna diferencijalna jednačina će se svesti na dvije obične diferencijalne jednačine:

$$T''+2\alpha^2 T' + a^2\lambda T = 0 \quad \text{i} \tag{5}$$

$$R''+r^{-1}R'+\lambda R = 0\,. \tag{6}$$

Jednačina (6) je Besselova jednačina, tako da je njeno opšte rješenje

$$R(r) = C\,J_o(r\sqrt{\lambda}) + D\,K_o(r\sqrt{\lambda})\,.$$

Kako $K_o(r\sqrt{\lambda}) \to \infty$, kada $r \to 0$, to, s obzirom na prvi uslov iz (2), mora da bude $D = 0$, tako da je

$$R(r) = J_o(r\sqrt{\lambda})\,. \tag{7}$$

λ može uzimati samo one vrjednosti za koje je zadovoljen rubni uslov $u(1, t) = 0$, za sve $0 < t < \infty$, a to, s obzirom na (4) i (7), znači da mora biti

$$J_o(\sqrt{\lambda}) = 0\,. \tag{8}$$

Kao što je poznato, ova jednačina ima beskonačno mnogo pozitivnih korijena. Označimo li sa λ_{om} $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ kvadrate tih pozitivnih korijena, tada će brojevi $\lambda_{01}, \lambda_{02}, \lambda_{03}, \ldots$ biti sopstvene vrijednosti našeg problema. Uzmimo da su one poredane po veličini, tj. da je

$$\lambda_{01} < \lambda_{02} < \lambda_{03}, \ldots\,.$$

Karakteristična jednačina homogene diferencijalne jednačine (5) ima oblik

$$\xi^2 + 2\alpha^2\xi + a^2\lambda_{om} = 0\,,$$

tj.

$$\xi = -\alpha^2 \pm i\sqrt{a^2\lambda_{om} - \alpha^4}\,.$$

Pretpostavimo najprije da je za $m = 1, 2, 3, \ldots$ $a^2\lambda_{om} - \alpha^4 > 0$. Tada je

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= -\alpha^2 + i\omega_{om} \\ \xi_2 &= -\alpha^2 - i\omega_{om} \end{aligned}\right\},$$

gdje je $\qquad \omega_{om} = \sqrt{a^2\lambda_{om} - \alpha^4}$.

Dakle, opšte rješenje jednačine (5) glasi:

$$T(t) = e^{-\alpha^2 t}(A_m \cos\omega_{om}t + B_m \sin\omega_{om}t),$$

pa, na osnovu (4), izlazi

$$u_m(r,t) = e^{-\alpha^2 t}(A_m \cos\omega_{om}t + B_m \sin\omega_{om}t)\, J_o(r\sqrt{\lambda_{om}}) \quad \text{i}$$

$$u(r,t) = e^{-\alpha^2 t}\sum_{m=1}^{\infty}(A_m \cos\omega_{om}t + B_m \sin\omega_{om}t)\, J_o(r\sqrt{\lambda_{om}}). \tag{9}$$

Odavde formalnim diferenciranjem dobijamo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\alpha^2 e^{-\alpha^2 t}\sum_{m=1}^{\infty}(A_m \cos\omega_{om}t + B_m \sin\omega_{om}t)\, J_o(r\sqrt{\lambda_{om}}) +$$

$$+ e^{-\alpha^2 t}\sum_{m=1}^{\infty}(-A_m\omega_{om} \sin\omega_{om}t + B_m\omega_{om} \cos\omega_{om}t)\, J_o(r\sqrt{\lambda_{om}}).$$

Na osnovu početnih uslova (3) dobivamo

$$1 - r^2 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_o(r\sqrt{\lambda_{om}}) \quad \text{i} \tag{10}$$

$$2r^2 = \sum_{m=1}^{\infty}(-\alpha^2 A_m + \omega_{om}B_m)\, J_o(r\sqrt{\lambda_{om}}). \tag{11}$$

Red u (10) predstavlja razvitak funkcije $\Phi(r) = 1 - r^2$ po Besselovim funkcijama, pa se koeficijenti A_m tog razvitka izračunavaju po obrascu

$$A_m = \frac{2}{J_1^2(\sqrt{\lambda_{om}})}\int_0^1 r(1 - r^2)J_o(r\sqrt{\lambda_{om}})\,dr. \tag{12}$$

Isto tako se koeficijenti $-\alpha^2 A_m + \omega_{om}B_m$, razvitka funkcije $\Phi(r) = 2r^2$ po Besselovim funkcijama, izračunavaju po obrascu

$$-\alpha^2 A_m + \omega_{om}B_m = \frac{2}{J_1^2(\sqrt{\lambda_{om}})}\int_0^1 2r^3 J_o(r\sqrt{\lambda_{om}})\,dr,$$

a odavde izlazi

$$B_m = \frac{\alpha^2}{\omega_{om}}A_m + \frac{4}{\omega_{om}J_1^2(\sqrt{\lambda_{om}})}\int_0^1 r^3 J_o(r\sqrt{\lambda_{om}})\,dr. \tag{13}$$

Integrale (12) i (13) ćemo izračunati koristeći poznate obrasce za integrale Besselovih funkcija

$$\int_0^x t J_o(t)\, dt = x J_1(x) \tag{14}$$

$$\int_0^x t^3 J_o(t)\, dt = 2x^2 J_o(x) + (x^3 - 4x) J_1(x). \tag{15}$$

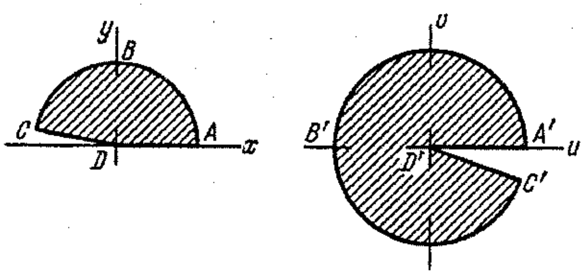
Kad te integrale izračunamo, dobićemo

$$\left.\begin{aligned} A_m &= \frac{8}{\lambda_{om}^{3/2} J_1(\sqrt{\lambda_{om}})} \\ B_m &= \frac{4(2\alpha^2 + \lambda_{om} - 4)}{\omega_{om}\lambda_{om}^{3/2} J_1(\sqrt{\lambda_{om}})}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

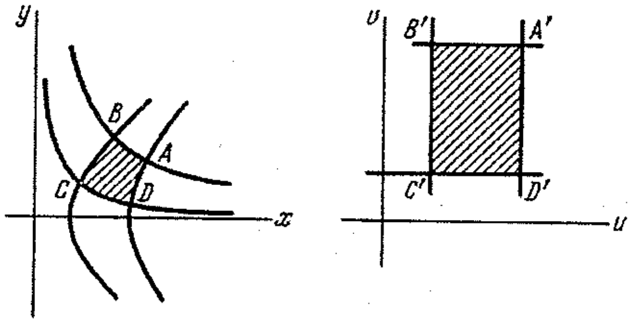
Uvrštavanjem (16) u (9) naš problem biće potpuno rješen.

Ako sada pretpostavimo da je $a^2\lambda_{om} - \alpha^4 < 0$, tj. da su ω_{om} imaginarni, rješenje problema bi se promijenilo utoliko što bi se, umjesto trigonometrijskih funkcija ***cos*** i ***sin*** pojavile hiperbolne funkcije ***ch*** i ***sh***.

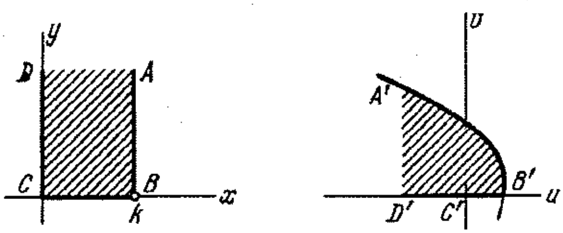
TABELA KONFORMNIH PRESLIKAVANJA



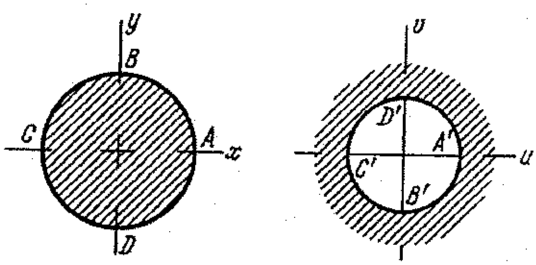
(sl. 1) $w = z^2$.



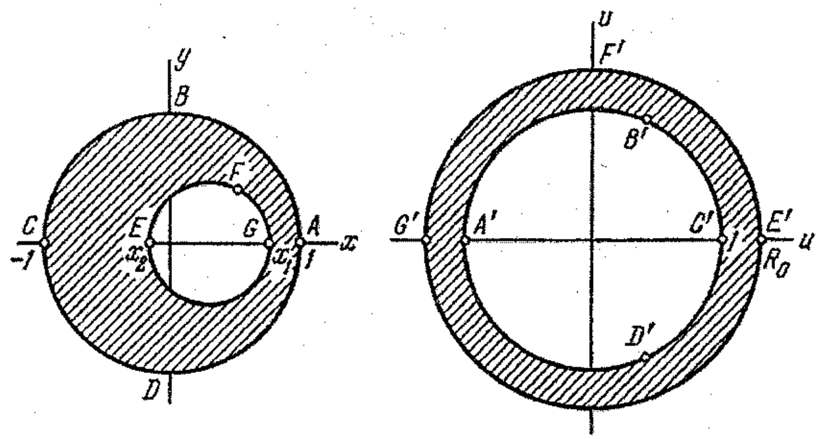
(sl. 2) $w = z^2$.



(sl. 3) $w = z^2$.

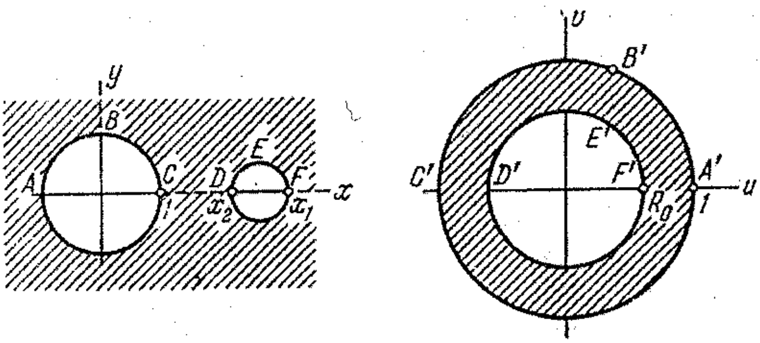


(sl. 4) $w = \frac{1}{z}$.



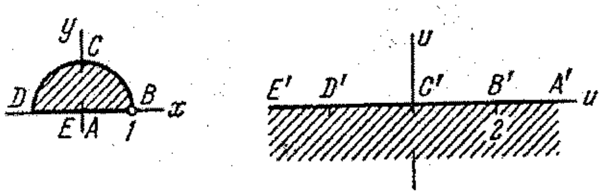
(sl. 5) $\quad w = \dfrac{z-a}{az-1}\,; \quad a = \dfrac{1+x_1x_2+\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}}{x_1+x_2}\,;$

$R_0 = \dfrac{1-x_1x_2+\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}}{x_1-x_2}$ $\quad$ ($a>1$ i $R_0>1$, ako je $-1<x_2<x_1<1$).

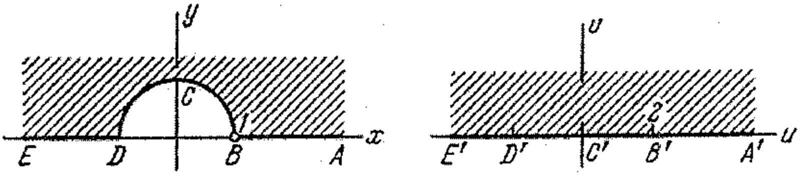


(sl. 6) $\quad w = \dfrac{z-a}{az-1}\,; \quad a = \dfrac{1+x_1x_2+\sqrt{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}}{x_1+x_2}\,;$

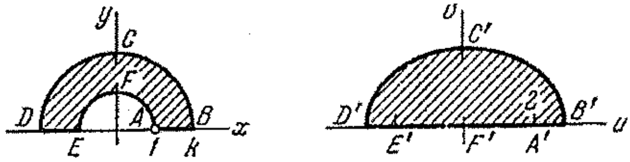
$R_0 = \dfrac{x_1x_2-1-\sqrt{(x_2^2-1)(x_2^2-1)}}{x_1-x_2}$ $\quad$ ($x_2<a<x_1$ i $0<R_0<1$, ako je $1<x_2<x_1$).



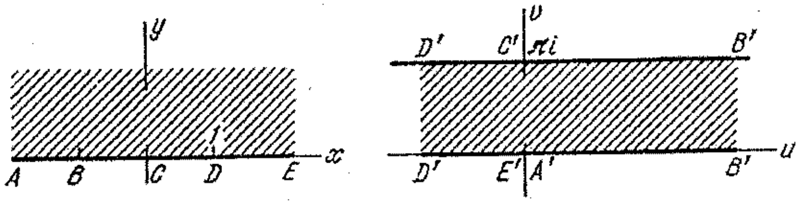
(sl. 7) $\quad w = z+\dfrac{1}{z}\,.$



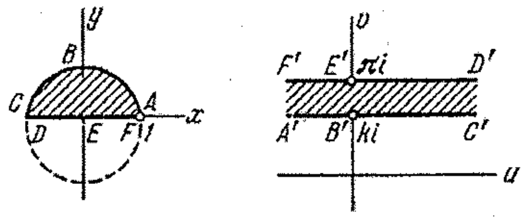
(sl. 8) $w = z + \frac{1}{z}$.



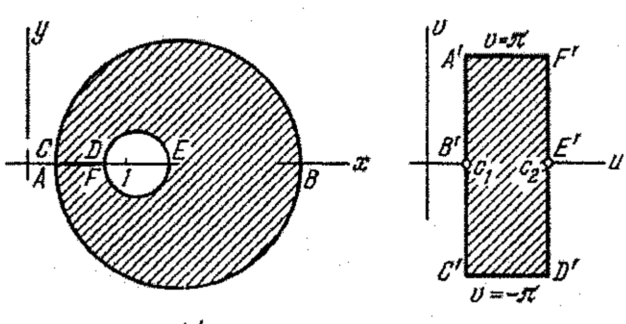
(sl. 9) $w = z + \frac{1}{z}$; $B'C'D'$ **je poluelipsa** $\left(\frac{ku}{k^2+1}\right)^2 + \left(\frac{kv}{k^2-1}\right)^2 = 1$.



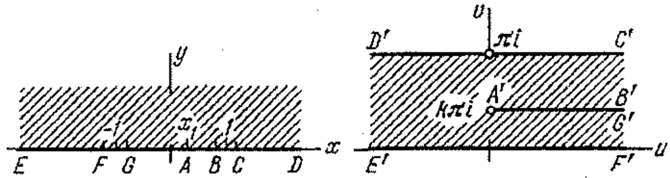
(sl. 10) $w = \ln \frac{z-1}{z+1}$; $z = -\operatorname{cth} \frac{w}{2}$



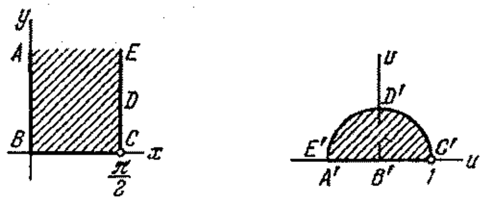
(sl. 11) $w = \ln \frac{z-1}{z+1}$; ABC **je luk kružnice** $x^2+y^2-2y \operatorname{ctg} k = 1$.



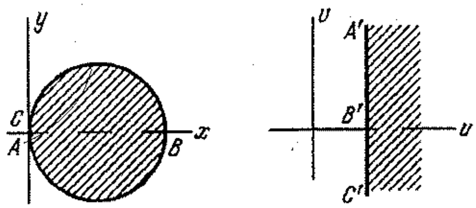
(sl. 12) $w = \ln \frac{z+1}{z-1}$; **centri kružnica** $z = \operatorname{cth} c_n$, **i radijusi** $\frac{1}{\operatorname{sh} c_n}$ $(n = 1, 2)$.



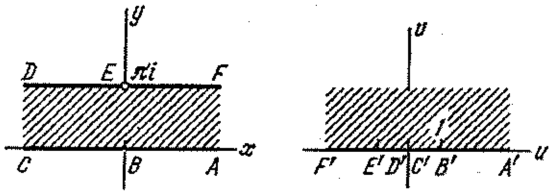
(sl. 13) $w = k \ln \frac{k}{1-k} + \ln 2(1-k) + \pi i - k \ln (z+1) - (1-k) \ln (z-1); \quad x_1 = 2k-1.$



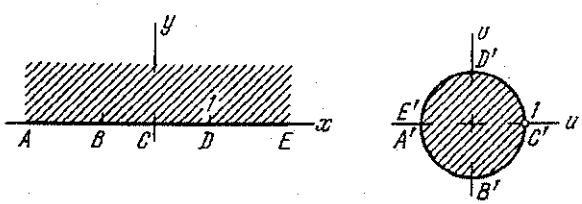
(sl. 14) $w = \mathrm{tg}^2 \frac{z}{2} = \frac{1-\cos z}{1+\cos z}.$



(sl. 15) $w = \frac{1}{z}.$



(sl. 16) $w = e^z.$



(sl. 17) $w = \frac{i-z}{i+z}.$

INDEX IMENA I POJMOVA

(*) *C–R uslovi*

LITERATURA

1. **I. Aganović i K. Veselić: Jednadžbe matematičke fizike,** Školska Knjiga, Zagreb, 1985.
2. **В. Я. Арсенин: Математическая физика, Основные уравнения и специяльные функцийи,** Издат. "Наука", гл. ред. физ – мат. лтерат., Москва, 1966.
3. **И. Г. Араманович и В. И. Левин: Уравнениеия Математической физике,** Издат. "Наука", гл. ред. физ – мат. лтерат., Москва, 1964.
4. **A. V. Bitsadze and D. F. Kalinichenko: A Collection of Problems on the Equations of Mathematical Physics,** Mir Publishers Moscow, 1980.
5. **S. Bochner: Lectures on Fourier Integrals,** Princeton University Press, Princeton, N. J. 1959.
6. **Б. М. Будак, А. А. Самарский и А. Н. Тихонов: Сборник задач по математической физике,** Издат. "Наука", гл. ред. физ – мат. лтерат., Москва, 1972.
7. **R. V. Churchill: Introduction to Complex Variables and Applications,** Mc Graw – Hill Book Company, INC, New York – Toronto – Lodon, 1948.
8. **R. Courant and D. Hilbert: Methods of Mathematical Physics II,** New York, 1950.
9. **S. Farlow: Partial Differential Equations for Scientists and Engeneers,** John Wiley and Sons, Inc. 1982.
10. **A. R. Forsyth: Theory of Differential Equations,** т. IV, Cambridge University Press, 1948
11. **F. John: Partial Differential Equations,** Springer-Verlag, Applied Mathematical Sciences 1 New York – Heidelberg – Berlin, 1971.
12. **Н. С. Кошляков, Е. В. Глинер и М. М. Смирнов: Уравнения в частных производных математической физике,** Издат. Высшая школа, Москва, 1970.
13. **В. И. Левин: Методы математической физике,** Издат. "Наука", гл. ред. физ – мат. литерат., Москва, 1968.
14. **M. Marović: Sumabilnost razvitka po sopstvenim funkcijama Laplaceovog operatora u n-dimenzionalnom prostoru** (Monografija), Dijela ANUBiH, Knj. LV, Odjeljenje tehničkih nauka, knj. 8, Sarajevo, 1979.
15. **D. S. Mitrinović i J. D. Kečkić: Jednačine matematičke fizike** (2. izdanje), Građevinska Knjiga, Beograd, 1978.
16. **С. Г. Михлин: Курс математической физике,** Издат. "Наука", гл. ред. физ – мат. литерат. Москва, 1968.

17. **T. Pejović: Diferencijalne jednačine I i II dio,** "Naučna Knjiga, Beograd, 1974.

18. **W. Rudin: Real and Complex Analysis,** Mc Graw-Hill, Book Company, Inc. International Students Education, New York – London – Toronto, 1970.

19. **N. Saltikov: Teorija parcijalnih jednačina prvog reda s jednom nepoznatom funkcijom,** Beograd 1954.

20. **N. Saltikov: Teorija parcijalnih jednačina drugog reda,** Beograd 1952.

21. **В. И. Смирнов: Курс высшей математики, т. 2,** изд. 21, Издат. "Наука", Москва, 1970.

22. **В. В. Степанов: Курс дифференциальных уравнений,** изд.7, Государственное Издат., "Наука", Москва, 1958.

23. **А. Г. Свешников и А. Н. Тихонов: Теория функций комплексной переменной,** Издат. "Наука", изд. физ – мат. литерат., Москва, 1967.

24. **M. Vuković: Diferencijalne jednačine 1** (Diferencijalne jednačine i Sistemi diferencijalnih jednačina), Studentska Štamparija, Univerzitetska Knjiga, Sarajevo, 2000.

25. **G. N. Watson: A Treatise on the Theory of Bessel Functions,** 2nd Edition, Cambridge at the Univesity Press, 1962.

SUMMARY (from Preface)

Differential equations are one of the most important areas of both classical and modern mathematics, with applications not only in a great number of mathematical disciplines, including numerical and applied mathematics and physics, but also in the natural sciences and engineering. A lot of problems in physics, chemistry, biology, and all technical areas, can be reduced to the problem of solving some concrete differential equations. It is often impossible to say where some of these subjects end and mathematics begins, and *vice versa.*

The book *"Differential Equations – Theory and Problems"*[1], published within *"Univerzitetska knjiga"* editions, University of Sarajevo, grew out on the basis of many years' experience of teaching the subjects Differential Equations and Analysis 3, to third-year Mathematics students at the Department of Mathematics, University of Sarajevo.

The problems included in this book are problems which I have solved in tutorials. Most of them I set in written examinations in the subject Differential Equations and Analysis 3, during the period 1972 – 79 when I was assistant to Academician Fikret Vajzović. Apart from these I have included a certain number of special challenging problems earlier set by my professors, both academicians: Mahmut Bajraktarević in examinations in the subject Differential Equations for undergraduate students of Mathematics, and Manojlo Maravić in the subject Equations of Mathematical Physics for postgraduate students of different tehnical faculties (Civil, Mechanical and Electrical Engineering) in universities throughout entire Bosnia and Herzegovina.

In the beginning I planed to include the entire contents in a single book which would cover both ordinary differential equations and the first and second order partial differential equations. However, when the book was complete, I decided to divide the contents into two parts because of the scope size. The first volume is already published as *Differential Equations 1 (Ordinary Differential Equations and Systems of Differential Equations)*[2] and the second, *Differential Equations 2 (Partial Differential Equations and Equations in Mathematical Physics)*[3], has just gone to press.

The originall aim of this book was to prepare a collection of problems to accompany an appropriate theoretical book. However, the short, but clear theoretical expositions related to each group of problems make this book, quite adequate for the intended purpose is in great measure self–contained, independent of the theoretical books usually followed by collections of problems.

The book *Differential Equations 2* covers elements of theory and problems in the basic area of the first and second order partial differential equations including equations of mathematical

(1) *Diferencijalne jednačine – Teorija i zadaci*

(2) *Diferencijalne jednačine 1 (Obične diferencijalne jednačine i Sistemi diferencijalnih jednačina)*

(3) *Diferencijalne jednačine 2 (Parcijalne diferencijalne jednačine i Jednačine matematičke fizike)*

physics. It contains 250 pages of text with a very extensive and carefully selected set of about 100 solved problems. They range from routine problems designed to build basic skills to more challenging problems that produce understanding and build techiques of solving of these problems. This book is divided into two major and one minor chapters:

I First order partial differential equations (pp 9 – 110),

II Equations of mathematical physics (pp 111 – 210), and

III Miscellaneous problems (pp 211 – 232).

“As a rule, the material in each chapter is divided into several sections and subsections. Each section begins with a brief but clearly expounded overview of the theory (statement of definitions, principiles and theorems–without proofs) necessary to solve the problems in that section. As well as helping to solve the given problems, this concise theoretical introduction, is also necessary for a complete understanding of the theory of partial differential equations but it is a good theoretical supplement to a course of partial differential equations since it also contains material not taught in the courses mentioned above."

“As a well educated mathematician, with considerable knowledge also in the field of physics, the author has expertly selected a number of problems from applications in psysics and engineering. The precise formulation of the problems, some of which have a general theoretical character, and the clear, lucid and complete solutions given in this book will adequately fulfil the needs of a wide range of students of mathematics, physics and all technical sciences, at both undergraduate and postgraduate level. It can also be warmly recommended to teachers of this subject, and to all who use partial differential equations in the course of their professional practice.” (from a review)

The first chapter, deals with the first and second order partial differential equations and the method of characteristics for quasi–linear first order partial differential equations. Firstly, the concept of a partial differential equation is introduced, then its order, and its general and complete integral. The first order partial differential equation (homogenous and non-homogenous) is especially considered, and Cauchey's problem is formulated for it. For the homogenous linear differential equation the procedure for determining the general solution is described, and homogenous linear differential equation is connected with a system of ordinary differential equations in symmetrical form. Each of the $(n-1)$ independent integrals of the *n-th* order system represents some solution of respective partial differential equation, and each continuously differentiable function of those integrals represents a general solution of respective partial differential equation.

Then, the solution to Cauchy's problem for given homogenous partial differential equation is described starting the mentioned first integrals of respective system of ordinary differential equations. Also, non-homogenous first order linear partial differential equation is reduced to homogenous by finding its solution in implicit form.

Non-linear systems of first order partial differential equations are considered in the case of functions of two variables, and for this system we determine necessary and sufficient condition known as the complete integrability condition, under which this system has one parameter family of solutions. With this condition, one parameter family of solutions is found easily. Finding one parameter family of surfaces which are orthogonal to the vector lines of some given vector field in space leads to Pfaff's differential equation.

The problem which brought to this equation, is reduced to finding out the function $z=z(x,y)$ which satisfies Pfaff's differential equation. This equation with condition $R(x,y,z) \neq 0$ is reduced on form $dz = -P/R\, dx - Q/R\, dy$, so for each integral surface $z = z(x,y)$ we have the formula

$$\partial z/\partial x\, dx + \partial z/\partial y\, dy = -P/R\, dx - Q/R\, dy,$$

which leads to the system

$$\partial z/\partial x = -P/R, \quad \partial z/\partial y = -Q/R.$$

Thus, Pfaff's equation is equivalent to the last system of equations, so the problem of its complete integrability is reduced to the condition $\vec{F} \cdot rot\,\vec{F} = 0$, which will surely be fulfilled if the field $\vec{F}$ is potential, that is if $rot\,\vec{F} = 0$. In this case the integration of Pfaff's equation is reduced to finding out the potential $u(x,y,z)$ of the field $\vec{F}$ for which is $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = du$. If the field is not potential, then there exists an integration factor $\mu(x,y,z)$ which satisfies this equation

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = u dv \quad \left(u = 1/\mu(x,y,z)\right),$$

and so on. Generally, it is shown that, the above equation can be reduced to one of the next three canonical forms: du, $u\,dv$, $du + v\,dw$ on which depends the integration of Pfaff's equation.

Non-linear first order partial differential equations, for functions of two variables are considered in the special section of this chapter. We get given differential equation from the complete integral of this equation and from the equalities obtained by partial differentiation in x and in y, and after elimination of parameters a and b. As Lagrange has shown, all solutions of this partial differential equation can be found from its complete integral by method of variation of constants. If

$$\partial a/\partial x = \partial b/\partial y = \partial b/\partial x = \partial a/\partial y = 0, \text{ then } a = const, \quad b = const,$$

so it is $V(x,y,z,a,b) = 0$ reduced to the *complete integral.* If $\partial V/\partial a = 0$ and $\partial V/\partial b = 0$ and if we can eliminate parameters a and b from these two equalities and $V(x,y,z,a,b) = 0$, then that is how we get *singular integral* $z = z(x,y)$. If $D(a,b)/D(x,y) = 0$, but at least one element of this determinant is not zero, then between a and b exists connection. In that case, a solution will be given with the system

$$V(x,y,z,a,b) = 0, \; \partial V/\partial a + \partial V/\partial b\, \omega'(a) = 0.$$

It contains an arbitrary function and represents a *general solution.* If for $\omega(a)$ is chosen some concrete function, then we get a *particular solution.* The system of two non-linear partial differential equations with the function of two variables can also be solved by Lagrange-Charpit method. For some special types of equations, a table of its complete integrals is given. For the first order partial differential equations, we also give geometrical interpretation using Monge cone and characteristics. In this interpretation Cauchy's problem will be solved by finding out the solution

$$x = x(t,\tau), \; y = y(t,\tau), \; z = z(t,\tau), \; p = p(t,\tau), \; q = q(t,\tau)$$

for the system of characteristics which satisfy the following initial conditions,

$$x = x_o(\tau), \; y = y_o(\tau), \; z = z_o(\tau), \; p = p_o(\tau), \; q = q_o(\tau), \quad \text{for } t = 0.$$

About thirty different problems related to the first order non-linear partial differential equations and about ten problems from the area of second order partial differential equations are solved here. These problems are related to classification of these equations, that is to determining the type (elliptic, parabolic and hyperbolic) of equation. With a few exceptions, each of these ten problems of this section can be reduced to that.

Chapter 2 contains about thirty important examples of second order partial differential equations which belong to Mathematical Physics.

The treatment of this equations focuses on well–posed problems, properties, and behaviour of solutions as well as techniques for writing a representations of solutions. Techiques include the use of characteristics, Fourier methods, and both Dirichlet problems, Green's function, and conformal mappings. In most cases it is not easy to find a general solution, so the solution that satisfies an initial conditions and/or boundary conditions is found directly without knowing the general solution. Such problems can have unique solution, or more solutions, and it can happen that some of them do not have solution at all.
Special attention is given to well–posed problems. The problem is well–posed if for each set of data there exists exactly one solution. Apart from that, it is necessary for this solution to be continuous in regard to some additional conditions.

We shall next consider a number of physical problems to illustrate a very useful method of solving quations of mathematical physics. For the circular membrane solution, theoretical preparation is given concerning expansion of function $f(x)$ by Bessel's first order functions in case of membrane radius $R = 1$:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_n(x\sqrt{\lambda_{nm}}),$$

where $n > -1$ is given, and $\sqrt{\lambda_{n1}}, \ldots$ are positive roots of the equation $J_n(\sqrt{\lambda}) = 0$, while coefficients a_m are determined by formula

$$a_m = \frac{2}{J_{n+1}^2(\sqrt{\lambda_{nm}})} \int_0^1 x\, f(x) J_n(x\sqrt{\lambda_{nm}})\, dx.$$

Similarly, in case of radius $R \neq 1$, function $f(x)$ can be expanded in the series

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_\nu(\mu_m x/R), \qquad \nu > -1,$$

where $\mu_1, \ldots,$ the positive roots of the equation $J_\nu(\mu) = 0$ are ordered by size and coefficients a_m are determined by:

$$a_m = \frac{2}{R^2 J_{\nu+1}^2(\mu_m)} \int_0^R x\, f(x) J_\nu(\mu_m x/R)\, dx .$$

This expansion of the function $f(x)$ is called expansion of the function $f(x)$ into Fourier–Bessel's series. In various problems of Mathematical Physics there exists expansion of the form

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m J_\nu(\mu_m x/R),$$

where $\mu_1, \ldots$ positive roots of equation

$$\alpha J_\nu(\mu) + \beta\mu J_\nu'(\mu) = 0,$$

are written in increasing order upon the condition $\alpha/\beta + \nu > 0$.
Concerning the fact that Bessel's functions are orthogonal and using the formula

$$\int_0^R x J_\nu(x\mu_m/R) J_\nu(x\mu_n/R)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{R^2}{2} J_\nu'^2(\mu_m) = \dfrac{R^2}{2} J_{\nu+1}^2(\mu_m), & m = n \end{cases}$$

we obtain coefficients b_m of the above mentioned series, which are called Dini-Bessel's series.

In section 2 of this chapter the vibrations of string are studied. In the first example, the equation of free vibrations of string is treated (subsection 2.1.) and in the second example, equation of forced vibrations of string (subsection 2.2.).

Section 3 is dedicated to vibrations of the membrane. The first example is about free vibrations of rectangular membrane and the second example is about free vibrations of square membrane (subsection 3.1. and 3.2.). The third example is about free vibrations of circular membrane and the fourth, the special case, is concerned with radial vibrations of membrane at which displacement is the same for all points of the circumference, that is the movement of points does not depend on the angle (subsection 3.3. and 3.4). As the part of this section we solve the problem of finding out self vibrations of homogenous circular membrane of radius $R=1$, attached to the boundary if in the initial moment it represents surface of the rotation paraboloid with zero initial velocity.

In the section 4, various problems of the heat conduction are discussed. In the subsection 4.1. the problem of heat conduction in the limited bar is solved. The problems of the heat conduction in unlimited bar and in semi-limited bar are discussed in subsections 4.2. and 4.3., while the heat conduction problem in two-dimensional space including the special example of the heat conduction through homogenous plate with respective initial–boundary conditions is solved in subsection 4.4.

The Laplace differential equation is given in section 5. First, Laplace's differential equation and Laplace's differential operator are defined, and harmonic functions are introduced, followed by introduction of inner and outer Dirichlet' problem. In the section 5.1. boundary problem for Laplace's differential equation in two-dimensional subspace $0 \le x \le a$, $0 \le y < +\infty$ is solved while in subsection 5.2. similar problem is solved for parallelepiped. In subsection 5.3. Laplace's differential equation is given in cylindrical coordinates with some specific boundary conditions and the condition of limitation of the unknown function u on the axe of cylinder. The examples will also show how to solve Laplace's equation when we use various coordinate systems (rectangular, spherical, cylindrical, etc.).
In the frame of subsection 5.4. we discusse the problem of steady–state heat distribution in the cylinder which lies on the isolated lower base, while its upper base is uniformly distributed source of the heat with the intensity q and side area is cooled by air whose temperature is zero. As the part of this section, Dirichlet's problem for the circular is studied (subsection 5.5.) and Dirichlet's problem for the circular annulus ring is studied (subsection 5.6.).

To solve Dirichlet's problem for Laplace's equation means to determine the function which inside the circle satisfies the equation and at the circumference has in advance given value. Furthermore, the obtained solution of Dirichlet's problem in form of infinite series can be written in form of definite integral known as Poisson's integral. This is another form of the solution of inner Dirichlet's problem which is called Poisson's integration formula.

The example given in the section 6 is concerned with one boundary problem for Poisson's differential equation on determined rectangle with the condition that the solution of this problem vanishes on the edge of the rectangle.

Section 7 is concerned with solving Laplace's differential equation applying conformal mappings. First, invariancy of Laplace's differential equation is proved in regard to conformal mappings, and then in steady– state temperature T is studied and from the process of heat conduction we can conclude that it satisfies the Laplace's differential equation in all inner points of the observed body (subsection 7.1.). In subsection 7.2. Dirichlet's problem for upper semi-plane is solved, that is the formula for steady temperatures is determined, in thin semi-infinite plate $y \geq 0$ whose faces are insulated and whose edge $y = 0$ is kept at temperature zero except for the partion $-1 < x < 1$, $y = 0$, where it is kept at temperature unity. In subsection 7.3. Dirichlet's problem for two non-concentric circles is solved, that is it is searched for potential inside the area between two non-concentric circumferences in case when the potential on the inner circumference of radius 1, equals 1 and on outer circumference equals 2.

Finally, Section 8 is dealing with the Schrödinger's equation connected to finding out the energy level and wave functions of particles which move in some force field. Furthermore, in subsection 8.1. we consider the special case of Schrödinger's equation, known as harmonic oscillator, where a wave function $\psi(x)$ depends on only one variable. Searching for those values of energy for which the solution $\psi(x)$ will be a continuous function which satisfies the condition $\int |\psi(x)|^2 dx = 1$ (obtained by physical reasoning), Schrödinger's equation in the case of the harmonic oscilator is reduced to solving Hermit's differential equation.

The last example is concerned with a partial differential equation in which an unknown function u depends on a time t and distance r from coordinate origin, and specific initial–boundary conditions for function $u(r, t)$ are set.

"All, problems treated in this chapter are characterized with significance and seriousness. This book is seriously enriched by including of the of mathematical physics problems. Through contents of this and previous chapters, frame of habitual book from the domain of differential equations which usually include only first order ones (because of its tight relations with ordinary differential equations) is expanded in a very eligible way." (from a review)

Sarajevo, 2001. Author

SADRŽAJ

Dr matematičkih nauka MIRJANA VUKOVIĆ, redovni profesor na Odsjeku za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu

1955 – 63. pohađa osnovnu školu u Varaždinu, Mariboru i Sarajevu

1963 – 67. produžava školovanje u "Gimnaziji Braća Ribar" u Sarajevu, a zatim na

odsjecima za matematiku i fiziku Prirodno-matematičkog fakulteta u Sarajevu od

1967 – 71. studira matematiku i, uporedo,

1969 – 71. završava dvije godine studija fizike

1972 – 79. započinje uniterzitetsku karijeru kao asistent Akad. M. Bajraktarevića (Teorija funkcija kompleksne promjenljive) i Akad. F. Vajzovića (Diferencijalne jednačine).

1975. stiče stepen magistra matematičkih nauka iz oblasti algebre

1979. brani doktorat iz oblasti analize; nakog toga, provodi od

1979 – 84. u zvanju docenta

1984 – 89. u zvanju vanrednog profesora, a od

1989. je redovni profesor.

Obrazovanje stiče i na poznatim evropskim univerzitetima:

1975 – 76. na Mehaničko-Matematičkom fakultetu "Moskovskog Državnog Univerziteta im. Lomonosova" u Moskvi kao stipendista USSR Vlade.

1976. studijskim boravkom na Univerzitetu "Pierre et Marie Curie" u Parizu, započinje dugogodišnju saradnju s poznatim francuskim matematičarom Marcom Krasnerom.

1995 – 00. na Tehničkom Univerzitetu u Beču boravi, više puta, kao stipendista Austrijske Vlade, u okviru konkursa: "Bewerber aus aller Welt" i "Stipendien für die Universitäten Bosnia-Herzegowinas der Österreichischen Rectorkonferenz".

2000 – 01. na Univerzitetu "Joseph Fourier" u Grenobleu je, kao gostujući profesor, angažovana na projektu "Structures paragraduées et ses applications en analyse non Archimédienne".

Uporedo obavlja niz značajnih funkcija kao što su:

1982 – 84. Predsjednik Sekcije za matematiku Društva Matematičara, Fizičara i Astronoma BiH;

1982 – 84. Prodekan za nastavu i nauku Prirodno-matematičkog fakulteta u Sarajevu

1988 – 90. Član Uredništva časopisa "Naša škola";

1988 – 93. Prorektor za nastavu i naučno-isrtaživački rad Univerziteta u Sarajevu, od

1995. Član uredništva časopisa "Radovi matematički" ANU BiH.

Za postignute rezultate dobija prva priznanja već u gimnaziji i na fakultetu:

1968 – 71. četiri srebrene značke za odlične rezultate za svaku godinu studija i nagradnu stipendiju (1969 – 71) Univerzitetskog Fonda "Hasan Brkić"

1971. zlatnu značku Univerziteta u Sarajevu, za cjelokupan odličan uspjeh u toku studija

1975. Plaketu "Društva Matematičara, Fizičara i Astronoma BiH",

1985. "Spomen plaktu Grada Sarajeva" povodom 6. aprila,

1987. najveću Republičku nagradu za nauku "Veselin Masleša",

1987. "Orden rada sa srebrenim vijencom"; osim toga uključena je u ediciju

1988. "THE INTERNATIONAL WHO'S WHO OF INTELECTUALS", International Biographical Centre, Cambridge, Engleska (osmo izdanje)

1988. "THE INTERNATIONAL DIRECTORY OF DISTINGUISHED LEADERSHIP", American Biographical Institute, North Carolina, U.S.A (drugo izdanje)

1989. "THE RESEARCH BOARD OF ADVISORS", American Biographical Institute

1999. "Plaketu Univerziteta u Sarajevu", povodom 50 godina postojanja Univerziteta.

Prof. Mirjana Vuković radi u oblastima Moderne Algebre, Fourierove Analize i Teorije Sumabilnosti. U ovim oblastima objavila je više naučnih radova. Koautor je dvije zbirke zadataka i autor više skripti (predavanja) za studente. Zajedno sa francuskim matematičarom svjetskog glasa Marcom Krasnerom, objavila je monografiju: "Structures paragraduées (groupes, anneaux, modules)", u poznatoj kanadskoj ediciji monografija: "Quenn's Papers in Pure and Applied Mathematics." Pored udžbenika Diferencijalne jednačine 1 (koji je objavljen) i Diferencijalne jednačine 2 (koji upravo izlazi iz štampe), u štampi je još jedan njen udžbenik: Teorija grupa i njene reprezentacije s primjenom u fizici.

Izlagala je na brojnim međunarodnim konferencijama i kongresima bivše Jugoslavije i Evrope, između ostalog na Moskovskom Gosudarstvenom Univerzitetu im. Lomonosova", u Moskvi, Rusija; na univerzitetima "Pierre et Marie Curie" u Parizu i "Joseph Fourier", u Grenoblu, Francuska; na "Technische Universität" Wien i "Johannes Kepler Universität", Linz, Austrija; na "Karlovom Univerzitetu" u Pragu, Republika Češka; kao i na "International Conference of Radical" ICOR–2000, Innsbruck, "Conference on General Algebra", Krems/Donau, Austrija...

Prof. Dr. MIRJANA VUKOVIĆ
Odsjek za matematiku
Prirodno-matematički fakultet
Zmaja od Bosne 35
71000 SARAJEVO, BiH
e-mail: mirjanav@yahoo.com

Najefikasniji način da se ovlada nekom granom matematike jeste rješavanje zadataka iz te oblasti, što je i cilj ove knjige. Udžbenik diferencijalne jednačine 2 sadrži 250 stranica i oko 100 rješenih zadataka, među kojim je izbalansiran broj onih koji služe za ilustraciju teorije i onih kojima se nadopunjuje teorija ili ukazuje na mogućnosti njene primjene. Podjeljen je u tri glave:

I Parcijalne diferencijalne jednačine (9 110),

II Jednačine matematičke fizike (111 210) i

III Razni zadaci (211 232).

Među zadacima se nalazi izvjestan broj lijepih primjera koje su i prije mene, na ispitima iz Diferencijalnih jednačina, odnosno Jednačina matematičke fizike, davali i moji profesori, akademici Mahmut Bajraktarević i Manojlo Marović, a među njima je i poneki problem iz Matematičke fizike zajedno s rješenjem M. Marovića.

"Kraćim, ali preglednim, i za postavljeni cilj sasvim dovoljnim, elementima teorije, uz svaku grupu zadataka, ova knjiga je učinjena nezavisnom od teoretskog udžbenika koji obično prati zbirku zadataka. Brižljivo odabrani i brušeni kroz višegodišnje vježbe i ispite zadaci, u ovoj knjizi, odlikuju se zavidnim nivoom i zanimljivošću."

"Kao dobro obrazovan matematičar, sa zavidnim obrazovanjem i iz oblasti fizike, autor je u svakoj od oblasti znalački odabrao znatan broj zadataka iz primjene, u prvom redu u fizici i tehničkim naukama."

"Precizne formulacije zadataka, kao i pregledna, jasna i potpuna rješenja, zadovoljiće upotpunosti potrebe širokog kruga studenata matematike, fizike i svih tehničkih fakulteta, kako drugog, tako i trećeg stepena studija, ali se toplo može preporučiti i nastavnicima Parcijalnih diferencijalnih jednačina i Jednačina matematičke fizike, kao i svima koji, u svojoj profesionalnoj praksi, koriste diferencijalne jednačine."

"Udžbenik Diferencijalne jednačine je uključivanjem zadataka iz Matematičke fizike značajno obogaćen. Sadržajem te glave, posebno, ali u velikoj mjeri i sadržajem prethodne glave, je, na vrlo poželjan način, proširen okvir koji imaju uobičajeni udžbenici iz područja diferencijalnih jednačina i koji obično od parcijalnih diferencijalnih jednačina obuhvataju samo one prvog reda (zbog njihove tjesne veze s običnim diferencijalnim jednačinama)."

"S obzirom da ovaj udžbenik, pored koncizno izložene teorije sadrži i brojne interesantne zadatke razne težine, počev od onih čije rješavanje zahtjeva razumjevanje teorije i određenu vještinu, pa do onih, koji se, s obzirom da su vezani za rješavanje konkretnih problema fizike i tehnike, rješavaju poslije dužeg razmišljanja i pretpostavljaju dublje poznavanje teorije, on može biti koristan veoma širokom krugu čitalaca."

"Ovako bogata, sadržajna i vješto komponovana zbirka ne pojavljuje se često. Zadaci u njoj su brojni, interesantni i odlikuku se značajem i ozbiljnošću. Nema sumnje da će ona dugo koristiti generacijama studenata matematike, fizike, kao i postdiplomcima svih tehničkih fakulteta."

(Izvodi iz recenzija akademika F. Vajzovića i akademika V. Perića)

ISBN 9958-44-060-1

9 789958 440601