

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Faculté des sciences appliquées
Département de génie électrique

APPLICATION DES RÉSEAUX DE NEURONES DANS LE
DÉVELOPPEMENT D'ALGORITHMES DE RESTAURATION D'IMAGES
APPLIQUÉS À LA TOMOGRAPHIE PAR ÉMISSION DE POSITRONS

Mémoire de Maîtrise es sciences appliquées
Spécialité: génie électrique

Michel Héon

RÉSUMÉ

En tomographie par émission de positrons (TEP), le processus de construction d'image, nécessite l'utilisation d'une caméra pour acquérir les données et un ordinateur qui traitera ces données afin de produire une image. La caméra est munie d'un anneau de détecteurs sensible aux rayons gamma qu'émet un objet placé en son centre. La disposition annulaire des détecteurs fait varier l'efficacité de détection, provoquant ainsi des distorsions dans l'image et limitant le champ actif de la caméra. Quant au ordinateur, il emmagasine les données fournies par le TEP et effectue les calculs pour reconstruire l'image. Cette fonction de calcul est effectuée de façon discrète provoquant un bruit de reconstruction. Ces deux facteurs conjugués engendrent une quantité appréciable de bruits dans les images.

Plusieurs techniques, utilisant les outils de traitement de signal, permettent d'améliorer la qualité des images. Il est proposé, dans le présent mémoire, d'utiliser les réseaux de neurones (RN) comme outils de restauration et de rehaussement. Une première étude utilise les RN pour restaurer les distorsions causées par la géométrie des détecteurs. Le réseau est de type perceptron multi couches et agit sur les projections directement issues de la caméra. Chacune de ces projections possède 64 éléments dont la fonction de réponse, en chacun de ses points, varie, ce qui pose un problème de non stationnarité de système. Le RN proposé permet d'effectuer une restauration malgré cette non stationnarité. La topologie de ce réseau est constituée d'une couche d'entrées et d'une couche de sorties de 64 neurones chacune. Aucune couche cachée n'a été implantée. Le choix d'un réseau optimum et universel est obtenu par la méthode suivante. Trois essais utilisant des vecteurs d'entraînement bruités à différents niveaux permettent de faire varier la convergence des réseaux. Chacun de ces essais possède des caractéristiques qui lui sont propres et les résultats de ces essais sont comparés avec une méthode classique de restauration.

La deuxième expérimentation permet d'effectuer une étude sur l'intégration d'un RN dans l'algorithme de reconstruction par rétroprojection filtrée (RPF). Une méthode de sélection des vecteurs d'apprentissage fera l'objet d'une importante section de ce chapitre. Deux essais permettent le choix entre une topologie à restauration unique ou multiple. C'est-à-dire que le réseau effectue une restauration sur un ou plusieurs points sur l'image. De plus,

nous étudierons la pertinence d'effectuer la restauration sans l'apport de la partie filtrée de l'algorithme RPF.

PRÉFACE

Le présent mémoire est divisé en six chapitres. Le premier chapitre met en contexte cette recherche. De plus, il présente la question de recherche ainsi que la littérature de référence utilisée. Le deuxième chapitre permet l'élaboration du contenu théorique. Une première étape présente les fondements sur la théorie des réseaux neuronaux (RN). Les principes de l'imagerie médicale en tomographie par émission de positrons (TEP), feront parties des autres sections du deuxième chapitre. L'expression de deux cadres théoriques est nécessaire du fait que deux domaines de recherche sont utilisés pour réaliser l'étude. Ainsi, les professionnels d'une discipline donnée, peuvent acquérir les fondements nécessaires de la discipline complémentaire, essentielle à la compréhension de la présente recherche.

Cette recherche portera sur l'utilisation des RN pour la résolution de deux problématiques reliées à la TEP. La méthodologie de recherche fait donc l'objet du chapitre trois. L'utilisation des RN en traitement d'image, la modélisation des données ainsi que les règles qui régiront l'apprentissage et l'évaluation des réseaux seront autant de sujets traités dans ce chapitre.

Par souci de clarté, chacune des deux problématiques sera traitée dans un chapitre respectif. Ainsi, les chapitres quatre et cinq porteront sur la résolution de deux difficultés reliées à la TEP. Dans chacun de ces deux chapitres, il y aura une mise en contexte de la problématique suivie d'une analyse de celle-ci. Suivra l'exposé de l'hypothèse de recherche, une expérimentation et une section réservée à l'analyse des résultats. Puisqu'il s'agit de deux problèmes différents, chacun de ces chapitres aura une section de discussion.

En conclusion, nous ferons un résumé des résultats obtenus et nous discuterons des avantages et désavantages à utiliser les RN en TEP. De plus, une présentation de futures perspectives de recherche sera exposée.

REMERCIEMENT

Mes premiers remerciements vont aux membres immédiats de ma famille. soit: Stéphanie Chénier ma conjointe, à qui je dois le support moral pendant tout le temps de la réalisation de ce mémoire, à mon fils Frédérick, qui donne un but à ces efforts, à mon père Gustave Héon alias le "LinGuste", sans qui le français de ce mémoire ne serait pas ce qu'il est et finalement à ma mère Rita Dionne, qui par ses encouragements a su me transmettre la confiance qu'elle avait en ma capacité de réaliser ce défi.

Je tiens aussi à remercier M. Chon Tam LeDinh et M. Roger Lecomte pour leurs supports académiques, leurs conseils éclairés et la relation d'amitié que nous avons construite tout au long de ce cheminement.

De plus, je ne saurais passer sous silence toute l'aide que j'ai reçue de l'INRS télécommunication. Je les remercie pour l'attitude conciliante face aux horaires de travail, à l'utilisation des ressources informatiques et pour l'ouverture d'esprit, face à la recherche, que possèdent les membres de cet institut.

J'ai une reconnaissance particulière à exprimer, à Mme Mireille St-Pierre et à la mémoire de M. Léo Joli.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé.....	i
Préface	iii
Remerciement.....	iv
Table des matières	v
Liste des tableaux et algorithmes.....	ix
Liste des images.....	x
Liste des figures.....	xi
Lexique.....	xiv
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1-1
1.1 Contexte.....	1-1
1.2 Question de recherche	1-2
1.2.1 Préambule.....	1-2
1.2.2 La question	1-3
1.3 Littérature	1-3
CHAPITRE 2 FONDEMENTS THÉORIQUES DES RÉSEAUX NEURONAUX ET DE LA TOMOGRAPHIE.....	2-6
2.1 Réseaux de neurones	2-6
2.1.1 Neurone.....	2-6
2.1.2 Fonctions de transfert.....	2-7
2.1.3 Connexion en réseau	2-8
2.1.4 Paradigme d'apprentissage	2-9
2.1.5 Filtres adaptatifs	2-11
2.1.6 Courbe d'apprentissage.....	2-13
2.1.7 Algorithme de modification des poids.....	2-14
2.1.8 Réseau Perceptron Multi Couche.....	2-16
2.1.9 Réseau de neurones et traitement du signal.....	2-17
2.2 Imagerie médicale.....	2-18

2.2.1 L'appareil et la détection.....	2-18
2.3 Reconstruction en TEP	2-21
2.3.1 Transformée de Radon	2-21
2.3.2 Restauration	2-23
2.3.3 Théorème de coupe projection.....	2-23
2.3.4 Rétroprojection filtrée.....	2-24
2.3.5 Réponse impulsionnelle et restauration	2-27
2.3.6 Réponse impulsionnelle de \mathfrak{R} après rétroprojection.....	2-27
2.3.7 Algorithme d'acquisition et de reconstruction.	2-29
2.3.8 Effets de la rétroprojection sur les images.....	2-30
2.3.9 Résumé:	2-31
2.4 Les fonctions d'ouverture en coïncidences (FOC).....	2-32
2.4.1 Courbe de résolution.....	2-32
2.4.2 Algorithme de reconstruction utilisant les FOC.....	2-33
2.4.3 Restauration des FOC	2-34
2.4.4 Algorithme de reconstruction avec restauration des FOC.....	2-35
2.5 Conclusion	2-36
CHAPITRE 3 MÉTHODOLOGIE DE RECHERCHE	3-37
3.1 Utilisation d'un réseau de neurone.....	3-37
3.2 Données modélisées	3-37
3.3 Apprentissage des réseaux.....	3-38
3.3.1 Critère d'arrêt.....	3-38
3.3.2 Vecteurs et bases d'apprentissage	3-39
3.3.3 Classement des vecteurs	3-40
3.3.4 Optimisation par suppression de neurones (<i>Pruning</i>)	3-40
3.3.5 Méthodologie de développement du réseau	3-40
3.3.6 Addition de bruit gaussien aux vecteurs d'apprentissage	3-41
3.4 Évaluation de la performance du réseau.....	3-42
3.4.1 Résolution	3-42
3.4.2 Erreur quadratique moyenne	3-42

3.4.3 Appréciations visuelles	3-42
3.5 Conclusion	3-43
CHAPITRE 4 ÉTUDE NO1. UTILISATION DES RN DANS LA RESTAURATION DES FOC.....	4-44
4.1 Mise en contexte.....	4-44
4.2 Analyse de la problématique	4-45
4.2.1 Caractérisation des FOC.....	4-45
4.2.2 Étalement des FOC.....	4-45
4.2.3 Caractérisation des FOC dans le domaine (Z)	4-46
4.2.4 Effets des FOC sur les images.....	4-48
4.2.5 Restauration des FOC par l'inversion dans l'espace de Fourier	4-48
4.2.6 Détermination de la stabilité des filtres inverses	4-49
4.2.7 Résumé.....	4-50
4.3 Hypothèse de recherche.....	4-51
4.4 Solution proposée et expérimentation	4-51
4.4.1 Algorithme de restauration utilisant les réseaux de neurones	4-51
4.4.2 Algorithme d'apprentissage du réseau.....	4-53
4.4.3 Choix et construction des vecteurs d'entraînement	4-54
4.5 Analyse des résultats	4-57
4.5.1 Mesure de résolution.....	4-57
4.5.2 Calcul de l'erreur quadratique moyenne.....	4-59
4.5.3 Appréciation visuelle	4-59
4.6 Discussion.....	4-60
CHAPITRE 5 ÉTUDE NO2. UTILISATION DES RN AFIN DE RESTAURER LA RÉPONSE IMPULSIONNELLE PRODUITE PAR LA TRANSFORMÉE DE RADON	5-62
5.1 Mise en contexte.....	5-62

5.2 Analyse de la problématique	5-62
5.3 Discussion de la solution proposée.....	5-63
5.3.1 Caractéristiques et extraction des vecteurs d'apprentissage.....	5-63
5.3.2 Construction des bases BRU et BRM.....	5-64
5.3.3 Classification des vecteurs de la base	5-65
5.3.4 L'apprentissage	5-67
5.3.5 Restauration des images	5-68
5.4 Expérimentation	5-68
5.4.1 Choix des réseaux.....	5-68
5.4.2 Choix des mires	5-68
5.4.3 Vecteurs bruts de BRU et BRM	5-71
5.4.4 Restauration	5-72
5.5 Analyse des résultats	5-73
5.5.1 Estimation de l'erreur quadratique moyenne de la mire d'évaluation restaurée.....	5-73
5.5.2 Courbes d'apprentissage des meilleures restaurations.....	5-74
5.5.3 Courbes de résolution à demi et dixième de hauteur après la restauration.....	5-75
5.5.4 Profils d'une tranche de la mire d'évaluation.....	5-76
5.5.5 Restauration de la mire d'évaluation	5-78
5.5.6 Résumé des résultats.....	5-78
5.6 Discussion.....	5-80
CONCLUSION.....	81
RÉFÉRENCES	83

LISTE DES TABLEAUX ET ALGORITHMES

Tableau 4-1: Valeurs EQM entre la mire d'évaluation idéale et restaurée. Pour une restauration par RPF (.2580)	4-59
Algorithme 2-1: Séquence de modification des poids d'un réseau de neurones.....	2-17
Algorithme 2-2: Séquence de reconstruction d'une image par rétroprojection filtrée.....	2-29
Algorithme 2-3: Reconstruction par rétroprojection filtrée utilisant les FOC.....	2-34
Algorithme 2-4: Reconstruction incluant la restauration des FOC	2-35
Algorithme 4-1: Restauration des FOC par un réseau de neurones	4-52
Algorithme 4-2: Apprentissage du réseau de restauration des FOC	4-54
Algorithme 4-3: Génération des vecteurs de la base d'entraînement à partir de données issues d'un environnement expérimental.....	4-56

LISTE DES IMAGES

Image 2-1: Sinogramme d'une source ponctuelle.....	2-22
Image 2-2: Comparaison entre une image idéale a) rétroprojetée et b) utilisant la rétroprojection filtrée.....	2-31
Image 2-3: Effet des FOC sur une image. a) image idéale, b) image restaurée utilisant l'algorithme par rétroprojection filtrée, c) image incluant l'effet des FOC et restaurée par l'algorithme de rétroprojection filtrée.....	2-36
Image 4-1: Restauration de la mire d'évaluation, a) Mire idéale, b) rétroprojection filtrée sans l'application des FOC, c) RPF avec FOC d) Restauration des FOC comme décrite à l'Algorithme 2-4.....	4-50
Image 4-2: Comparaison entre a) un sinogramme idéal et b) un sinogramme filtré avec les FOC	4-53
Image 4-3: Sinogrammes des vecteurs idéaux utilisés pour effectuer l'entraînement du réseau. Les sinogrammes de la classe a), b) et c) proviennent de données modélisées. Les vecteurs de la classe d), e), f) g) proviennent de la transformée de Radon des images présentées à gauche du sinogramme.	4-55
Image 4-4: Comparaison de restauration d'images bruitées et restaurées par des RN entraînés à divers niveaux de bruit.....	4-60
Image 5-1: Images servant à la construction des vecteurs <u>d'apprentissage</u> des bases BRU et BRM	5-70
Image 5-2: Images servant à la construction des vecteurs de <u>test</u> des bases BRU et BRM	5-71
Image 5-3: Image servant à l'évaluation de la performance du réseau.....	5-71
Image 5-4: Position du profil sur l'image idéale.....	5-76
Image 5-5: Reconstruction de la mire d'évaluation: a) mire idéale, d) image reconstruite en utilisant l'algorithme par rétroprojection filtrée b) BRU et c) BRM, dont les vecteurs	

de la base sont constitués de données non filtrées, e) BRU et f) BRM dont les vecteurs sont constitués de données filtrées,.....5-78

LISTE DES FIGURES

Figure 2-1: Représentation schématique d'un neurone.	2-6
Figure 2-2: La fonction sigmoïde, Courbe avec plusieurs valeurs de a	2-8
Figure 2-3: Configuration générique d'un réseau multicouches.....	2-9
Figure 2-4: Configuration générique d'un réseau rétroactif (<i>recurrent network</i>).....	2-9
Figure 2-5: Diagramme de l'apprentissage supervisé.....	2-10
Figure 2-6: Application permettant l'identification de système	2-12
Figure 2-7: Application permettant la modélisation inverse d'un système.....	2-12
Figure 2-8: Application permettant d'effectuer une prédiction	2-13
Figure 2-9: Application permettant l'élimination de l'interférence dans un système	2-13
Figure 2-10: Courbe d'apprentissage typique	2-14
Figure 2-11: La projection P_q de l'objet $f(x,y)$	2-22
Figure 2-12: Rétroprojection de la projection filtrée $Q_q(t)$ sur une grille afin de former l'image $f'(x,y)$	2-26
Figure 2-13: Algorithme de reconstruction d'une image	2-29
Figure 2-14: Profils normalisés, extraits de trois images, a) réponse impulsionnelle idéale à restaurer, b) profil de l'image rétroprojetée non filtré équivalent à la réponse impulsionnelle de la rétroprojection, c) profil de l'image rétroprojetée filtrée.	2-30
Figure 2-15: Fonction d'Ouverture en Coïncidence du couple de détecteurs D_1D_2 sur la projection $P_q(r)$	2-32
Figure 2-16: Courbe de résolution à 1/2 hauteur d'une source ponctuelle en fonction de sa distance par rapport au centre de la caméra.	2-33

Figure 3-1: Courbe typique d'erreur de la base test	3-39
Figure 3-2: Les trois sous bases de données extraites d'un ensemble de vecteurs représentant le maximum de situations.	3-39
Figure 3-3 Processus itératif du développement d'un réseau.....	3-41
Figure 4-1: Courbes d'étalement des FOC utilisées sur le côté gauche du vecteur de projection.....	4-46
Figure 4-2: Pôles et zéros de chacune des FOC utilisées dans l'espace Z	4-47
Figure 4-3: Réponse impulsionnelle inverse des FOC calculée selon la méthode d'inversion dans l'espace des fréquences. Les positions en pixel sont présentées en abscisse alors que l'amplitude du signal est présentée en ordonné.	4-49
Figure 4-4: Comparaison entre différentes courbes de résolution, de sources ponctuelles à demi a) et dixième b) de hauteur.....	4-58
Figure 5-1: Correspondance des données brutes au pixel idéal permettant la construction des vecteurs de la BRU et de la BRM.....	5-64
Figure 5-2: Construction des bases BRU et BRM à partir des images brutes et idéales...5-65	
Figure 5-3: Pixels retenus pour la classification du vecteur.....	5-65
Figure 5-4: Algorithme de construction des base BRU et BRM à partir d'images dont les vecteurs sont classés.....	5-67
Figure 5-5: Construction des vecteurs bruts de BRU et BRM. a) À partir de l'algorithme par rétroprojection filtrée et b) à partir de rétroprojection sans filtre.....	5-72
Figure 5-6: Algorithme de restauration des images utilisant les RN avec en a) une restauration par rétroprojection filtrée et en b) une restauration par rétroprojection non filtrée	5-73
Figure 5-7: Estimation de EQM entre les différentes images restaurées	5-74
Figure 5-8: Courbes d'apprentissage: a) réseau à restauration BRU sans filtre, b) réseau à restauration BRU avec filtre, c) réseau à restauration BRM sans filtre et c) réseau à restauration BRM avec filtre.	5-75

Figure 5-9: Courbes de résolutions à demi et dixième de hauteur dont l'objet idéal est d'amplitude 255 et de 2 pixels de diamètre situé au centre de l'image.....	5-76
Figure 5-10: Comparaison entre les profils de l'image idéale, restaurée selon l'algorithme de rétroprojection filtrée (RPF) et la restauration de type RRU et RRM avec et sans filtre.	5-77

LEXIQUE

θ	Angle d'une projection
\mathfrak{F}	Transformée de Fourier et son inverse \mathfrak{F}^{-1}
\mathfrak{R}	Transformée de Radon et son inverse \mathfrak{R}^{-1}
$\varphi()$	Fonction de transfert d'un neurone
$\delta(x)$	Fonction de Dirac
β^+	Positron
BGO	Germanate de bizmuth
BRM	Base à Restauration Multiple
BRU	Base à Restauration Unique
c	Point au centre d'un vecteur
dB	décibel
d_k	Valeur désirée du neurone
e_k	Erreur entre d_k et x_k
$F(u,v)$	Transformée de Fourier de l'objet $f(x,y)$
$f'(x,y)$	Image reconstruite de l'objet observé
$f(x,y)$	Objet observé
FIR	<i>Finite Impulse Response</i> -Réponse impulsionnelle finie
FOC	Fonction d'Ouverture en Coïncidence
IIR	<i>Infinite Impulse Response</i> -Réponse impulsionnelle infinie
$P_\theta(r)$	Point r de la projection à l'angle θ
$P_{\text{FOC}\theta}()$	Projection convoluée par les FOC
r	Distance d'un point par rapport au centre d'un vecteur

RN	Réseau de Neurone
RPF	Algorithme de Rétroprojection Filtrée
RRM	Réseau à Restauration Multiple
RRMF	Réseau à Restauration Multiple avec Filtre
RRMSF	Réseau à Restauration Multiple Sans Filtre
RRU	Réseau à Restauration Unique
RRUF	Réseau à Restauration Unique avec Filtre
RRUSF	Réseau à Restauration Unique sans Filtre
TEP	Tomographe par émission de positrons
w_k	Poids k d'un neurone
x_i	Donnée d'entrée d'un neurone
y_k	Donnée de sortie d'un neurone

Chapitre 1

INTRODUCTION

1.1 Contexte

Ce projet se développe en collaboration entre le Département de génie électrique et le Département de médecine nucléaire de la Faculté de médecine de l'Université de Sherbrooke. Le Dr. Lecomte et son équipe ont mis au point un tomographe à émission de positrons (TEP) de très haute résolution, en utilisant une nouvelle technologie de détection des rayons gamma émis par une source radioactive. Cette technologie utilise des photodiodes avalanches pour capter la lumière provenant de la scintillation de rayons gamma avec le cristal de BGO du détecteur. Les critères d'efficacité de détection, de normalisation de l'efficacité de détection entre les détecteurs, la possibilité de compenser le taux de comptage d'un détecteur défectueux ainsi que des algorithmes de reconstruction minimisant le bruit de calcul sont nécessaires à optimiser, pour obtenir des images, à haute définition exemptes de distorsions, tout en préservant la quantification des images. Tous ces paramètres doivent être optimisés en tenant pour acquis, que les sources radioactives doivent être de moins en moins intenses afin de préserver la santé des gens qui doivent manipuler ou recevoir ces doses.

Cette recherche combine les intérêts de l'imagerie médicale à celui du traitement de signal. En fait, elle propose d'utiliser la technique des réseaux de neurones afin d'éliminer certains problèmes d'imagerie qui étaient résolus d'une façon plus ou moins satisfaisante par le traitement de signal conventionnel. Le côté adaptatif des réseaux neuronaux sera grandement mis à profit. En effet, les traitements conventionnels permettent difficilement de traiter de façon exhaustive l'information propre à un appareil qui est non linéaire et/ou non stationnaire. Alors que les réseaux de neurones se prêtent bien à l'apprentissage des filtres en fonction de l'instrumentation utilisée.

1.2 Question de recherche

1.2.1 Préambule

Pour répondre aux besoins identifiés en introduction, tout en tenant compte des contraintes imposées, la présente recherche se divise en deux volets. D'abord, restaurer les fonctions d'ouvertures en coïncidence (FOC) sur les projections. Une projection est un vecteur représentant un histogramme de la détection. Cette projection est directement utilisée pour reconstruire les images. Or, due à l'inclinaison des détecteurs, l'efficacité de détection, à chacune des positions sur l'histogramme, n'est pas homogène. En fait, il existe en chacun des points une fonction de réponse, nommée FOC, unique et non stationnaire. Cependant, chacune d'elle est identifiable et modélisable. L'utilisation des réseaux de neurones est proposée pour restaurer ces fonctions de réponses, et ce, en développant un seul filtre neural restaurant la projection, même si celle-ci est issue d'une sommation de fonctions de réponses non stationnaires.

Ajoutons que la caméra TEP du laboratoire d'imagerie médicale est conçue pour étudier des petits animaux. À l'heure actuelle, il n'existe aucun système de compensation des FOC, ce qui limite le champ actif de la caméra. Une restauration des FOC permettrait d'agrandir le champ actif du TEP avec un minimum de changement électronique. Le TEP animal pourrait devenir un TEP cerveau pour des jeunes enfants, et ce, sans augmenter le nombre de détecteurs. Si l'on se réfère à la littérature, il semble qu'il n'y ait aucun TEP qui utilise cette technologie dans le but explicite d'agrandir son champ actif. Par ailleurs, la méthodologie proposée permettrait aussi d'améliorer l'uniformité du champ de la plupart des caméras TEP existantes

Le second traite de la reconstruction proprement dite. A l'heure actuelle, l'algorithme de rétroprojection filtrée est principalement utilisé pour la reconstruction des images. Cependant, cet algorithme génère beaucoup de bruits de calcul, ce qui oblige les usagers de ces appareils à augmenter la dose à utiliser ou prolonger le temps d'acquisition pour obtenir une image. Pour cette partie, l'usage des réseaux de neurones, afin d'éliminer le bruit de reconstruction et appliquer les filtres nécessaires, est pertinent.

1.2.2 La question

Sachant que les RN possèdent des qualités d'adaptation, par l'intermédiaire d'un apprentissage, serait-il possible de développer un algorithme de reconstruction d'images incluant les RN et pouvant mettre à profit, les caractéristiques de ceux-ci afin de minimiser le bruit et les artéfacts produits par les méthodes classiques de reconstruction et de restauration.

1.3 Littérature

Parmi les principaux titres qui guideront cette recherche, mentionnons les ouvrages de: Kak & Slaney [11], *Principles of computerized tomography imaging*. et Peter Toft [32], *The Radon Transform, theory and implementation*. Ces publications s'avèrent de véritables normes en ce qui à trait à la tomographie. Tous les outils mathématiques et les principes physiques y sont clairement exposés. En second lieu mentionnons le livre de Héroult et Jutten [10], *Réseau neuronaux et traitement de signal* et l'ouvrage de Simon Haykin [7], *Neural Networks a comprehensive foundation*. Ces références facilitent l'apprentissage et l'utilisation de la technologie des réseaux de neurones. Il est à noter que cette recherche aurait été beaucoup plus complexe et ardue à réaliser, sans l'apport du logiciel **NeuralWare**. En plus de s'avérer un excellent outil de conception des réseaux, ce logiciel utilise les algorithmes issus des plus récentes recherches dans le domaine. De plus, la documentation accompagnant ce logiciel contient de nombreuses références tout en étant elle-même, fort explicite. Pour finir, le livre de Minsky [24], *La société de l'esprit*, est sans conteste une source d'inspiration pour qui veut utiliser les principes de l'intelligence artificielle dans la recherche de solutions. Sans directement y faire référence dans l'élaboration de cette recherche, je puis affirmer que le contenu de ce document a contribué à alimenter la motivation de poursuivre la recherche dans ce domaine.

Plusieurs études tendent à démontrer que les réseaux de neurones peuvent résoudre des problèmes liés à la TEP. Une première catégorie de publications utilisent les RN dans la résolution de la problématique de l'algorithme de reconstruction d'images: que ce soit en reconstruisant des parties d'images à partir des RN [12] ou encore en estimant la fonction inverse de la transformée de Radon [20] ou par le développement d'algorithme de

compression d'images indépendant de l'environnement [30]. Lors de l'acquisition des données il arrive que certaines projections ne soient pas disponibles, les études de M. Yau [31] [34] proposent d'utiliser les RN afin d'estimer ces projections manquantes. Une deuxième catégorie de problèmes résolus par l'utilisation des RN a trait à la distorsion dans les images, lesquelles sont provoquées, par la géométrie des détecteurs de la caméra ou par les contraintes imposées aux rayons gamma entre l'émission et la détection. Une première étude de C. Comtat et al. [2] utilise les réseaux auto-organiseurs afin de reconstruire les images, indépendamment, du nombre de détecteurs qui captent les rayons gamma. L'étude de M. Gopal [4] propose d'effectuer une restauration des sources de distorsions dans les images en utilisant les RN. Sa recherche est appliquée à la reconstruction d'images en tomographie d'émission simple ("*single photon emission computed tomography*" ou SPECT). Dans une même champ de recherche, C.E. Floyd Jr. [25] propose de substituer l'algorithme de retroprojection filtré par l'utilisation des RN pour filtrer les images. Cependant l'auteur n'utilise pas de méthode de classification des ses vecteurs d'entraînement se qui peut laisser planer un doute sur l'universalité de sa solution. La recherche de M Hawkins [5] propose une méthode de reconstruction d'image, utilisant les propriétés de la transformée de Fourier, pour un environnement où l'espacement entre les échantillons n'est pas constant voire même, non linéaire.

Les recherches ci-haut mentionnées, ne concerne pas directement la TEP. De plus, elles sont orientées vers une recherche de solutions concernant la compensation d'erreur. Peu de celles-ci concernent l'optimisation ou l'élargissement des possibilités des appareils. De plus, aucune méthode originale de sélection des vecteurs d'entraînement ainsi que de leurs critères de sélection n'est présenté.

L'un des intérêts de la présente recherche est d'identifier une méthode permettant de diminuer les artéfacts occasionnés par l'algorithme de rétroprojection filtré en utilisant des algorithmes adaptatifs supervisés pour rehausser la qualité de la restauration des images. Les méthodes itératives[33] de reconstruction d'images utilisent un algorithme adaptatif non supervisé. Le problème majeur de cette méthode, est qu'il n'y a aucun critère objectif d'arrêt des itérations. Seuls des critères subjectifs (Ex.: l'appréciation visuelle) permet de déterminer le point d'arrêt de l'algorithme. L'utilisation d'un système adaptatif supervisé permet de fixer un point d'arrêt optimum garantissant un usage universel du filtre de

restauration. De plus, nous comptons utiliser les réseaux de neurones afin d'accroître le champ actif de la caméra. Par cette dernière, il serait possible de rehausser les possibilités de l'appareil avec un minimum de coût financier. Pour ce faire, nous nous proposons d'utiliser les projections ainsi que les images finales pour effectuer les restaurations en réalisant deux expérimentations soit: la restauration des FOC à partir des projections et la restauration du bruit de reconstruction à partir des images.

L'approche utilisée met l'accent sur la conception de mires avec des attributs significatifs pour l'apprentissage du réseau de neurones. En plus d'identifier des mires, une méthodologie est élaborée afin de réaliser une classification des vecteurs d'apprentissage issus des mires conçues. La technique développée permet un apprentissage plus rapide et une capacité de généralisation lorsque le RN est appelé à travailler sur une image inconnue et non apprise.

Chapitre 2

FONDEMENTS THÉORIQUES DES RÉSEAUX

NEURONAUX ET DE LA TOMOGRAPHIE

2.1 Réseaux de neurones

2.1.1 Neurone

Le neurone est un élément contenant plusieurs entrées et une sortie. Chaque entrée x_i est pondérée par un poids w_{ki} avant d'être sommée pour produire u_k , k étant un indice indiquant le numéro du neurone. Le résultat u_k est soumis à une fonction de transfert $\mathbf{j}(\cdot)$ normalement non linéaire. Habituellement la sortie de ce neurone y_k sert d'entrée à un autre neurone. La Figure 2-1 présente le modèle classique d'un neurone et l'équation (2-1) présente la définition mathématique d'un signal à la sortie d'un neurone. Notez que le poids w_{k0} sert de biais servant à aligner u_k avec le zéro de $\mathbf{j}(\cdot)$.

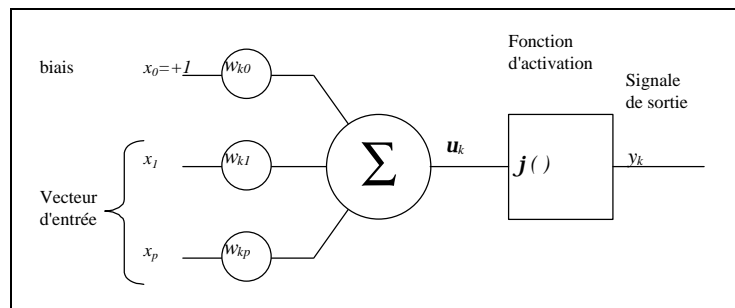


Figure 2-1: Représentation schématique d'un neurone.

$$y_k = \mathbf{j}(u_k) \quad (2-1)$$

$$\text{où } u_k = \sum_{i=0}^p w_{ki} x_i \quad (2-2)$$

2.1.2 Fonctions de transfert

Trois grandes classes de fonctions de transferts $\mathbf{j}(\cdot)$ sont utilisées par le neurone du type présenté à la Figure 2-1. Celles-ci sont les fonctions: seuil, partiellement linéaire et sigmoïde.

La fonction seuil. Cette fonction est de la forme suivante:

$$\mathbf{j}(\mathbf{u}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{u} \geq 0 \\ 0 & \text{si } \mathbf{u} < 0 \end{cases} \quad (2-3)$$

ainsi la sortie du neurone:

$$y_k = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{u}_k \geq 0 \\ 0 & \text{si } \mathbf{u}_k < 0 \end{cases} \quad (2-4)$$

La fonction partiellement linéaire est de la forme suivante:

$$\mathbf{j}(\mathbf{u}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{u} \geq 1/2 \\ \mathbf{u} & \text{si } -1/2 > \mathbf{u} > 1/2 \\ -1 & \text{si } \mathbf{u} \leq -1/2 \end{cases} \quad (2-5)$$

Outre les limites de ν imposées, cette fonction est similaire à un filtre de convolution classique.

La fonction sigmoïde. Cette fonction est la plus couramment utilisée car en plus d'être bornée aux grandes valeurs de $|\nu|$, cette fonction possède une partie linéaire au petite valeur de $|\nu|$. Cette fonction est représentée à la Figure 2-2 est décrite par (2-6)

$$\mathbf{j}(\mathbf{u}) = \frac{1}{1 + \exp(-a\mathbf{u})} \quad (2-6)$$

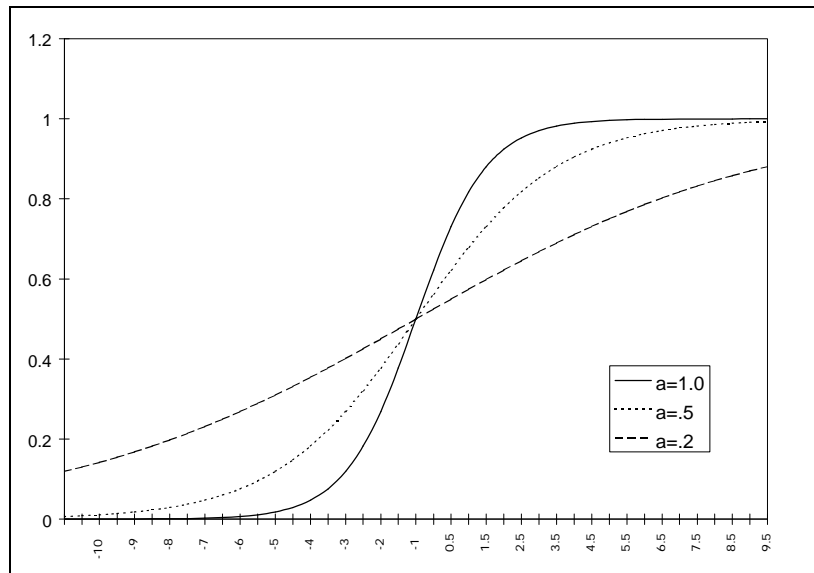


Figure 2-2: La fonction sigmoïde, Courbe avec plusieurs valeurs de a

Dans le cas d'une sigmoïde les bornes $\varphi(v)$ sont: $]0,1[$, par contre, la fonction \tanh (voir Eq. (2-7)) est bornée entre $] -1,1[$. Cette fonction permet d'effectuer un apprentissage plus rapide car $|\varphi(v)|$ est proportionnel à $|v|$ ce qui n'est pas le cas pour la fonction sigmoïde. La fonction partiellement linéaire définie en (2-5) permet d'approximer cette fonction.

$$\mathbf{j}(\mathbf{u}) = \frac{1 - \exp(-\mathbf{u})}{1 + \exp(-\mathbf{u})} = \tanh\left(\frac{\mathbf{u}}{2}\right) \quad (2-7)$$

2.1.3 Connexion en réseau

L'interconnexion des neurones forme un réseau. Les neurones sont disposés en couches, soit: une couche d'entrée, une couche de sortie et une ou plusieurs couches cachées situées entre la couche d'entrée et la couche de sortie. Ce genre de réseau se nomme Réseau Multicouches (RM) (voir Figure 2-3).

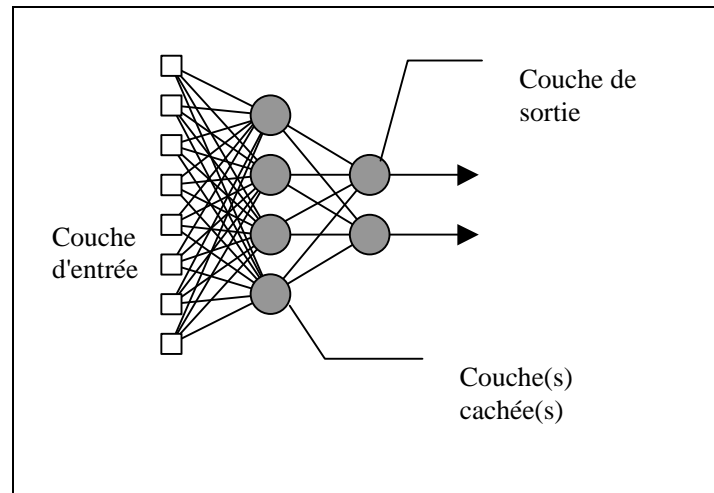


Figure 2-3: Configuration générique d'un réseau multicouches

Les Réseaux rétroactifs (*recurrent network*) permettent d'utiliser la sortie passée du réseau comme entrée à l'itération actuelle (voir Figure 2-4)

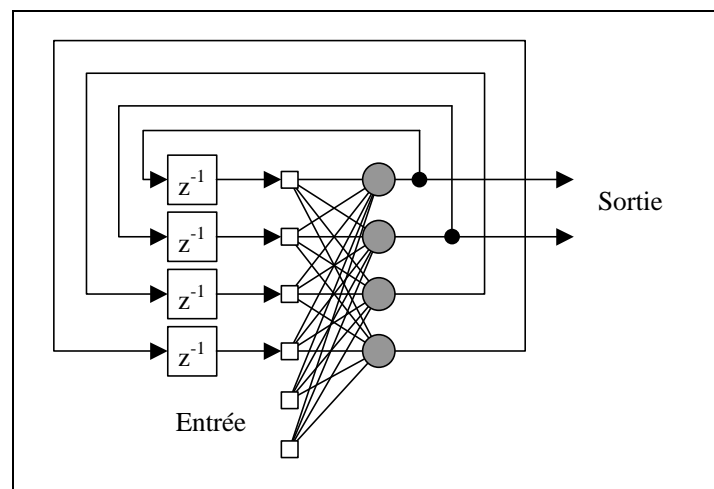


Figure 2-4: Configuration générique d'un réseau rétroactif (*recurrent network*)

2.1.4 Paradigme d'apprentissage

*"Intégrer une information à une structure qui existe en mémoire et utiliser cette information chaque fois que la situation l'exige"*¹

¹ Legendre Renald, *Dictionnaire actuel de l'éducation*. Larousse 1988, page 35

La structure mémoire qui est disponible pour emmagasiner l'information sont les poids synaptiques des neurones, ainsi l'algorithme d'apprentissage se charge de modifier la valeur des poids afin que le réseau mémorise l'information.

Les principaux paradigmes d'apprentissage sont les suivants: **supervisé**, par **renforcement** et **non supervisé**. Le texte qui suit en décrit les principales caractéristiques.

L'apprentissage supervisé: le réseau est stimulé par de l'information provenant d'un système. La réponse du réseau sera comparée à la réponse attendue suite à ce stimulus. La différence entre le résultat produit et le résultat attendu servira de base à l'algorithme d'apprentissage afin qu'il modifie les poids synaptiques du réseau. Ainsi, pour chaque événement provenant du système, il doit exister une réponse qui pourra être modélisée par le réseau. La Figure 2-5 présente le diagramme - bloc de l'apprentissage supervisé.

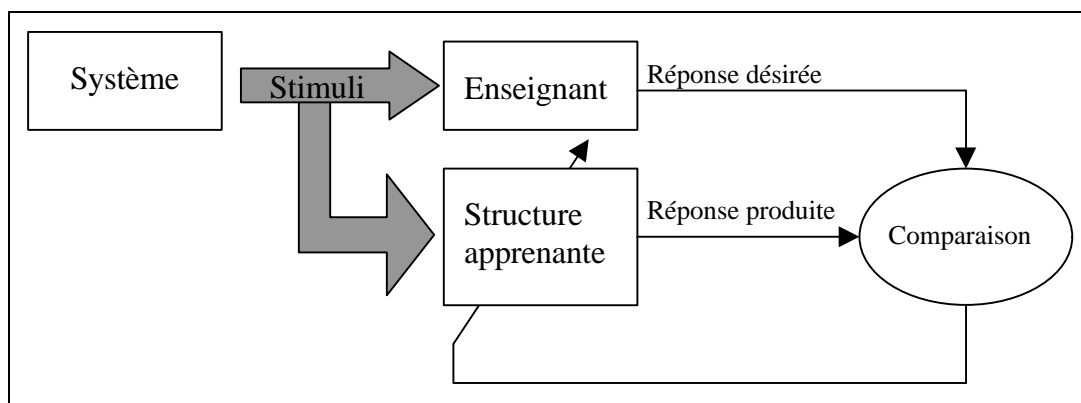


Figure 2-5: Diagramme de l'apprentissage supervisé

L'apprentissage par renforcement: est utilisé dans des circonstances où il existe plusieurs réponses pour une situation donnée. Dès lors, certaines réponses sont meilleures que d'autres d'où la nécessité d'introduire un **critique** qui fournira à l'apprenant une évaluation de la solution proposée. Selon le degré d'appréciation, la solution sera gratifiée positivement ou négativement. Les principales difficultés dans l'implantation de cet algorithme, sont dans un premier temps, de former un **critique** suffisamment connaissant du système à modéliser et deuxièmement, il faut un **apprenant** qui a la capacité de générer une solution acceptable.

L'apprentissage non supervisé: est un processus qui laisse à la structure (le réseau) la possibilité de s'auto-organiser afin qu'il élabore son propre système de classification suite

aux stimuli qui lui sont présentés. L'absence de modèle idéal à chaque stimulus provenant du système, constitue l'avantage majeur de l'utilisation de ce type d'apprentissage. Par contre, il est difficile d'influencer ou de diriger l'entraînement. De plus, le classement effectué par l'apprenant n'est pas nécessairement identique à celui que le système utilise pour générer les stimuli.

Dans la présente recherche nous utiliserons un algorithme d'apprentissage basé sur un entraînement supervisé. Il est proposé, à la section suivante, d'utiliser ce type d'apprentissage pour quelques applications associées au filtrage de signaux.

2.1.5 Filtres adaptatifs

Les filtres adaptatifs sont des entités qui ont la propriété de changer leurs structures. Les réseaux neuronaux peuvent donc être utilisés comme filtres adaptatifs. Il existe quatre champs d'applications [6] pour les filtres adaptatifs qui sont utilisés pour l'identification de système, la modélisation inverse de système, la prédiction et la soustraction d'interférences:

Soit :

x = Signal appliqué à l'entrée du filtre adaptatif

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} \hat{w}_k x(n-k)$$

où \hat{w}_k sont les poids estimés pour le filtre

y = Signal de sortie du filtre

d = Signal désiré

$e = d - y$ = erreur entre le signal de sortie et le signal désiré

Identification: Cet algorithme permet une identification linéaire d'un modèle inconnu. Le signal x est filtré afin de produire un signal y . La différence entre d et y fournit une mesure à l'algorithme servant à modifier les poids du filtre afin de faire correspondre les deux signaux y et d . Une valeur nulle ou très faible de e indique que le filtre représente bien le modèle.

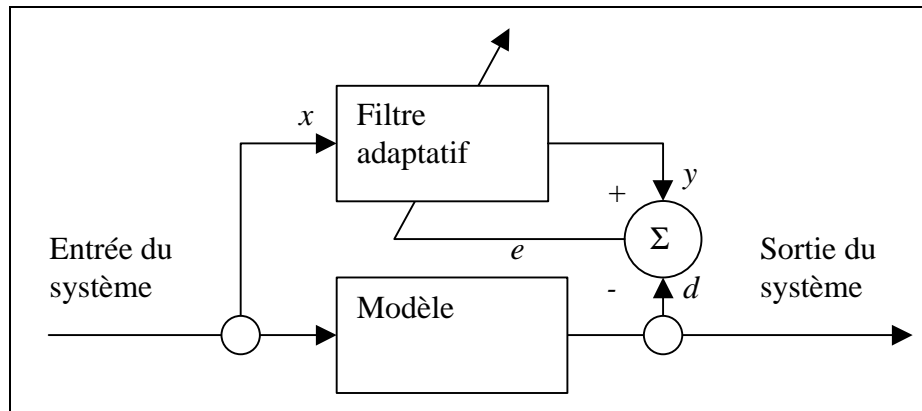


Figure 2-6: Application permettant l'identification de système

Modélisation inverse: Dans cette classe d'application le filtre est directement adapté à partir des signaux provenant du système. Afin de faire correspondre les signaux y et d , le filtre doit effectuer un apprentissage correspondant à l'inverse du modèle.

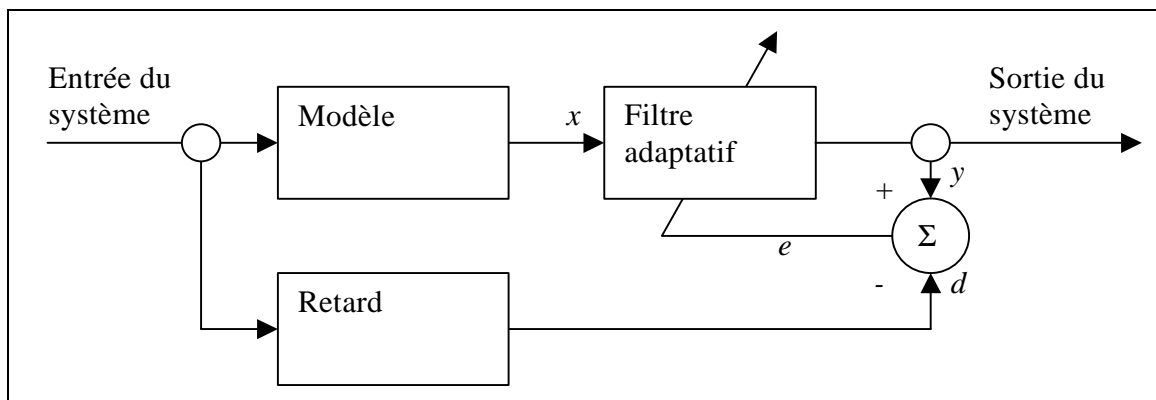


Figure 2-7: Application permettant la modélisation inverse d'un système

Prédicteur: Cette classe d'application permet de construire un filtre pouvant prévoir l'événement à venir. Le signal d étant le signal actuel et le signal x étant le signal actuel mais retardé par un délai. La minimisation de l'erreur permettra au filtre d'effectuer un apprentissage à partir du même signal décalé dans le temps. Une fois entraîné, ce filtre peut effectuer une prédiction sur un signal actuel.

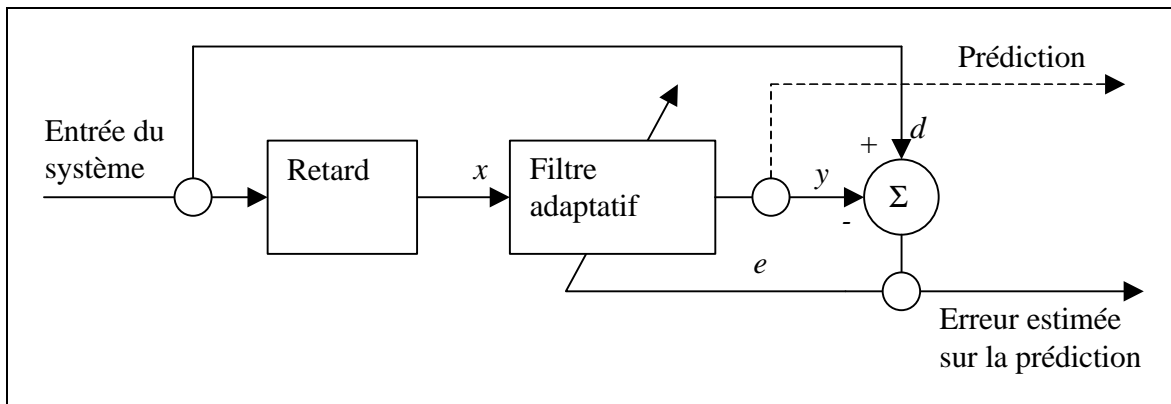


Figure 2-8: Application permettant d'effectuer une prédiction

Élimination d'interférences: Cette dernière classe de traitement permet d'éliminer dans un signal secondaire l'équivalent du contenu décrit par un signal primaire. Soit d (signal primaire) un signal contenant du bruit (n) et l'information à rehausser (s), x (signal secondaire) un signal ne contenant que le bruit (n) et y un signal provenant d'un filtrage de x . L'adaptation du filtre s'effectue par la minimisation de e soit $e = d - y = s + n - y$. Étant donné cette circonstance, la minimisation² de e sera équivalente à la minimisation de $n - y$

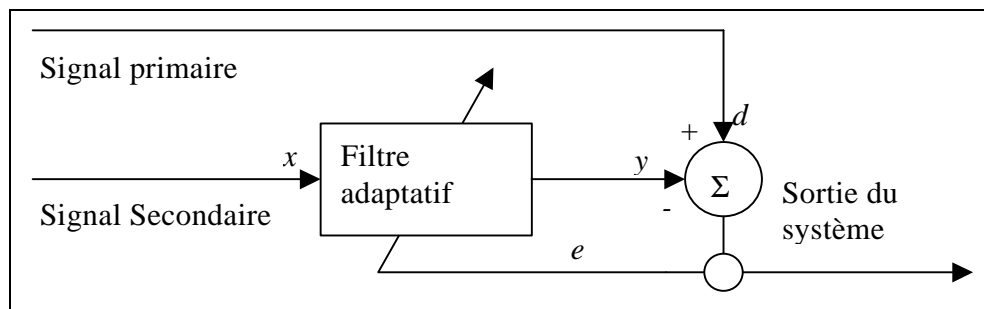


Figure 2-9: Application permettant l'élimination de l'interférence dans un système

2.1.6 Courbe d'apprentissage

La courbe d'apprentissage indique la qualité de l'entraînement c'est-à-dire, la minimisation de la différence entre la donnée idéale et la donnée restaurée par le réseau. Cette courbe est

² Haykin S., *Adaptive Filter Theory*, page 50

une représentation de l'erreur quadratique moyenne (EQM) en fonction du numéro d'itération.

$$EQM = \overline{e^2(n)} = \frac{1}{P} \sum_{p=0}^{P-1} (d_p(n) - x_p(n))^2 \quad (2-8)$$

Afin d'effectuer l'apprentissage, une base de vecteurs d'apprentissage comprenant les vecteurs $x(n)$ et leurs corollaires désirés $d(n)$ doit être générée. À chaque itération, c.a.d. un nouveau vecteur $x(n)$, $d(n)$ est présenté au réseau, l'algorithme d'adaptation va modifier les poids w_k à partir du calcul de $e(n)$ (2-8). La courbe typique de $e(n)$, nommée la courbe d'apprentissage, est présente à la Figure 2-10. La valeur P étant le nombre de points contenu dans les vecteurs d et x .

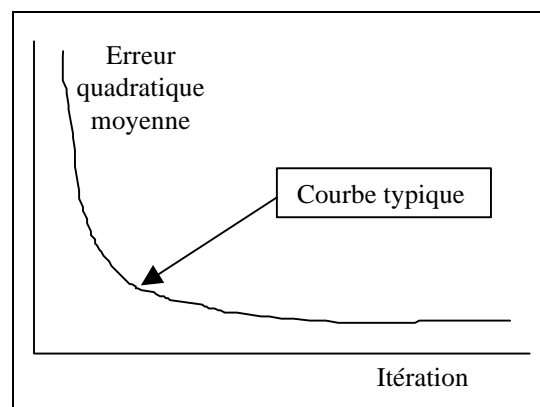


Figure 2-10: Courbe d'apprentissage typique

2.1.7 Algorithme de modification des poids

D'ordre général, pour un réseau de neurones tel que décrit à Figure 2-1, les poids $w_{ki}(n)$ au temps n sont mis à jour au temps $n+1$ par l'équation suivante:

$$w_{ki}(n+1) = w_{ki}(n) + \Delta w_{ki}(n) \quad (2-9)$$

Par contre les algorithmes calculant $\Delta w_{ki}(n)$ varient beaucoup. Notons la règle de Boltzmann qui n'évalue pas la valeur de sortie à chaque itération mais plutôt sa probabilité d'être à 0 ou 1, il s'agit dans ce cas d'une règle basée sur l'énergie totale d'un système. Il y a aussi la règle de Hebb qui est dérivée de ses études sur la neuropsychologie et qui stipule que ([8], p. 62):

"When an axon of cell A is near enough to excite cell B and repeatedly or persistently takes part in firing it, some growth process or metabolic change takes place in one or both cells such that A's efficiency, as one of the cells firing B, is increased"

Cette règle est mathématiquement modélisée par:

$$\Delta w_{ki}(n) = \mathbf{h}y_k(n)x_i(n) \quad (2-10)$$

La variable \mathbf{h} déterminant le taux d'apprentissage ("*rate of learning*"). Finalement, comme dernière règle, l'apprentissage par compétition qui a été développé par von der Malsburg (1973), Fukushima (1975) et Grossberg (1972, 1976) dans leurs travaux sur la classification adaptative des formes. Elle met en interaction les cellules par excitation ou inhibition afin de garder un potentiel constant dans le réseau. ainsi:

$$\Delta w_{ji} = \begin{cases} \mathbf{h}(x_i - w_{ji}) & \text{si le neurone } j \text{ gagne la compétition} \\ 0 & \text{si le neurone } j \text{ perd la compétition} \end{cases} \quad (2-11)$$

et

$$\sum_i w_{ij} = 1$$

Règle de Widrow-Hoff

La règle de Widrow-Hoff est une règle de type Hebbien. Telle que définie dans [10] p.77 la règle de modification des poids s'écrit comme suit:

$$\Delta w_{ki}(n) = \mathbf{h}d_k(n)x_i(n) \quad (2-12)$$

où $d_k(n)$ est le gradient de l'erreur quadratique par rapport à la variation des poids:

$$\frac{\partial e(n)}{\partial w_{ki}(n)} = d_k(n)x_i(n) \quad (2-13)$$

et

$$\overline{e^2(n)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I (y_i(n) - d_i(n))^2 \quad (2-14)$$

Le calcul de l'erreur ne peut être effectué qu'à partir de la couche de sortie car les valeurs désirées des couches intermédiaires du réseau ne sont pas connues. La mise à jour des poids s'effectue de la couche de sortie vers la première couche d'où le nom d'algorithme par retropropagation de l'erreur (voir "*backpropagation*" utilisé dans la littérature anglo-saxonne).

2.1.8 Réseau Perceptron Multi Couche

Le réseau Perceptron Multi Couche (PMC) utilise la règle de modification des poids de Widrow-Hoff. La fonction de transfert $\mathbf{j}(\cdot)$ est non linéaire. Soit qu'il s'agisse de la fonction sigmoïde ou *tanh*. L'algorithme de convergence du réseau (dérivé de [7] p.112) s'écrit comme suit:

VARIABLES

$$\mathbf{x}(n) = [1, x_1(n), x_2(n), \dots, x_p(n)]^T$$

p étant le nombre de neurones à l'entrée du réseau

$$\mathbf{w}(n) = [\theta(n), w_1(n), w_2(n), \dots, w_p(n)]^T$$

$\theta(n)$ étant un biais

$y(n)$ la sortie du réseau

$d(n)$ la valeur idéale

η le coefficient d'apprentissage

ETAPE 1: INITIALISATION

$$\mathbf{W}(0) = \text{rand}(-.1, .1)$$

ETAPE 2: ACTIVATION

Assigner les valeurs à $\mathbf{x}(n)$ et $\mathbf{d}(n)$

ETAPE 3: CALCUL DE LA SORTIE DU RÉSEAU

$$y(n) = \tanh(\mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n))$$

ETAPE 4: ADAPTATION DES POIDS

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \eta e(n)\mathbf{x}(n)$$

$$e(n) = (d(n) - y(n))$$

ETAPE 5:

$n=n+1$ et boucler à l'étape 2

Algorithme 2-1: Séquence de modification des poids d'un réseau de neurones

La vitesse de convergence de l'apprentissage est directement proportionnelle à la constante η dont la valeur se situe entre 0 et 1 exclusivement.

2.1.9 Réseau de neurones et traitement du signal

Les réseaux de neurones peuvent être utilisés en traitement de signal. Un signal est une quantité d'informations provenant d'un système. Le signal est discret ou continu, il peut être de longueur finie ou infinie.

Un système peut être caractérisé par les attributs suivants :

Linéarité, un système est linéaire si le signal d'entrée $ax_1(t) + bx_2(t)$ produit un signal de sortie $ay_1(t) + by_2(t)$, a et b étant des constantes arbitraires. Ici $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont des signaux d'entrées arbitraires, et $y_1(t)$ et $y_2(t)$ les signaux de sorties correspondants.

Invariance dans le temps (stationnarité), un système est invariant dans le temps si le signal d'entrée $x(t-t')$ produit un signal de sortie $y(t-t')$, t' étant un retard arbitraire, $x(t)$ un signal d'entrée arbitraire et $y(t)$ le signal de sortie.

Stabilité, un système est stable si tout signal d'entrée arbitraire $x(t)$ d'amplitude finie (i.e. $|x(t)|_{\max} \leq A$) produit un signal de sortie $y(t)$ d'amplitude finie (i.e. $|y(t)|_{\max} \leq B$), A et B étant deux nombres finis.

Causalité, un système est causal si le signal de sortie à tout instant $t=t_0$ est indépendant des valeurs du signal d'entrée aux instants postérieurs à t_0 .

2.2 Imagerie médicale

Les caméras utilisées en imagerie médicale peuvent permettre d'obtenir des images de l'anatomie (Étude scientifique de la forme, de la disposition et de la structure des organes de l'homme,³) ou du métabolisme (Ensemble des processus complexes et incessants de transformation de matière et d'énergie par la cellule ou l'organisme, au cours des phénomènes d'édification et de dégradation organiques ⁴). Les systèmes d'imagerie tels que les caméras à rayons X, la résonance magnétique nucléaire (RMN) ou les échographes sont des systèmes qui servent principalement à des études anatomiques alors que les caméras à rayon gamma ou les tomographes à émission de positron (TEP) sont des caméras permettant l'étude métabolique. Ces dernières sont notamment très utilisées dans les recherches pharmacologiques afin d'étudier *in vivo* la métabolisation de nouveaux médicaments. Le présent chapitre présente les principales caractéristiques du fonctionnement d'un TEP et des outils mathématiques associés à la reconstruction d'images

2.2.1 L'appareil et la détection

Le TEP est constitué d'un ensemble de détecteurs disposés de façon circulaire en forme de beigne. L'objet à observer est placé en son centre. Ces caméras sont couplées à un ordinateur, lequel est chargé d'effectuer les calculs nécessaires pour construire une image. Les images sont produites sous forme de tranches. Il est possible de juxtaposer ces tranches afin de former des images volumiques de l'objet observé. Les unités d'informations qui sont mesurées par les détecteurs de l'appareil sont des photons de 511 keV. Ces photons proviennent de la désintégration d'un radio-isotope émetteur de β^+ . Lorsque le positron perd son énergie cinétique par collision avec le milieu, le positron s'annihile avec un électron en émettant 2 photons de 511 keV en direction diamétralement opposées formant ainsi une trajectoire de détection. Selon le type d'observation, les radio-isotopes sont couplés à des

³(c) Larousse.

⁴(c) Larousse.

substances que le métabolisme utilise pour produire son énergie. Les trajectoires sont mémorisées et transmises à un ordinateur qui se charge de produire une image.

Détecteurs

Les détecteurs sont composés d'une première partie appelé scintillateur servant à absorber le rayonnement et à convertir son énergie sous forme de lumière qui peut être mesurée à l'aide d'un photodétecteur. Le scintillateur le plus couramment utilisé en TEP est le germanate de bismuth (BGO) parce qu'il possède un pouvoir d'arrêt élevé pour les photons de 511 keV. À l'heure actuelle deux technologies sont utilisées pour mesurer la lumière de scintillation. L'approche classique est basée sur des *phototubes*. Les *phototubes* sont des tubes sous vide dont la surface sensible, appelée photocathode, permet de convertir la lumière en charge électrique par émission photoélectrique. Les électrons émis de la photocathode sont accélérés et multipliés via un système de dynodes et d'anodes qui sont directement enchâssés dans le tube. Les *phototubes* ont l'avantage d'être relativement simple à construire, ils sont peu coûteux et leur signal de détection est bien amplifié. Par contre, les *phototubes* ont le désavantage d'être assez gros, ce qui limite la résolution de la caméra. L'autre technique [19] propose d'utiliser des photodiodes pour convertir la lumière émise par les scintillateurs en signal électrique. L'impulsion ainsi produite est de faible amplitude, ce qui implique que le signal doit être pré-amplifié avant d'être traité. Cette technologie permet d'augmenter la résolution du TEP puisque les cristaux peuvent être beaucoup plus petits qu'avec les *phototubes*. Par contre, il y a une perte d'efficacité de détection et les coûts, reliés à de tels détecteurs, sont augmentés par le fait que ceux-ci doivent être utilisés avec des unités de pré amplification.

Diverses composantes de bruit

Plusieurs contributions au bruit sont à prendre en compte lors de l'acquisition des données. L'une des composantes de bruit résulte de la diffusion des photons de 511 keV. La diffusion est un phénomène qui se produit lorsque le photon entre en collision avec un atome de matière se trouvant sur sa trajectoire. Les diffusions peuvent se produire dans la matière qui compose l'objet observé, les collimateurs de plomb qui sont placés autour des détecteurs et même, avec les atomes qui composent les cristaux des détecteurs. Cette dernière peut

provoquer une déviation telle que la détection du rayon s'effectue dans un détecteur adjacent. Les diffusions peuvent fausser la position d'une trajectoire en projetant un des photons hors de l'anneau tomographique ou en déviant un des photons sur un détecteur voisin.

Une autre composante de bruit survient lorsque le système tente de valider une trajectoire. La construction d'une trajectoire nécessite que la détection d'un photon soit mis en coïncidence temporelle avec une autre détection. Cette coïncidence exige l'utilisation d'un système qui contrôle l'instant d'entrée du signal de détection et qui effectue une recherche afin d'identifier une autre détection. Si deux détections sont identifiées comme s'étant produites au même moment, alors le système enregistre les informations comme étant une trajectoire valide, sinon le système rejette ces informations. Ce traitement est effectué par les unités de coïncidence. Une trajectoire erronée peut aussi être générée si une détection valide se produit au même moment qu'une détection provenant d'un photon issu d'une autre annihilation.

Finalement, une dernière composante de bruit est le bruit statistique. Ce type de bruit est intrinsèque à tous systèmes de mesure et est mathématiquement démontré [29]. En instrumentation nucléaire, le niveau de bruit est proportionnel au nombre d'impulsions mesurées. À vrai dire, l'étalement du bruit suit une distribution poissonnienne tendant vers une distribution gaussienne pour des mesures à haut niveau de compte. La variance (σ^2) du bruit, à grande statistique, suit la règle suivante:

$$\sigma = \sqrt{N} \quad (2-15)$$

La plage couverte par $\pm\sqrt{N}$ est l'incertitude de N . Le pourcentage d'incertitude V d'une mesure est donc défini comme suit:

$$\begin{aligned} V &= (\sqrt{N}/N) \times 100\% \\ &= 100\% / \sqrt{N} \end{aligned} \quad (2-16)$$

N étant le nombre de coups mesuré. On note que la valeur absolue de σ^2 augmente proportionnellement à N . Par contre, le bruit statistique relatif $\sigma/N = 1/N^{1/2}$ est inversement proportionnel à la racine carré du nombre de comptes. L'effet du bruit diminue donc en augmentant la statistique de comptage. En imagerie médicale, l'augmentation du nombre de compte peut être obtenue de deux façons, soit par l'augmentation de la dose de radio-

isotopes à injecter au sujet, soit par l'augmentation du temps d'acquisition des données. Or, un des objectifs premiers des utilisateurs de ces appareils est de minimiser ces deux points. C'est donc dire que la composante de bruit statistique sera toujours importante dans l'acquisition des données en imagerie médicale.

Tous ces facteurs de bruit ont pour effet de diminuer la résolution et l'efficacité de l'appareil mais aussi de diminuer le contraste et la précision quantitative des images. Il est donc important d'utiliser des algorithmes de reconstruction qui minimisent l'effet de ces facteurs de bruit.

2.3 Reconstruction en TEP

La structure géométrique d'un TEP impose l'utilisation d'outils mathématiques adaptés. Les données obtenues de la caméra se présentent sous forme d'histogramme appelé projection. L'ensemble des projections prises tout autour du sujet étudié forment une matrice bidimensionnelle appelée sinogramme. Le modèle mathématique représentant une acquisition tomographique est la transformée de Radon (\mathfrak{R}). Un outil mathématique permettant de reconstruire une image de l'objet étudié –à partir du sinogramme- doit être élaboré.

2.3.1 Transformée de Radon

La transformée de Radon (\mathfrak{R}) (2-17) est l'outil mathématique utilisé pour modéliser l'acquisition des projections par le TEP (voir [27]). Le point $P_q(r)$ provenant de la projection P est une sommation de l'activité de la trajectoire dont l'angle est q et la distance par rapport au centre de l'objet est r (Figure 2-11).

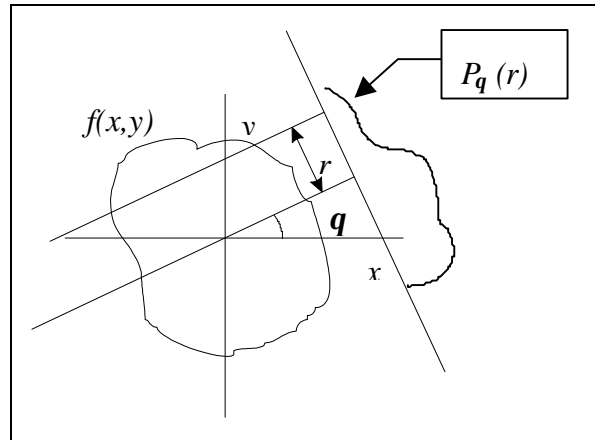


Figure 2-11: La projection P_q de l'objet $f(x,y)$

$$P_q(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \delta(x \cos q + y \sin q - r) dx dy \quad (2-17)$$

L'ensemble des projections forme une matrice à deux dimensions r et q nommée sinogramme (voir Image 2-1). Ce nom vient de la forme en sinus que produit, sur la matrice, une source ponctuelle hors du centre de l'image $f(x,y)$.

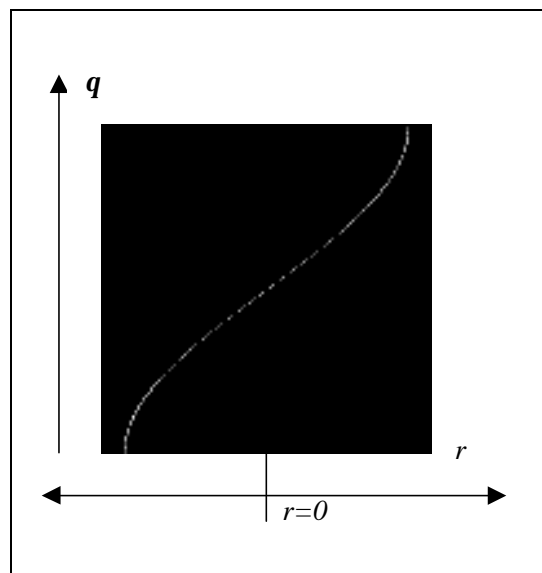


Image 2-1: Sinogramme d'une source ponctuelle

2.3.2 Restauration

La restauration d'une image à partir du sinogramme implique l'utilisation d'un opérateur qui convertit les données de l'espace (r, \mathbf{q}) à (x, y) . Pour ce faire, nous établirons une relation entre la transformée de Fourier d'un ensemble de projections issues de \mathfrak{R} d'un objet et la transformée de Fourier bi-dimensionnelle du même objet. Cette relation est démontrée par le théorème de coupe projection. Grâce à ce théorème il sera possible de restaurer l'objet initial en effectuant la transformée de Fourier bi-dimensionnelle inverse de l'objet.

2.3.3 Théorème de coupe projection

L'utilisation du théorème de coupe projection permet d'exploiter les propriétés de l'espace de Fourier (u, v) afin de filtrer les projections (r, \mathbf{q}) issu de \mathfrak{R} .

Soit la transformée de Fourier (\mathfrak{F}) de $x(n)$;

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-p}^p x(n) e^{-j\omega n} dn \quad (2-18)$$

L'une de ses propriétés stipule que :

$$x(n) ** y(n) \Leftrightarrow X(e^{j\omega}) Y(e^{j\omega}) \quad (2-19)$$

où ** désigne l'opération de convolution

En analysant les projections $P_{\mathbf{q}}(r)$ dans l'espace de Fourier, il sera possible d'utiliser la propriété définie en (2-19). Pour ce faire, voici ce que stipule le théorème de coupe projection :

"The Fourier transform of a parallel projection of an image $f(x, y)$ taken at angle \mathbf{q} gives a slice of two-dimensional transform, $F(u, v)$, subtending an angle \mathbf{q} with u -axis. In other words, the Fourier transform of $P_{\mathbf{q}}(t)$ gives the values of $F(u, v)$..." (voir sec.3.2 [27])

Dans un premier temps, définissons $F(u, v)$ comme étant la transformée de Fourier en deux dimensions d'un objet $f(x, y)$:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (2-20)$$

et définissons la transformée de Fourier d'une projection $P_q(r)$ pour un angle q comme suit:

$$S_q(w) = \int_{-\infty}^{\infty} P_q(r) e^{-jpw} dr \quad (2-21)$$

Démontrons le théorème pour une projection à $q=0$, Considérons \mathfrak{S} d'un objet $F(u,v)$ pour $v=0$:

$$F(u,0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-j2p(ux)} dx dy \quad (2-22)$$

la phase n'étant plus dépendante de y alors il est possible d'écrire:

$$F(u,0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy \right] e^{-j2p(ux)} dx \quad (2-23)$$

L'expression entre crochet peut être remplacée par (2-17) et s'écrire, pour un angle de projection $q=0$, de la forme suivante:

$$P_{q=0}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy \quad (2-24)$$

En substituant (2-24) dans (2-23) on obtient:

$$F(u,0) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{q=0}(x) e^{-j2p(ux)} dx \quad (2-25)$$

Nous avons donc réussi à mettre en relation un objet à deux dimensions ($F(u,v)$) avec une projection à une dimension ($P_q(x)$). Ou, $\mathfrak{S}(f(x,y))$ bi-dimensionnelle équivaut $\mathfrak{S}(P_q(x))$ unidimensionnelle des projections posées à angle q dans l'espace (u,v) :

$$F(u,0) = S_{q=0}(u) \quad (2-26)$$

2.3.4 Rétroprojection filtrée

Étant donné qu'il est possible de représenter un ensemble de projections dans l'espace de Fourier $F(u,v)$, il est donc possible, en effectuant \mathfrak{S}^{-1} de restaurer l'image $f(x,y)$.

Soit l'image $f(x,y)$ issu de \mathfrak{S}^{-1} :

$$f'(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u,v) e^{j2p(ux+vy)} du dv \quad (2-27)$$

Afin de localiser les projections en terme de coordonnée polaire, les variables (u, v) sont converties en variables polaires (w, \mathbf{q}) :

$$u = w \cos \mathbf{q} \quad (2-28)$$

$$v = w \sin \mathbf{q} \quad (2-29)$$

$$du \, dv = w \, dw \, d\mathbf{q} \quad (2-30)$$

Ainsi donc (2-27) s'écrit

$$f'(x, y) = \int_0^{2p} \int_0^{\infty} F(w, \mathbf{q}) e^{j2pw(x \cos \mathbf{q} + y \sin \mathbf{q})} w \, dw \, d\mathbf{q} \quad (2-31)$$

Cette intégrale peut être séparée en deux parties soit \mathbf{q} variant de 0 à 180^0 et 180^0 à 360^0 .

$$\begin{aligned} f'(x, y) &= \int_0^p \int_0^{\infty} F(w, \mathbf{q}) e^{j2pw(x \cos \mathbf{q} + y \sin \mathbf{q})} w \, dw \, d\mathbf{q} \\ &+ \int_0^p \int_0^{\infty} F(w, \mathbf{q} + 180) e^{j2pw(x \cos(\mathbf{q} + 180) + y \sin(\mathbf{q} + 180))} w \, dw \, d\mathbf{q} \end{aligned} \quad (2-32)$$

En utilisant la propriété suivante :

$$F(w, \mathbf{q} + p) = F(-w, \mathbf{q}) \quad (2-33)$$

Alors (2-31) peut s'écrire de la forme suivante :

$$f'(x, y) = \int_0^p \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(w, \mathbf{q}) |w| e^{j2pw(x \cos \mathbf{q} + y \sin \mathbf{q})} dw \right] d\mathbf{q} \quad (2-34)$$

En substituant $F(w, \mathbf{q})$ par la transformée de Fourier des projections $S_q(w)$, il est possible d'écrire :

$$f'(x, y) = \int_0^p \left[\int_{-\infty}^{\infty} S_q(w) |w| e^{j2pw(x \cos \mathbf{q} + y \sin \mathbf{q})} dw \right] d\mathbf{q} \quad (2-35)$$

Ou encore

$$f'(x, y) = \int_0^p Q_q(x \cos \mathbf{q} + y \sin \mathbf{q}) d\mathbf{q} \quad (2-36)$$

avec :

$$Q_q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_q(w) |w| e^{j2pwt} dw \quad (2-37)$$

et :

$$t = x \cos q + y \sin q \quad (2-38)$$

L'équation (2-36) représente la rétroprojection filtrée de $f(x,y)$. Il s'agit de projeter un ensemble de projections filtrées ($Q_q(w)$), aux angles q définis par l'intégrale. Les projections filtrées sont constituées d'une composante représentant la transformée de Fourier des projections ($S_q(w)$) issues de $\mathfrak{R}(f(x,y))$ ainsi que d'un filtre $|w|$ nommé filtre rampe. Le filtre rampe sera considéré comme étant la réponse impulsionnelle inverse de la transformée de Radon. La Figure 2-12 présente la rétroprojection d'un vecteur de projection sur une grille de projection afin de former l'image $f'(x,y)$. De même, la Figure 2-13 page 2-29 présente sous forme de schéma-bloc le processus complet de la reconstruction.

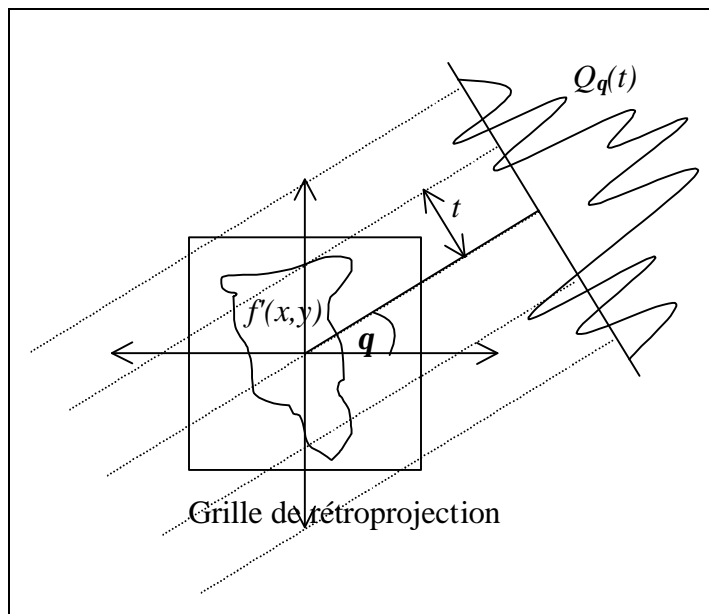


Figure 2-12: Rétroprojection de la projection filtrée $Q_q(t)$ sur une grille afin de former l'image $f'(x,y)$

2.3.5 Réponse impulsionnelle et restauration

Comme spécifié plus haut (2-37), l'algorithme par rétroprojection possède sa propre réponse impulsionnelle $|w/$ définie dans l'espace de Fourier. Dans la présente section, nous caractériserons cette réponse impulsionnelle dans l'espace (x,y) . En se référant à la propriété définie en (2-19) nous pouvons écrire (2-37) comme suit:

$$Q_q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_q(w) e^{(j2pwt)} dw \bullet \int_{-\infty}^{\infty} |w| e^{(j2pwt)} dw \quad (2-39)$$

où

$$Q_q(t) = s_q(t) \ast \ast h(t) \quad (2-40)$$

avec la réponse impulsionnelle $h(t)$ de la forme:

$$h(t) = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p H(e^{jw}) e^{jw} dw \quad (2-41)$$

et selon (2-25):

$$s_q(t) = P_q(t) \quad (2-42)$$

Il s'agit donc, afin d'obtenir $h(t)$, d'effectuer la transformée de Fourier inverse de $|w/$ qui est dans l'espace des fréquences. Or, cette transformation n'existe pas. L'auteur de [27] suggère d'effectuer \mathfrak{S}^{-1} du terme suivant:

$$|w| e^{-\epsilon|w|} \quad (2-43)$$

Pour $\epsilon \rightarrow 0$, la transformée de Fourier inverse, dénotée $h_\epsilon(t)$, s'écrit:

$$h_\epsilon(t) = \frac{\epsilon^2 - (2pt)^2}{(\epsilon^2 + (2pt)^2)^2} \quad (2-44)$$

Pour de grande valeur de t versus ϵ , on peut estimer que $h_\epsilon(t) \approx -1/(2pt)^2$.

2.3.6 Réponse impulsionnelle de \mathfrak{R} après rétroprojection

Il est possible de rétroprojeter une image sans filtrer les projections, c'est à dire qu'il est possible d'écrire (2-35) de la forme suivante:

$$f(x, y) = \int_0^p \left[\int_{-\infty}^{\infty} P_q(t) e^{-j2pwt} dt \right] dq \quad (2-45)$$

Tel que suggéré par [32] section 7.3, considérons une image $f(x,y)$ en terme de source ponctuelle. En utilisant la fonction de Dirac il est possible d'écrire $f(x,y)$ de la forme suivante:

$$f(x, y) = \mathbf{d}(x - x^*) \mathbf{d}(y - y^*) \quad (2-46)$$

En effectuant une transformation de coordonnée spatiale à un système de coordonnée polaire:

$$P_q(r) = \mathbf{d}(r - x^* \cos q - y^* \sin q) \quad (2-47)$$

La restauration de l'image $f'(x,y)$ s'écrit:

$$f'(x, y) = \int_0^p P_q(x \cos q + y \sin q, q) dq \quad (2-48)$$

$$= \frac{1}{\left| (x - x^*) \sin q - (y - y^*) \cos q \right|} \Big|_{(x-x^*) \sin q - (y-y^*) \cos q = 0} \quad (2-49)$$

$$= \frac{1}{\left| - (x - x^*) \sin \arctan \left(\frac{x - x^*}{y - y^*} \right) - (y - y^*) \cos \arctan \left(\frac{x - x^*}{y - y^*} \right) \right|} \quad (2-50)$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{x - x^*}{y - y^*} \right)^2}}{\frac{(x - x^*)^2}{y - y^*} + (y - y^*)} = \frac{1}{\sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2}} \quad (2-51)$$

De cela, il en résulte une convolution à deux dimensions:

$$f'(x, y) = f(x, y) ** h(x, y) \quad \text{où} \quad h(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (2-52)$$

Cette démonstration permet donc de définir $h(x,y)$ comme étant la réponse impulsionnelle de la rétroprojection (\mathfrak{R}^{-1}) ainsi:

$$\hat{\mathbf{A}}^{-1}(\hat{\mathbf{A}}(f'(x,y))) = f(x,y) ** 1/r \quad (2-53)$$

2.3.7 Algorithme d'acquisition et de reconstruction.

Grâce aux outils développés plus haut, il est possible d'élaborer un algorithme de reconstruction d'image issu d'un appareil tomographique. Cet algorithme se décrit comme suit:

- Pour tous les angles \mathbf{q} compris en 0 et 180^0 à intervalle de K degré
- Calculer les projections $P_{\mathbf{q}}(r)$
- Effectuer la transformée de Fourier de chaque projection $S_{\mathbf{q}}(w)$
- Pondérer les projections filtrées par un filtre rampe $2\mathbf{p}/w//K$: $Q_{\mathbf{q}}(w)$
- Effectuer la transformée de Fourier inverse de chaque projection filtrée ($Q_{\mathbf{q}}(w)$)
- Rétroprojeter afin de reconstruire l'image $f'(x,y)$

Algorithme 2-2: Séquence de reconstruction d'une image par rétroprojection filtrée

La Figure 2-13 présente l'algorithme par rétroprojection filtrée sous forme de diagramme de bloc

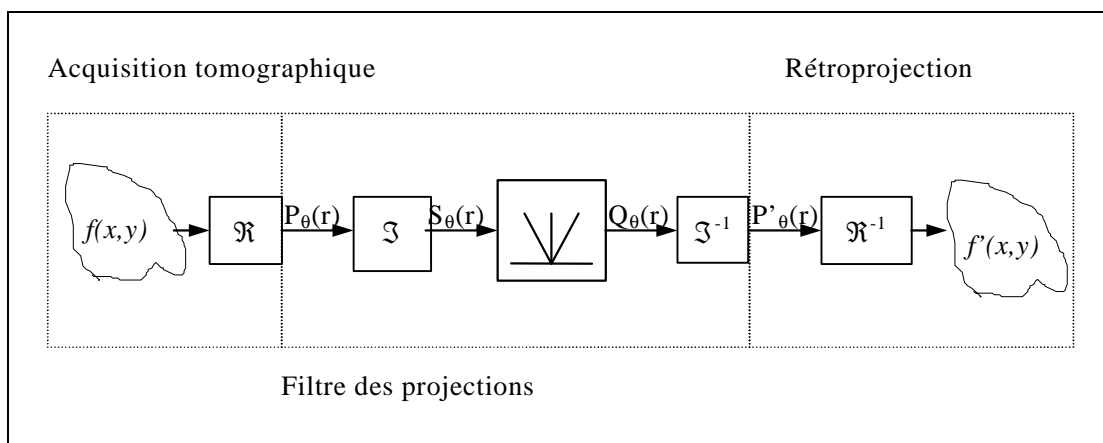


Figure 2-13: Algorithme de reconstruction d'une image

2.3.8 Effets de la rétroprojection sur les images

La Figure 2-15 et l'Image 2-2 présentent les effets que produisent les rétroprojections. À la Figure 2-15 c) on observe des ondulations après la restauration par rétroprojection filtrée. Ces ondulations proviennent de la discrétisation du signal. En effet, la restauration étant réalisée par un ordinateur, les données doivent être numérisées et traitées de façon discrète. Cette conversion entre l'espace continu et l'espace discret produit des ondulations nommées phénomène de Gibbs. La courbe b) est un profil issu d'une rétroprojection sans filtre. On note que le phénomène de Gibbs n'est pas apparent. Par contre la résolution au dixième de hauteur est nettement détériorée. L'effet discret est observable par la descente en palier de la décroissance. Cette courbe b)- est représentative de la réponse impulsionnelle de la rétroprojection ($h(r)=1/r$). Les trois courbes sont normalisées les unes par rapport aux autres afin de mieux démontrer les différents effets.

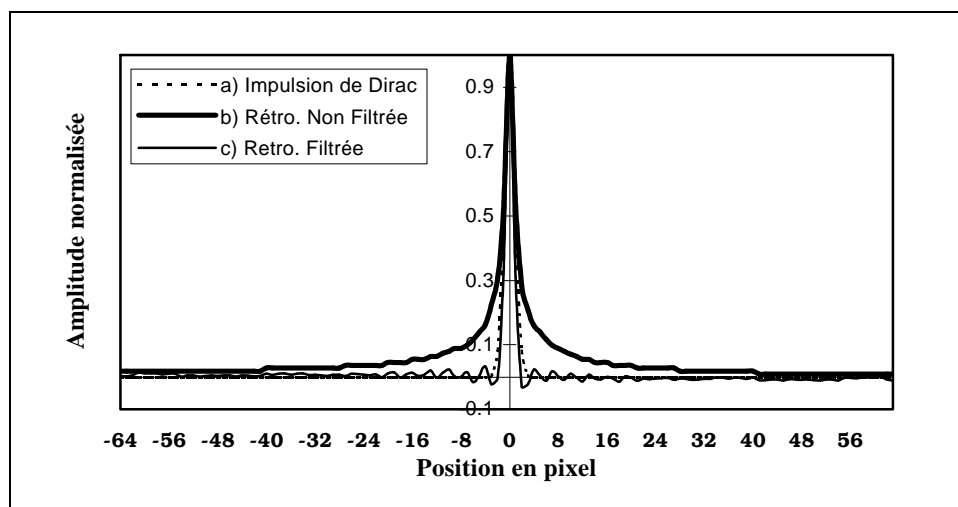


Figure 2-15: Profils normalisés, extraits de trois images, a) réponse impulsionnelle idéale à restaurer, b) profil de l'image rétroprojetée non filtrée équivalent à la réponse impulsionnelle de la rétroprojection, c) profil de l'image rétroprojetée filtrée.

Quant à l'Image 2-2 elle présente les reconstructions sous forme d'images. Si l'on se réfère à l'algorithme de la Figure 2-13, l'image a) est égale à $f(x,y)$ soit l'image idéale. Il est à remarquer l'effet de flou que produit sur l'image b) la rétroprojection sans filtre. À vrai dire, l'information est codée sur une petite partie du signal alors qu'une grande partie de l'information est perdue sous forme de signal DC. Quant à l'image c), il est à observer que

celle-ci est bruitée à hautes fréquences. Il s'agit ici d'un effet accentué par le $1/w$. En effet, dans l'espace des fréquences, les fréquences élevées sont amplifiées par une grande valeur de w . Ces fréquences étant bruitées par la discrétisation du signal on observe donc une amplification du bruit.

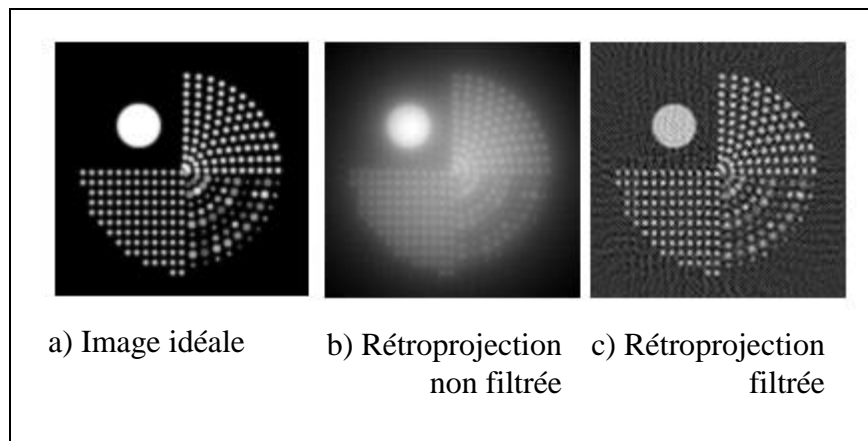


Image 2-2: Comparaison entre une image idéale a) rétroprojetée et b) utilisant la rétroprojection filtrée

2.3.9 Résumé:

La transformée de Radon permet de modéliser une acquisition tomographique en ce sens que ces deux outils (Le théorème de coupe projection et l'algorithme par rétroprojection filtrée) produisent des données sous forme de projections. Le théorème de coupe projection permet d'établir une relation entre $\mathfrak{S}(P_q(r))$ et $\mathfrak{S}(f(x,y))$. Cette propriété permet d'utiliser la transformée de Fourier bi-dimensionnelle inverse comme outils de restauration des images. Par contre, le théorème est exact dans un espace continu. Dans un espace discret, l'algorithme doit effectuer une approximation entre les projections. L'algorithme de rétroprojection filtrée permet d'effectuer une rétroprojection d'objet uni-dimensionnel (la projection filtrée) sur une grille. Chaque projection est filtrée par une rampe dans l'espace w et traitée par une transformée de Fourier uni-dimensionnelle inverse avant d'être rétroprojetée. En terminant, nous avons établi que la rétroprojection, sans filtre rampe, possède une réponse impulsionnelle $(h(r))$ égal à $1/(x^2+y^2)^{1/2}$

2.4 Les fonctions d'ouverture en coïncidences (FOC)

Le TEP est une caméra annulaire. De ce fait, il en résulte que les détecteurs sont disposés de façon circulaire autour du point central c (voir Figure 2-16). En se déplaçant radialement par rapport au centre c de l'appareil et en observant une trajectoire perpendiculaire au déplacement, on remarque que l'aire de détection d'un couple de détecteurs D_1D_2 s'accroît au fur et à mesure de l'éloignement de c . Cette aire de détection suit une certaine courbe de distribution, sur la projection $P_q(r)$, appelée Fonction d'Ouverture en Coïncidence (FOC).

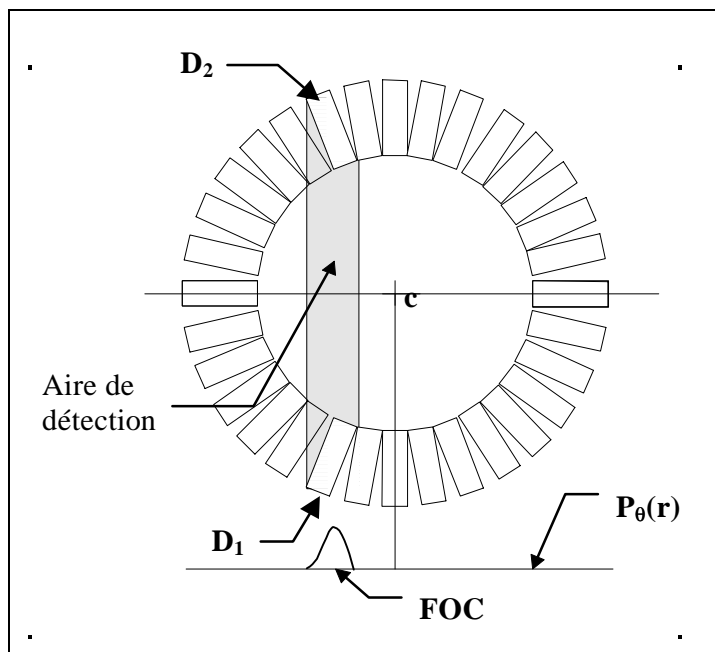


Figure 2-16: Fonction d'Ouverture en Coïncidence du couple de détecteurs D_1D_2 sur la projection $P_q(r)$

2.4.1 Courbe de résolution

Les FOC ont pour effet de produire des distorsions non stationnaires en position, sur l'image. En effet, en plus d'être limité par la distance d'échantillonnage causée par la grandeur physique des détecteurs, les FOC provoquent un étalement de la probabilité de détection, à cause de la variation de l'inclinaison des détecteurs. Cette variation cause une perte de résolution sur les projections. La Figure 2-17 présente l'effet sur la résolution de ces FOC. On note que celle-ci se détériore en fonction de la position (extrait de [18]).

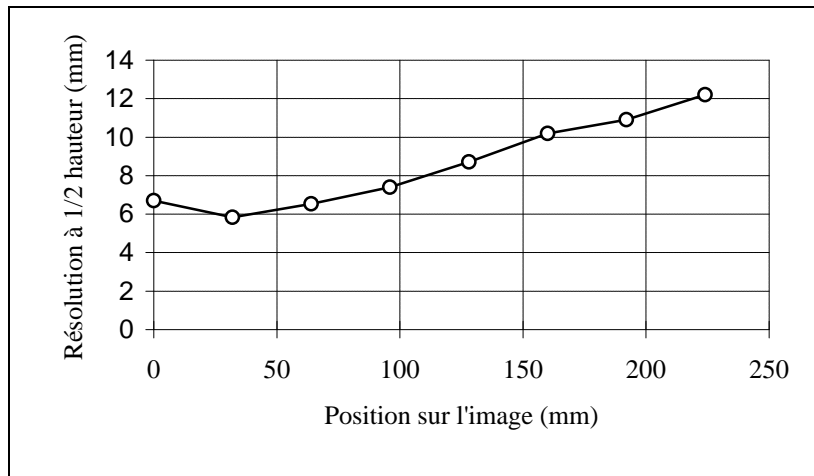


Figure 2-17: Courbe de résolution à 1/2 hauteur d'une source ponctuelle en fonction de sa distance par rapport au centre de la caméra.

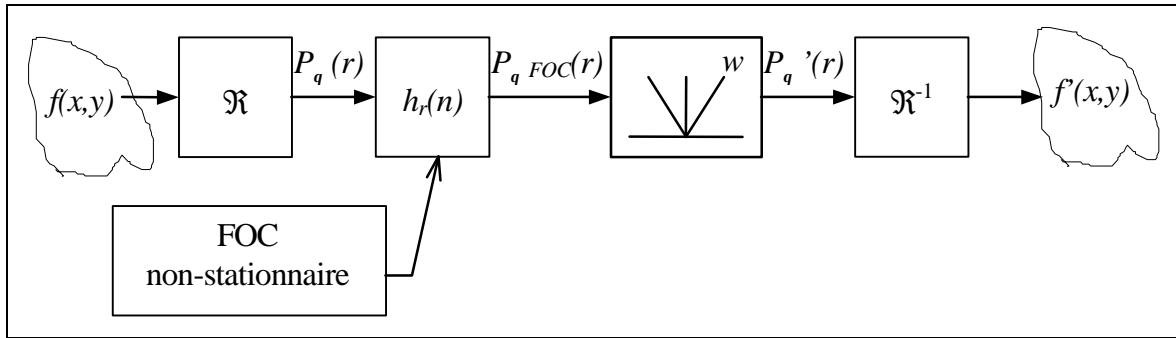
Nous avons déterminé plus haut que les FOC n'étaient pas stationnaires pour une projection. C'est donc dire qu'à chaque position r , sur une projection, il y a une fonction d'ouverture correspondante que nous appelons $h_r(n)$. La projection filtrée par les FOC s'écrit donc:

$$P_q^{FOC}(r) = \sum_{n=0}^{R-1} P_q(n) h_r(r-n) \quad (2-54)$$

où R est le nombre d'éléments sur une projection

2.4.2 Algorithme de reconstruction utilisant les FOC

Dans l'équation (2-54) la fonction de réponse $h_r(n)$ ne dépend pas de q . Effectivement, en première approximation, la fonction $h_r(n)$ ne dépend pas de l'angle de la projection (voir [18]). C'est donc dire que le système n'est pas stationnaire sur une projection mais qu'il l'est d'une projection à l'autre. Effectivement, les FOC ont une dépendance radiale mais non tangentielle sur la position dans le champ. Cette caractéristique sera très utile dans la conception d'un filtre de restauration. L'Algorithme 2-3 présente le diagramme de block de l'algorithme de reconstruction d'une image utilisant les FOC. Le filtre rampe dans l'espace w présuppose que le signal est converti dans cet espace par une transformée de Fourier puis filtré et converti à nouveau dans l'espace (x,y) par une transformée de Fourier inverse.



Algorithme 2-3: Reconstruction par rétroprojection filtrée utilisant les FOC.

L'inclusion des FOC dans l'algorithme n'a pas pour but de rehausser la qualité de l'image mais plutôt de construire un modèle se rapprochant le plus possible d'une acquisition expérimentale d'une image.

2.4.3 Restauration des FOC

Pour restaurer les FOC il existe des méthodes qui utilisent l'inversion matricielle (voir [9]) des FOC pour estimer les filtres inverses. Cette méthode inverse les FOC dans l'espace réel. La section qui suit, présente une méthode d'inversion, bien connue en traitement de signal, qui utilise l'espace des fréquences de Fourier. Il s'agit de calculer la transformée de Fourier (\mathfrak{F}) de chacune des FOC et d'en effectuer l'inversion avec \mathfrak{F}^{-1} .

Soit :

$h_r(n)$ représentant le $n^{\text{ième}}$ élément de la $r^{\text{ième}}$ FOC.

$$H_r(e^{iw}) = \sum_{n=0}^{N-1} h_r(n) e^{-j2\pi wn/N} \quad (2-55)$$

où $H_r(e^{iw})$ est la représentation dans l'espace des fréquences discrètes de la $r^{\text{ième}}$ FOC.

Selon la méthode classique d'inversion de fonction de réponse, on peut poser que:

$$|H_{ir}(e^{iw})| = 1/|H_r(e^{iw})| \quad (2-56)$$

et

$$\arg\{H_{ir}(e^{iw})\} = -\arg\{H_r(e^{iw})\} \quad (2-57)$$

où $H_{ir}(e^{iw})$ est l'inverse de $H_r(e^{iw})$.

Par conséquent:

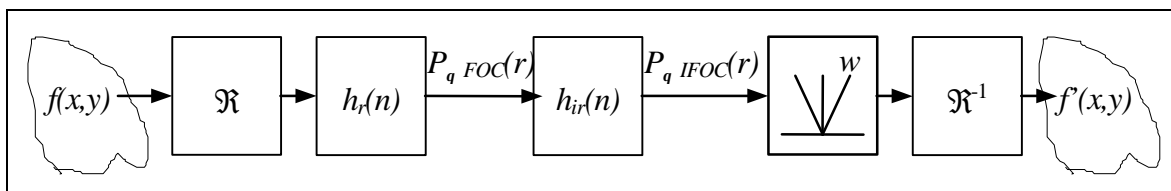
$$h_{ir}(n) = \mathfrak{S}^{-1}(H_{ir}(e^{iw})) = \frac{1}{N} \sum_{w=0}^N (H_{ir}(e^{iw})) e^{j2\pi wn/N} \quad (2-58)$$

Ainsi, pour chacun des points d'une projection $P_{qFOC}(r)$ il existe une FOC inverse $h_{ir}(n)$ permettant de restaurer $P_q(r)$. Il va sans dire que ces corrections sont effectuées sur les projections et non sur l'image finale, car les projections sont unidimensionnelles, ce qui diminue le nombre de fonctions de réponses alors que sur l'image, nous aurions une fonction $h_{ir}(n)$ pour chaque point (x,y) de l'image.

Les FOC sont des filtres de type FIR (*Finite Impulse Response*). L'inversion de ce type de filtre produit des filtres de type IIR (*Infinite Impulse Response*). Dans un premier temps, il n'y a aucune garantie sur la stabilité du filtre inverse. Dans un deuxième temps, le traitement informatique du signal ne permet pas d'utiliser des vecteurs de longueur infinie. La nécessité de traiter un vecteur fini implique de tronquer le vecteur ce qui induit une erreur, dite d'*aliasing*, dans la restauration du vecteur. Cette erreur est minimisée en augmentant le nombre des échantillons du vecteur.

2.4.4 Algorithme de reconstruction avec restauration des FOC

Nous incluons la restauration des FOC entre la sortie de la caméra ($P_{qFOC}(r)$) et le filtre de retroprojection ($/w$), comme illustre l'Algorithme 2-4 suivant:



Algorithme 2-4: Reconstruction incluant la restauration des FOC

L'Image 2-3 présente trois images permettant d'évaluer l'effet que produit les FOC. L'image a) constitue l'image de référence ou l'image idéale. L'image b) est une restauration par rétroprojection filtrée d'une acquisition tomographique de l'image idéale. Quant à l'image c), il s'agit d'une image incluant l'effet des FOC. L'algorithme par rétroprojection filtrée est aussi utilisé pour la restauration. Notez la perte de résolution des sources ponctuelles en fonction de l'éloignement du centre. Ces images sont obtenues par modélisation.

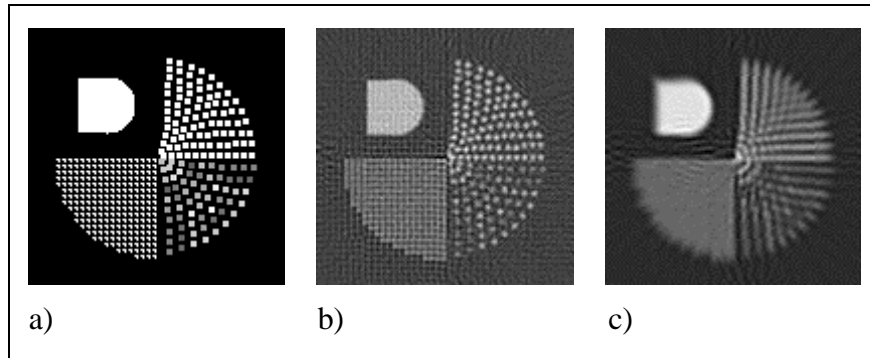


Image 2-3: Effet des FOC sur une image. a) image idéale, b) image restaurée utilisant l'algorithme par rétroprojection filtrée, c) image incluant l'effet des FOC et restaurée par l'algorithme de rétroprojection filtrée

2.5 Conclusion

Ce chapitre est un résumé de l'ensemble de la théorie nécessaire à la réalisation de cette recherche. Deux grands domaines y ont été traités soit: La théorie sur les réseaux de neurones ainsi que la théorie sur l'imagerie médicale. Dans le prochain chapitre, nous discuterons de la méthodologie utilisée pour réaliser les expérimentations afin de répondre aux questions formulées à la section 1.2.2 page 1-3

Chapitre 3

MÉTHODOLOGIE DE RECHERCHE

Dans ce chapitre nous présenterons, dans un premier temps, la méthode d'utilisation d'un réseau de neurones pour cette recherche. La deuxième section présente plusieurs aspects qui permettent d'obtenir un bon apprentissage d'un réseau de neurones. Que ce soit par le choix de bonnes bases de données, par la sélection d'un critère d'arrêt ou encore, l'ajustement des autres facteurs d'optimisation, toutes ces méthodes seront examinées et utilisées dans les différentes expérimentations. Il va sans dire qu'un essai ne peut pas être probant s'il n'y a pas d'évaluation. La troisième section de ce chapitre présente les critères qui seront utilisés afin d'évaluer la capacité du réseau à restaurer les données qu'il doit traiter.

3.1 Utilisation d'un réseau de neurone

Dans cette recherche, le développement de l'algorithme incluant les réseaux de neurones se fait en deux phases. La première phase est l'apprentissage. Dans celle-ci, le réseau est entraîné à partir de vecteurs d'entraînement. La phase d'utilisation est amorcée lorsque le réseau a terminé l'apprentissage. L'utilisation d'un algorithme d'apprentissage supervisé sera implanté pour l'ensemble des expérimentations qui seront effectuées. Quand à la topologie du réseau: nous choisissons le perceptron multicouche qui est le réseau d'utilisation commun.

3.2 Données modélisées

Pour effectuer l'expérimentation nous utiliserons des données modélisées. C'est à dire que les informations contenues dans la base de données seront produites à partir de simulations de la réalité. L'entraînement du réseau nécessite un grand nombre de données différentes les unes des autres ce qui nécessite une grande variété de mires d'acquisition. En travaillant sous forme de modèle, il est possible de générer un grand nombre de mires sans aucun frais et sans aucune conséquence sur l'environnement par la manipulation de produits radioactifs

que nécessiterait une expérimentation avec des données réelles. De plus, dans le cas d'un apprentissage supervisé, comme nous utiliserons, il doit exister une représentation idéale d'un vecteur à restaurer. Or, il est beaucoup plus simple de manipuler des données modélisées pour obtenir la représentation idéale d'une situation. Il n'en demeure pas moins qu'à l'étape de l'évaluation, les données issues d'un environnement réel doivent être utilisées afin d'évaluer la qualité de restauration du réseau.

3.3 Apprentissage des réseaux

3.3.1 Critère d'arrêt

Lors de l'apprentissage, le réseau va s'adapter aux données qui lui sont présentées. Or, cette adaptation conduit le réseau dans une situation de sur-apprentissage (apprentissage par cœur), c'est-à-dire que le réseau effectue une très bonne restauration sur des données du type appris mais une très mauvaise restauration de données de type différent de celle apprises. On dit de cette situation que la restauration du réseau n'est pas assez universelle. Le choix d'un critère d'arrêt d'apprentissage doit donc être déterminé afin d'éviter le sur-apprentissage. La détermination du point d'arrêt est effectuée de la façon suivante: Les deux bases de données (base d'apprentissage et test) seront utilisées alternativement pour réaliser l'apprentissage. Effectivement après un certain nombre d'itérations, le réseau est évalué avec les vecteurs de la base test. Si l'erreur après l'évaluation est la plus petite erreur d'évaluation obtenue, depuis le début de l'apprentissage, alors la configuration actuelle du réseau est considérée comme étant la plus universelle et le réseau est sauvé dans sa configuration actuelle. La Figure 3-1 présente une courbe de calcul d'erreur typique d'un apprentissage avec une base test. Le point *O* représente le point optimum d'apprentissage du réseau. C'est à ce point que le réseau a appris au maximum sans sur-apprentissage.

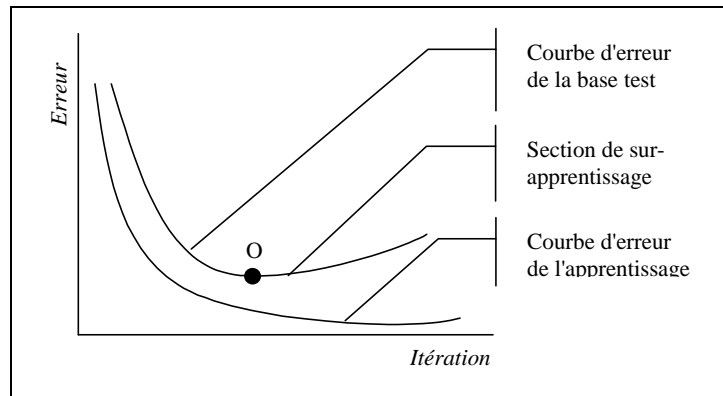


Figure 3-1: Courbe typique d'erreur de la base test

3.3.2 Vecteurs et bases d'apprentissage

Pour effectuer un apprentissage optimum, trois bases de données sont construites à savoir: la base d'entraînement, la base test et la base d'évaluation. La base d'entraînement permet d'effectuer l'apprentissage du réseau alors que la base de test permet de sonder la capacité du réseau à restaurer des informations. La base test est constituée de données différentes de la base d'apprentissage mais représentative des critères à tester. Afin de s'assurer de la bonne généralisation du réseau, une troisième base, nommée base d'évaluation, est créée à partir de données indépendantes des deux autres bases. Cette dernière base permet d'effectuer une appréciation quantitative et qualitative du réseau

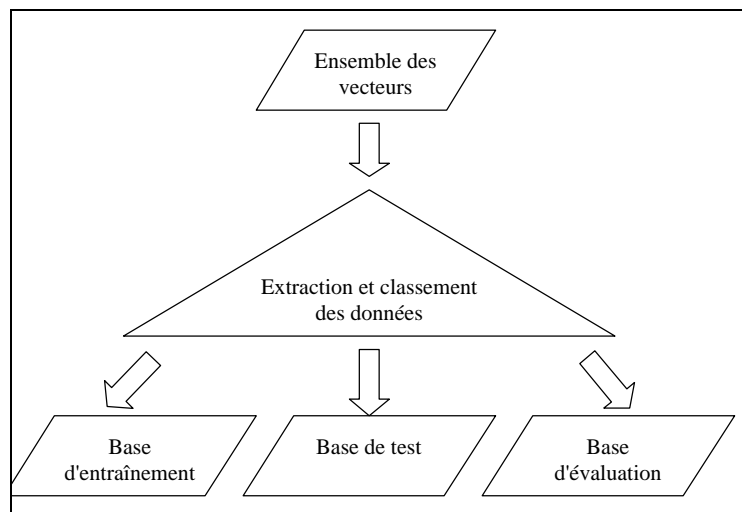


Figure 3-2: Les trois sous bases de données extraites d'un ensemble de vecteurs représentant le maximum de situations.

3.3.3 Classement des vecteurs

Les vecteurs contenus dans la base de données proviennent d'images réelles ou modélisées. Il s'agit de former des vecteurs à partir des secteurs de l'image. Or, il arrive qu'un vecteur soit issu de secteurs dont la configuration est identique à plusieurs autres secteurs de l'image. Par exemple, les secteurs ne contenant aucune information (les pixels sont à zéro) constituent la majorité des situations dans la plupart des images. Un processus de classement doit donc être mis en œuvre afin d'éviter d'obtenir une sur-représentation de situations identiques. La méthode de classement sera discutée dans chacune des expérimentations étant donné que le classement des vecteurs est intrinsèquement lié au type de données traitées.

3.3.4 Optimisation par suppression de neurones (*Pruning*)

Il n'existe aucune règle précise qui permet de fixer avec exactitude le nombre de neurones à placer dans les couches cachées. Par contre, la méthode par suppression de neurones permet d'estimer le nombre de neurones efficaces pour restaurer les informations. La première étape consiste à concevoir un réseau avec un grand nombre de neurones dans les couches cachées et de commencer l'apprentissage du réseau. Lorsque le réseau a terminé l'apprentissage, l'algorithme supprime un premier neurone et effectue une restauration sur l'ensemble des données. Un calcul d'erreur quadratique moyen (EQM) (voir section 3.4.2 p.3-42) est alors réalisé. Le processus de suppression, de restauration et de calcul d'erreur est fait neurone par neurone. Le neurone qui aura eu le moins d'influence sur la restauration sera supprimé du réseau. Dès lors l'apprentissage reprendra son cours jusqu'à sa saturation. Les neurones seront supprimés un à un, tant que le réseau perfectionnera son apprentissage.

3.3.5 Méthodologie de développement du réseau

Le développement d'un bon réseau est un processus itératif qui demande plusieurs modifications. Les vecteurs d'entraînement sélectionnés, l'algorithme d'apprentissage ainsi que la structure du réseau sont autant de points à modifier et à raffiner afin d'obtenir une bonne convergence et une bonne généralisation du réseau. La Figure 3-3 présente l'algorithme d'élaboration d'un réseau.

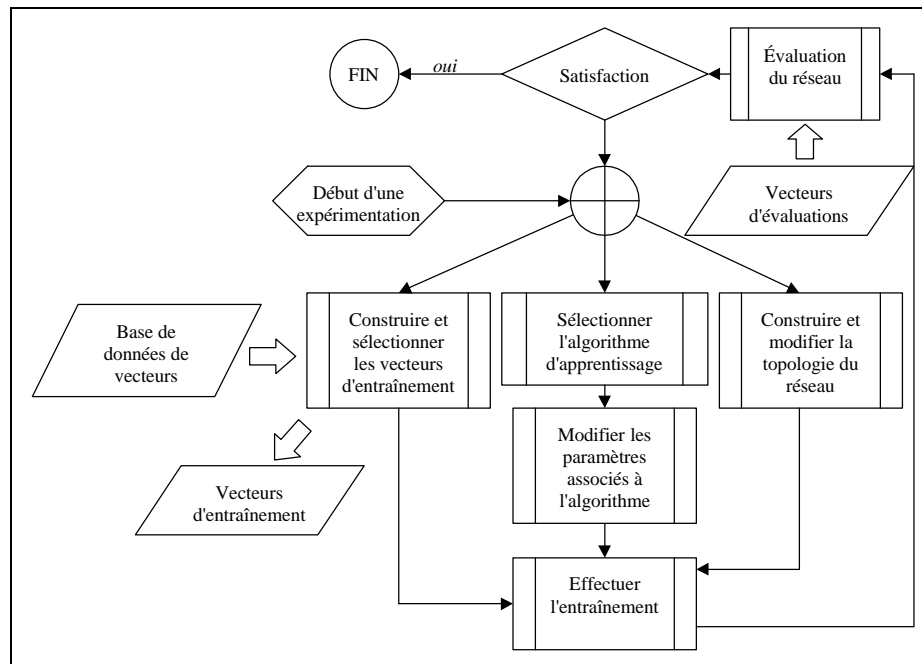


Figure 3-3 Processus itératif du développement d'un réseau

3.3.6 Addition de bruit gaussien aux vecteurs d'apprentissage

L'algorithme de calcul EQM est un algorithme appelé: descente du gradient, c'est à dire qu'un calcul de $\Delta \text{erreur} / \Delta w$ est effectué. La division où la pente négative est la plus abrupte est retenue comme trajectoire à privilégier afin de localiser un minimum d'erreurs possibles. Il peut exister plusieurs minimums possibles selon le type de données à restaurer. Il peut donc arriver qu'un apprentissage converge vers un minimum local plus élevé que le minimum réel du système. L'ajout de bruit gaussien stationnaire au vecteur pourra permettre à l'algorithme de sauter par dessus le minimum local. Par contre cette méthode ne permet pas de fixer avec précision le minimum du système du au fait que les vecteurs sont bruités. En réalité, le bruit additionné aux vecteurs, provoque une oscillation autour du point minimum dont le pas est proportionnel à l'amplitude du bruit additionné. Cette méthode peut donc être utilisée afin de localiser un minimum général du système et par la suite continuer l'apprentissage en utilisant la base originale non bruitée.

3.4 Évaluation de la performance du réseau

3.4.1 Résolution

La résolution est définie comme étant la dimension la plus petite d'un objet observable sur une image. Cette grandeur peut être prise à plusieurs hauteurs sur l'objet. Normalement la mesure est estimée à la mi-hauteur et au dixième de hauteur. Des valeurs équivalentes de résolution à demi et dixième de hauteur indiquent un contraste élevé de l'image. Normalement ces mesures sont effectuées sur des sources ponctuelles dont la largeur correspond au plus petit pas d'échantillonnage de l'image.

Pour des sources ponctuelles, le profil est estimé avec une courbe gaussienne. Cette estimation permet d'évaluer la résolution à mi-hauteur et au dixième de hauteur par le calcul sur l'écart type de la courbe gaussienne évaluée (*curve fitting*).

3.4.2 Erreur quadratique moyenne

L'erreur quadratique moyenne (EQM) permet d'obtenir une valeur numérique normalisée et normée d'une comparaison entre une image étalon ($f(x,y)$) et une image à apprécier ($f'(x,y)$) de dimension X par Y . L'équation (3-1) sera utilisée afin de calculer EQM entre les images à apprécier

$$EQM = \frac{1}{XY} \sum_{y=0}^{Y-1} \sum_{x=0}^{X-1} (f(x,y) - f'(x,y))^2 \quad (3-1)$$

3.4.3 Appréciations visuelles

Bien que les mesures ci-haut mentionnées soient efficaces pour donner une appréciation quantitative des résultats obtenus, il n'en demeure pas moins qu'une comparaison qualitative visuelle de l'image restaurée avec l'image idéale, assure la crédibilité des conclusions tirées.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons déterminé qu'un travail sera à effectuer sur la topologie des réseaux conçus en utilisant un processus itératif de développement. Quand à l'apprentissage, il sera optimisé par l'utilisation de critères d'arrêt et par la méthode de *pruning*. Un travail sera aussi effectué sur les données. Les données seront divisées en trois bases de données (entraînement, test et évaluation). Chaque vecteur de chacune des bases sera traité par un système de classification permettant d'éviter une sur-représentation de situation identique. Finalement une méthode d'évaluation a été mise au point. Il s'agit d'effectuer une évaluation subjective en mesurant la résolution, l'erreur quadratique moyenne de chacune des images restaurées. Une évaluation visuelle sera aussi réalisée.

Deux expérimentations, l'une sur la restauration de FOC et l'autre sur la restauration de la réponse impulsionnelle de la transformée de Radon, seront présentées aux deux chapitres suivants.

Chapitre 4

ÉTUDE NO1. UTILISATION DES RN DANS LA RESTAURATION DES FOC

4.1 Mise en contexte

Les FOC, par l'étalement de la probabilité de détection, peuvent fausser l'interprétation des informations sur les images. Les méthodes classiques de restauration proposent d'inverser les fonctions impulsionnelles soit par des méthodes d'inversion matricielle [9] ou par l'inversion dans l'espace des fréquences (Voir section 2.4). Or, ces types de restauration peuvent produire des filtres instables. Par exemple, si $H(e^{i\omega})$ croise l'axe des $y=0$, 0 étant une valeur non inversable. De plus, ces méthodes utilisent les FOC comme base des fonctions à restaurer, or ces FOC sont souvent obtenues à partir d'expérimentation qui ne les caractérisent pas précisément. Ainsi les fonctions inverses ne sont pas exactes et amplifient le bruit à la restauration. Finalement, cette méthode de conception de filtre ne permet pas d'obtenir un filtre de restauration indépendant du bruit, sauf si celui-ci est stationnaire et parfaitement bien caractérisé. Or, dans le présent cas, la caractérisation du bruit n'est pas réalisable d'autant plus qu'il est non stationnaire et fonction de l'amplitude du signal d'entrée.

Universalité de la solution

La présente étude propose d'utiliser les réseaux neuronaux afin d'estimer les FOC inverses du système. L'aspect non linéaire de ces filtres et leurs capacités d'adaptation permettront la conception d'un filtre stable et non stationnaire. L'universalité des filtres ainsi que la robustesse au bruit sont d'autres particularités à développer pour réaliser cette expérimentation.

4.2 Analyse de la problématique

4.2.1 Caractérisation des FOC

Les FOC produisent des distorsions sous forme d'étalement de l'information sur les images. Ces étalements varient d'une caméra à l'autre. Une caractérisation des FOC de la présente caméra est donc nécessaire afin de bien modéliser le système. Une étude exhaustive des FOC de la caméra du CUSE a été réalisée par Martel et al. (voir [21]). Plusieurs programmes écrits en Fortran, permettant de modéliser des FOC par la méthode de Monte Carlo, ont été conçus afin de réaliser cette étude. Les FOC utilisées dans le présent mémoire sont modélisées à l'aide de ces programmes. La circonférence actuelle de la caméra est de 310mm (voir [19]) et le champ actif est de 118mm. Dans la présente recherche, les FOC seront modélisées en fonction d'un champ actif de 230mm ce qui représente le double de l'actuelle configuration. 32 FOC de formes différentes sont utilisées pour reconstruire une image. La présente section propose la caractérisation des FOC selon les critères suivants: la forme, l'effet sur les images ainsi qu'une étude des pôles et des zéros. Il sera possible d'estimer, à partir de cette étude, s'il existe une solution inverse aux FOC utilisées.

4.2.2 Étalement des FOC

Les FOC étant des fonctions de réponse impulsionnelle des détecteurs, elles sont utilisées comme noyau de convolution sur les projections (voir Eq. (2-54)). Chaque point de la projection $P_q(r)$ est convolué par la FOC(r) correspondante. La Figure 4-1 présente les FOC utilisées comme noyau de convolution pour cette expérimentation. Le point 0 indique le centre du noyau de convolution. Les noyaux sont appliqués sur la partie gauche de la projection par rapport au centre c (voir Figure 2-16 p. 2-32) de celle-ci. Quant à la partie droite, les noyaux appliqués subissent une inversion en miroir avant d'être utilisés.

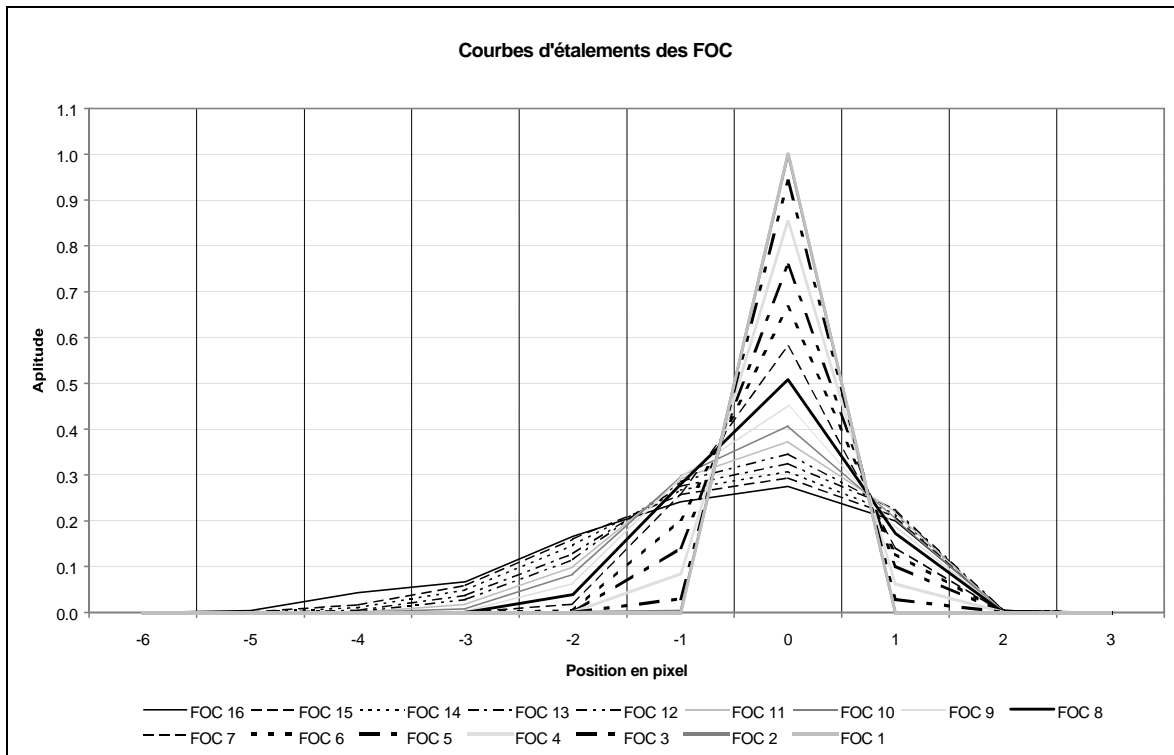


Figure 4-1: Courbes d'étalement des FOC utilisées sur le côté gauche du vecteur de projection

Les filtres de la Figure 4-1 sont non causaux (voir section 2.1.9 p.2-17) ce qui va impliquer un traitement particulier lors de la conception des filtres inverses. Ce traitement est plus spécifiquement expliqué à la section suivante.

4.2.3 Caractérisation des FOC dans le domaine (Z)

Les FOC sont des filtres spatiaux de type FIR (*finite impulse response*). Effectivement elles possèdent toutes une longueur finie. La Figure 4-2 présente le graphique des pôles et zéros de la transformée en Z (défini à l'équation (4-1)) de chacune de ces FOC.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (4-1)$$

Pour réaliser ce graphique, chaque FOC a été déphasée de façon à ce qu'elle soit causale afin de faciliter l'interprétation de ses caractéristiques.

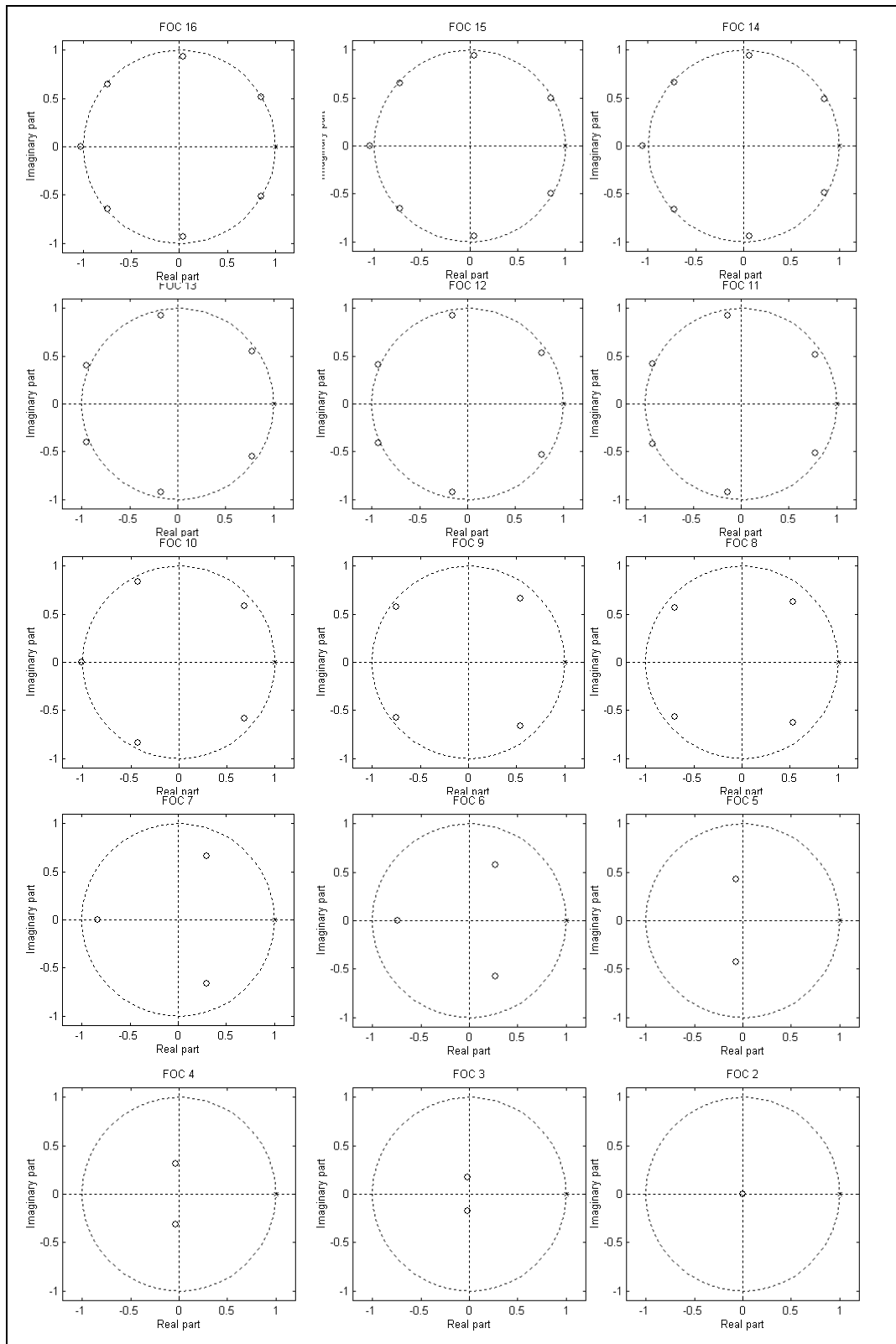


Figure 4-2: Pôles et zéros de chacune des FOC utilisées dans l'espace Z

Il est à remarquer que les FOC 1 à 6 sont toutes des filtres de minimum de phase, puisque les zéros font tous partie de la région de convergence, alors qu'il en va tout autrement des FOC 10 à 16. Le fait qu'un filtre ne soit pas de type minimum de phase, implique certaines contraintes lors de l'identification d'une solution inverse. Il sera discuté de ces contraintes ultérieurement.

4.2.4 Effets des FOC sur les images

Les effets des FOC sur les images sont considérables (voir Image 2-3 page 2-36). Dans un premier temps elles produisent une dégradation de la résolution en périphérie de l'image et de ce fait, elles diminuent l'amplitude des signaux originaux constituant l'image. Deuxièmement, le degré de dégradation est spatialement non stationnaire. Cette non stationnarité est observée par la dégradation qui s'accroît en fonction de la distance par rapport au centre de l'image. La dégradation atteint un tel degré, en périphérie de champ, qu'il est pratiquement impossible d'interpréter l'image. Cette contrainte oblige les fabricants à diminuer le champ actif de l'appareil, afin que les observations soient effectuées seulement à l'intérieur d'une région où les effets des FOC sont peu considérables.

4.2.5 Restauration des FOC par l'inversion dans l'espace de Fourier

La méthode classique de restauration des FOC utilise la technique d'inversion dans l'espace de Fourier, d'écrite à la section 2.4.4 page 2-35. La Figure 4-3 présente les fonctions inverses ainsi calculées. Ces fonctions servent de noyau de déconvolution pour les FOC afin d'effectuer la restauration des images. À chaque FOC lui correspond une fonction inverse permettant la restauration. La déconvolution de FOC ne peut pas être réalisée dans l'espace de Fourier puisqu'il s'agit d'une restauration à noyau variable. En conformité avec l'algorithme présenté à l'Algorithme 2-4 (page 2-35) les FOC inverses de la Figure 4-3 sont donc représentées dans le domaine spatial plutôt que temporel.

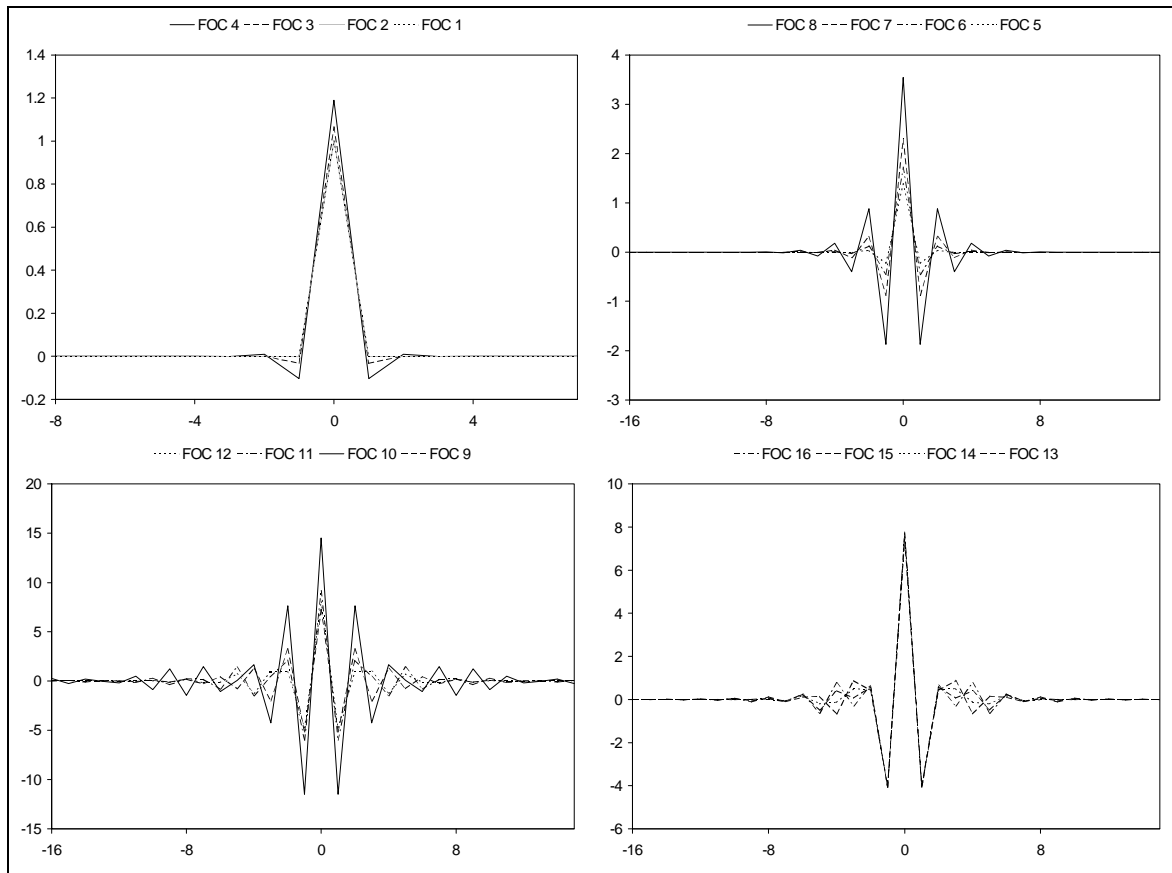


Figure 4-3: Réponse impulsionnelle inverse des FOC calculée selon la méthode d'inversion dans l'espace des fréquences. Les positions en pixel sont présentées en abscisse alors que l'amplitude du signal est présentée en ordonné.

4.2.6 Détermination de la stabilité des filtres inverses

La stabilité des filtres inverses est essentielle pour la qualité de la restauration. Un filtre instable produit une restauration imprévisible qui laisse des artéfacts dans les images lors de la restauration. Tel que d'écrit dans la référence [16], un système possède un inverse stable si celui ci est un système minimum de phase. Or, dans ce type de système, les zéros sont tous dans la région de convergence. C'est donc dire que les filtres inverses correspondant aux filtres 10 à 16 de la Figure 4-2 ne seront pas tous stables.

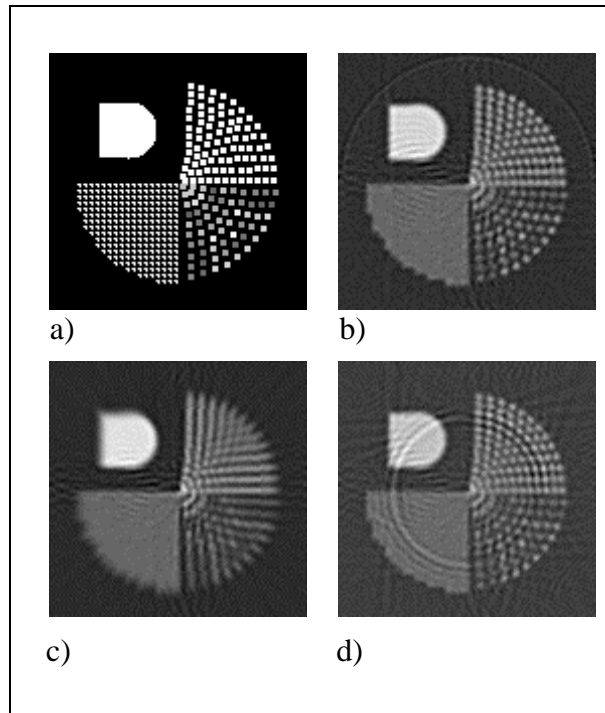


Image 4-1: Restauration de la mire d'évaluation, a) Mire idéale, b) rétroprojection filtrée sans l'application des FOC, c) RPF avec FOC d) Restauration des FOC comme décrite à l'Algorithme 2-4.

L'Image 4-1 présente un exemple des effets que peuvent produire un filtre instable. Il est à noter qu'au centre de l'image il n'y a aucun artéfact grâce à la stabilité des filtres de restauration des FOC 1 à 9 alors que l'instabilité des filtres inverse des FOC 10 à 16 produisent des artéfacts circulaires qu'il est possible d'observer à l'Image 4-1 d).

4.2.7 Résumé

La stabilité des filtres utilisés dans le présent système est un critère essentiel à une restauration précise des images. L'une des méthodes classiques de restauration d'un signal, consiste à estimer la fonction de réponse impulsionnelle inverse du système, en utilisant le domaine fréquentiel de Fourier pour le réaliser. En effectuant une transformée en z d'un signal et en y calculant ses pôles et ses zéros, il est possible de déterminer la stabilité d'une solution inverse, si le signal est de type minimum de phase. Dans le présent système, les FOC 10 à 16 (voir Figure 4-2) ne sont pas des signaux minimum de phase. Ainsi, ces FOC

n'ont pas de solution inverse stable. L'effet de cette instabilité est observable à l'Image 4-1 d) par les ondulations de fortes amplitudes dans l'image.

Si la technique d'analyse traditionnelle des FOC contient d'importantes lacunes, pourra-t-on utiliser le réseau de neurones démontré comme approximateur universel [7] afin de décrire l'inverse des FOC ?

4.3 Hypothèse de recherche

Nous posons comme hypothèse que l'utilisation des réseaux de neurones de perceptron à multicouche (PMC) pourrait permettre l'identification d'un filtre inverse d'un système non minimum de phase. De plus, nous souhaitons démontrer que les réseaux de neurones pourraient effectuer une restauration non stationnaire sans utiliser un algorithme de restauration à noyau variable.

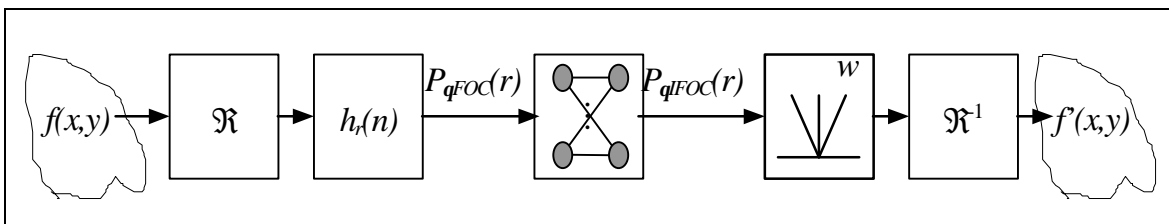
4.4 Solution proposée et expérimentation

La présente section permettra la caractérisation des FOC utilisées et plus spécifiquement, leur capacité à être inversible. L'inversion sera réalisée par l'analyse des pôles et des zéros de la transformée en z de chacune des FOC. Finalement, la section se terminera par la comparaison d'images inversées à l'aide des réseaux neuronaux et par la méthode classique dont les FOC inverses sont instables.

4.4.1 Algorithme de restauration utilisant les réseaux de neurones

En TEP, les images peuvent être filtrées à partir des projections (vecteurs du sinogramme) ou directement sur l'image finale. En observant l'effet des FOC sur l'image (voir Image 2-3 page 2-36) on note que les distorsions sont non stationnaires sur chacun des points de celles-ci. De ce fait, la restauration à partir de l'image suppose que chaque point de celle-ci possède sa propre fonction de réponse inverse, ce qui implique 4096 fonctions de restaurations différentes pour une image de 64 x 64 pixels. Un réseau de 4096 entrées et 4096 sorties pourrait idéalement être utilisé, mais cette topologie nécessite la construction d'une base d'apprentissage qui contient un très grand nombre d'images. En effet, chaque point de l'image, associé à un neurone, doit avoir subi un apprentissage à partir d'une base

de données contenant un large éventail d'événements caractérisant la restauration de ce point. Lorsque ces événements sont identifiés, chaque point de l'image (4096) aura les mêmes quantités d'événements dans la base de données afin de réaliser son apprentissage. C'est donc dire qu'une base de données pourrait contenir $N \times 4096$ vecteurs (où N est le nombre d'événements pour effectuer l'apprentissage). Or, pour accomplir un bon apprentissage, une base de données peut facilement contenir 1000 événements, ce qui veut dire, dans le présent cas, $4,096 \times 10^6$ vecteurs dans la base d'apprentissage. Pour ces raisons, le réseau de neurones sera implanté entre la sortie du TEP et la rétroprojection filtrée (voir Algorithme 4-1).



Algorithme 4-1: Restauration des FOC par un réseau de neurones

L'implantation du réseau entre la sortie de la caméra et la rétroprojection filtrée permettra la constitution d'une base d'apprentissage avec moins d'images. En effet, 128 vecteurs de projections sont produits lors de la construction d'une image. L'effet de FOC est observable directement sur ces projections et il est donc possible de traiter l'informations directement sur les projections. Il est possible d'observer à partir de l'Image 4-2, l'effet des FOC sur les projections d'une image.

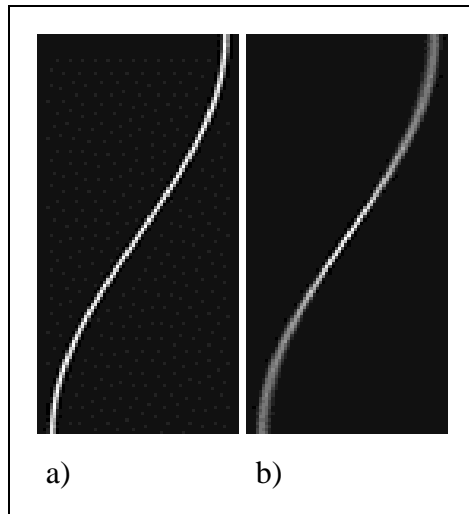
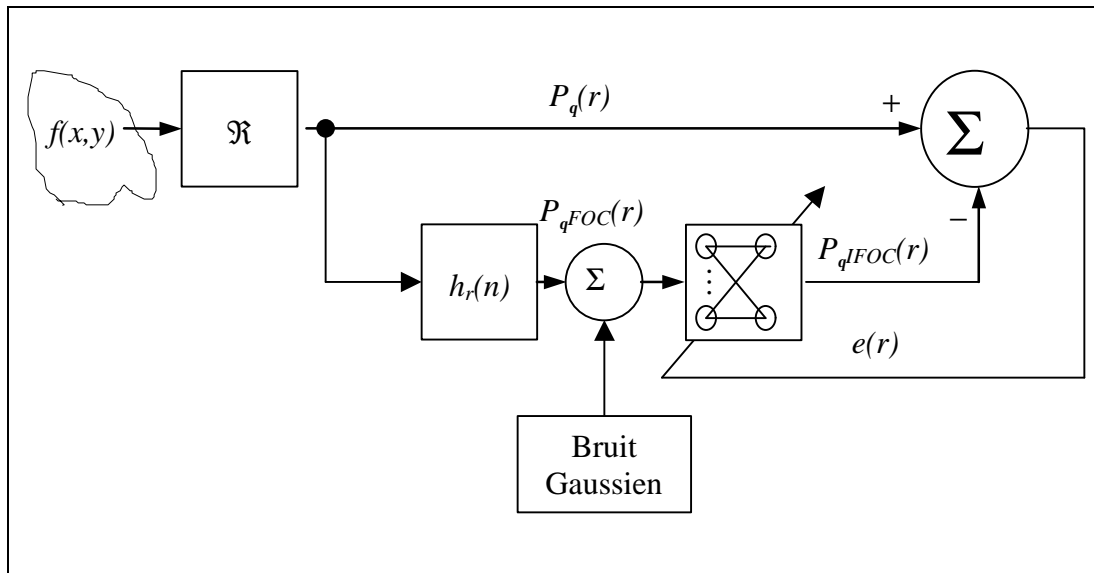


Image 4-2: Comparaison entre a) un sinogramme idéal et b) un sinogramme filtré avec les FOC

4.4.2 Algorithme d'apprentissage du réseau

L'utilisation d'un algorithme avec apprentissage supervisé est possible grâce à la modélisation des FOC. L'Algorithme 4-2 présente cette séquence pour un ensemble de vecteurs issus de projections. La stationnarité du système étant établie d'une projection à l'autre, les réseaux de neurones produiront de bons résultats. Chaque élément de la projection sera associé à un neurone pour l'entrée et un neurone pour la sortie du réseau. Un sinogramme composé de vecteurs de 64 éléments utilisera donc un réseau de 64 neurones à l'entrée et 64 neurones à la sortie. Le nombre de couches cachées optimales sera déterminé pendant l'expérimentation.



Algorithme 4-2: Apprentissage du réseau de restauration des FOC

Un bruit gaussien est introduit dans les vecteurs d'entraînement afin d'accroître la robustesse de l'apprentissage du réseau. Seul les valeurs à l'entrée du réseau sont bruitées. La valeur optimum de bruit est déterminée par la méthode d'essai-erreur. Trois intensités de bruit, exprimées en valeur de signal sur bruit, seront utilisées dans la présente expérimentation, à savoir, infini, 35 et 15 dB.

4.4.3 Choix et construction des vecteurs d'entraînement

La bonne qualité de l'entraînement étant dépendante de la sélection des vecteurs d'apprentissage, il est essentiel que ceux-ci soient choisis à l'aide de critères précis. L'un de ces critères est la variation en fréquence. Les sinogrammes de l'Image 4-3 a), b) et c) présentent trois bases de vecteurs utilisées pour caractériser ce genre d'événement. Il est à noter que seules les données idéales sont présentées. Chaque ligne de ces bases sert à construire un vecteur d'entraînement modélisant ainsi une projection. La variation de fréquence est assurée par le changement d'une projection à l'autre.

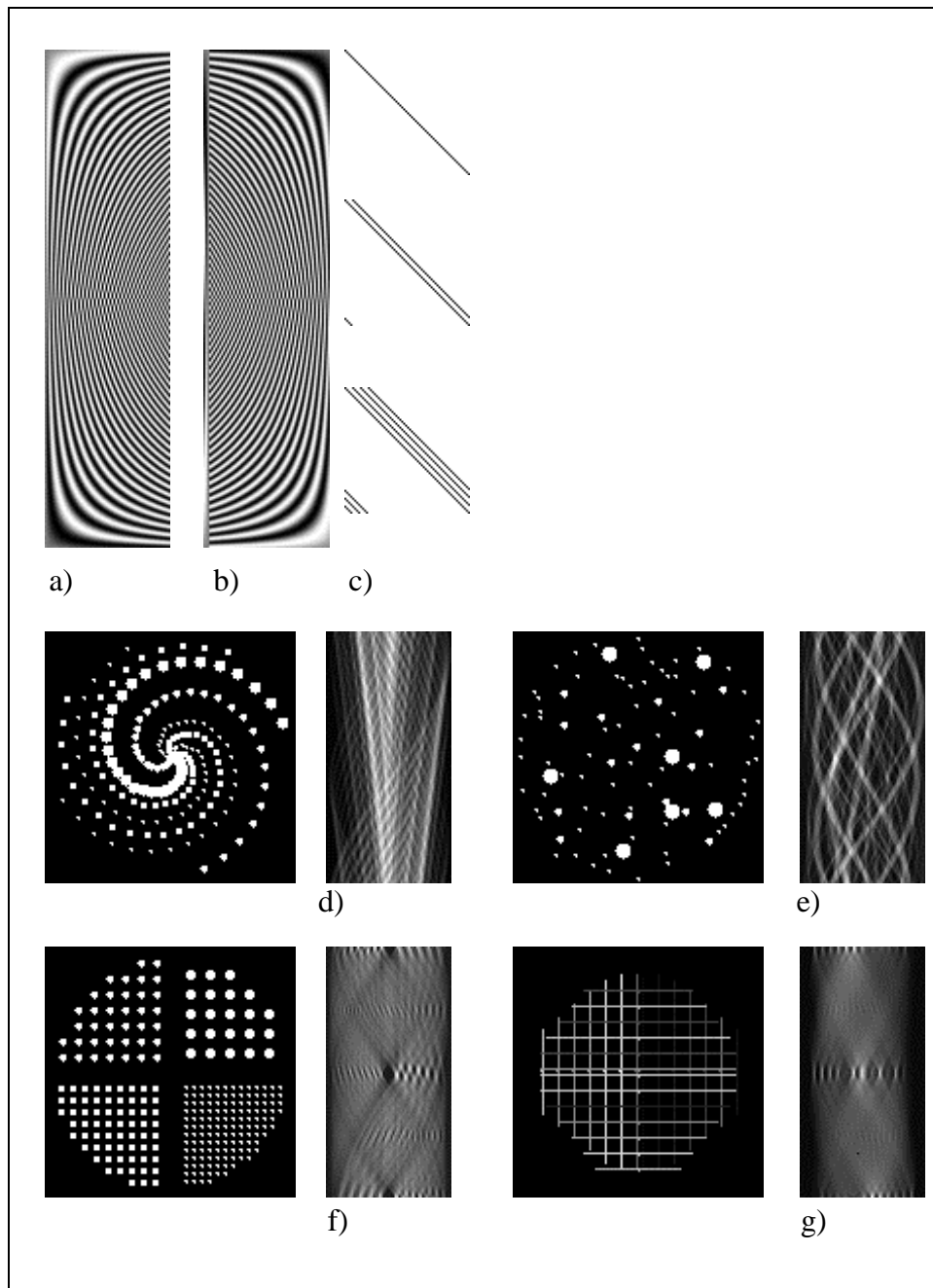
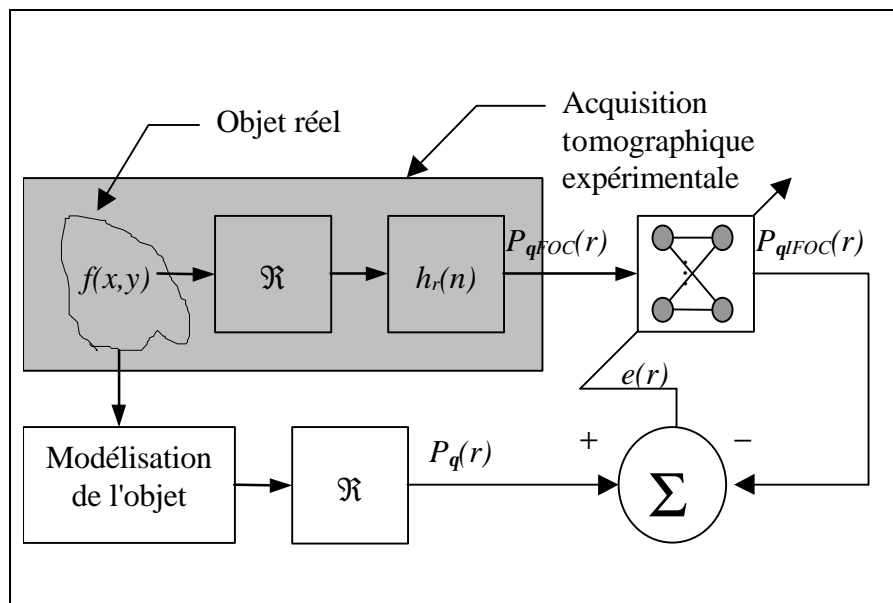


Image 4-3: Sinogrammes des vecteurs idéaux utilisés pour effectuer l'entraînement du réseau. Les sinogrammes de la classe a), b) et c) proviennent de données modélisées. Les vecteurs de la classe d), e), f) g) proviennent de la transformée de Radon des images présentées à gauche du sinogramme.

Les FOC étant stationnaires d'une projection à l'autre, il est nécessaire que chaque position de la projection présente un maximum de contenu fréquentiel. Pour ce faire, étant donné qu'il s'agit de données modélisées, il est possible d'appliquer la variation en fréquence à chaque FOC en imposant un délai aux vecteurs. Effectivement, la construction des vecteurs nécessite d'une part, des données désirées idéales ou théoriques ($P_q(r)$) et d'autre part des données provenant de la modélisation du système ($P_{FOCq}(r)$). $P_{FOCq}(r)$ étant modélisé, il est possible d'appliquer un délai à $P_q(r)$ afin de générer une nouvelle paire de vecteurs [idéal, système] du style: $[P_q(r-Dr), P_{FOCq}(r-Dr)]$. Il va sans dire qu'un tel procédé ne pourrait pas être réalisé avec des données provenant d'une caméra. Effectivement, dans un contexte expérimental (voir Algorithme 4-3), les vecteurs $P_q(r)$ sont issus d'une modélisation d'un objet réel alors que $P_{FOCq}(r)$ sont des projections issues de la caméra. Dans cette condition, $P_q(r)$ ne sert pas de donnée de base à la génération des vecteurs. De ce fait, dans un contexte expérimental un délai ne pourrait pas être appliqué



Algorithme 4-3: Génération des vecteurs de la base d'entraînement à partir de données issues d'un environnement expérimental

4.5 Analyse des résultats

Trois mesures permettront l'évaluation de la qualité de la restauration à l'aide des réseaux. Une première mesure consiste à évaluer la résolution à demi et dixième de hauteur d'une source ponctuelle à différentes positions dans l'image. La deuxième mesure est un calcul d'EQM entre les images restaurées et l'image idéale. Finalement une appréciation visuelle et comparative entre les images restaurées et l'image idéale permet d'apprécier l'efficacité des filtres.

Comme spécifié plus haut, les données d'entraînements ont été bruitées avec trois niveaux de bruits distincts. De ce fait, il résulte qu'une expérimentation différente doit être réalisée pour chaque type de base de données. Ainsi, le réseau ayant effectué son apprentissage à partir de données provenant de la base bruitée avec un rapport signal/bruit à infinie dB porte le nom de RN InfdB. La même nomination est réalisée pour les bases bruitées à 35 et 15 dB, soit RN 35dB et RN 15dB. Après plusieurs tentatives, il est apparu que les réseaux effectuent un meilleur apprentissage et une meilleure restauration, si le réseau possède aucune couche cachée. De plus, nous avons évalué la possibilité d'utiliser une fonction de transfert linéaire, sigmoïde et *tanh* pour chaque neurone. Sans en faire la démonstration dans le présent document, nous en sommes venu à la conclusion que les réseaux utilisant la fonction de transfert *tanh* donnaient de meilleurs résultats. C'est donc cette dernière qui est utilisée dans l'ensemble des expérimentations qui suivent.

4.5.1 Mesure de résolution

Les courbes de la Figure 4-5 représentent les mesures de résolution des sources ponctuelles (SP) à demi et dixième de hauteur. La SP d'origine à une résolution de 2 pixels. Les courbes de type *Sim* sont des courbes représentant l'effet sur la résolution de l'application des FOC. Les courbes de type RPF sont des courbes de résolution obtenues par rétroprojection filtrée sans FOC. Les restaurations (Rest RN et Rest Class.) sont des courbes de résolution obtenues après restauration avec les réseaux de neurones et par restauration classique. Toutes les images qui ont servi à la restauration des courbes de résolutions ont été reconstruites avec l'algorithme par rétroprojection filtrée.

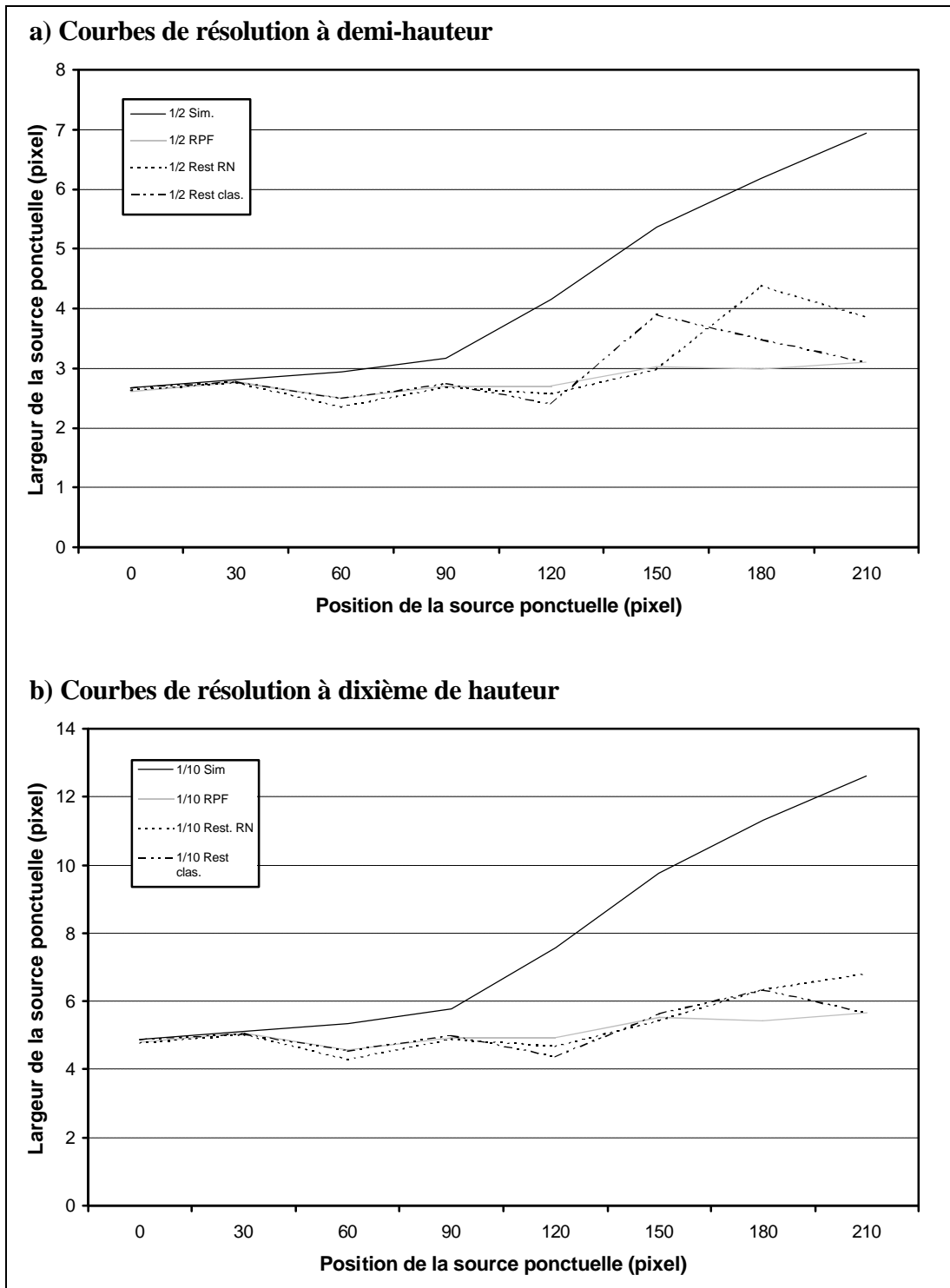


Figure 4-5: Comparaison entre différentes courbes de résolution, de sources ponctuelles à demi a) et dixième b) de hauteur.

4.5.2 Calcul de l'erreur quadratique moyenne

La mesure d'EQM permet de comparer quantitativement deux images. Cette mesure est effectuée à l'aide de la mire d'évaluation (voir Image 4-4). Quatre restaurations sont comparées avec la mire d'évaluation idéale. Il s'agit d'une restauration classique, d'une restauration par RN dont les données d'entraînement ont été bruitées respectivement avec des rapports signal sur bruit: infini dB, 35dB et 15 dB. Chacune des restaurations est réalisée sur les images d'évaluation qui sont, elles aussi, bruitées avec un rapport signal sur bruit: infini dB, 35dB et 15dB. L'ensemble de ces valeurs EQM est présenté au Tableau 4-1

Filtre/Niveau de bruit	Classique	RN Inf dB	RN 35 dB	RN 15 dB
Inf dB	.2672	.2631	.2652	.6140
35 dB	.3409	.2996	.2836	.3809
15 dB	.3544	.3563	.3522	.3138

Tableau 4-1: Valeurs EQM entre la mire d'évaluation idéale et restaurée. Pour une restauration par RPF (.2580)

4.5.3 Appréciation visuelle

La dernière appréciation à mettre en évidence, est une critique visuelle de la restauration des FOC. Comme mentionné plus haut, l'évaluation mettra en cause la mire d'évaluation bruitée aux divers niveaux mentionnés et restaurés par l'ensemble des filtres développés. L'Image 4-4 présente ces résultats. Il est à noter, que l'anneau encerclant l'objet observé sur les images, est causé par le nombre fini de neurones qui compose le réseau. Pour éliminer ces anneaux, il aurait fallu augmenter le nombre de neurones constituant la couche de sortie du réseau pour que la longueur des vecteurs soit au moins égale à la diagonale de la grille de reconstruction. Ainsi, chaque projection, quel que soit l'angle, balayerait l'ensemble des pixels de l'image.

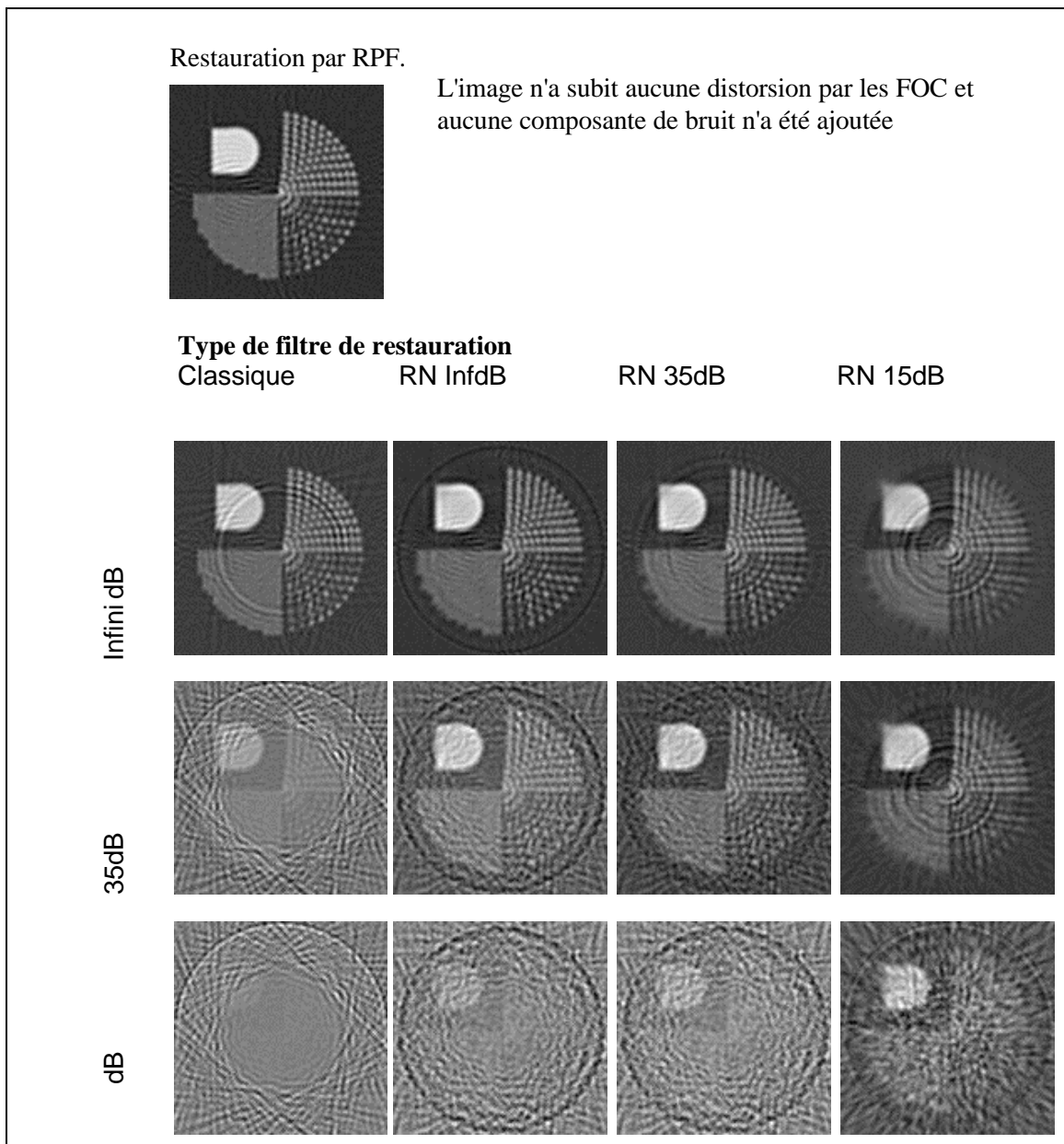


Image 4-4: Comparaison de restauration d'images bruitées et restaurées par des RN entraînés à divers niveaux de bruit

4.6 Discussion

Il a été démontré, grâce à la mesure de résolution, que l'utilisation des réseaux neuronaux permet d'effectuer la restauration des FOC. Effectivement, les courbes de résolution à demi et dixième de hauteur sont ressemblantes aux courbes de restauration classique et aux courbes de reconstruction idéale. De ce fait, il est possible de conclure à l'opportunité

d'utiliser les RN pour la restauration des FOC. De plus, les calculs d'EQM, montre que pour chaque type d'image (la différence se situant au niveau de signal du bruit ajouté à l'image), la meilleure restauration est celle qui utilise le RN dont l'entraînement est effectué avec les données d'apprentissage bruitées au niveau de bruit correspondant à l'image.

L'appréciation visuelle permet cependant d'identifier le filtre susceptible de jouer le rôle de filtre universel pour les niveaux de bruit considérés. À 35dB certains artéfacts commencent à apparaître dans les RN35dB. À 15dB –une valeur extrême- les artéfacts deviennent prononcés dans les RN15dB. Cependant, pour le même rapport signal à bruit, le résultat obtenu avec le RN utilisé est subjectivement supérieur à celui réalisé par la restauration classique. Tout porte à croire qu'une fine optimisation de la restauration serait possible si des réseaux apprenaient avec des niveaux de bruits intermédiaires, par exemple: 45, 40 ou 30 dB.

De plus, la structure "*feed forward*" du RN considéré, ainsi que ses fonctions nonlinéaires sans rétroaction permettent de garantir la stabilité du système de restauration proposé.

Chapitre 5

ÉTUDE NO2. UTILISATION DES RN AFIN DE RESTAURER LA RÉPONSE IMPULSIONNELLE PRODUITE PAR LA TRANSFORMÉE DE RADON

5.1 Mise en contexte

Les outils classiques de reconstruction (voir algorithme de rétroprojection filtrée [11]) d'images ont pour avantages d'être très stables, étant bien connus et simples à implanter. Cependant ces algorithmes comportent des désavantages dont nous discuterons dans la section suivante. Nous pensons que l'utilisation des réseaux de neurones résoudre plusieurs de ces problèmes. La présente étude a donc pour but de créer un nouvel algorithme de reconstruction qui inclut les réseaux de neurones comme élément permettant de corriger les imperfections survenant lors de l'utilisation des algorithmes de reconstruction classique.

5.2 Analyse de la problématique

L'algorithme par rétroprojection filtrée utilise un filtre rampe dans l'espace w . Ce filtre, qui est une pondération de la valeur à la fréquence w par la valeur w correspond à une déconvolution dans le domaine spatial du flou en $1/r$ résultant de la superposition des projections sur le champ de reconstruction. C'est donc dire que les valeurs à hautes fréquences subissent une pondération beaucoup plus élevée que les valeurs à basses fréquences. En conséquence, le bruit à haute fréquence sera donc amplifié par cette pondération. Une série de filtres (Hamming, Hanning etc. voir [11]) ont été développés afin de minimiser les effets du bruit dans le signal. C'est principalement en atténuant les pondérations à hautes fréquences que ces filtres agissent.

Un autre effet de détérioration du signal par l'utilisation du filtre rampe, est sa propre réponse impulsionnelle (voir équation (2-41)). Effectivement, cette fonction de réponse a pour effet de produire un bruit ondulatoire dans les images qui est nommé phénomène de Gibbs. La Figure 2-15 c) démontre bien cet effet pour la restauration d'une source ponctuelle. Les principales causes de ce phénomène sont la longueur finie du filtre de restauration et la nature discrète des signaux.

Les algorithmes d'apprentissage et de restauration conventionnels utilisent des vecteurs à plusieurs éléments à l'entrée pour restaurer un seul point. Est-ce qu'une méthode permettant de discriminer, par un classement des vecteurs d'apprentissage, les vecteurs d'entrée à partir des valeurs désirées permettrait au réseau d'effectuer un meilleur apprentissage et une meilleure restauration?

5.3 Discussion de la solution proposée

Les images reconstruites seront directement manipulées afin de restaurer les effets de la rétroprojection filtrée. Pour se faire, la base de données sera construite à partir de données modélisées. Deux expérimentations seront effectuées pour fin de comparaison. La première expérimentation utilisera des données issues d'une rétroprojection sans le filtre de restauration $1/r$. Cette expérimentation a pour but de valider si le réseau peut restaurer la contribution $1/r$ tout en supprimant le bruit que le filtre de restauration génère. La deuxième expérimentation poursuit le même but, sauf que les données sont issues d'une rétroprojection filtrée.

5.3.1 Caractéristiques et extraction des vecteurs d'apprentissage

L'utilisation d'un réseau à apprentissage supervisé, tel que décrit à Figure 2-5, est à prévoir dans la présente expérimentation. La construction de la base de données s'effectue à partir de données brutes (images à restaurer) et de données idéales (image à restauration désirée). Deux bases de données seront ainsi créées. La première base: la Base à Restauration Unique (BRU) est constituée de vecteurs dont les 61 premiers champs (champ 0 à 60) constituent les valeurs des données à restaurer. Le champ 61 contient la valeur désirée. La deuxième base: la Base à Restauration Multiple (BRM) est constituée de vecteurs dont les

61 premiers champs sont les valeurs à restaurer et les 61 suivants sont les valeurs désirées. (voir Figure 5-1)

L'étalement du cercle de sélection a été choisi de façon arbitraire. Sachant que la réponse impulsionnelle de la rétroprojection est $1/r$ et que le point le plus éloigné du centre est au 5 ième pixel de celui-ci. Il est alors conclu que le point (0,0) a une influence de .20 sur le point le plus éloigné (ex.: le point (0,5)). Bien entendu, l'étendue du cercle peut être plus élevée, ce qui augmenterait l'exactitude de la restauration. Par contre, il en résulterait un accroissement du temps de calcul pour l'apprentissage et pour son utilisation.

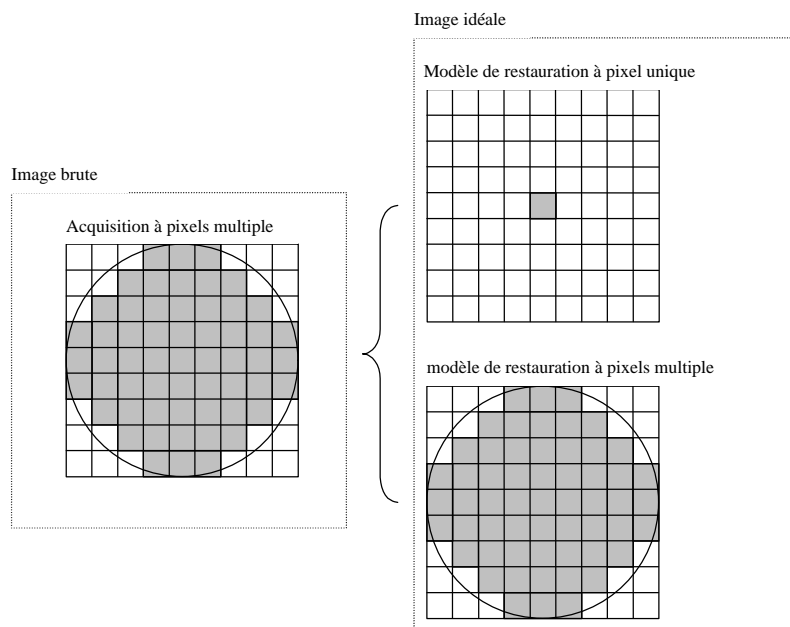


Figure 5-1: Correspondance des données brutes au pixel idéal permettant la construction des vecteurs de la BRU et de la BRM

5.3.2 Construction des bases BRU et BRM

Chaque point de l'image brute possède son corollaire dans l'image idéale dont la correspondance est effectuée par le système de coordonnées (x,y) . Une pré-sélection des vecteurs est effectuée afin d'éliminer les vecteurs moins significatifs. Ainsi, tous les vecteurs dont la valeur idéale est 0 sont systématiquement éliminés de la base. Ceci se justifie par le fait qu'un réseau a de la difficulté à effectuer un apprentissage efficace si la réponse désirée est zéro. De plus, les images idéales sont constituées majoritairement de

pixels dont la valeur est zéro ce qui crée des bases de données avec beaucoup trop de vecteurs.

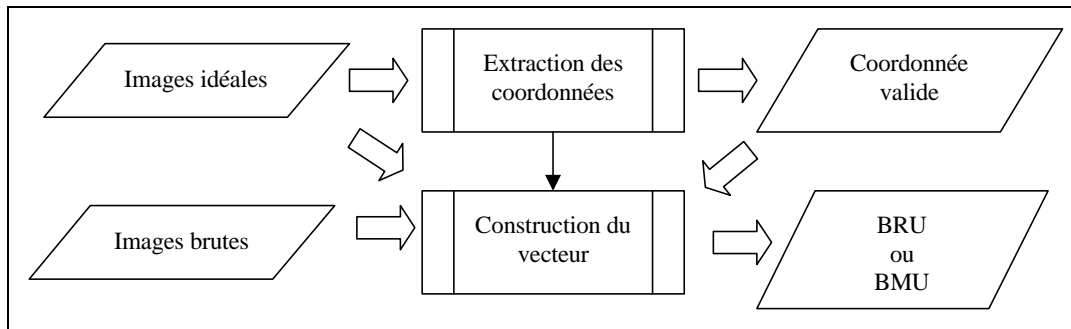


Figure 5-2: Construction des bases BRU et BRM à partir des images brutes et idéales.

5.3.3 Classification des vecteurs de la base

La sur représentation d'un même événement est à éviter lorsqu'il y a entraînement d'un RN. Cette contrainte oblige donc le classement et la suppression des événements redondants avant d'effectuer l'apprentissage. L'attribution de la classe s'effectue à partir d'une image normalisée et quantifiée (voir Figure 5-4). Le cercle présenté à la Figure 5-3 est la fenêtre qui sert au balayage de l'image afin d'extraire les vecteurs d'apprentissages. Tous ces points ne peuvent pas servir à la classification du vecteur. Les points qui servent à la classification sont numérotés de 1 à 9. Cette configuration permet d'inclure une très grande variété d'événements possibles. Les points 2,4,5,6,8 permettent une classification en tenant compte d'événements proches du point à restaurer. Il s'agit donc d'événements à hautes résolutions. Les points 1,3,7,9 -loin du point central et aux limites du cercle- nous permettraient d'avoir une vue plus globale autour du point considéré.

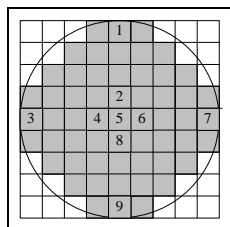


Figure 5-3: Pixels retenus pour la classification du vecteur

La Figure 5-4 présente l'algorithme général de construction des bases BRU et BRM. Dans un premier temps, le processus de normalisation – quantification est appliqué aux images

brutes afin de former des images brutes normalisées. C'est à partir de cette image que les classes seront formées. La quantification à 10 niveaux par exemple, permet de regrouper un ensemble d'événements quasi identiques afin de limiter le nombre de classes. Le nombre de ces classes est directement proportionnel à la finesse de la quantification de cette image. Quant à la normalisation, elle permet d'ajuster la classification indépendamment de l'amplitude maximale des images.

Le processus de classification a pour objectif d'effectuer une classification des vecteurs de la base en fonction des images brutes normalisées. Les vecteurs de coordonnées provenant du processus d'extraction des données permettent de choisir les points qui seront traités par le processus de classification. La Figure 5-3 met en évidence les pixels qui seront utilisés afin d'attribuer un numéro de classe. La classe d'un événement GC est donc définie comme suit:

$$GC = \sum_{p=0}^{P-1} v_p \times Q^p \quad (4-1)$$

P étant le nombre de points extraits de l'image, v_p est la valeur du pixel à la position p et Q le facteur de quantification des images.

Ainsi, le vecteur de sortie de ce processus comprend un premier champ contenant le numéro de classe du vecteur courant, le deuxième champ étant les données brutes et le troisième champ est le vecteur désiré. Ces champs sont extraits des images respectives aux coordonnées définies par le processus: extraction des coordonnées.

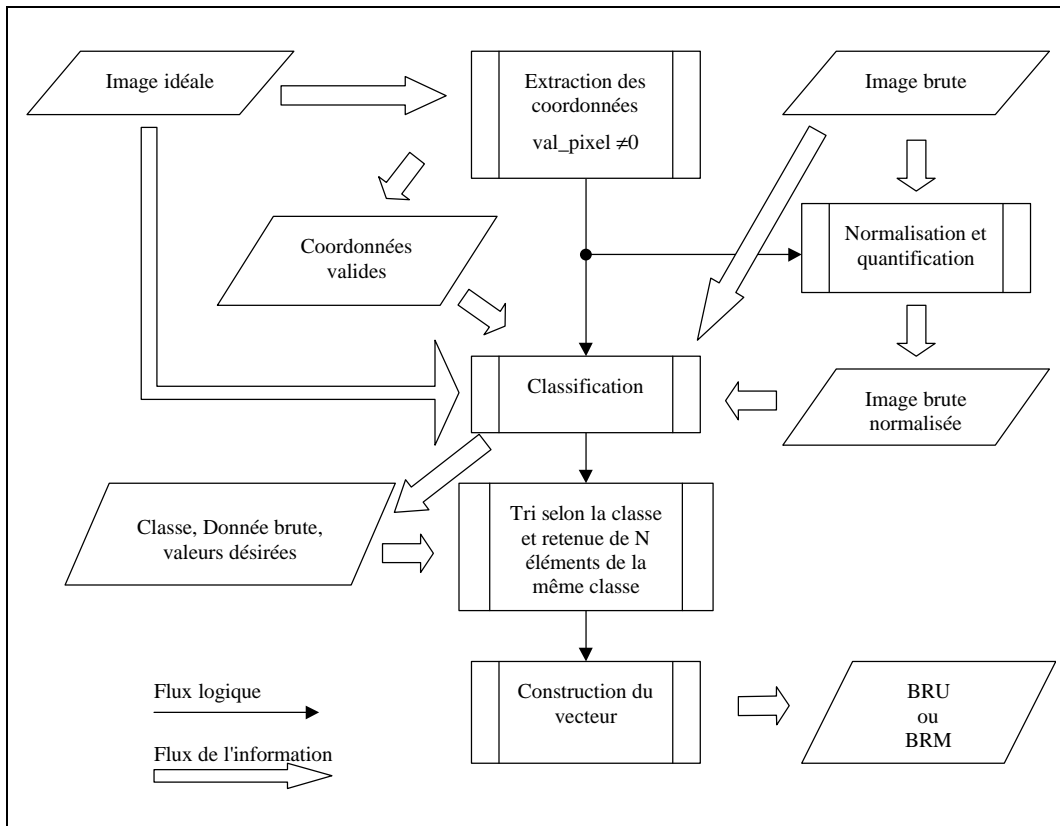


Figure 5-4: Algorithme de construction des base BRU et BRM à partir d'images dont les vecteurs sont classés

Le processus de tri et de retranchement des vecteurs permet de fixer un nombre maximum (N) de vecteurs à être retenus pour effectuer l'entraînement. La clé de tri est *GC*. La sortie de ce processus inclut tous les vecteurs qui serviront à l'entraînement du RN. Le processus de construction du vecteur formate les vecteurs conformément à la structure des bases BRU ou BRM.

5.3.4 L'apprentissage

La construction de deux bases de données nécessite l'implantation de deux topologies de réseaux différents. D'une part un premier réseau de 61 neurones à l'entrée et un neurone à la sortie pouvant utiliser les données de BRU. Il s'agit alors d'un réseau à restauration unique (RRU). Quant au réseau à restauration multiple (RRM), il utilise 61 neurones à l'entrée et 61 neurones à la sortie. La détermination du nombre de couches cachées ainsi que du nombre de neurones sur chacune d'elle sera fixée par la méthode d'élagage ("*pruning*").

5.3.5 Restauration des images

Les réseaux RRU et RRM effectuent une restauration distincte. Chaque point à restaurer sur l'image est localisé par une coordonnée (x,y) . La sortie du réseau RRU est donc la restauration d'un point $X(x,y)$ dont l'entrée du réseau est formée par les valeurs obtenues sur l'image brute et dont la grille d'extraction est de la forme d'écrite à la Figure 5-1. Ainsi chaque point de l'image restaurée correspond à un vecteur dans l'image brute.

Il en va de façon différente pour le réseau RRM. Le RRM produit une restauration avec plusieurs valeurs. Ainsi pour la restauration d'un pixel $X(x,y)$ un ensemble de valeurs est aussi rétabli aux alentours de ce pixel. La géométrie de cette restauration est aussi indiquée à la Figure 5-1. Ainsi la restauration du point $X(x,y)$ doit tenir compte des restaurations précédentes où une valeur de ce point à été attribuée. Soixante et une valeurs seront donc allouées au point $X(x,y)$. De façon arbitraire, nous assignerons la moyenne des valeurs attribuées a $X(x,y)$ comme étant la valeur restaurée $X(x,y)$ en présumant que toutes les attributions ont un poids identique.

5.4 Expérimentation

5.4.1 Choix des réseaux

Le type de réseau choisi utilise la *tanh* comme fonction d'activation. Trois expérimentations seront effectuées afin de déterminer le nombre optimal de couches cachées optimum pour la restauration. Ainsi une première expérimentation est réalisée avec réseau à zéro couche cachée. La deuxième et la troisième expérimentation s'effectuant avec des réseaux à une et deux couches cachées. Chaque couche cachée possède initialement 16 neurones qui seront éliminés par la méthode de *pruning* afin d'optimiser le nombre de neurone sur chaque couche. La règle de modification des poids de Widrow-Hoff utilisant la séquence décrite à l'Algorithme 2-1 de la section 2.1.7 est utilisée afin d'effectuer l'apprentissage du réseau.

5.4.2 Choix des mires

Que ce soit pour BRU ou BRM et les deux expérimentations (retroprojection filtrée et non filtrée), les images servant à la construction des bases demeurent les mêmes. La sélection des images doit couvrir un large éventail d'événements dont les variables sont les suivantes:

l'étendu du signal, sa périodicité ainsi que son amplitude. En terme de composantes d'images, ces variables se manifestent par l'étendue, la quantité d'activité ainsi que la répétition des objets dans la source. Les mires servant à la construction des bases d'entraînement, test et évaluation tendent à correspondre à ces critères. Il est à noter que ces critères peuvent être atteints par l'utilisation de plusieurs mires dans la construction de la base.

Mires de la base d'entraînement

Trois familles de mires (voir Image 5-1)constituent les images des bases de données. Premièrement, un ensemble d'images de forme circulaire de grandeur et d'amplitude différentes sont formées afin de s'assurer que le réseau apprenne à partir d'événements couvrant une vaste gamme d'amplitude et d'étalement du signal. Une deuxième série d'images, de forme carrée et d'amplitudes variées permet d'identifier des objets dont les arêtes sont linéaires. Finalement une série d'images contenant plusieurs petits éléments d'amplitude variée permet l'apprentissage d'événements à hautes fréquences et/ou périodiques.

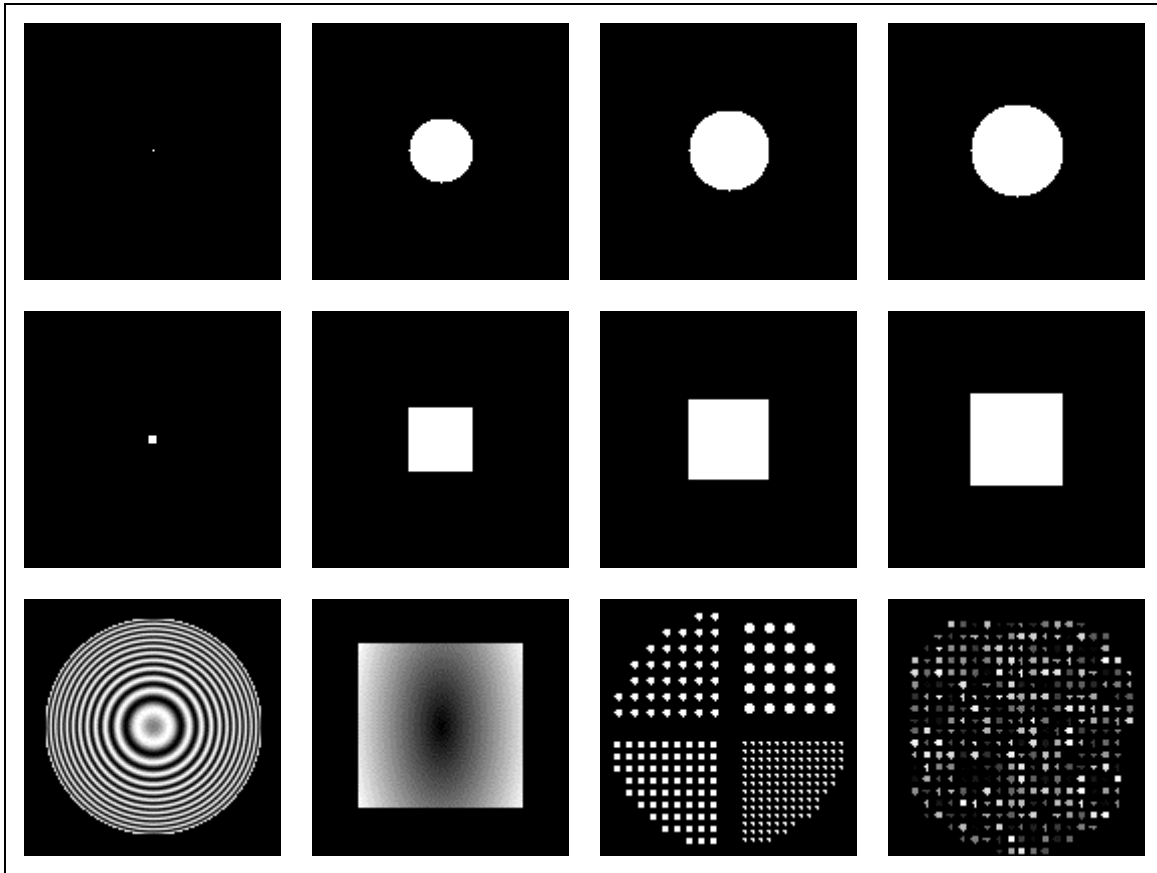


Image 5-1: Images servant à la construction des vecteurs d'apprentissage des bases BRU et BRM

Mires de la base test

Les mires de l'Image 5-2 permettent de valider les performances de restauration du réseau lors de l'apprentissage. Tout en validant les critères retenus pour l'apprentissage, cette base doit contenir un nombre limité d'images, afin de ne pas allonger indûment le temps d'apprentissage de réseau.

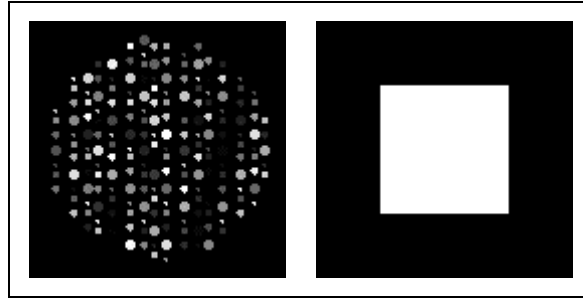


Image 5-2: Images servant à la construction des vecteurs de test des bases BRU et BRM

Mire d'évaluation

Possédant des objets d'amplitudes et de dimensions variées, de périodicité constante et variée, cette mire (voir Image 5-3) permet d'effectuer l'évaluation qualitative et quantitative du réseau.

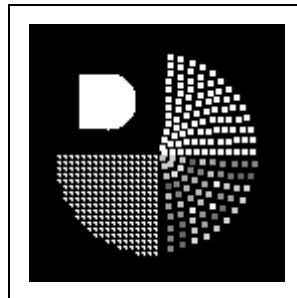


Image 5-3: Image servant à l'évaluation de la performance du réseau

5.4.3 Vecteurs bruts de BRU et BRM

Les vecteurs bruts proviennent de deux sources. D'une part, par l'algorithme de rétroprojection filtrée et d'autre part de l'algorithme de rétroprojection sans filtre. L'expérimentation sans filtre permet d'accélérer la reconstruction. Par contre l'utilisation du filtre accroît la vitesse d'apprentissage car la partie $1/r$ du signal est déjà restaurée. À ce point, il est impossible de déterminer quel algorithme produira les meilleurs résultats à la restauration des images.

Il existe une troisième configuration hybride qui somme les résultats obtenus par l'algorithme RPF à l'image obtenu par les RN. La convergence ainsi que la stabilité de cette

configuration sont démontrées aux articles [1] et [28]. Une expérimentation a été réalisée et les résultats sont satisfaisants mais ils ne seront pas présentés dans le présent mémoire.

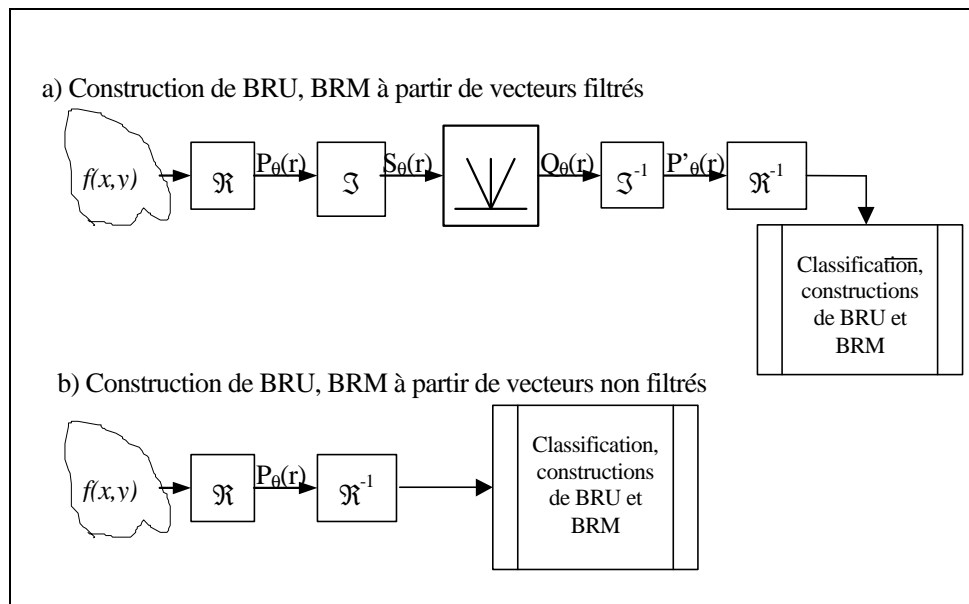


Figure 5-5: Construction des vecteurs bruts de BRU et BRM. a) À partir de l'algorithme par rétroprojection filtrée et b) à partir de rétroprojection sans filtre.

5.4.4 Restauration

La Figure 5-6 présente les algorithmes de restauration des images incluant les RN dont l'apprentissage est terminé. L'utilisation du réseau est dépendante de la provenance des vecteurs de la base, c'est pour cette raison que les deux algorithmes sont nécessaires. Il va de soi que les restaurations prennent en compte le fait qu'il s'agit d'un réseau RRU ou RRM.

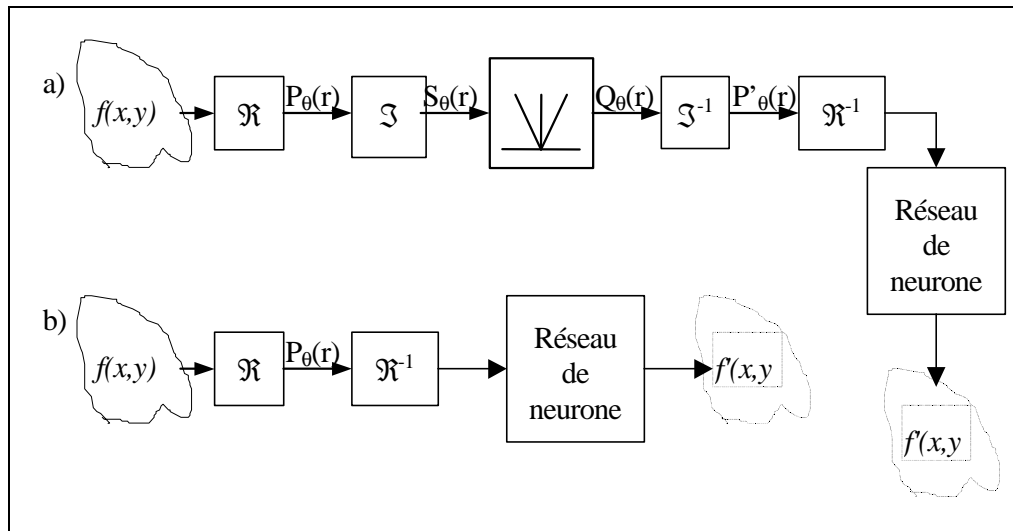


Figure 5-6: Algorithme de restauration des images utilisant les RN avec en a) une restauration par rétroprojection filtrée et en b) une restauration par rétroprojection non filtrée

5.5 Analyse des résultats

L'évaluation de la qualité de la restauration du réseau développé, aura comme critère: le calcul de EQM entre la mire d'évaluation restaurée et la mire d'évaluation idéale. La mire d'évaluation reconstruite à partir de l'algorithme par rétroprojection filtrée (RPF) sert d'étalon de comparaison. De plus, une estimation de la résolution à demi et dixième de hauteur est effectuée sur la restauration d'une source ponctuelle située au centre de l'image. Pour terminer, les profils, ainsi que les meilleures images de la mire d'évaluation seront exposés afin d'effectuer une appréciation visuelle de la qualité de la restauration.

5.5.1 Estimation de l'erreur quadratique moyenne de la mire d'évaluation restaurée

L'erreur quadratique moyenne entre l'image restaurée et l'image idéale est calculée pour chacune des expérimentations permettant ainsi la sélection des restaurations les plus exactes. La Figure 5-7 met en contraste les résultats obtenus que ce soit pour les réseaux provenant d'un apprentissage des bases BRU ou BRM.

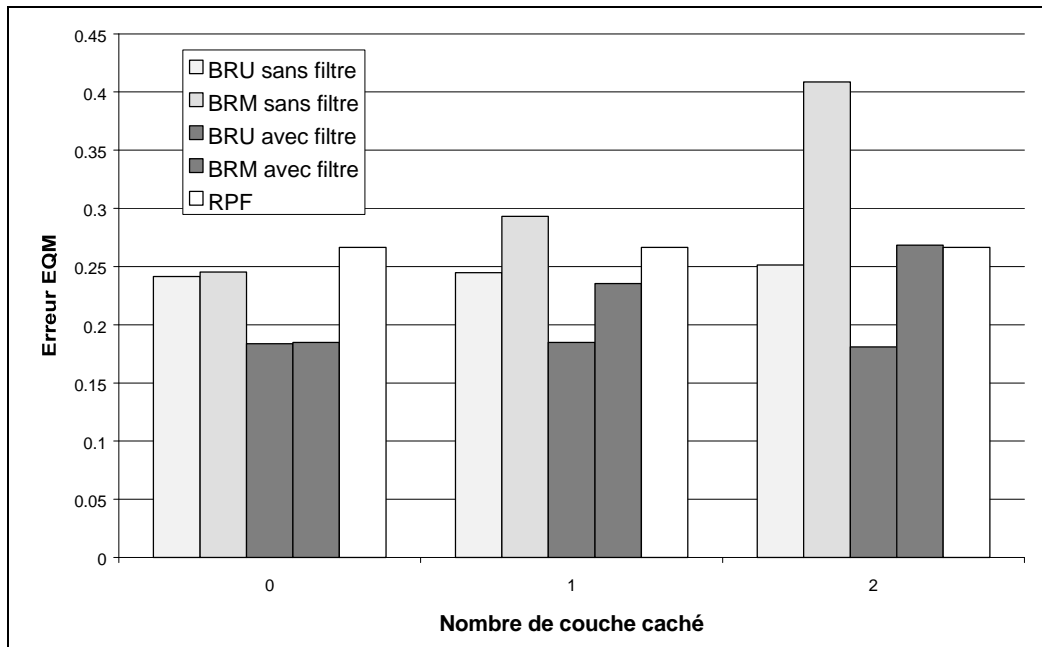


Figure 5-7: Estimation de EQM entre les différentes images restaurées

La comparaison des résultats obtenus permet d'estimer, les uns par rapport aux autres, l'efficacité d'utiliser des réseaux à zéro, une ou deux couches cachées et ce, pour les réseaux dont l'apprentissage s'est effectué avec BRU ou BRM.

À partir de la Figure 5-7 il est possible de juger les restaurations les plus efficaces. Dans un premier temps, la configuration où le réseau ne possède aucune couche cachée, semble produire les meilleurs résultats pour les restaurations de type BRU BRM avec filtre. Le réseau contenant 2 couches cachées produit les meilleurs résultats pour la restauration de type BRU avec filtre.

5.5.2 Courbes d'apprentissage des meilleures restaurations

Les courbes d'apprentissage permettent d'évaluer la qualité d'apprentissage du réseau. Ainsi, la Figure 5-8 présente les meilleures restaurations pour chacune des catégories de réseau. Il est à noter que les réseaux faisant partie des restaurations avec filtre ont une vitesse d'apprentissage beaucoup plus rapide. De plus, ces réseaux ont une erreur résiduelle plus petite que celle des réseaux dont la base possède des vecteurs non filtrés. En terminant, il est à noter que l'utilisation d'une base de type BRU ou BRM ne semble pas être un facteur déterminant dans la qualité ou la rapidité de l'apprentissage.

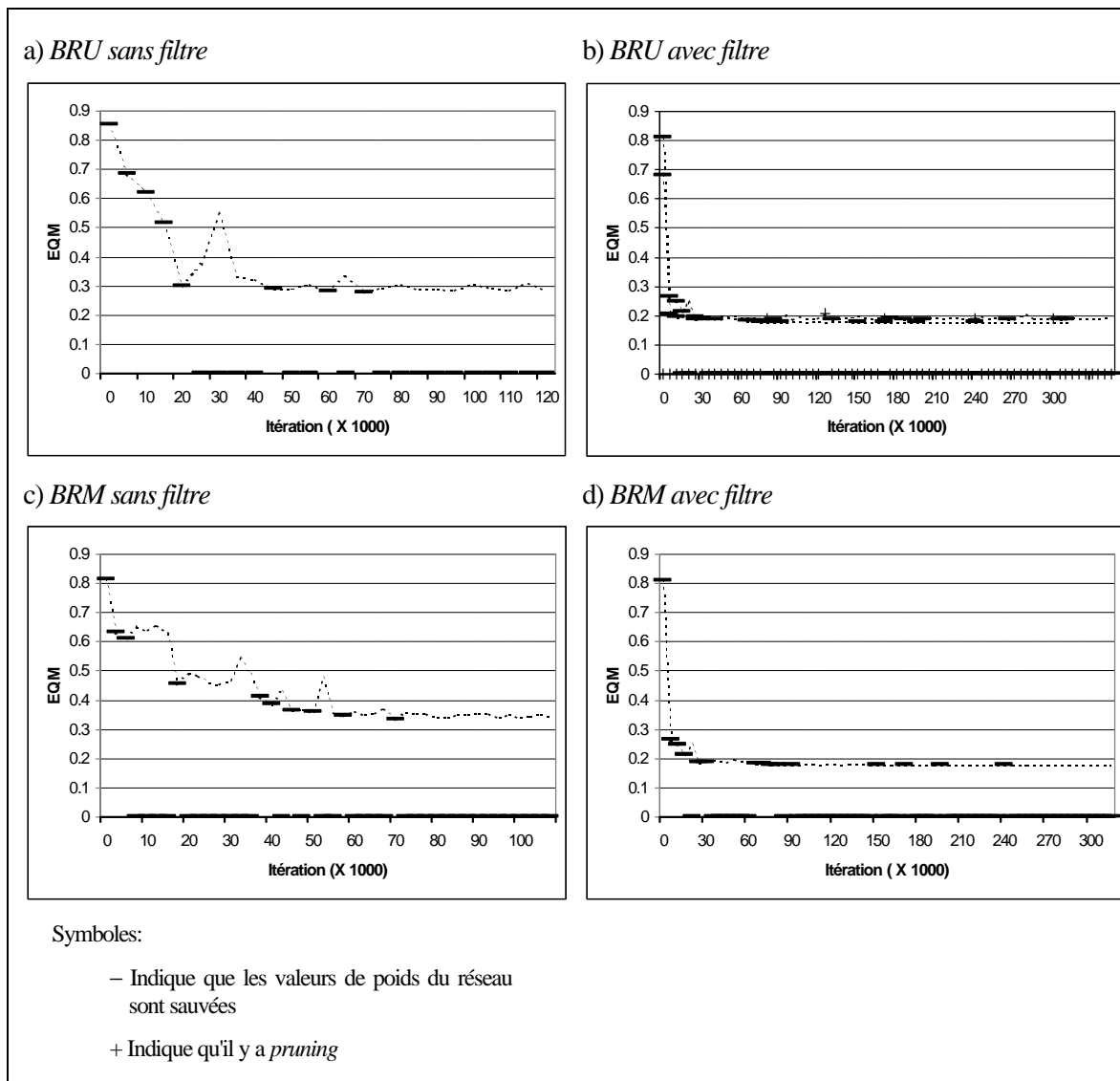


Figure 5-8: Courbes d'apprentissage: a) réseau à restauration BRU sans filtre, b) réseau à restauration BRU avec filtre, c) réseau à restauration BRM sans filtre et c) réseau à restauration BRM avec filtre.

5.5.3 Courbes de résolution à demi et dixième de hauteur après la restauration

Ces courbes de résolution sont effectuées à partir d'une source ponctuelle de 2 pixels de diamètre et d'une valeur idéale d'amplitude de 255 au centre de l'image. La dimension de l'image est de 256X256 pixels. Les résultats présentés à la Figure 5-9 proviennent d'une restauration effectuée avec les réseaux ayant été identifiés, à la section précédente, comme étant les plus performants.

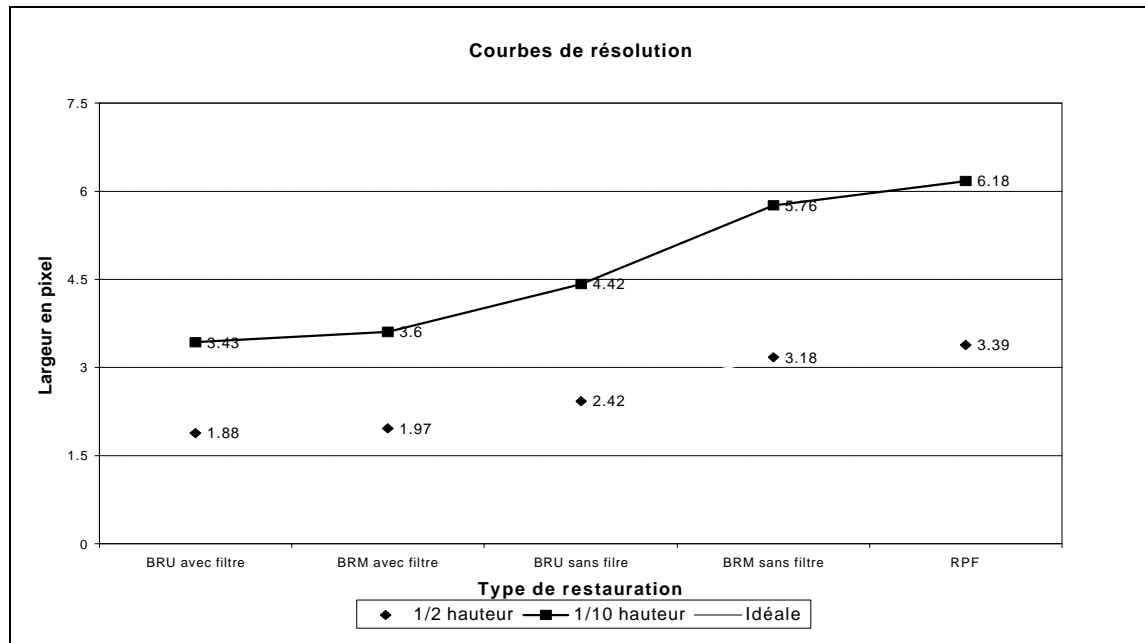


Figure 5-9: Courbes de résolutions à demi et dixième de hauteur dont l'objet idéal est d'amplitude 255 et de 2 pixels de diamètre situé au centre de l'image.

5.5.4 Profils d'une tranche de la mire d'évaluation

La présentation des profils permet d'estimer la qualité de la restauration en localisant les types d'événements où la restauration est efficacement effectuée. De même elle permet aussi d'évaluer les événements plus difficiles à restaurer par le réseau. L'Image 5-4 indique la position de la tranche servant à construire les profils pour fin de comparaison.

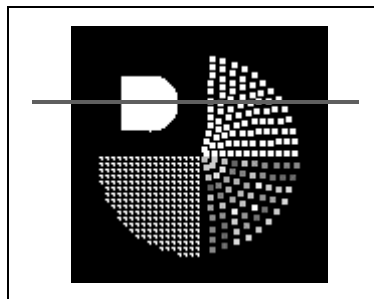


Image 5-4: Position du profil sur l'image idéale.

Deux graphiques (voir Figure 5-10) sont générés à partir de la même expérimentation afin d'alléger leurs contenus. Les profils de l'image idéale et de l'image restaurée par l'algorithme de rétroprojection filtrée figurent sur chaque graphique.

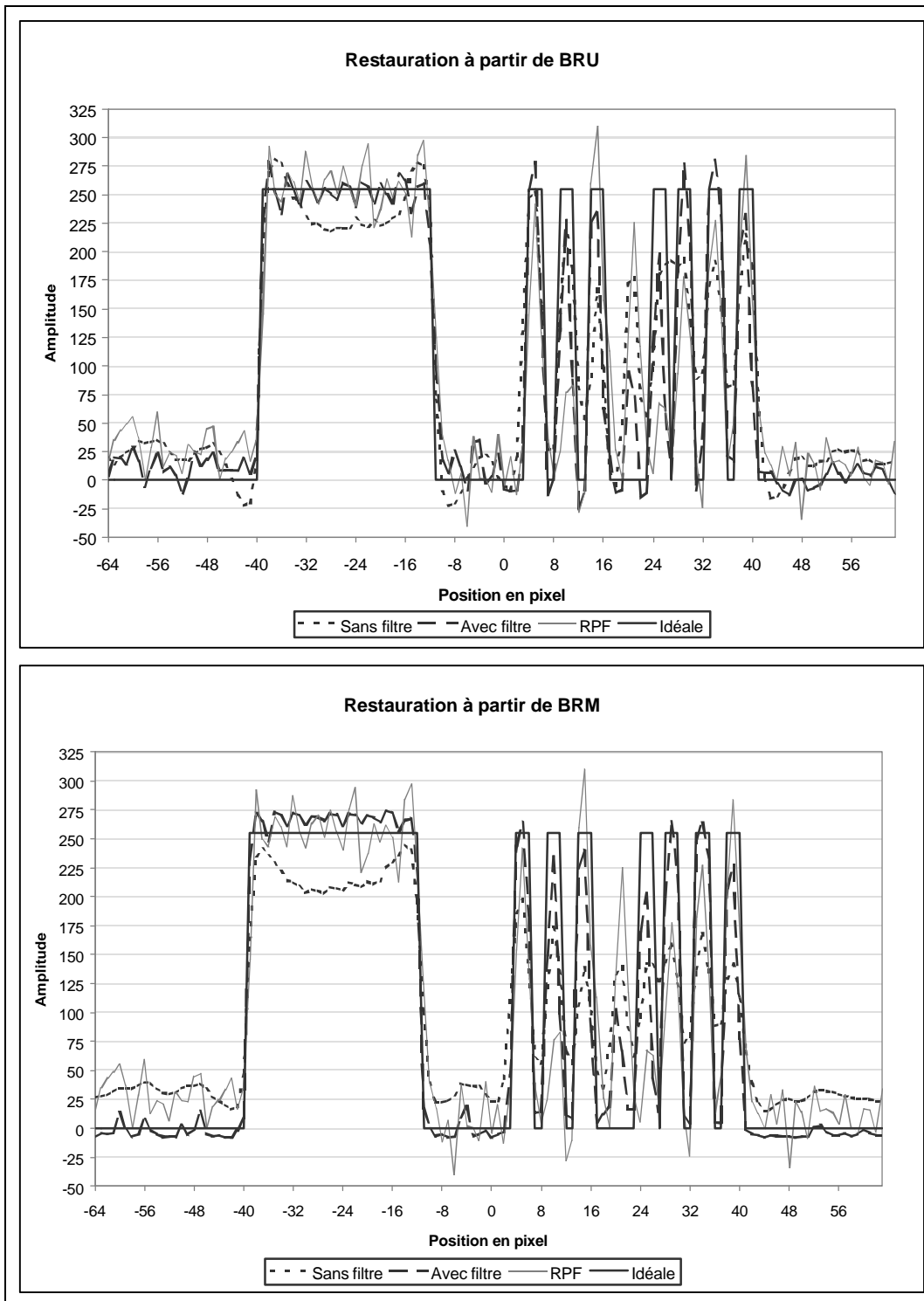


Figure 5-10: Comparaison entre les profils de l'image idéale, restaurée selon l'algorithme de rétroprojection filtrée (RPF) et la restauration de type RRU et RRM avec et sans filtre.

5.5.5 Restauration de la mire d'évaluation

L'appréciation visuelle de la restauration reste encore un des meilleurs moyens d'évaluer la qualité d'une restauration. L'Image 5-5 présente les images de la mire d'évaluation pour les reconstructions les plus efficaces dans chacune des catégories expérimentées.

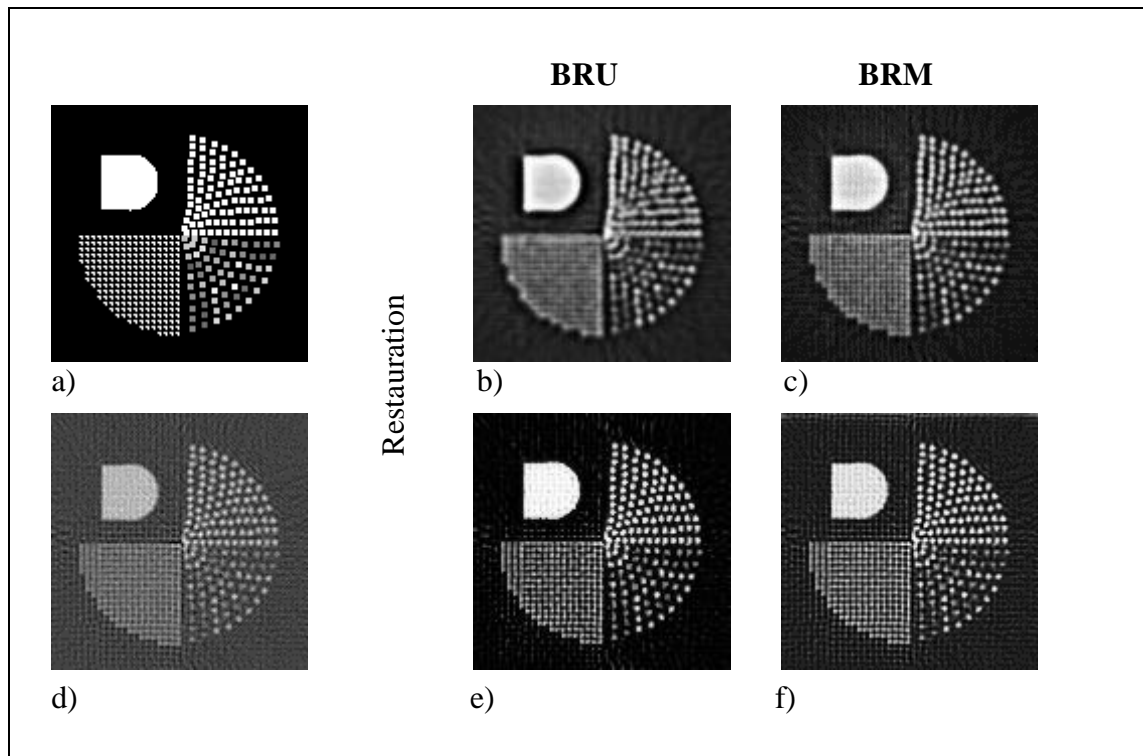


Image 5-5: Reconstruction de la mire d'évaluation: a) mire idéale, d) image reconstruite en utilisant l'algorithme par rétroprojection filtrée b) BRU et c) BRM, dont les vecteurs de la base sont constitués de données non filtrées, e) BRU et f) BRM dont les vecteurs sont constitués de données filtrées,.

5.5.6 Résumé des résultats

Les courbes d'apprentissage (voir Figure 5-8) semblent démontrer que l'entraînement par les réseaux comportent une très grande erreur EQM. Ce seul critère ne permet cependant pas de conclure à la médiocrité de l'apprentissage. Effectivement les courbes de résolution ainsi que la présentation des images de l'Image 5-5 démontrent que ces réseaux effectuent une bonne restauration. Par contre, la valeur finale de EQM des courbes d'apprentissage est en concordance avec les valeurs de EQM calculées sur la mire d'évaluation. Cette

concordance tend à confirmer que la mire d'évaluation est bien représentative des vecteurs d'apprentissage et des vecteurs de la base test utilisés pendant l'entraînement du réseau.

Les valeurs d'EQM présentées à la Figure 5-7 indiquent que les restaurations à partir de données filtrées fournissent les meilleurs résultats. Une autre tendance observée, est que la qualité de la restauration est inversement proportionnelle aux nombres de couches cachées du réseau sauf pour Réseau Restauration Unique avec Filtre (RRUF). C'est ainsi que les meilleures restaurations sont attribuées aux réseaux sans couche cachée – Réseau à restauration Unique Sans Filtre (RRUSF), Réseau à Restauration Multiple Sans Filtre (RRMSF) et Réseau à Restauration Multiple avec Filtre (RRMF) -. Il est intéressant de constater que, dans la majorité des cas (EQM, appréciation visuelle, mesure de résolution), les restaurations avec les réseaux de neurones produisent de meilleurs résultats que la restauration utilisant l'algorithme par rétroprojection filtrée.

Le critère de bruit de reconstruction est apprécié grâce à l'Image 5-5 et à la Figure 5-10. Cette image et cette figure mettent nettement en évidence que les réseaux RRUF et RRMF produisent une restauration avec du bruit à haute fréquence, contrairement aux réseaux RRUSF et RRMSF qui produisent un bruit à basse fréquence. Le réseau RRUSF se décline de ces concurrents par sa faible capacité à restaurer des petits objets (impression de flou) et des objets étendus (creux au centre de la source étendue). Le réseau RRMSF offre une bonne restauration des petits objets tout en minimisant le bruit à haute fréquence. Cependant ce réseau a de la difficulté, à l'image de son frère RRUSF, à restaurer les sources étendues. Les réseaux RRUF et RRMF effectuent une excellente restauration à basse fréquence car les objets étendus conservent un niveau d'amplitude autour du niveau idéal. Toutefois, à hautes fréquences, la restauration produit du bruit qui demeure quand même en dessous du niveau de bruit produit par l'algorithme RPF.

La Figure 5-9 permet d'évaluer la capacité des réseaux à restaurer les petits objets, ainsi qu'à donner une mesure de contraste par la mesure au dixième de hauteur. Les réseaux avec filtre offrent une excellente restauration de la résolution et du contraste alors que les réseaux sans filtre offrent une restauration avec une perte de résolution et de contraste. Le contraste est mis en évidence à l'Image 5-5 par le degré de noirceur des faibles valeurs de pixel et le degré de blancheur des objets à hautes valeurs de pixel.

5.6 Discussion

Deux grandes tendances sont observées, suite aux résultats obtenus, d'une part les restaurations utilisant des réseaux dont les données sont filtrées produisent des résultats avec une meilleure résolution et un contraste plus élevé. D'autre part, les restaurations effectuées par les réseaux à restauration unique sont de qualités supérieures aux restaurations avec les réseaux à restauration multiple. En plus d'être optimum dans la restauration, les réseaux à restauration unique exigent beaucoup moins de ressources informatiques (temps de calcul et espace mémoire) que les réseaux à restauration multiple. Le réseau retenu est donc le réseau à restauration unique dont les données d'entrée sont filtrées.

En comparaison avec la restauration par l'algorithme de rétroprojection filtrée, la restauration par réseau de neurones produit une restauration de qualité supérieure, tant au niveau de la résolution, du contraste des images que sur la diminution du bruit de reconstruction. Cependant, l'entraînement du réseau exige une base de données dont les vecteurs sont classés. Le non-classement des vecteurs occasionne une sur-représentation d'une même catégorie d'événements, ce qui produit un sur-apprentissage de cette famille d'événements, délaissant ainsi des événements moins fréquents mais dont l'importance ne doit pas être négligé. Le choix d'une bonne base de données comprenant un large éventail d'événements est capital pour l'apprentissage du réseau. Cela m'incite à affirmer que le choix de bons vecteurs est d'une telle importance qu'il est pratiquement impossible de faire converger l'apprentissage d'un réseau et d'effectuer une bonne restauration si cette base de données est mal conçue. L'entraînement d'un réseau est donc un long processus itératif où le concepteur doit sans cesse revoir les modifications de la base de données, la topologie du réseau ou l'attribution de nouvelles valeurs aux coefficients d'apprentissage du réseau qu'il conçoit.

CONCLUSION

Nous concluons cette étude par des commentaires généraux touchant les deux études présentées, à savoir: Étude no1. Utilisation des RN dans la restauration des FOC et l'Étude no2. Utilisation des RN afin de restaurer la réponse impulsionnelle produite par la transformée de Radon. Comme il fut indiqué en introduction, les RN développés ont fourni une solution universelle aux problématiques identifiées dans cette recherche. En plus d'être universels, les RN offrent de meilleures performances que les solutions classiquement utilisées. Par contre, le développement de ces RN pose plusieurs difficultés. Dans un premier temps, le choix des vecteurs d'entraînement est sans conteste une étape critique dans la conception du réseau. Les vecteurs choisis doivent bien refléter les caractéristiques du système. Il est donc nécessaire de procéder à l'évaluation exhaustive de ces caractéristiques avant d'entreprendre le choix du type de réseau. La deuxième étape est le choix et l'apprentissage du réseau. Plusieurs paramètres peuvent être ajustés pour optimiser l'entraînement. Lorsque ces deux étapes sont amorcées, le concepteur entre dans une phase interactive de conception. C'est-à-dire qu'il oscille entre raffiner ses données d'apprentissage et adapter son réseau en variant les divers paramètres de convergence. Cette recherche montre que l'apprentissage d'un bon réseau relève autant de l'intuition que d'un cheminement formel. C'est donc dire que l'utilisation des RN ne résout pas tous les problèmes et que son développement nécessite, en général, beaucoup de temps, d'expertise du système à traiter et une bonne connaissance des paramètres à étalonner pour effectuer une bonne convergence du RN.

La première étude sur les FOC démontre qu'il est possible d'agrandir le champ actif de la caméra, tout en minimisant les distorsions dans les images. Nous avons démontré, grâce aux RN, qu'il existe une solution pour identifier des filtres inverses stables aux FOC du système. Dans le cas du tomographe du CUSE, cette solution permettrait de presque doubler le champ actif de la caméra sans perte de résolution. La deuxième étude sur la restauration de $1/r$ par les RN démontre la faisabilité de supplanter l'algorithme de rétroprojection filtré par un algorithme tout aussi stable et plus robuste au bruit. De plus,

l'apprentissage supervisé du RN permet d'obtenir une solution universelle contrairement aux solutions itératives qui a comme handicap de ne pas posséder de critère d'arrêt objectif.

Le côté adaptatif des RN peut être utilisé afin de résoudre plusieurs autres problèmes reliés à l'imagerie en TEP. L'étude 1 de cette recherche propose d'effectuer une restauration des FOC à partir de données modélisées. L'extraction de données réelles pourrait permettre le développement d'un RN qui effectuerait les restaurations des FOC, mais au surplus, ce RN tiendrait compte de l'efficacité de détection de chacun des détecteurs de la caméra. Ainsi, en plus d'accroître le champ actif de la caméra sans l'ajout d'unité de détection, une procédure d'étalonnage pourrait être mise en place afin d'effectuer un ajustement quotidien de la caméra. La qualité adaptative du réseau pourrait donc y jouer un rôle primordial.

Dans un second champ d'activités, les RN pourraient être utilisés afin d'interpoler des projections dans un sinogramme dans le but de rehausser la qualité de la rétroprojection. Effectivement, les interpolations linéaires de projections ne produisent pas de bons résultats puisque le passage d'une projection à l'autre n'est pas un processus linéaire. La caractéristique de reconnaissance de système non linéaire, que possède les RN, serait mise à profit pour atteindre cet objectif.

Un autre projet permettant de combiner un réseau auto-organisateur couplé avec un réseau perceptron multi-couches pourrait être mis en œuvre afin d'effectuer la reconstruction de l'image. En utilisant la même procédure que celle développée à l'étude numéro deux de ce mémoire, cette configuration pourrait accroître la qualité de la restauration. Les réseaux auto-organiseurs possèdent la caractéristique d'effectuer une classification autonome des vecteurs, ce qui enlève toutes interprétations humaines des données, le réseau effectuant la classification à partir des paramètres quantitatifs.

En terminant, nous tenons à affirmer que les RN peuvent bien s'intégrer aux algorithmes déjà existants en les utilisant comme des filtres. De plus, si le système est bien caractérisé, par l'intermédiaire des vecteurs d'entraînement, le RN peut produire d'excellents résultats même dans la situation où les solutions classiques produisent des systèmes instables.

RÉFÉRENCES

- [1] Chua Leon O., Deng An-Chang, *Canonical Piecewise-Linear Representation*, IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. 35, No. 1 p.101-111, an. 1988
- [2] Comtat C., Morel C., *Approximate Reconstruction of PET Data with a Self-Organizing Neural Network*, IEEE Transaction on Neural Networks, Vol. 6, No. 3, May 1995
- [3] Floyd C.E., Georgia D. and Tourassi BS, *An Artificial Neural Network for Lesion Detection on Single-Photon Emission Computed Tomographic Images*, Investigative Radiology, Vol. 27, Sept 1992, pp. 667-672
- [4] Gopal Sanjay S., Hebert Thomas J., *Pre-Reconstruction Restoration of SPECT Projection Images by a Neural Network*, IEEE Transaction on Nuclear Science, Vo. 41, No. 4, August 1994
- [5] Hawkins, W.G., *Fourier transform resampling: theory and application*, IEEE Transaction on Nuclear Science, Vol: 44, Iss:4, pt.1 p.1543-51, 1997
- [6] Haykin Simon, *Adptive Filter Theory*, Prentice Hall Information and System Sciences series, Second edition 1991
- [7] Haykin Simon, *Neural Networks a comprehensive foundation*, Macmillan College publishing Companie 1994
- [8] Hebb D.O., *The Organisation of the Behaviour*, Wely, New York, 1949
- [9] Huesman, R. et al, *Compensation for Crystal Penetration in High Resolution positron tomography*, IEEE Trans. on Nuclear Science, Vol. 36, No. 1, February 1989
- [10] Jeanny Hérault et Christian Jutten, *Réseaux neuronaux et traitement du signal*, Édition Hermes 1994
- [11] Kak A.C. & Slaney M. *Principles of Computerized Tomography Imaging*, IEEE press 1998

- [12] Kamenev O.T., *Training two-layer neural network model for tomography data processing*, IEEE Conference Proceeding. OCEANS 95 MTS/IEEE, Vol. 3, p. 2086-7 1995
- [13] Karuta B., Lecomte R., *Effect of detector weighting Functions on the Point Spread Function of high Resolution Pet Tomographs: A Simulation Study*, Department on Nuclear Medicine and Radiobiology, Faculty of Medicine. Université de Sherbrooke
- [14] Kong H. and Guan L., *A Neural Network Adaptive Filter for the Removal of Impulse Noise in Digital Images*, Neural Network Letter, Vol. 9, No. 3, pp.373-378, 1996, pp.373-378
- [15] Kovacevic D., Loncaric S., *Radial basis function-based image segmentation using a receptive field*, Proceeding. Tenth IEEE Symposium on Computer-Based Medical Systems, IEEE comput. Soc. Press. p.126-30, 1997
- [16] Kuc R. *Introduction to Digital Signal Processing*, McGraw-Hill Book Company, 1988
- [17] Larsen Jan, *Design of Neural Network Filters*, Ph.D. thesis, Dept of Mathematical modelling section for Digital Signal Processing, Technical University of Denmark
- [18] Lecomte R, Schmitt D. et al, *Fast Point Spread Function Computation from Aperture Function in High-Resolution Positron Emission Tomography*, IEEE Trans. On Medical Imaging, Vol. 7, No. 1, March 1988
- [19] Lecomte R. et al., *High Resolution Positron Emission Tomography With a Prototype Camera Based on Solid State Scintillation Detectors*, IEEE Trans. on Nuclear Science, Vol. 37, No2, Avril 1990
- [20] Magnitski N.A. *Neural network algorithm for approximation of multivariable function with support and its application for inversion of the Radon transform.*, Proceedings of Neural, Parallel and Scientific Computations. Vol.1., p. 310-12, 1995
- [21] Martel Charles, *Application d'un détecteur à photodiode avalanche couplé à un cristal scintillateur*, Mémoire de maîtrise, Dépt. médecine Nucléaire, Université de Sherbrooke 1989

- [22] Mathews John, *Adaptive Polynomial Filters*, IEEE SP Magazine, July 1991, pp. 10-25
- [23] Miller A.S., Blott B.H. and Names T.K., *Review of Neural Network Applications in Medical Imaging and Signal Processing*, Medical & Biological Engineering & Computing, Sept 1992, pp. 449-461.
- [24] Minsky M., *la société de l'esprit*, 1988, InterEdition, Paris
- [25] Munley M, Floyd C et al., *An artificial neural network approach to quantitative single photon emission computed tomographic reconstruction with collimator, attenuation, and scatter compensation.*, American Association of Physics and Medicine, Vol. 21, No. 12, p.1889-1899, Dec. 1994
- [26] Poggio T. and Girosi F., *Networks for Approximation and Learning*, Proceedings of the IEEE, Vol 78, No. 9, Sept. 1990
- [27] Rosenfeld A. and A.C. Kak. *Digital Picture Processing, volume 1*. Academic Press, 2. Ed. edition 1982
- [28] Sandberg Irwin W., *Approximation Theorems for Discrete-Time Systems*, IEEE Trans. On Circuits and Systems, Vol. 38, No. 5, p. 564-566, May 1991
- [29] Sorenso A., *Physics in nuclear Medicine*, Second edition, Grune & Stratton, p. 115-121
- [30] Steudel A., Ortmann S., Glesner M., *Medical Image Compression with neural nets*, Proceedings of ISUMA – NAFIPS '95 The third International Symposium on Uncertainty modeling and Analysis and Annual Conference of the North America Fuzzy Information, IEEE Comput. Soc Press, p. 571-6, 1995
- [31] Sze Fong Yau, Shun Him Wong, *Limited angle tomography using artificial neural network*, Proceedings of the SPIE – The International Society for Sci. & Techno., Vol 2664, p. 170-81, 1996
- [32] Toft Peter, *The Radon Transform, Theory and Implementation*, Ph.D. thesis, Dept of Mathematical modeling section for Digital Signal Processing, Technical University of Denmark, 1996

- [33] Vardi A., Shepp L.A., Kaufman L., *A Statistical Model for Positron Emission Tomography*, Journal of the American Statistical Association, March 1985, Vol. 80, No. 389, Applications
- [34] Yau K., Sze-Fong Yau, *Solution of the missing cone problem by artificial neural network*, 1994 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, p. 467-470 vol.6, 1994