Geometría escolar: Una batalla entre percepción versus lógica y razonamiento.

Melissa **Andrade-Molina**
Universidad de Aalborg
Dinamarca
melissa@learning.aau.dk

Resumen

La geometría inmersa en el discurso matemático escolar es una geometría que conlleva a una visión limitada del espacio, a pesar de que pretende desarrollar las habilidades espaciales de los estudiantes y además, dotarlos con herramientas que le permitan desenvolverse en situaciones de la vida cotidiana y con objetos reales.

Esta visión limitada del espacio conlleva a que la geometría, y la matemática en sí, sean vistas como un conocimiento abstracto muy lejano a los sentidos, sin embargo, al realizarlo se genera contradicciones que demuestran que es imposible separarlos.

Palabras Clave: Geometría escolar, razonamiento matemático, percepción, Geometría Euclidiana, espacio.

Abstract

Geometry within school mathematics is a form of geometry that leads to a restricted understanding of space. Despite the fact that seeks to develop spatial abilities of students, and also provide them with a set of tools which can help them to solve any situation about real life, about real objects.

This restricted view of space is promoting geometry, and mathematics itself, to be perceived as an abstract knowledge, constituted far from human senses. However, by doing so, a variety of contradictions emerge, showing that is impossible to separate them.

Key words: School geometry, mathematics reason, perception, Euclidean geometry, space.

Introducción

La forma en la que percibimos y entendemos el mundo está profundamente relacionada con la construcción de conocimiento. Este conocimiento está determinado por las condiciones espacio-temporales en la que es desarrollado (Gil, 2011). Muchas nociones que hoy parecen lógicas para nosotros, en un determinado período fueron inimaginables. Por ejemplo, bajo el paradigma teocéntrico todas las expresiones de desarrollo humano, desde la producción de conocimiento científico al artístico, estaban basadas en el discurso que Dios era el centro del Universo. Era incuestionable para los pintores de esa época plasmar la realidad como la veía alguien omnipotente que observa desde los cielos, donde los objetos no se hacen más pequeños a medida que se alejan (Kvasz, 1998).

La geometría proyectiva emergió cuando en el Renacimiento se comenzó a abandonar la idea teocéntrica de ilustrar la realidad tal como la "percibía" Dios, o en la manera en la que era "vista" por Dios. En el antropocentrismo, los pintores buscaban representar lo que ellos podían ver, lo que ellos podían observar a través de sus ojos (Kvasz, 1998). Un mundo donde las líneas paralelas se cruzan en el horizonte, donde los objetos se hacen más pequeños a medida que se alejan del espectador. Así, este salto de paradigma, sobre cómo es percibido el mundo que nos rodea, permitió el desarrollo de diferentes tipos de geometrías como proyectiva, elíptica, hiperbólica, entre otras. Las que no sólo responden a las necesidades científicas de la época, como el desarrollo de la física, sino que también están condicionadas por el contexto espacio-temporal. No nacen de la genialidad de quién las estableció, sino que van acompañadas de ciertas condiciones que las hicieron posibles.

El avance de la ciencia nos ha permitido abandonar la idea de que si la tierra fuese plana las personas que están al otro se caerían, de la misma manera que nos ha permitido entender que la tierra no es plana y, a su vez, que la "realidad material" que nos rodea es una pequeña parte inmersa en un espacio que está curvado, donde no existen líneas que sean verdaderamente rectas, un espacio donde dos líneas que localmente son paralelas pueden incluso cruzarse, contrario a lo que describía Euclides en sus postulados. Más aún, en el siglo XX, Einstein demostró que los postulados propuestos por Euclides sólo pueden ser aplicados en el vacío, probando que el espacio no puede ser separado de la materia, concluyendo que el espacio no es vacío en lo absoluto (Woods, 2007).

A pesar de ello, la geometría Euclidiana se ha posicionado en la matemática escolar como una teoría matemática consistente, que aceptamos simplemente porque pareciera proveernos de un sistema que describe todo lo que podemos decir sobre nuestro mundo físico (Ray, 1991). Los axiomas de la geometría Euclidiana han ganado una importancia tal dentro de los contenidos que forman parte del currículo escolar de matemáticas en Chile, que los estudiantes de último año de enseñanza escolar no demuestran habilidades espaciales en situaciones que involucren pensar que la superficie de la tierra es curva, no logran desprenderse de propiedades como que la suma de los ángulos interiores de un triángulo suman 180^{o}, dificultando proponer soluciones que escapen a la racionalidad de la geometría Euclidiana (Andrade & Montecino, 2011).

Sin embargo, nuestro ojo es capaz de percibir un espacio que dista de ser Euclidiano. En 1913 se realizó una serie de experimentos que demostraron cómo los juicios visuales no satisfacen la lógica de las propiedades de la geometría Euclidiana (Hardy, 1951), enunciando que el espacio visual dista de seguir estas reglas. Uno de los experimentos consistía en ordenar dos filas de luces, situadas una al lado de la otra, de forma tal que estuviesen dispuestas lo más rectas y paralelas posibles. Sin embargo, las líneas resultantes no eran paralelas en lo absoluto, las líneas comenzaban a divergir a medida que se alejaban de la persona que las había ordenado. Los resultados de este experimento llevaron a concluir que en el espacio visual las configuraciones físicas no coinciden con la geometría Euclidiana (Suppes, 1977).

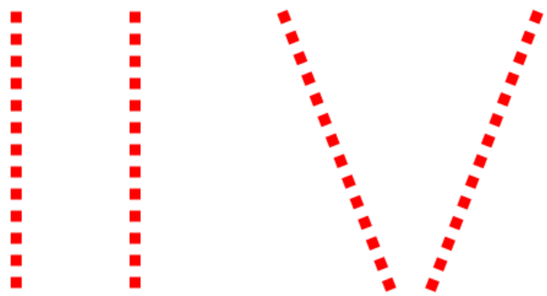

Figura 1. Líneas paralelas versus líneas resultantes del explerimento.

Aun así, el currículo matemático escolar a pesar de asegurar el mejoramiento e incluso el desarrollo de las habilidades espaciales de los estudiantes, está centrado en desarrollar un pensamiento lógico, en detrimento de otro tipo habilidades que escapen de la axiomática. Formando, finalmente, a sujetos lógico-calculistas (Kollosche, 2014), capaces de resolver problemas mediante la aplicación de técnicas. De esta manera, la geometría escolar describe una realidad que se constituye como una visión limitada del espacio, ésta responde a una forma particular de ver el mundo, un espacio plano, sin curvatura.

En este trabajo se analizará el discurso geométrico escolar del Ministerio de Educación de Chile inmerso en las guías curriculares, las instrucciones propuestas para los profesores, y los textos escolares para el estudiante. Se espera identificar si estos discursos están limitando la óptica del estudiante en una lucha constante entre lo que somos capaces de percibir y el razonamiento lógico. ¿Acaso la escuela nos hace pensar que la tierra aún es plana?

La promesa de una geometría para la realidad

Si bien no hay un discurso explícito que hable sobre qué sucede con la percepción del estudiante al momento de enfrentarse a una actividad escolarizada de matemáticas, ni sobre cómo el estudiante desarrolla su visualización espacial en la escuela, se puede distinguir un discurso que establece la relevancia de estudiar geometría para la vida cotidiana. Este propósito sugiere que el desarrollar habilidades geométricas en el plano y en el espacio permite realizar conexiones entre la realidad percibida por los estudiantes y las matemáticas escolares. Estableciendo a la geometría escolar como un conocimiento útil que empodera a quien lo posee (Valero, 2008).

¿Cuáles son estas promesas de la geometría escolar? Escolarmente se asume que si vivimos en un mundo tridimensional es indispensable hacer un nexo entre el "mundo real" y las matemáticas, ya que se estima que los estudiantes serán capaces de utilizar esas nuevas herramientas matemáticas para resolver problemas contextualizados en su diario vivir.

> Su aprendizaje enriquece la comprensión de la realidad […] aumentando su capacidad para intervenir en esa realidad (MINEDUC, 2010, p. 3).
>
> Se busca que los estudiantes pongan en juego estos conocimientos, habilidades y actitudes para enfrentar diversos desafíos, tanto en el contexto del sector de aprendizaje como al desenvolverse en su entorno (MINEDUC, 2011, p.8).
>
> El aprendizaje de la matemática ayuda a comprender la realidad y proporciona herramientas para desenvolverse en la vida cotidiana (MINEDUC, 2011, p. 25).

Al parecer se da a entender que un estudiante que es capaz de apropiarse de estas herramientas geométricas podrá desenvolverse de mejor forma en el mundo real, ya que será capaz de aproximarse de una forma particular, con ciertos conocimientos, habilidades y actitudes, para resolver desafíos de la vida diaria. De la misma manera, que un estudiante que no alcance este nivel de comprensión, puede que fracase al enfrentarse a los mismos desafíos.

El estudiar matemáticas, para la escuela, no es sólo traspasar un saber desde el profesor al estudiante, sino que implica otro tipo de formulaciones más complejas que moldean a los estudiantes a razonar de una forma particular. Es así como "al estudiar matemáticas, el estudiante adquiere el razonamiento lógico, la visualización espacial, el pensamiento analítico, el cálculo, el modelamiento y las destrezas para resolver problemas" (MINEDUC, 2011, p. 26). En otras palabras, el estudiante no sólo recibe conocimiento, sino que además, al aprender este conocimiento comienzan a desplegarse diversas habilidades que son necesarias para escalar los niveles del sistema educativo.

Una vez desplegadas estas habilidades y conocimientos son utilizados no sólo en matemáticas, sino que conforman una red que se abre a diferentes materias o ramas del sistema educativo, como por ejemplo química y física. Así, las matemáticas escolares están dispuestas para desplazarse simultáneamente con otras materias, fungiendo de herramienta al momento de modelar movimientos o comportamientos de estas áreas de conocimiento.

> El mundo en el que nos desenvolvemos es tridimensional. Sin embargo, a lo largo de la Educación Media los estudiantes se han visto enfrentados fundamentalmente a situaciones en las que sólo han necesitado desarrollar habilidades geométricas en el plano. Por ello, la intención fundamental de esta unidad es situar al alumno o alumna en el contexto geométrico real tridimensional, entregándole una nueva herramienta de representación del plano y del espacio, como es el modelo vectorial. Este modelo constituye hoy uno de los pilares básicos de la física y de la matemática. (MINEDUC, 2004a, p.68).

Es un discurso bastante claro y lógico, las matemáticas comenzaron a desarrollarse para modelar fenómenos de la realidad y, a su vez, requieren de ciertas habilidades necesarias para su comprensión. Entonces, ¿qué hay de malo de este discurso? ¿Por qué se habla de una promesa?

¿Qué es lo que estamos viendo?

El discurso que comienza a ser producido implica hacer más cercanas las matemáticas al estudiante, se realiza un esfuerzo por proporcionar ejercicios contextualizados, con situaciones concretas y personas específicas. Sin embargo, (Deleuze, 1994) evidenció que en realidad el hecho de resolver un problema matemático no está en cómo las matemáticas son aplicadas a la realidad, ya que el desarrollar la actividad implica la aplicaciones de reglas, implica generalizar abstracciones. Y una vez que el contexto del problema es olvidado por el estudiante, no hay algo que siga anclando la generalidad (la regla) con la realidad.

De esta manera la promesa de la geometría para ser aplicada en la realidad parece desvanecerse a medida que el estudiante avanza en los niveles escolares y el énfasis que se le va otorgando a las abstracciones comienza a aumentar. Por ejemplo, el Ministerio de Educación de Chile espera que los estudiantes puedan alcanzar un nivel último que les permita resolver problemas como los siguientes:

Cuando un alumno o alumna ha logrado este nivel, realiza actividades como las siguientes:

- Calcula el área de la superficie que está contenida entre cuatro circunferencias de radio "*a*" y cuyos centros son los vértices de un cuadrado de lado 2*a*, usando métodos geométricos y métodos analíticos.
- Determina el número de diagonales que admite un polígono de *n* lados, usando técnicas combinatorias.
- Demuestra que una recta tangente a una circunferencia es perpendicular a su radio en el punto de contacto, suponiendo la no perpendicularidad y demostrando que esta negación lleva a una contradicción.
- Utiliza el axioma de congruencia para demostrar que cada ángulo exterior de un triángulo es mayor que cualquier ángulo interior no adyacente.
- Construye el pentágono regular conocido el lado mediante regla y compás o un procesador geométrico y justifica la construcción realizada.
- Deduce la ecuación vectorial de una recta y a partir de ella sus ecuaciones en forma paramétrica y cartesiana.
- Formula y verifica conjeturas acerca de qué figuras construidas sobre los lados de un triángulo rectángulo satisfacen que: la suma de las áreas de estas figuras construidas sobre los catetos es igual al área de la figura construida sobre la hipotenusa.

Figura 2. Actividades que debe resolver un estudiante en el último año de escuela (MINEDUC, 2010, p.18)

El espacio que está descrito en ese tipo de actividades no es el espacio cotidiano del estudiante, sino que es nuevo tipo de espacio, un espacio escolar, un espacio que fue restringido para que ciertas propiedades pudiesen ser aplicadas. Un espacio en el cual la educación matemática busca un realismo que es diferente de la realidad (Lundin, 2012). En este apartado precisamente se comenzará a presentar el tipo de actividades que amplían la brecha entre la percepción y la razón.

Los estudiantes deben comenzar a distanciarse de la manera en la que aprendieron a interactuar con el mundo que les rodea y empezar a matematizar el espacio. Pero, ¿es tan perversa la escuela que nos aleja de nuestros sentidos? En realidad no, tan sólo aceptamos ciertos discursos en los que un estudiante exitoso es aquel que "resuelve problemas geométricos estableciendo relaciones entre conceptos, técnicas y procedimientos de distintas áreas de la matemática. […] Conjetura sobre la base de exploraciones realizadas con herramientas tecnológicas y verifica proposiciones geométricas mediante axiomas y demostraciones directas e indirectas" (MINEDUC, 2010, p.18).

Lo cual conlleva a plantear problemas matemáticos, contextualizados, de una forma que parece forzada y poco natural, pero que no es cuestionada, es aceptada. Para Foucault (1982) existen ciertas verdades en los discursos que reproducimos porque las creemos ciertas. No es cuestionable que la matemática es abstracta, por lo que no es difícil aceptar que la realidad escolar se presente de esta forma:

> Santiago observó una araña, que estaba en un vértice de una sala cuyas dimensiones son 7 m de largo, 5 m de ancho y 3 m de alto. Más tarde, observó que se había trasladado al vértice diametralmente opuesto (Muñoz, Gutiérrez & Muñoz, 2013, p. 153).

Conllevando a que aceptemos que hay una realidad matemática –un espacio escolar–, y una realidad fuera de la matemática.

Ahora bien, este discurso tiene una intención, no es ingenuo, está produciendo ciertos efectos en los estudiantes, pero no en términos de dominación, sino que establece los parámetros bajo los cuales se debe evaluar a los estudiantes para que sean considerados como "exitosos" en matemáticas. De esta forma se conforman "tesis culturales" sobre los estudiantes deseados (Popkewitz, 2008). En otras palabras, se enuncia el tipo de persona que se quiere formar

> Interesa que los estudiantes desarrollen capacidades de representación de vectores tanto en el plano como en el espacio y que puedan manejar con soltura la operatoria básica que se presenta. A través de la comprensión y utilización de esta operatoria, tendrán las herramientas que les permitirán representar rectas en el plano y el espacio, y también una diversidad de planos contenidos en el espacio. Metodológicamente, se propone trabajar inicialmente con vectores en el plano, que son fáciles de dibujar e imaginar, para luego extender la representación y la operatoria al espacio. Esto podría invitar a los estudiantes a reflexionar sobre las posibilidades de extensión a dimensiones mayores que tres. (MINEDUC, 2004a, p. 68).

Hasta el momento parece estar todo bien, ¿cuál es el problema de decir que la matemática es abstracta? Realmente ninguno, la matemática es una formalización, científicamente objetivada que modela el mundo real, por lo tanto son abstracciones. Entonces, ¿qué es lo que está mal? El espacio escolar, un espacio delimitado por las matemáticas escolares, dista de sobremanera de la realidad que podemos percibir, sin embargo, esta brecha que se abre entre ambas no se problematiza, no es cuestionada, se le resta importancia.

La escuela invita a "resolver problemas en contextos diversos: geométricos, de mediciones de alturas y distancias, incluyendo lo espacial, sin llegar a especificidades de la trigonometría esférica" (MINEDUC, 2004b, p.78). Fácilmente se podría pensar en la obviedad de esta medida, la trigonometría esférica tiene exigencias cognitivas superiores que la trigonometría plana. Una respuesta que es completamente válida, pero ahora bien, al llevar a la trigonometría a una actividad contextualizada se involucran objetos reales, medir distancias, alturas, entre otras. Pero ¿qué es lo extraño de esta situación?

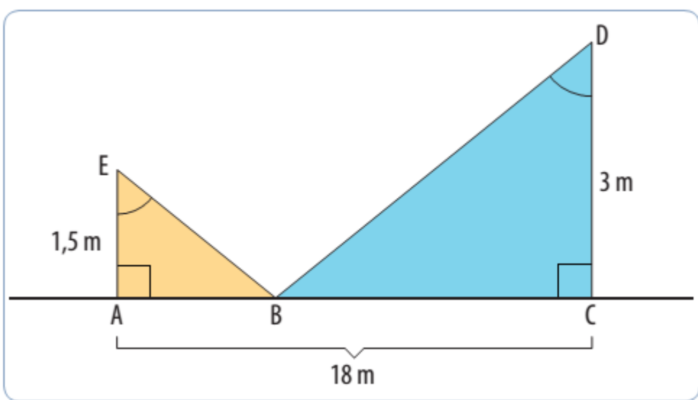

Figura 3. Imagen de libro escolar (Muñoz, Jiménez & Rupin, 2013, p. 104)

Es usual que se asuma que hay un objeto (edificio, faro, torre, etc.) que es perpendicular a la superficie de la tierra, de otra forma el teorema de Pitágoras, el teorema de Euclides y la trigonometría no tendrían sentido. No pueden existir sin un ángulo de 90^{o}. ¿Es tan despreciable obviar la curvatura de la tierra? Qué pasaría si en lugar que presentar ese tipo de imágenes, más locales, se muestra la siguiente:

Ejemplo D

Desde una altura *h* sobre el nivel del mar y a orilla de la costa, se ve desaparecer un barco en el horizonte. Estimar la distancia a la que se encuentra el barco.

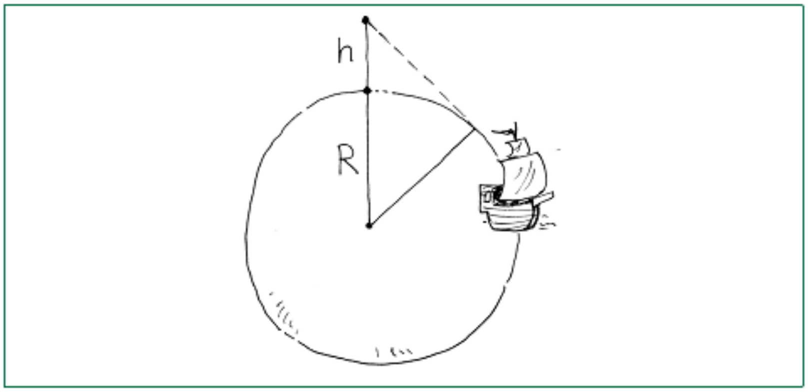

Figura 4. Ejercicio propuesto por los documentos oficiales del Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC, 2004b, p. 95).

Ya no parece tan irrelevante despreciar la curvatura de la tierra, nuestros ojos nos están señalando que no puede formarse un ángulo de 90 grados. Visualmente no tiene lógica, pero aun así debemos aceptarlo porque de otra forma no se pueden aplicar los conocimientos matemáticos escolares, simplemente aceptamos que localmente se forma un ángulo recto, aceptamos el espacio escolar. Insisto nuevamente, ¿qué hay de malo en aceptar que la matemática escolar vive en un espacio escolar?

Puede que algunos estudiantes tengan problemas al suponer que, para efectos de la actividad, la tierra es plana, vale decir, sin curvatura. Quizá algunos otros simplemente lo acepten, pero hay algo más que se invisibiliza en este tipo de situaciones, algo imperceptible que permanece oculto, esperando pacientemente que ningún estudiante se dé cuenta de ello. Observemos los triángulos que se forman en la figura de arriba.

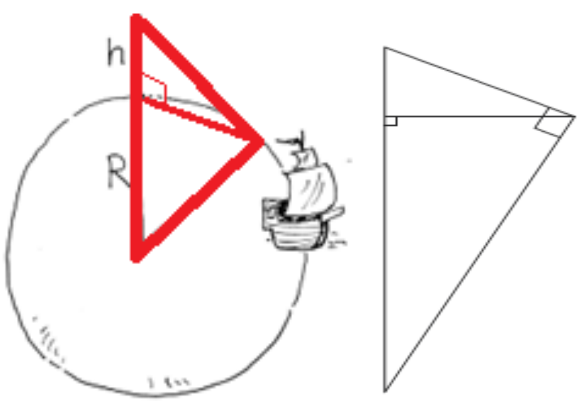

Figura 5. Razonamiento basado en un espacio escolar

¿Qué pasa si a ese triángulo resultante le agregamos un valor en particular que se obtiene a partir de la información explícita en la imagen.

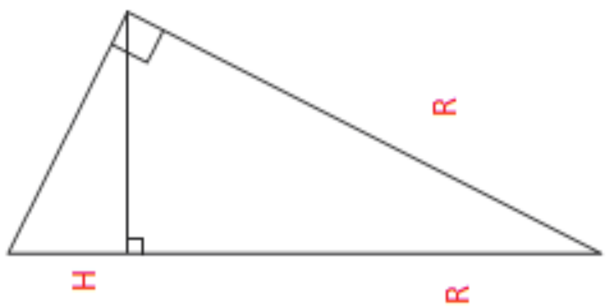

Figura 6. Triángulo resultante

De pronto ambos, cateto e hipotenusa de uno de los triángulos, tienen el mismo valor, el radio de la tierra. Por lo tanto, la percepción y los juicios visuales no pueden ser separados del razonamiento lógico que promueven las abstracciones matemáticas.

Conclusión

Aparentemente la escuela enseña a los estudiantes un conocimiento útil y altamente valorado, que les brindará herramientas que les permitan desenvolverse exitosamente ante cualquier situación del mundo real. Las matemáticas escolares permiten que el sujeto se apropie de una forma particular de ver el mundo, *"inserts subjects into the forms of thinking and acting needed for people to become the ideal cosmopolitan citizen"* (Valero, García, Camelo, Mancera & Romero, 2012, p.4). Como consecuencia, el estudiante ideal es aquel que puede resolver problemas razonando de manera lógica, alguien que pueda modelar matemáticamente una situación cualquiera de la vida real.

Es así como este estudiante deseado debe olvidarse de algunos de sus sentidos, olvidarse que puede ver, por ejemplo. Deben entrenarse para ser capaces de utilizar modelos y deducciones geométricas, y pensar la realidad en términos de XYZ o de un espacio escolar que es plano. Donde se pierde toda conexión entre la matemática y el mundo. ¿Acaso la escuela sigue pensando que la tierra es plana? Claro que no, pero necesita que la tierra sea plana.

> The concept of space to be reconstructed in the students' understanding is that of a rational, referential space with fixed points in two or three dimensions. It is assumed that the conceptual development of the child will lead to an internal and abstract representation which will contribute to making a decontextualized child, freed from the practical capacities of acting with objects in space, particularly of those spaces where everyday life occurs (Valero et al., 2012, p.7).

El problema de la geometría escolar no es sobre el tipo de geometría que está inmersa, ya sea Euclidiana, Cartesiana, vectorial, sino que en el tipo de efectos que ésta tiene en los estudiantes. A modo de ejemplo, estudiar estos problemas desde una visión política, construida a partir de Foucault, permitiría afirmar que hay relaciones de poder que inciden en la geometría escolar y que, precisamente, "*el problema del poder de la educación matemática es el problema de cómo y con qué tecnologías de gobierno de la población y del yo, las matemáticas escolares, como parte del currículo escolar, generan los tipos de sujetos históricos y culturales de un tiempo determinado*" (Valero & García, 2014, p.5). Claramente esto abre un amplio campo que merece ser investigado.

Referencias

Andrade, M., & Montecino, A. (2011). La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano. In A. Ruiz & E. Mancera (Eds.), *Proceedings of 13a Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM-IACME)*. Recife, Brasil.
Deleuze, G. (1994). *Difference and repetition* (P. Patton, Trans.): Columbia University Press.
Foucault, M. (1982). The subject and power. *Critical inquiry*, 777-795.
Gil, M. (2011). Poder, verdad y normalidad: genealogía del hombre moderno a través de la lectura de M. Foucault. *Cuaderno de Materiales* (23).
Hardy, L. H., Rand, G., & Rittler, M. (1951). Investigation of visual space: The blumenfeld alleys. *A.M.A. Archives of Ophthalmology, 45*(1), 53-63.
Kollosche, D. (2014). *Gesellschaft, Mathematik und Unterricht. Ein Beitrag zun soziologisch-kritischen Vertändnis der gesellschaftlichen Funktionen des Mathematikunterrichts.* (Ph.D.), Universität Potsdam Germany.
Kvasz, L. (1998). History of Geometry and the Development of the Form of its Language. *Synthese, 116*(2), 141-186.
Lundin, S. (2012). Hating school, loving mathematics: On the ideological function of critique and reform in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 80*(1-2), 73-85. doi: 10.1007/s10649-011-9366-6
MINEDUC [Ministry of Education of Chile]. (2004a). *Matemática. Programa de Estudio. Cuarto Año Medio*. Santiago: MINEDUC.
MINEDUC [Ministry of Education of Chile]. (2004b). *Matemática. Programa de Estudio. Tercer Año Medio*. Santiago: MINEDUC.
MINEDUC [Ministry of Education of Chile]. (2010). *Mapas de Progreso del Aprendizaje. Geometría.* Santiago: MINEDUC.
MINEDUC [Ministry of Education of Chile]. (2011). *Matemática. Programa de Estudio. Segundo Año Medio*. Santiago: MINEDUC.
Muñoz, G., Gutiérrez, V., & Muñoz, S. (2013). *Texto Educación Matemática 4, Educación Media. Texto del estudiante. Edición especial para el Ministerio de Educación* (R. Hidalgo Ed.). Santiago: Santillana.
Muñoz, G., Jiménez, L., & Rupin, P. (2013). *Texto Educación Matemática 2, Educación Media. Texto del estudiante. Edición especial para el Ministerio de Educación* (F. Muñoz Ed.). Santiago: Ediciones SM Chile.
Popkewitz, T. S. (2008). *Cosmopolitanism and the age of school reform: science, education, and making society by making the child*. New York: Routledge.
Ray, C. (1991). *Time, Space and Philosophy*. London, GBR: Routledge.
Suppes, P. (1977). Is visual space Euclidean? *Synthese, 35*(4), 397-421.
Valero, P. (2008). "Discourses of power in mathematics education research: Concepts and possibilities for action". *PNA, 2*(2).
Valero, P., & García, G. (2014). Matemáticas escolares y el gobierno del sujeto moderno [School mathematics and the governing of the Modern subject]. *BOLEMA, 28*(49), 491-515. doi: DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n49a02
Valero, P., García, G., Camelo, F., Mancera, G., & Romero, J. (2012). Mathematics education and the dignity of being: original research. *pythagoras, 33*(2), 1-9.
Woods, A., & Grant, T. (2007). *Reason in Revolt; Marxist Philosophy and Modern Science*: Aakar Books.