

dr Leszek Czerwonka  
Katedra Mikroekonomii  
Uniwersytet Gdański

## **Model Cournota – charakterystyki i możliwości zastosowania**

### **Wstęp**

Jednym ze sposobów analizy procesów gospodarczych jest analiza modeli matematycznych. Modele te, tak samo jak i ekonomiczne modele opisowe, mają być uproszczonym odzwierciedleniem rzeczywistości, stworzonym w celu analizy relacji istotnych oraz odrzuceniu kwestii mających mniejsze znaczenie dla danego zagadnienia. W porównaniu z modelami opisowymi, modele matematyczne mają te zalety, że umożliwiają analizę zagadnienia w  $n$  wymiarach oraz pozwalają na korzystanie z całego bogactwa narzędzi matematycznych. Należy pamiętać o ich ograniczeniach, mających swoje źródło w uproszczonym i niedoskonałym odwzorowaniu rzeczywistości. Nie ulega jednak wątpliwości, że modelowanie rzeczywistości gospodarczej i analiza tych modeli poszerza i pogłębia wiedzę o następstwach i skutkach danych zdarzeń. Jednym z najszerzej używanych podstawowych modeli, na których opierają się następnie modele szczegółowe, jest model Cournota.

Celem tego artykułu jest opracowanie i przedstawienie formuł oraz analiza wartości takich zmiennych jak: wielkość produkcji, cena, przychód, wynik ekonomiczny producenta w punkcie równowagi Cournota, w zależności od zmian takich parametrów modelu jak liczba przedsiębiorstw czy wartości parametrów funkcji kosztów. Przedstawione zostało także tło historyczne wzrostu znaczenia modelu Cournota oraz badań nad jego własnościami: warunków istnienia jednoznacznych rozwiązań oraz ich stabilności.

Opracowanie to ułatwia matematyczne modelowanie zjawisk i osadzenie własnego modelu, dotyczącego pewnego szczegółowego zagadnienia, w ramach modelu Cournota. Jako przykładowe modele zostaną przytoczone modele dotyczące: fuzji poziomych, wpływu przyznania menedżerom opcji na akcje na zachowanie przedsiębiorstwa oraz wspomniane kilka innych, aby zaprezentować możliwości wynikające z użycia modelu Cournota. Główna hipoteza badawcza tego opracowania to stwierdzenie, że opierając się na równowadze Cournota w podstawowej wersji modelu można przeprowadzić szczegółową analizę badanych zdarzeń. W celu weryfikacji tej hipotezy przedstawiona zostanie równowaga Cournota dla różnych wersji modelu, a następnie zaprezentowane zostaną modele opublikowane w czasopiśmie naukowych, dotyczące pewnych zagadnień gospodarczych, a opierające się na równowadze Cournota.

### **Początki modelu Cournota i analizy jego własności**

Praca Antoine'a Augustina Cournota: „*Recherches sur les Principes Mathematiques de la Theorie des Richesses*” (Badania nad matematycznymi zasadami teorii bogactwa), wydana w Paryżu w 1838 roku, wywarła ogromny wpływ na ekonomię. Początkowo niezauważona, jednak wraz ze wzrostem znaczenia ekonomii matematycznej dzieło Cournota dostrzeżono i przetłumaczono na język angielski. Tłumaczenie Nathaniela Bacona zostało wydane w roku 1898 pod tytułem: “*Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*”<sup>1</sup>. Irving Fisher, w referacie wygłoszonym w 1937 roku w czasie sesji Towarzystwa Ekonometrycznego poświęconej pamięci A. A. Cournota<sup>2</sup>, stwierdza, że dzieło Cournota, chociaż niepozbawione błędów, to jednak jest epokowe. Dodatkowo Fisher, cytując swój artykuł sprzed czterdziestu lat, zauważa, że: „książka Cournota jest ekonomiczną klasyką,

---

<sup>1</sup> A. Cournot, *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*, Macmillan Co. London, New York 1898.

<sup>2</sup> I. Fisher, *Cournot Forty Years Ago*, „*Econometrica*” 1938, vol. 6, No. 3, s. 202.

zaś tym, którzy czytają ją po raz pierwszy wyda się równie nowa i świeża jak prace współczesne”<sup>3</sup>. Tym, co jest szczególnie istotne w pracy Cournota z dzisiejszego punktu widzenia, jest model nazywany obecnie modelem Cournota.

Model Cournota był pierwszą próbą modelowania współzależności decyzyjnych w oligopolu. Model ten opiera się na oligopolu dwóch producentów (czyli na duopolu). Każdy producent, niezależnie od drugiego, podejmuje decyzje o wielkości produkcji w celu maksymalizacji zysku<sup>4</sup>. Decydując o wielkości produkcji oligopolista zakłada, że jego konkurent w przyszłości nie zmieni wielkości produkcji. Jednak drugi producent dostosowuje się do nowych warunków i zmienia wielkość produkcji tak, aby ponownie maksymalizować zysk. W odpowiedzi na to następuje runda dostosowań wielkości produkcji producenta pierwszego. W ten sposób wielkość produkcji obu producentów zmierza do „równowagi Cournota”. Biorąc pod uwagę chęć osiągnięcia maksymalnego zysku, przy danej wielkości produkcji konkurenta, dla każdego z przedsiębiorstw można wyznaczyć tzw. funkcję reakcji, pokazującą wielkość produkcji jednego z producentów, w zależności od wielkości produkcji drugiego. Punkt równowagi Cournota zostanie osiągnięty w miejscu przecięcia się funkcji reakcji obu producentów, czyli w sytuacji maksymalnych zysków obu tych przedsiębiorstw, uwzględniając wielkość produkcji zarówno własną, jak i konkurenta. Model ten, pomimo swego wieku i prostoty, pozostaje wyjściowym modelem oligopolu z powodu jego zbieżności z danymi empirycznymi<sup>5</sup>.

Model Cournota, ze względu na swoje szerokie zastosowania był przedmiotem wielu badań naukowych. Istotnym problemem, z punktu widzenia zastosowań modelu, jest znajdowanie jego rozwiązań. Jako przykładowe prace dotyczące tego zagadnienia można podać artykuły Novsheka<sup>6</sup>, Kolstada i Mathiesena<sup>7</sup>, Fultona<sup>8</sup>, czy Sarkara i pozostałych<sup>9</sup>. Następnym zagadnieniem, które doczekało się wielu analiz, jest kwestia warunków istnienia i jednoznaczności punktu równowagi Cournota. Do autorów, którzy zajmowali się tym zagadnieniem należą m.in.: McManus<sup>10</sup>, Frank i Quandt<sup>11</sup>, Roemer<sup>12</sup>, Szidarovszky i Yakowitz<sup>13</sup>, Kolstad i Mathiesen<sup>14</sup>, Gaudet i Salant<sup>15</sup>, czy Long i Soubeyran<sup>16</sup>. Oprócz warunków istnienia i jednoznaczności równowagi uwagę badaczy zajmowała też kwestia stabilności rozwiązania modelu Cournota. Opracowania na ten temat opublikowali m.in.: Theocharis<sup>17</sup>, Fisher<sup>18</sup>, Hahn<sup>19</sup>, Bishop<sup>20</sup>, czy Okuguchi<sup>21</sup>.

---

<sup>3</sup> Ibidem, s. 199; I. Fisher, *Cournot and Mathematical Economics*, „Quarterly Journal of Economics” 1898, vol. 12.

<sup>4</sup> B. Klimczak, *Mikroekonomia*, Wyd. AE we Wrocławiu, Wrocław 2001, s. 257.

<sup>5</sup> W. Łyszkiewicz, *Industrial Organization. Organizacja rynku i konkurencja*, Wyższa Szkoła Handlu i Finansów Międzynarodowych, Warszawa 2005, s. 132; J. Lipczynski, J. Wilson, J. Goddard, *Industrial Organization. Competition, Strategy, Policy*, Prentice Hall, Pearson Education, Harlow 2005, s. 120.

<sup>6</sup> W. Novshek, *Finding All n-Firm Cournot Equilibria*, „International Economic Review” 1984, vol. 25, No. 1.

<sup>7</sup> C. D. Kolstad, L. Mathiesen, *Computing Cournot-Nash Equilibria*, „Operations Research” 1991, vol. 39, No. 5.

<sup>8</sup> M. Fulton, *The A Graphical Analysis of the Cournot-Nash and Stackelberg Models*, „Journal of Economic Education” 1997, vol. 28, No. 1.

<sup>9</sup> J. Sarkar, B. Gupta, D. Pal, *A Geometric Solution of a Cournot Oligopoly with Nonidentical Firms*, „The Journal of Economic Education” 1998, vol. 29, No. 2.

<sup>10</sup> M. McManus, *Numbers and Size in Cournot Oligopoly*, „Yorkshire Bulletin” 1962, vol. XIV; M. McManus, *Static Cournot Equilibrium: Rejoinder*, „International Economic Review” 1964, vol. 5, No. 3.

<sup>11</sup> C.R. Frank Jr., R.E. Quandt, *On the Existence of Cournot Equilibrium*, „International Economic Review” 1963, vol. 4, No. 1.

<sup>12</sup> J. Roemer, *A Cournot Duopoly Problem*, „International Economic Review” 1970, vol. 11, No. 3.

<sup>13</sup> F. Szidarovszky, S. Yakowitz, *A New Proof of the Existence and Uniqueness of the Cournot Equilibrium*, „International Economic Review” 1977, vol. 18, No. 3.

<sup>14</sup> C.D. Kolstad, L. Mathiesen, *Necessary and Sufficient Conditions for Uniqueness of a Cournot Equilibrium*, „The Review of Economic Studies” 1987, vol. 54, No. 4.

<sup>15</sup> G. Gaudet, S.W. Salant, *Uniqueness of Cournot Equilibrium: New Results from Old Methods*, „The Review of Economic Studies” 1991, vol. 58, No. 2.

<sup>16</sup> N.V. Long, A. Soubeyran, *Existence and uniqueness of Cournot equilibrium: a contraction mapping approach*, „Economics Letters” 2000, vol. 67.

<sup>17</sup> R.D. Theocharis, *On the Stability of the Cournot Solution on the Oligopoly Problem*, „The Review of Economic Studies” 1960, vol. 27, No. 2.

<sup>18</sup> F.M. Fisher, *The Stability of the Cournot Oligopoly Solution: The Effects of Speeds of Adjustment and*

W 1883 roku Joseph Bertrand dokonał krytyki modelu Cournota, stwierdzając, że zmiennymi strategicznymi, którymi kierują się przedsiębiorcy są raczej ceny, a nie wielkość produkcji<sup>22</sup>. Zaproponował on model, nazywany obecnie modelem Bertrand, w którym producenci dostosowują swoje ceny do cen konkurencji. Model ten jest równie szeroko stosowany jak model Cournot, dlatego też badacze dokonali porównań punktów równowagi obu modeli. Można tutaj przytoczyć opracowania: Simona<sup>23</sup>, Chenga<sup>24</sup>, czy Beckmana<sup>25</sup>.

Zakres badań nad modelem Cournot (oraz modelami, które powstały jako jego krytyka, czy udoskonalenie, jak modele Bertrand, czy Stackelberga) rozszerza się. Przykładowo, autorzy, na potrzeby prowadzonych analiz, zastosowali stochastyczną wersję modeli. Według metody zaproponowanej przez Murphy'ego i pozostałych<sup>26</sup>, de Wolf i Smeers zastosowali stochastyczne modele Cournot i Stackelberga do analizy europejskiego rynku gazu<sup>27</sup>.

### Duopol Cournota

Najprostszą postacią modelu Cournot jest duopol (dwóch producentów na rynku), w którym produkcja odbywa się bezkosztowo. Oznacza to, że przychód producenta jest jednocześnie jego zyskiem. Funkcja popytu rynkowego ma postać:  $P = 1 - X$ , gdzie:

$P$  – cena rynkowa,

$X$  – wielkość podaży dobra.

Jako, że wielkość podaży dobra jest sumą wielkości podaży poszczególnych producentów

$X = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ , to:

$$P = 1 - \sum_{i=1}^n x_i, \text{ gdzie: } x_i - \text{wielkość podaży producenta } i\text{-tego.}$$

Funkcja wyniku ekonomicznego ma więc postać:

$$WE_i = TR - TC = P \cdot x_i - TC_i,$$

$$WE_i = \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i\right) \cdot x_i - TC_i \text{ gdzie: } TC_i - \text{koszt całkowity producenta } i\text{-tego.}$$

W przypadku duopolu, w którym przedsiębiorstwa mają zerowe koszty (tak, jak w oryginalnym modelu Cournot z 1838 roku), funkcja popytu to:

$$P = 1 - (x_1 + x_2),$$

zaś funkcje wyników ekonomicznych duopolistów:

$$WE_1 = [1 - (x_1 + x_2)] \cdot x_1 = x_1 - x_1^2 - x_1 \cdot x_2, \text{ oraz:}$$

$$WE_2 = [1 - (x_1 + x_2)] \cdot x_2 = x_2 - x_1 \cdot x_2 - x_2^2.$$

*Increasing Marginal Costs*, „The Review of Economic Studies” 1961, vol. 28, No. 2.

<sup>19</sup> F.H. Hahn, *The Stability of the Cournot Oligopoly Solution*, „The Review of Economic Studies” 1962, vol. 29, No. 4.

<sup>20</sup> R.L. Bishop, „*The Stability of the Cournot Oligopoly Solution*”: *Further Comment*, „The Review of Economic Studies” 1962, vol. 29, No. 4.

<sup>21</sup> K. Okuguchi, *The Stability of the Cournot Oligopoly Solution: A Further Generalization*, „The Review of Economic Studies” 1964, vol. 31, No. 2.

<sup>22</sup> J. Bertrand, *Theorie des Richesses: revue de Theories mathematiques de la richesse sociale par Leon Walras et Recherches sur les principes mathematiques de la theorie des richesses par Augustin Cournot*, „Journal des Savants” 1883.

<sup>23</sup> L.K. Simon, *Bertrand, the Cournot Paradigm and the Theory of Perfect Competition*, „The Review of Economic Studies” 1984, vol. 51, No. 2.

<sup>24</sup> L. Cheng, *Comparing Bertrand and Cournot Equilibria: A Geometric Approach*, „The RAND Journal of Economics” 1985, vol. 16, No. 1.

<sup>25</sup> S.R. Beckman, *Cournot and Bertrand Games*, „The Journal of Economic Education” 2003, vol. 34, No. 1.

<sup>26</sup> F.H. Murphy, H.D. Serali, A.L. Soyester, *Stackelberg-Nash-Cournot Equilibria: Characterizations and Computations*, „Operations Research” 1983, vol. 31.

<sup>27</sup> D. De Wolf, Y. Smeers, *A Stochastic Version of a Stackelberg-Nash-Cournot Equilibrium Model*, „Management Science” 1997, vol. 43, No. 2.

Warunek konieczny maksymalizacji funkcji wyniku ekonomicznego ma postać:

$$\frac{\partial WE_1}{\partial x_1} = 1 - 2x_1 - x_2 = 0,$$

stąd otrzymuje się tzw. funkcję reakcji pierwszego producenta:

$$x_1 = \frac{1 - x_2}{2},$$

oraz analogicznie funkcję reakcji producenta drugiego:

$$x_2 = \frac{1 - x_1}{2}.$$

Podstawiając  $x_2$  do równania  $x_1$  uzyskuje się wielkość produkcji pierwszego przedsiębiorcy:

$$x_1 = \frac{1}{3}, \text{ oraz drugiego przedsiębiorcy:}$$

$$x_2 = \frac{1}{3}.$$

Cena rynkowa wynosi wówczas:  $P = \frac{1}{3}$ ,

zaś wynik ekonomiczny producentów:

$$WE_1 = WE_2 = \frac{1}{9}.$$

### **Model oligopolu Cournota - 3 przypadki funkcji kosztów dla $n$ przedsiębiorstw**

Bardzo wiele modeli dotyczących różnych zagadnień ekonomicznych opiera się na duopolu Cournota, jednak bardziej uniwersalny i mający szersze zastosowanie jest model oligopolu, w którym występuje  $n$  producentów. Poniżej zostaną przeanalizowane formuły i charakterystyki dla trzech funkcji kosztów w ramach oligopolu Cournota, w którym występuje  $n$  producentów.

Niezależnie od wersji funkcji kosztów, funkcja popytu ma postać:

$$P = b - a \cdot \sum_{i=1}^n x_i, \text{ gdzie: } a, b - \text{parametry funkcji popytu.}$$

W ramach powyższej funkcji popytu przeanalizowane zostaną trzy przypadki: dla kosztów zerowych, liniowej funkcji kosztów oraz kwadratowej funkcji kosztów.

#### *A. Koszty zerowe*

Funkcja kosztu to:  $TC = 0$ , tak więc funkcja wyniku ekonomicznego ma postać:

$$WE_i = TR - TC = P \cdot x_i - 0, \text{ czyli:}$$

$$WE_i = \left( b - a \cdot \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot x_i.$$

Rozwiązaniem układu równań, będących warunkami koniecznymi maksymalizacji funkcji wyniku ekonomicznego poszczególnych producentów:

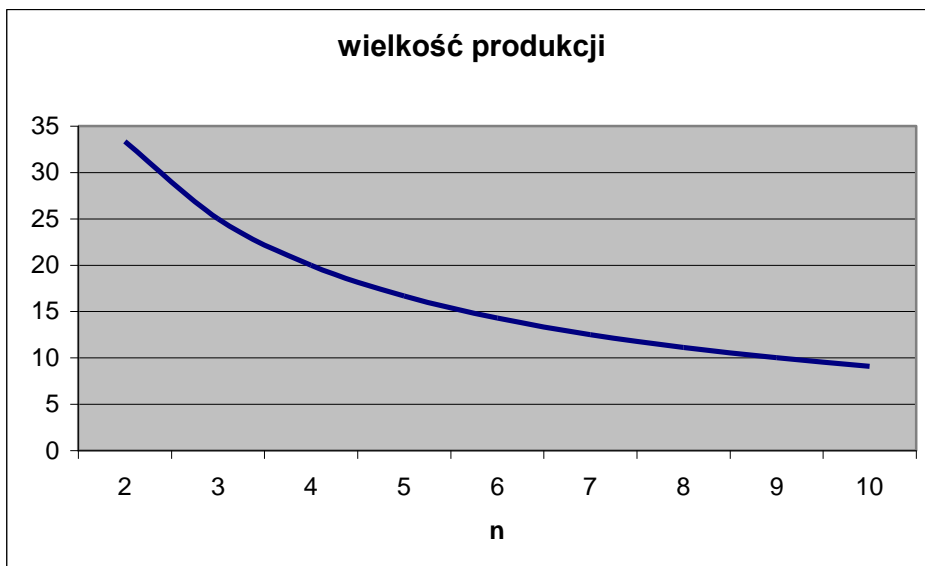
$$\begin{cases} \frac{\partial WE_1}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial WE_2}{\partial x_2} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial WE_n}{\partial x_n} = 0 \end{cases},$$

jest wielkość produkcji:

$$x_i = \frac{b}{a \cdot (n+1)}.$$

Dla kosztu zerowego: wraz ze wzrostem liczby konkurentów wielkość produkcji pojedynczego przedsiębiorstwa oczywiście maleje (rysunek 1).

Rysunek 1. *Wielkość produkcji producenta w oligopolu Cournota w zależności od liczby przedsiębiorstw na rynku, dla:  $b = 100$ ,  $a = 1$*



Źródło: opracowanie własne.

Identyczne koszty implikują rozwiązanie symetryczne:  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ , więc:

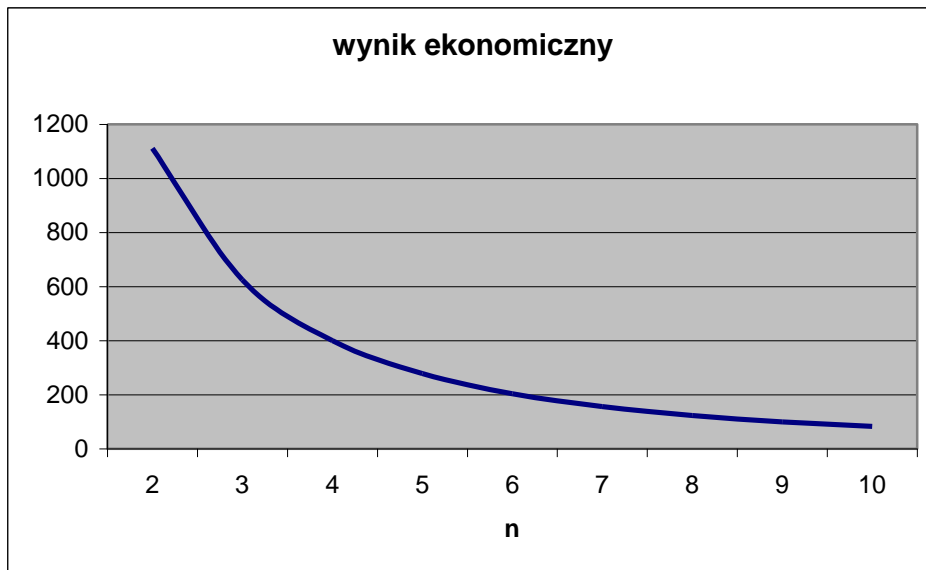
$P = b - a \cdot n \cdot x_i$ , gdzie:  $x_i$  – wielkość podaży producenta  $i$ -tego.

Wynik ekonomiczny poszczególnych producentów ma wartość:

$$WE_i = P \cdot x_i - 0 = \left( b - a \cdot n \cdot \frac{b}{a \cdot (n+1)} \right) \frac{b}{a \cdot (n+1)} = a \cdot \left( \frac{b}{a \cdot (n+1)} \right)^2 = \frac{1}{a} \cdot \left( \frac{b}{n+1} \right)^2.$$

W oligopolu Cournota przychody producentów, będące jednocześnie ich zyskami, maleją wraz ze wzrostem liczby konkurentów (rysunek 2).

Rysunek 2. Wynik ekonomiczny producenta w oligopolu Cournota w zależności od liczby przedsiębiorstw na rynku, dla:  $b = 100$ ,  $a = 1$



Źródło: opracowanie własne.

#### B. Liniowa funkcja kosztów

Funkcja kosztu to:  $TC = cx_i$ , gdzie:  $c$  – przeciętny koszt całkowity (oraz koszt krańcowy), tak więc funkcja wyniku ekonomicznego ma postać:

$WE_i = TR - TC = P \cdot x_i - cx_i$ , czyli:

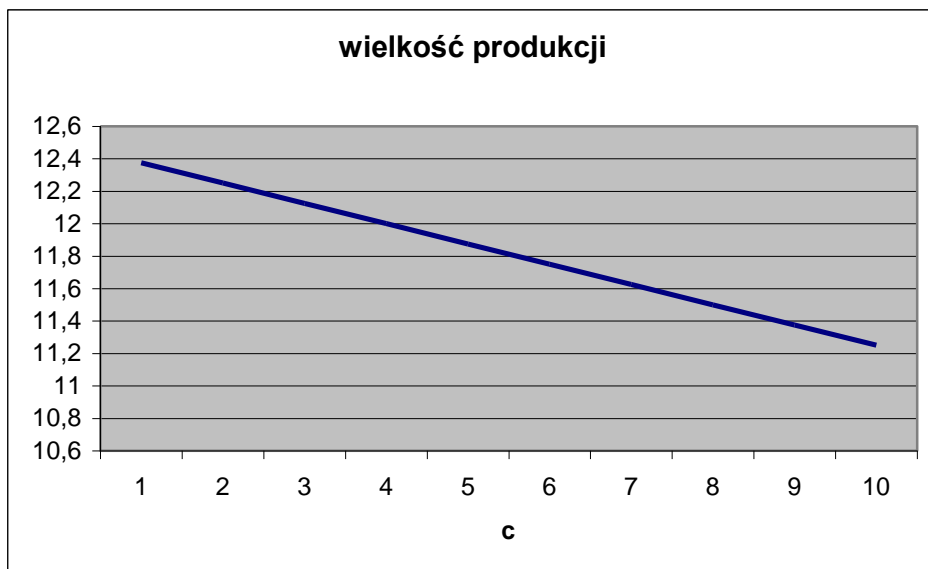
$$WE_i = \left( b - a \cdot \sum_{i=1}^n x_i - c \right) \cdot x_i.$$

Rozwiązaniem układu równań, będących warunkami koniecznymi maksymalizacji funkcji wyniku ekonomicznego poszczególnych producentów, jest wielkość produkcji:

$$x_i = \frac{b - c}{a \cdot (n + 1)}.$$

Dla kosztu liniowego wzrost parametru  $c$  w funkcji kosztu (czyli przeciętnego kosztu całkowitego oraz kosztu krańcowego) powoduje spadek wielkości produkcji (rysunek 3) i wzrost ceny (rysunek 4).

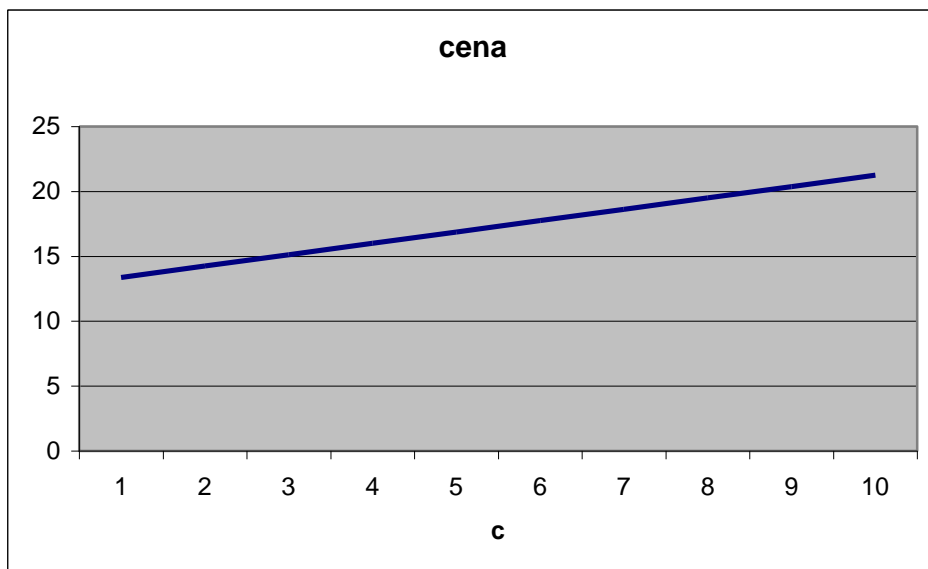
Rysunek 3. *Wielkość produkcji producenta w oligopolu Cournota w zależności od kosztu krańcowego, dla:  $b = 100$ ,  $a = 1$ ,  $n = 7$*



Źródło: opracowanie własne.

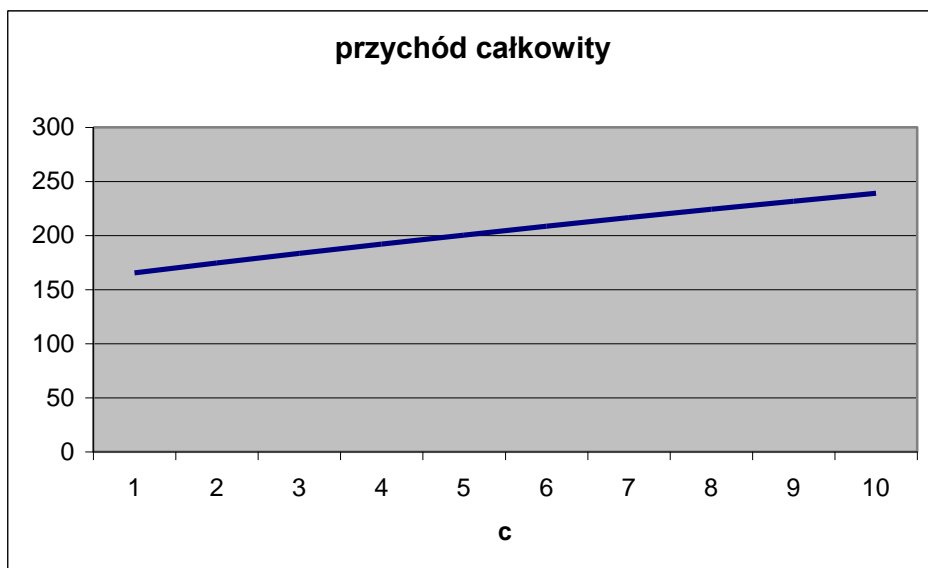
O ile jednak dla  $c$  od 1 do 10 produkcja spadła tylko z 12,4 do 11,2 (rysunek 3), to cena wzrosła z 13 do 21 (rysunek 4). Spowodowało to oczywiście wzrost przychodów całkowitych w punkcie równowagi (rysunek 5). Jednak koszty rosną szybciej i wzrost kosztu krańcowego (parametru  $c$ ) powoduje pogorszenie wyniku ekonomicznego producentów (rysunek 6).

Rysunek 4. *Cena rynkowa w oligopolu Cournota w zależności od kosztu krańcowego przedsiębiorstwa, dla:  $b = 100$ ,  $a = 1$ ,  $n = 7$*



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 5. Przychód całkowity producenta w oligopolu Cournota w zależności od wartości kosztu krańcowego, dla:  $b = 100$ ,  $a = 1$ ,  $n = 7$

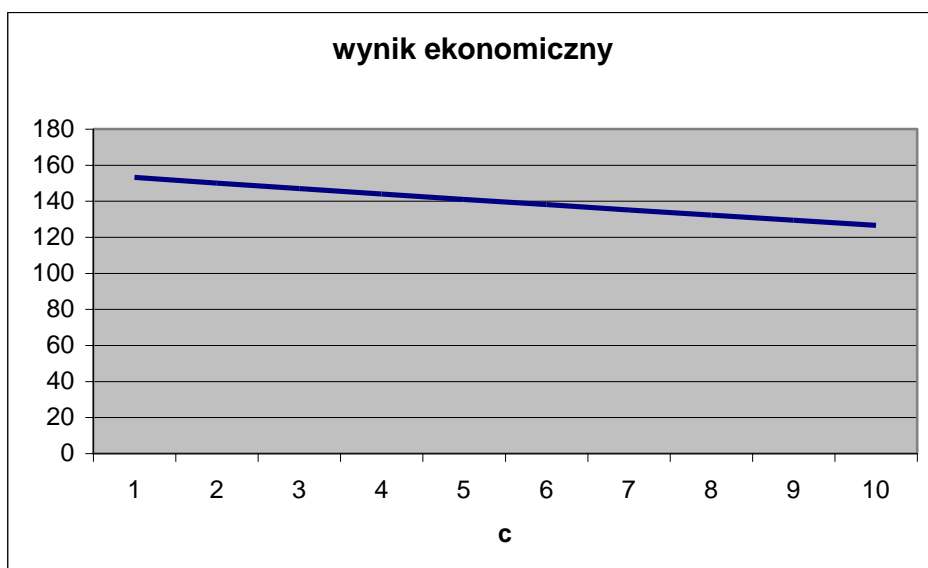


Źródło: opracowanie własne.

Wynik ekonomiczny poszczególnych producentów ma wartość:

$$WE_i = P \cdot x_i - cx_i = \left( b - a \cdot n \frac{b-c}{a \cdot (n+1)} - c \right) \frac{b-c}{a \cdot (n+1)} = a \cdot \left( \frac{b-c}{a \cdot (n+1)} \right)^2 = \frac{1}{a} \cdot \left( \frac{b-c}{n+1} \right)^2.$$

Rysunek 6. Wynik ekonomiczny producenta w oligopolu Cournota w zależności od kosztu krańcowego, dla:  $b = 100$ ,  $a = 1$ ,  $n = 7$



Źródło: opracowanie własne.



### C. Kwadratowa funkcja kosztów

Funkcja kosztu to:  $TC = dx_i^2$ , gdzie:  $d$  – parametr funkcji kosztu.

Funkcja wyniku ekonomicznego ma postać:

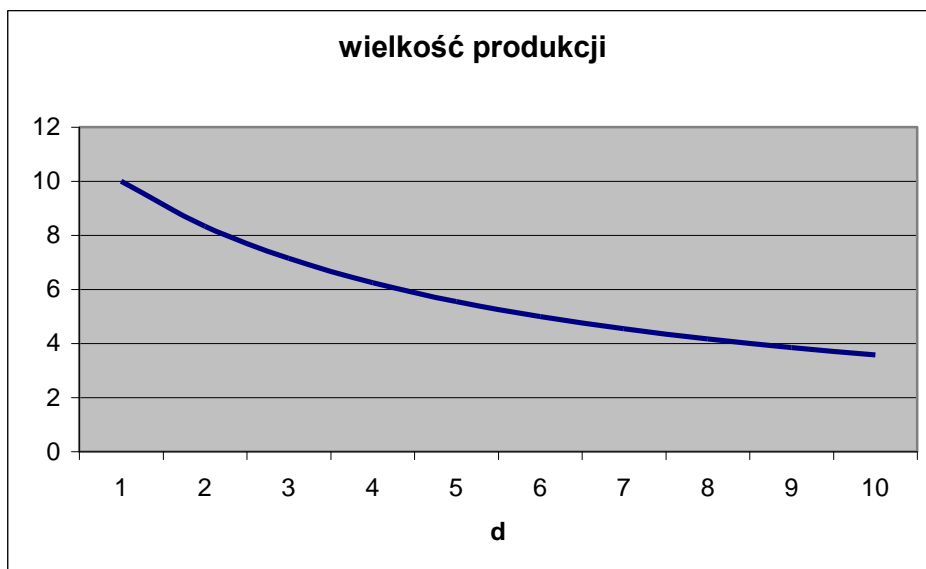
$$WE_i = TR - TC = P \cdot x_i - dx_i^2, \text{ czyli:}$$

$$WE_i = \left( b - a \cdot \sum_{i=1}^n x_i - d \cdot x_i \right) \cdot x_i.$$

Rozwiązaniem układu równań, będących warunkami koniecznymi maksymalizacji funkcji wyniku ekonomicznego poszczególnych producentów, jest wielkość produkcji:

$$x_i = \frac{b}{a \cdot (n+1) + 2d}.$$

Rysunek 7. Wielkość produkcji producenta w oligopolu Cournota w zależności od parametrów funkcji kosztów, dla:  $b = 100$ ,  $a = 1$ ,  $n = 7$



Źródło: opracowanie własne.

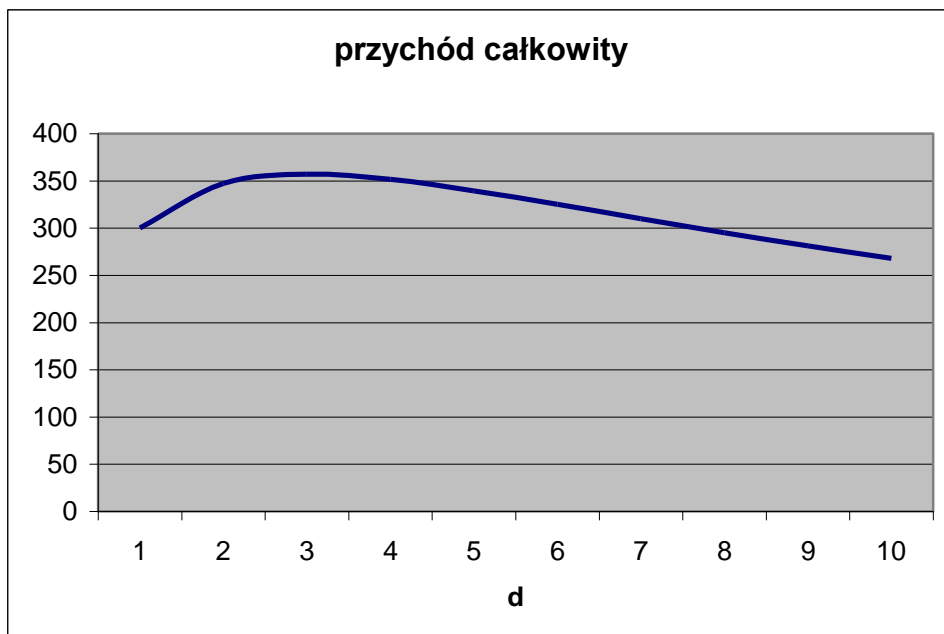
Wynik ekonomiczny poszczególnych producentów ma wartość:

$$WE_i = P \cdot x_i - dx_i^2 = \left( b - a \cdot n \frac{b}{a \cdot (n+1) + 2d} - d \frac{b}{a \cdot (n+1) + 2d} \right) \frac{b}{a \cdot (n+1) + 2d},$$

$$WE_i = (a+d) \cdot \left( \frac{b}{a \cdot (n+1) + 2d} \right)^2.$$

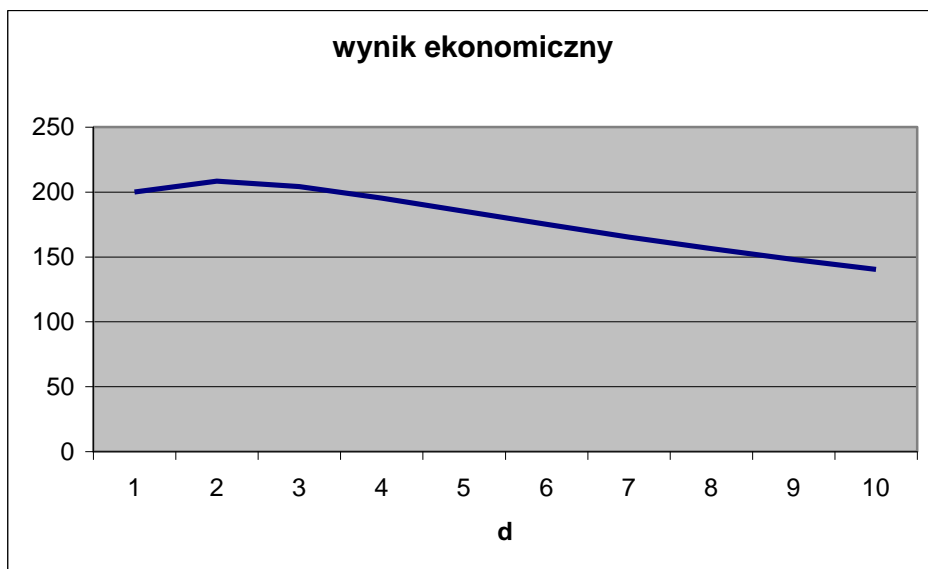
Dla kosztu kwadratowego wzrost parametru  $d$  w funkcji kosztów (a co za tym idzie – wzrost kosztów produkcji) powoduje oczywiście spadek produkcji (rysunek 7) i w konsekwencji wzrost cen. Jednak wpływ tego zdarzenia na przychody przedsiębiorstw jest niejednoznaczny. Początkowo bowiem przychody w punkcie równowagi rosną, a dopiero po przekroczeniu pewnej wartości parametru  $d$  zaczynają maleć (rysunek 8). Podobnie zachowuje się wartość wyniku ekonomicznego (rysunek 9).

Rysunek 8. Przychód całkowity producenta w oligopolu Cournota w zależności od parametrów funkcji kosztów, dla:  $b = 100$ ,  $a = 1$ ,  $n = 7$



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 9. Wynik ekonomiczny producenta w oligopolu Cournota w zależności od parametrów funkcji kosztów, dla:  $b = 100$ ,  $a = 1$ ,  $n = 7$



Źródło: opracowanie własne.

Przedstawione powyżej formuły mogą ułatwić zbudowanie modelu, opartego na równowadze Cournota, zaś przedstawione charakterystyki pokazują zachowanie równowagi Cournota w zależności od wartości parametrów modelu. Generalnie wzrost liczby konkurentów powoduje spadek wielkości produkcji pojedynczego producenta i spadek jego zysków, zaś wzrost kosztów pogorszenie wyniku ekonomicznego, chociaż przy kwadratowej funkcji kosztów, początkowo, wraz ze wzrostem kosztów, przychody i zyski przedsiębiorstwa rosną. Wprowadzenie dodatkowych zmiennych oraz zależności

zmieni oczywiście te charakterystyki, choć niewątpliwie warto znać własności modelu wyjściowego, aby lepiej oddać za jego pomocą badane procesy.

### Zastosowania modelu Cournota

Model Cournota jest szeroko stosowany w modelach dotyczących szczegółowych zagadnień ekonomicznych. Między innymi jest on stosowany w modelowaniu połączeń przedsiębiorstw. Pierwszym modelem matematycznym, który dotyczył tego zagadnienia, a następnie sprowokował do pracy całe rzesze naukowców, którzy chcieli udoskonalić jego wnioski, był model Salanta, Switzera i Reynolds<sup>28</sup>. Salant i pozostali opracowali warunek opłacalności poziomej fuzji  $n$  przedsiębiorstw. Oznaczając sumę zysków przed połączeniem jako  $\prod^{NC}(n, m)$ , zaś połączony zysk biorących w fuzji przedsiębiorstw oznaczy się jako  $\prod^C(n, m)$ , to wzrost połączzonego zysku  $m+1$  przedsiębiorstw po fuzji wyniesie:

$$g(n, m) = \prod^C(n, m) - \prod^{NC}(n, m).$$

Salant i pozostali opierając się na modelu Cournota, z stałym kosztem krańcowym  $c$ , i wychodząc ze

wzoru na wielkość produkcji:  $x_i = \frac{b-c}{n+1}$  oraz na zysk:  $WE_i = \left(\frac{b-c}{n+1}\right)^2$ , uzyskali zależność:

$g(n, m) = (b-c)^2[(n-m+1)^{-2} - (m+1)(n+1)^{-2}]$ , gdzie:  $m+1$  – liczba przedsiębiorstw biorących udział w fuzji.

Analiza tego wyrażenia wskazuje, że aby połączenie było opłacalne, musiałyby się połączyć ponad 80 proc. przedsiębiorstw funkcjonujących na danym rynku. Wyjaśnienie tego wyniku przez autorów modelu jest następujące: niektóre fuzje przyniosą straty lub nigdy do nich nie dojdzie, albo należy szukać możliwości poprawienia przedstawionego modelu<sup>29</sup>. Po tym artykule pojawiły się dziesiątki artykułów, w których przedsiębiorstwa łączą się w ramach modelu Cournota.

Innym modelem, opartym na analizie równowagi Cournota jest model Reitmana, dotyczący opcji na akcje, jako instrumentów motywujących menedżerów<sup>30</sup>. Wychodząc z modelu duopolu, w którym rynkowa krzywa popytu ma postać:  $P = A - bX$ , zaś koszt całkowity przedsiębiorstw jest liniowy, czego konsekwencją jest stały koszt krańcowy  $c$ , dodano kwestię wynagrodzenia menedżera, w postaci pakietu  $O_i$  ustalonego przez właściciela firmy. Wprowadzenie do modelu opcji na akcje i rywalizacji pomiędzy menedżerami przedsiębiorstw o jak najwyższe wynagrodzenia, spowodowało nieciągłość funkcji reakcji przedsiębiorstw. Konsekwencją otrzymania przez menedżerów pakietu, w którym wynagrodzenie uzależnione jest od zysków oraz wysokości przychodów jest m.in. silniejsze nastawienie na przychody przedsiębiorstwa, jeżeli niemożliwe jest osiągnięcie założonego zysku, gwarantującego premię.

Liczba modeli szczegółowych, opartych na modelu Cournota, jest trudna do określenia, jest ich bardzo wiele. Jako kolejny przykład można przytoczyć model Sklivasa<sup>31</sup>, wcześniejszy w stosunku do modelu Reitmana, który analizuje zależność pomiędzy wielkością produkcji i zyskami oligopolistów, a wynagrodzeniami menedżerów, uzależnionymi od zysków i przychodów. Reitman rozszerzył tę kwestię o opcje na akcje. Inny model, to na przykład model Amira i Lambsona, którzy analizują kwestię wejścia na rynek, na którym funkcjonuje oligopol Cournota<sup>32</sup>. Modelem opartym na równowadze Cournota jest także model Chena i Woolleya, dotyczący podejmowania decyzji w

<sup>28</sup> S.W. Salant, S. Switzer, R.J. Reynolds, *Losses from horizontal mergers: The effects of an exogenous change in industry structure on Cournot-Nash equilibrium*, "Quarterly Journal of Economics" 1983, vol. 98.

<sup>29</sup> Więcej o tym modelu w: L. Czerwonka, *Zastosowanie matematycznych modeli fuzji egzogenicznych*, „Pieniądze i Więź” 2008, Nr 1.

<sup>30</sup> D. Reitman, *Stock Options and the Strategic Use of Managerial Incentives*, "The American Economic Review" 1993, vol. 83, No. 3.

<sup>31</sup> S.D. Sklivas, *The Strategic Choice of Managerial Incentives*, "The RAND Journal of Economics" 1987, vol. 18, No. 3.

<sup>32</sup> R. Amir, V.E. Lambson, *On the Effects of Entry in Cournot Markets*, "The Review of Economic Studies" 2000, vol. 67, No. 2.

rodzinie, analizujący kwestię siły przetargowej oraz alokacji zasobów wewnątrz rodziny<sup>33</sup>. Model Docknera i Hauga, w ramach dynamicznego modelu Cournota analizują zagadnienie dobrowolnych ograniczeń eksportu<sup>34</sup>. Wynikiem analizy jest stwierdzenie, że wprowadzenie dobrowolnych ograniczeń eksportu, przy wolnym imporcie, spowoduje wzrost zysków zagranicznych przedsiębiorstw, co jest wynikiem przeciwnym do otrzymanego w ramach statycznego modelu Cournota<sup>35</sup>. Przedmiotem analiz w ramach modelu Cournota była także przykładowo kwestia łączenia przez poszczególne przedsiębiorstwa przedsięwzięć w zakresie badań i rozwoju<sup>36</sup>. Przytoczone modele wskazują na wielkie bogactwo zagadnień, których analiz próbowano dokonać w ramach modelu Cournota. Zagadnienia te dotyczą wszelkich kwestii, których badaniem zajmują się ekonomiści.

### Podsumowanie

Pomimo nieustannego rozwoju ekonomii model Cournota pozostaje jednym z podstawowych modeli, na których opierają się autorzy, tworząc swoje modele dotyczące procesów i zagadnień istotnych z punktu widzenia rzeczywistej gospodarki. Ułatwieniem w użyciu modelu Cournota jest to, że jego własności zostały szczegółowo przeanalizowane i opublikowane w wielu publikacjach naukowych. Niniejsze opracowanie ma zaprezentować formuły oraz charakterystykę punktów równowagi Cournota dla podstawowych modeli, na których można oprzeć dalsze, szczegółowe rozważania. Mogą one być pomocne w pracy nad modelowaniem zagadnień ekonomicznych. Jak pokazują przykłady z literatury naukowej przyjmując jako punkt wyjścia podstawowy model Cournota można próbować opisać i analizować różne, w tym skomplikowane, zagadnienia i procesy gospodarcze.

### Bibliografia

1. Amir R., Lambson V.E., *On the Effects of Entry in Cournot Markets*, "The Review of Economic Studies" 2000, vol. 67, No. 2
2. Beckman S.R., *Cournot and Bertrand Games*, „The Journal of Economic Education” 2003, vol. 34, No. 1
3. Bertrand J., *Theorie des Richesses: revue de Theories mathematiques de la richesse sociale par Leon Walras et Recherches sur les principes mathematiques de la theorie des richesses par Augustin Cournot*, „Journal des Savants” 1883
4. Bishop R.L., *“The Stability of the Cournot Oligopoly Solution”: Further Comment*, „The Review of Economic Studies” 1962, vol. 29, No. 4
5. Chen Z., Woolley F., *A Cournot-Nash Model of Family Decision Making*, "The Economic Journal" 2001, vol. 111, No. 474
6. Cheng L., *Comparing Bertrand and Cournot Equilibria: A Geometric Approach*, „The RAND Journal of Economics” 1985, vol. 16, No. 1
7. Cournot A., *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*, Macmillan Co. London, New York 1898
8. Czerwonka L., *Zastosowanie matematycznych modeli fuzji egzogenicznych*, „Pieniądze i Więź” 2008, Nr 1
9. Dockner E.J., Haug A.A., *The Closed-Loop Motive for Voluntary Export Restraints*, "The Canadian Journal of Economics" 1991, vol. 24, No. 3
10. Fisher F.M., *The Stability of the Cournot Oligopoly Solution: The Effects of Speeds of Adjustment and Increasing Marginal Costs*, „The Review of Economic Studies” 1961, vol. 28, No. 2
11. Fisher I., *Cournot and Mathematical Economics*, „Quarterly Journal of Economics” 1898, vol. 12

---

<sup>33</sup> Z. Chen, F. Woolley, *A Cournot-Nash Model of Family Decision Making*, "The Economic Journal" 2001, vol. 111, No. 474.

<sup>34</sup> E.J. Dockner, A.A. Haug, *The Closed-Loop Motive for Voluntary Export Restraints*, "The Canadian Journal of Economics" 1991, vol. 24.

<sup>35</sup> C. Mai, H. Hwang, *Why voluntary export restraints are voluntary: an extension*, "The Canadian Journal of Economics" 1988, vol. 21.

<sup>36</sup> M.I. Kamien, E. Muller, I. Zang, *Research Joint Ventures and R&D Cartels*, "The American Economic Review" 1992, vol. 82, No. 5.

12. Fisher I., *Cournot Forty Years Ago*, „Econometrica” 1938, vol. 6, No. 3
13. Frank C.R. Jr., Quandt R.E., *On the Existence of Cournot Equilibrium*, „International Economic Review” 1963, vol. 4, No. 1
14. Fulton M., *The A Graphical Analysis of the Cournot-Nash and Stackelberg Models*, „Journal of Economic Education” 1997, vol. 28, No. 1
15. Gaudet G., Salant S.W., *Uniqueness of Cournot Equilibrium: New Results from Old Methods*, „The Review of Economic Studies” 1991, vol. 58, No. 2
16. Hahn F.H., *The Stability of the Cournot Oligopoly Solution*, „The Review of Economic Studies” 1962, vol. 29, No. 4
17. Kamien M.I., Muller E., Zang I., *Research Joint Ventures and R&D Cartels*, "The American Economic Review" 1992, vol. 82, No. 5
18. Klimczak B., *Mikroekonomia*, Wyd. AE we Wrocławiu, Wrocław 2001
19. Kolstad C.D., Mathiesen L., *Computing Cournot-Nash Equilibria*, „Operations Research” 1991, vol. 39, No. 5
20. Kolstad C.D., Mathiesen L., *Necessary and Sufficient Conditions for Uniqueness of a Cournot Equilibrium*, „The Review of Economic Studies” 1987, vol. 54, No. 4
21. Lipczynski J., Wilson J., Goddard J, *Industrial Organization. Competition, Strategy, Policy*, Prentice Hall, Pearson Education, Harlow 2005
22. Long N.V., Soubeyran A., *Existence and uniqueness of Cournot equilibrium: a contraction mapping approach*, „Economics Letters” 2000, vol. 67
23. Łyszkiwicz W., *Industrial Organization. Organizacja rynku i konkurencja*, Wyższa Szkoła Handlu i Finansów Międzynarodowych, Warszawa 2005
24. Mai C., Hwang H., *Why voluntary export restraints are voluntary: an extension*, "The Canadian Journal of Economics" 1988, vol. 21
25. McManus M., *Numbers and Size in Cournot Oligopoly*, „Yorkshire Bulletin” 1962, vol. XIV
26. McManus M., *Static Cournot Equilibrium: Rejoinder*, „International Economic Review” 1964, vol. 5, No. 3
27. Murphy F.H., Sherali H.D., Soyester A.L., *Stackelberg-Nash-Cournot Equilibria: Characterizations and Computations*, „Operations Research” 1983, vol. 31
28. Novshek W., *Finding All n-Firm Cournot Equilibria*, „International Economic Review” 1984, vol. 25, No. 1
29. Okuguchi K., *The Stability of the Cournot Oligopoly Solution: A Further Generalization*, „The Review of Economic Studies” 1964, vol. 31, No. 2
30. Reitman D., *Stock Options and the Strategic Use of Managerial Incentives*, "The American Economic Review" 1993, vol. 83, No. 3
31. Roemer J., *A Cournot Duopoly Problem*, „International Economic Review” 1970, vol. 11, No. 3
32. Salant S.W., Switzer S., Reynolds R.J., *Losses from horizontal mergers: The effects of an exogenous change in industry structure on Cournot-Nash equilibrium*, „Quarterly Journal of Economics” 1983, vol. 98.
33. Sarkar J., Gupta B., Pal D., *A Geometric Solution of a Cournot Oligopoly with Nonidentical Firms*, „The Journal of Economic Education” 1998, vol. 29, No. 2
34. Simon L.K., *Bertrand, the Cournot Paradigm and the Theory of Perfect Competition*, „The Review of Economic Studies” 1984, vol. 51, No. 2
35. Sklivas S.D., *The Strategic Choice of Managerial Incentives*, "The RAND Journal of Economics" 1987, vol. 18, No. 3
36. Szidarovszky F., Yakowitz S., *A New Proof of the Existence and Uniqueness of the Cournot Equilibrium*, „International Economic Review” 1977, vol. 18, No. 3
37. Theocharis R.D., *On the Stability of the Cournot Solution on the Oligopoly Problem*, „The Review of Economic Studies” 1960, vol. 27, No. 2
38. Wolf De D., Smeers Y., *A Stochastic Version of a Stackelberg-Nash-Cournot Equilibrium Model*, „Management Science” 1997, vol. 43, No. 2

**Streszczenie:** Artykuł prezentuje własności i charakterystyki modelu Cournota oraz możliwości jego zastosowania. Celem tego opracowania jest analiza wartości takich zmiennych jak: wielkość

produkcji, cena, przychód, wynik ekonomiczny producenta w punkcie równowagi Cournota, w zależności od zmian takich parametrów modelu jak liczba przedsiębiorstw, czy wartości parametrów funkcji kosztów. Analiza ta ma ułatwić użycie modelu Cournota do modelowania zjawisk i procesów gospodarczych.

**Title: Cournot Model – characteristics and applicability**

**Abstract:** The article presents Cournot model's properties and characteristics and the possibility of its use. The aim of the article is the analysis of value of such variables as: output, price, revenue, profit in Cournot equilibrium, in dependence on changes of such model's parameters as: number of firms, or value of cost function's parameters. Due to this analysis it should be easier to use Cournot model for modeling economic processes.