

DOI: 10.11779/CJGE201805013

# 基于离散元法的颗粒破碎模拟研究进展

徐 琨<sup>1,2</sup>, 周 伟<sup>1,2</sup>, 马 刚<sup>1,2</sup>, 常晓林<sup>1,2</sup>, 杨利福<sup>1,2</sup>

(1. 武汉大学水资源与水电工程科学国家重点实验室, 湖北 武汉 430072; 2. 武汉大学水工岩石力学教育部重点实验室, 湖北 武汉 430072)

**摘 要:** 颗粒破碎对颗粒集合体的力学响应有着显著的影响。由于试验手段的限制, 基于物理试验的颗粒破碎细观尺度的研究受到很大制约。离散元法为从不同尺度上研究颗粒破碎对颗粒集合体力学特性的影响提供了一条有效的方法。通过回顾国内外现有研究成果, 介绍了基于离散元模拟颗粒破碎的两种方法, 即基于颗粒黏结模型和基于碎片替换法的颗粒破碎模拟方法, 论述了这两类方法的特点。基于颗粒黏结模型的颗粒破碎模拟方法破碎程度有限而且难以开展较大规模模拟计算, 基于碎片替换法的颗粒破碎模拟方法需要考虑碎片替换模式和颗粒破碎准则这两个关键问题。整理并讨论了现有破碎模式中碎片颗粒的数目、尺寸分布、满足质量守恒定律的策略以及破碎的应力判定准则和力判定准则。提出了基于离散元的颗粒破碎模拟方法可能的研究方向。

**关键词:** 离散元; 颗粒破碎; 颗粒黏结模型; 碎片替换模式; 破碎准则

**中图分类号:** TU43 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000 - 4548(2018)05 - 0880 - 10

**作者简介:** 徐 琨(1989 - ), 男, 博士研究生, 主要从事高坝结构及堆石料数值仿真方面的研究。E-mail: xukun\_2013@whu.edu.cn。

## Review of particle breakage simulation based on DEM

XU Kun<sup>1,2</sup>, ZHOU Wei<sup>1,2</sup>, MA Gang<sup>1,2</sup>, CHANG Xiao-lin<sup>1,2</sup>, YANG Li-fu<sup>1,2</sup>

(1. State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Science, Wuhan University, Wuhan 430072, China; 2. Key Laboratory of Rock Mechanics in Hydraulic Structural Engineering, Wuhan University, Ministry of Education, Wuhan 430072, China)

**Abstract:** Particle breakage has a significant effect on the macro- and micro-mechanical behaviors of granular assemblies. The development of micro-scale researches on particle breakage based on physical experiments is limited by the current experimental techniques. An efficient way is provided to investigate the effect of particle breakage on the behavior of granular assemblies from different scales with the proposed discrete element method (DEM). The worldwide researches are reviewed, and two kinds of particle breakage simulation methods based on DEM are introduced, namely the particle breakage simulation methods based on the bonded-particle model (BPM) and based on the fragment replacement method (FRM). The distinct problems for the particle breakage simulation method based on BPM are that it is not suitable for a large-scale numerical simulation and has a limited breakage level. Two key points, the fragment replacement mode and the particle breakage criterion, should be considered when using the particle breakage simulation method based on FRM. The fragment number, size distribution and law of mass conservation strategies of fragment replacement mode are discussed as well as the stress criterion and force criterion for particle breakage. The possible research emphasis in the field of particle breakage simulation method based on DEM is proposed.

**Key words:** discrete element method; particle breakage; bonded-particle model; fragment replacement mode; breakage criterion

## 0 引 言

颗粒材料在自然界中普遍存在, 如砂、碎石、道渣、堆石料等, 这类材料被广泛应用于土木、岩土工程中。天然颗粒材料的固有特性(如脆性、天然缺陷)使得颗粒在受外力作用, 特别在高应力状态下会发生破碎, 如三轴试验中的颗粒破碎<sup>[1-6]</sup>、铁路道砟的破碎<sup>[7-8]</sup>、地震或循环荷载下堆石料的破碎等<sup>[9]</sup>。颗粒破碎改变了颗粒集合体的级配特性, 对其宏细观力学特

性有着显著的影响<sup>[10-13]</sup>。受试验技术的限制, 基于物理试验的研究很难开展更小尺度的研究。

数值模拟方法为从细观尺度上研究颗粒材料提供新手段, 很多数值方法已经能模拟颗粒破碎, 如连续-离散耦合方法(Combined FDEM)<sup>[14-16]</sup>、离散元法

基金项目: 国家自然科学基金项目(51579193); 国家重点研发计划项目(2017YFC0404801)

收稿日期: 2017-02-04

(DEM)<sup>[17-24]</sup>、扩展有限元法 (XFEM)<sup>[25]</sup>以及离散元-比例边界有限元 (DEM-SBFEM)<sup>[26]</sup>耦合方法等, 其中 Combined FDEM 和 DEM 在颗粒破碎模拟研究中应用的最为广泛。基于 Combined FDEM 的颗粒破碎模拟方法的优点在于能够考虑颗粒的复杂形状、模拟颗粒内裂纹扩展过程、获取内部应力和变形的场分布等。但该方法需要对每个颗粒进行有限元网格划分, 计算成本较高, 进行三维模拟更是如此。而且颗粒破碎的程度与颗粒网格划分的密度有关, 网格越密, 对颗粒破碎的模拟越真实合理。基于 DEM 的颗粒破碎模拟经过近二十年的发展, 已经得到了广泛的应用并取得了丰富的研究成果<sup>[17-24, 27-38]</sup>, 为从细观尺度研究可破碎颗粒及其集合体的力学响应和机理提供了有效的途径。

### 1 离散元中颗粒破碎模拟方法的研究概述

目前, 基于 DEM 模拟颗粒破碎主要有两大类方法, 如图 1 所示。

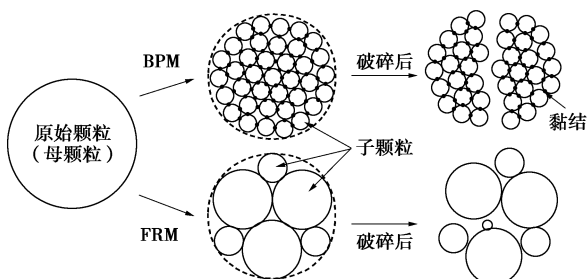


图 1 两种颗粒破碎模拟方法示意图

Fig. 1 Illustration of two particle breakage simulation methods

第一种是通过黏结一定数目的小颗粒组成团聚体, 当小颗粒间的一定数量的黏结失效时颗粒发生破碎<sup>[19-21, 23, 27-38]</sup>, 称之为基于颗粒黏结模型 (bonded-particle model, BPM) 的颗粒破碎模拟方法。另一种采用碎片替代法 (fragment replacement method, FRM) 来模拟颗粒破碎, 当颗粒受力情况达到预定破碎准则时, 采用一组无黏结的小颗粒替代发生破碎的原始颗粒<sup>[17-18, 22, 24, 39-47]</sup>, 称之为基于 FRM 的颗粒破碎模拟方法。

#### 1.1 基于 BPM 的颗粒破碎模拟方法

研究初期, Thornton 等<sup>[48]</sup>通过施加表面能, 即在接触点处施加抗拉力, 使小颗粒间相互粘结从而构造出可破碎的小颗粒团聚体。McDowell 等<sup>[27]</sup>在小颗粒接触部位施加黏结力生成可破碎的团聚体, 并通过随机移除一定比例的小颗粒, 再现了颗粒强度的尺寸效应和 Weibull 分布特性。随后, McDowell 等<sup>[28]</sup>在文献<sup>[27]</sup>研究工作的基础上模拟了可碎颗粒的侧限压缩试验。Cheng 等<sup>[29]</sup>构造了子颗粒按照晶体排列的团聚

体, 研究了各向同性压缩条件下破碎对颗粒集合体力学行为和变形特性的影响。

Potyondy 等<sup>[49]</sup>于 2004 年系统提出了颗粒黏结模型 (BPM), 采用二维、三维离散元软件 PFC 成功模拟了岩石的破碎。BPM 随后在脆性材料的开裂分析和颗粒破碎研究中得到了广泛的应用。Cheng 等<sup>[30]</sup>基于 BPM 构建可破碎团聚体, 研究了颗粒破碎对砂土临界状态的影响。Lim 等<sup>[31]</sup>基于 BPM 生成可破碎的三维团聚体模拟了道砟的单颗粒压碎试验和侧限压缩试验 (如图 2 (a), 2 (b) 所示), 数值试验结果与物理试验结果吻合较好。Lu 等<sup>[32-33]</sup>使用不可破碎的“超级颗粒” (clump) 在一定程度上模拟了颗粒形状, 并通过平行黏结将若干小颗粒与 clump 连接, 当平行黏结失效时小颗粒与 clump 分离, 以此来模拟道砟颗粒棱角的断裂 (如图 2 (c), 2 (d) 所示)。史旦达等<sup>[34]</sup>基于 BPM 构造结构相同的团聚体来模拟砂土颗粒的破碎效应。刘君等<sup>[19]</sup>采用了相同的方法进行了堆石料的双轴剪切数值试验, 模拟结果表明数值试验能够较好的再现真实颗粒集合体的颗粒破碎特性。Bolton 等<sup>[35]</sup>基于该方法进行了可碎和不可碎颗粒集合体的对比研究, 讨论了影响砂土力学行为的细观力学机理。Cil 等<sup>[23, 36]</sup>基于 BPM 生成团聚体, 研究了颗粒内裂纹的发生与扩展过程, 颗粒破碎过程与 X-ray 扫描结果相似。Alonso 等<sup>[37]</sup>通过离散元法研究了堆石的尺寸效应, 其中堆石颗粒由不规则形状的可破碎团聚体模拟。邵磊等<sup>[21]</sup>以正四面体为核按照晶胞繁衍的方式生成堆石颗粒, 研究了三轴剪切试验中堆石料破碎发展演化过程。Wang 等<sup>[38]</sup>基于 BPM 生成可破碎团聚体研究了颗粒破碎对颗粒材料剪切破坏行为的影响。姜浩等<sup>[20]</sup>基于此方法开展了不同应力路径加载下颗粒破碎对碎石料应力-应变关系及体变特性影响的研究, 研究成果表明考虑颗粒破碎的离散元方法可以较为准确的计算碎石料沿不同应力路径加载时的力学特征。

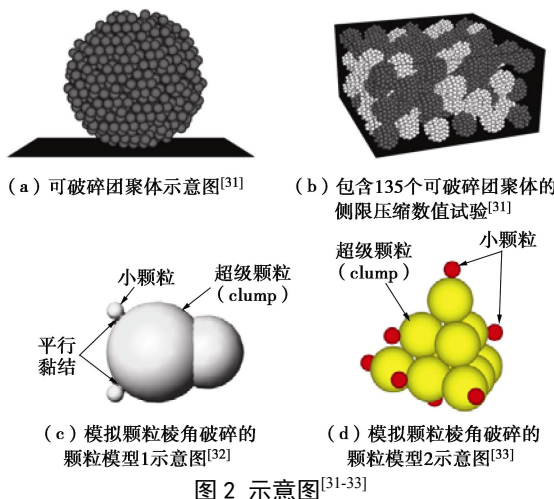


图 2 示意图<sup>[31-33]</sup>

Fig. 2 Illustration of crushable particles in DEM simulation<sup>[31-33]</sup>

综上, 基于 BPM 的颗粒破碎模拟方法能够一定程度上模拟颗粒破碎行为, 采取合适的策略能够反映颗粒强度的尺寸效应和 Weibull 分布特性<sup>[27]</sup>, 较好的再现了可碎颗粒集合体的复杂力学响应<sup>[20]</sup>, 而且该方法能够模拟复杂的颗粒形状<sup>[37]</sup>。然而, 由于每个团聚体需要包含一定数目的子颗粒, 采用该方法模拟颗粒破碎的计算成本也比较高, 因此基于 BPM 颗粒破碎模拟方法更适用于单颗粒破碎和小规模颗粒集合体的破碎研究。此外, 子颗粒不能进一步破碎, 使得该方法模拟颗粒破碎的程度是有限的。

## 1.2 基于 FRM 的颗粒破碎模拟方法

基于 FRM 的颗粒破碎模拟需要考虑两个关键问题: 碎片替换模式、颗粒破碎准则<sup>[17, 39-40, 42]</sup>。碎片替换模式指颗粒破碎后碎片的组成, 包括碎片数目、尺寸等, 颗粒破碎准则指颗粒破碎的判定条件。其颗粒破碎模拟的思路为: 首先设定颗粒破碎准则, 当颗粒达到破碎准则时删除此颗粒, 然后用特定的碎片替换模式替代原始颗粒, 从而模拟颗粒的破碎。下文将针对该方法的这两个关键问题的研究现状分别展开详细的介绍。

### (1) 碎片替换模式

Åström 等<sup>[39]</sup>提出了构建碎片替换模式的 3 个标准: ①应包含较少的碎片数目, 以避免模拟中颗粒数目上升过快, 保证多次破碎后仍具有较高的计算效率; ②碎片颗粒的布置应能模拟出破碎时局部应力突减的效果; ③碎片粒径分布应尽可能的符合实际情况。但同时也指出很难同时满足这 3 个准则。

Tsounghi 等<sup>[40]</sup>在文献[39]工作的基础上, 采用一种包含 4 种尺寸共 12 个子颗粒构成的碎片替换模式开展了侧限压缩试验的二维离散元数值模拟。Lobo-Guerrero 等<sup>[17]</sup>采用一种包含 3 种不同大小共 8 个子颗粒构成的碎片替换模式, 通过二维离散元数值模拟研究了颗粒破碎引起的铁路道渣级配变化对铁轨沉降变形的影响。Ben-Nun 等<sup>[42]</sup>除了采用文献[17]提出的碎片替换模式外, 又提出了另两种替换模式, 研究了侧限压碎情况下颗粒集合体最终的拓扑结构对自组织特性。杨贵等<sup>[47]</sup>采用文献[42]构建的碎片替换模式中的两种进行了粗粒料颗粒破碎的数值模拟研究, 研究表明建立的颗粒破碎模型能够很好地模拟粗粒料的力学响应。以上二维离散元中的研究表明了基于 FRM 颗粒破碎模拟方法在研究可碎颗粒集合体力学响应的有效性。但现实中颗粒材料处在三维环境下, 受外力作用时其力学行为响应更为复杂, 因此在三维情况下考虑颗粒破碎的研究是不可或缺的。

近些年来一些学者将基于 FRM 的颗粒破碎模拟方法推广到三维情况下。Marketos 等<sup>[41]</sup>采用了一种包

含两个尺寸, 共 8 个子颗粒的碎片替换模式模拟砂岩的开裂, 研究了压缩带的萌生和演化过程。McDowell 等<sup>[18]</sup>在原始颗粒边界内布置有一定重叠量的轴对称等粒径小颗粒构建了 3 种碎片替换模式研究了颗粒集合体侧限压缩的细观力学特性。Zhou 等<sup>[45]</sup>采用文献[18]提出的等粒径三碎片替换模式研究了中主应力对可破碎颗粒材料宏观响应的的影响。随后, Zhou 等<sup>[22]</sup>依据标准③改进了文献[45]提出的碎片替换模式, 使用 4 种不同尺寸共 27 个子颗粒构建了新的三维碎片替换模式, 并进行了可破碎颗粒集合体尺寸效应的研究。Ciantia 等<sup>[46]</sup>根据 Apollonian 排列方式构建 5 种不同的碎片替换模式开展了侧限压缩数值试验, 研究表明碎片替换模式对颗粒破碎模拟结果有较大的影响。Cil 等<sup>[24]</sup>提出一个包含 4 种尺寸共 20 个子颗粒的替换模式, 研究了颗粒破碎能量的尺寸效应。以上研究中部分碎片替换模式示意图及相关信息汇总如表 1 所示。

现有颗粒破碎替换模式的差异主要表现在 3 个方面: 碎片颗粒的数目、碎片颗粒的尺寸分布、服从质量守恒定律的策略。由于离散元法的基本单元是圆盘或圆球, 基于 FRM 模拟颗粒破碎时原始颗粒空间内的碎片替换模式总质量要小于原始颗粒的质量, 所以需要采取一定的策略来弥补损失的质量, 以服从质量守恒定律。这 3 个方面是构建碎片替换模式时必须要考虑的问题, 第 2 节中将对这 3 个方面进行详细讨论。此外, de Bono 等<sup>[50]</sup>基于 FRM 引入 clump 来模拟非球形颗粒的破碎模拟, 进行了不规则形状可碎颗粒集合体侧限压缩及超固结的压缩特性研究, 模拟试验重现了物理试验结果。这一研究说明基于 FRM 颗粒破碎模拟方法也能考虑颗粒的不规则形状, 虽然目前相关研究较少, 但相信随着该方法的普及推广, 颗粒形状等影响颗粒集合体力学行为的因素也将逐步考虑到该方法中。

### (2) 颗粒破碎准则

目前基于离散元的颗粒破碎模拟并没有一个统一的颗粒破碎准则。国内外学者在一些简化假定的前提下提出多种颗粒破碎准则。Åström 等<sup>[39]</sup>提出了两种颗粒破碎的判定准则, 一是应力判定准则, 通过设定颗粒应力的阈值, 当颗粒应力超过该阈值时颗粒发生破碎; 二是力判定准则, 通过设定颗粒最大接触力的阈值, 当颗粒最大接触力超过该阈值时颗粒发生破碎。此后研究中颗粒破碎准则基本都是在这两种准则的框架下发展的。

一般认为颗粒破碎是由于最大接触力引起的局部应力集中<sup>[51-52]</sup>, 因此一些学者采用最大接触力作为颗粒破碎的判定准则。Lobo-Guerrero 等<sup>[17, 53-54]</sup>在二维模拟中假定接触数目小于等于 3 时颗粒的受力情况可

表 1 碎片替换模式示意图及相关信息

Table 1 Information of used particle replacement modes

离散元维数		2D				
序号	1	2	3	4	5	
碎片替换模式示意图						
碎片的尺寸分布	共 12 个碎片颗粒, 4 种不同尺寸	共 8 个碎片颗粒, 3 种不同尺寸	共 3 个碎片颗粒, 相同尺寸	共 5 个碎片颗粒, 相同尺寸	共 7 个碎片颗粒, 3 种尺寸	
是否服从质量守恒, 策略	是, 后置法	否		是, 膨胀法		
参考文献	文献[40]	文献[47]		文献[42]		
离散元维数		3D				
序号	6	7	8	9	10	
碎片替换模式示意图						
碎片的尺寸分布	共 8 个碎片颗粒, 两种尺寸	共 2 个碎片, 相同尺寸	共 3 个碎片, 相同尺寸	共 4 个碎片, 相同尺寸	共 27 个碎片, 4 种尺寸	
是否服从质量守恒, 策略	否		是, 重叠法			
参考文献	文献[41]	文献[18, 44]	文献[18, 45]	文献[18]	文献[22]	
离散元维数		3D				
序号	11	12	13	14	15	
碎片替换模式示意图						
碎片的尺寸分布	共 4 个碎片, 相同尺寸	共 8 个碎片, 颗粒尺寸分布满足 Apollonian 排列	共 14 个碎片, 颗粒尺寸分布满足 Apollonian 排列	共 57 个碎片, 颗粒尺寸分布满足 Apollonian 排列	共 20 个碎片, 3 种尺寸, 满足 Apollonian 排列	
是否服从质量守恒, 策略			否			
参考文献			文献[46]		文献[24]	

以等效简化为类似巴西圆盘试验的情况 (如图 3)。基于该假定, 采用颗粒的特征拉应力  $\sigma_t = 2P_1 / \pi LD$  作为颗粒破碎的判定条件, 即  $\sigma_t > \sigma_{tmax}$ , 也即  $P_1 > \frac{1}{2} \sigma_{tmax} \pi LD$ , 其中  $P_1$  为作用力,  $L$  为单位长度,  $D$  为圆盘直径。考虑到配位数对颗粒破碎有显著影响<sup>[55-56]</sup>, Ben-Nun 等<sup>[42, 57]</sup>在其提出的力判定准则中考虑配位数的影响, 不再局限于文献[17, 53, 54]提出的配位数小于等于 3 时颗粒才会发生破碎的假定。Russell 等<sup>[58]</sup>基于物理试验提出了径向加载时球形颗粒的最大流动剪切强度分析公式, 随后 Russell 等<sup>[59]</sup>又证明该公式同样适用于颗粒集合体中接触数处于 6 到 12 的颗粒。通过这一流动剪切强度表达式可求颗粒最大接触力阈值, 据此 Ciantia 等<sup>[46]</sup>采用该破坏限制条件, 即  $k_{mob} \leq k$ , 作为三维离散元模拟中颗粒破碎的判定准则, 其

中  $k_{mob}$  和  $k$  分别为颗粒的流动强度和固有强度, 当计算所得流动强度大于固有强度时颗粒发生破碎。Cil 等<sup>[26]</sup>则根据颗粒特征强度的 3 种尺寸效应公式定义了 3 种不同的力判定标准, 研究了这 3 种力判定准则对侧限固结试验条件下颗粒集合体宏观力学行为的影响。

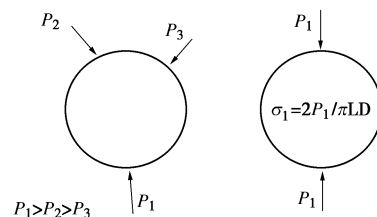


图 3 颗粒受力情况等效简化示意图<sup>[17]</sup>

Fig. 3 Idealization of induced tensile stress<sup>[17]</sup>

颗粒破碎应力判定准则是根据均匀化思想提出

的,即假定受力时颗粒内部应力分布均匀,是颗粒受力状态在整体上的考量。半径为 $R$ 的颗粒受到任意力作用时,其平均应力张量 $\bar{\sigma}_{ij} = \frac{R}{V_p} \sum_{c=1}^{n_c} n_i^{(c)} F_j^{(c)}$ ,其中 $n_c$ 是颗粒上的接触数目, $n_i^{(c)}$ 和 $F_j^{(c)}$ 分别为接触点(c)处的单位法向量沿*i*方向的分量和沿*j*方向的接触力, $V_p$ 为颗粒的体积。Tsoungui等<sup>[55]</sup>将颗粒受力情况简化为静水压力和偏应力状态(如图4),采用等效的二维Drucker-Prager准则来判定颗粒是否发生破碎;Ben-Nun等<sup>[57]</sup>求得等效力张量 $s_{ij} = \sum_{c=1}^{n_c} n_i^{(c)} F_j^{(c)}$ 作为判定准则(各符号含义同上),但实际上仍然是以颗粒的特征强度作为颗粒破碎的判别条件。颗粒集合体中颗粒间相互作用复杂,颗粒在多个接触力作用时可能会处于高静水压力、低偏应力状态,在这种状态下颗粒不易发生破碎,不适合采用平均应力来判定颗粒的破碎。为此,McDowell等<sup>[18, 44]</sup>提出使用八面体剪应力作为颗粒破碎的判定准则,并以单颗粒压碎试验得到的特征拉应力作为该准则的判定阈值。Zhou等<sup>[22, 45]</sup>、Cil等<sup>[23]</sup>则采用了带截断的Mohr-Coulomb准则作为颗粒破碎的判定准则。杨贵等<sup>[47]</sup>在文献[55, 57]工作基础上对颗粒的拉裂破坏和剪切破坏情况分别定义了破碎准则。Cil等<sup>[24]</sup>仍采用文献[18, 44]提出的八面体剪应力准则作为颗粒破碎的判定准则,根据不同的强度尺寸效应设定了3种应力阈值。表2汇总整理了上述文献中所采用的部分颗粒破碎准则,公式中符号含义详见各参考文献。

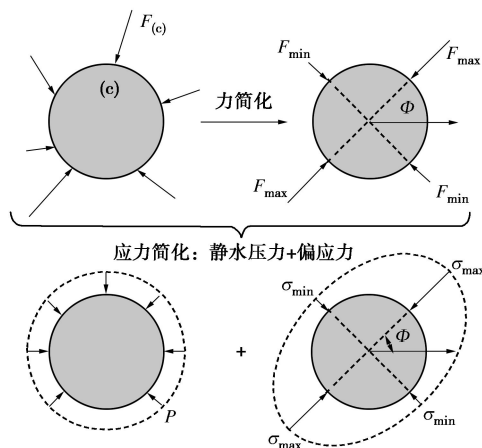


图4 颗粒受任意组合力等效简化示意图<sup>[55]</sup>

Fig. 4 Identification of one grain with binary compression<sup>[55]</sup>

现有研究中采用的判定准则,不论是力判定准则还是应力判定准则都是在特定的简化、假定前提下提出的,虽然不能完全描述颗粒复杂的破碎行为,但都能在一定程度上反映颗粒破碎的机制。de Bono等<sup>[60]</sup>指出现有研究中对破碎准则的选取并没有统一的结论,不同的破碎准则下颗粒集合体孔隙率以及级配的

演化是否正确还不清楚。为此,他们对比研究了4种不同破碎准则下颗粒集合体的侧限压缩特性,研究表明采用最大接触力做阈值的力判定准则能很好的再现物理试验结果。Russell等<sup>[59]</sup>的研究也指出颗粒破碎主要是由最大接触力超过阈值引起的,与其他较小的接触力没有直接关系。虽然Ben-Nun等<sup>[42, 57]</sup>根据Sukumaran等<sup>[61]</sup>的研究考虑了二维情况下颗粒配位数对接触力阈值的影响,但三维情况下颗粒间的接触要复杂的多,目前尚没有三维情况下配位数对力判定准则中接触力阈值影响的研究。因此,提出一套三维情况下考虑颗粒配位数影响的力判定准则是十分必要的。

综上,基于FRM的颗粒破碎模拟方法能在一定程度上反映颗粒集合体的力学响应,为对比较大规模物理试验并开展细观尺度的研究提供了有效途径,是一种可行的颗粒破碎模拟方法。然而,该模拟方法仍存在一些不足,如碎片替换模式的构建较为主观,缺少物理试验数据支撑和理论依据;有待提出一套三维情况下考虑颗粒配位数影响的力判定准则;引入复杂颗粒形状的方法仍待完善等。这些不足之处有待得到解决,是今后值得研究的问题。

## 2 碎片替换模式中一些问题的讨论

已有研究中提出了多种多样的颗粒碎片替换模式,本节将针对构建碎片替换模式时必须考虑的3个问题:碎片颗粒数目、尺寸分布、碎片替换模式质量守恒策略进行详细的讨论。

### 2.1 碎片颗粒数目

由物理试验得到的颗粒碎片数目有很大的离散性,这很大程度上取决于颗粒的岩性、形态、内部缺陷等。Takei等<sup>[62]</sup>通过单颗粒压碎试验发现玻璃圆珠通常会破为30~50个大小不等的碎片,天然石英砂破碎后碎片个数相对较少(大多小于10)。

离散元模拟中颗粒的数目和大小决定了计算时长,使用基于FRM颗粒破碎模拟方法时,随着模拟的进行颗粒总数会急剧增加,计算效率会显著降低,因此碎片替换模式中碎片颗粒的数目决定了模拟试验可进行的程度、可模拟的破碎次数。Ciantia等<sup>[46]</sup>对这一问题进行了较深入的研究,采用5种不同的碎片替换模式进行了侧限固结模拟试验,试验结果如图5所示。

图5(a)中 $d_{limit}$ 指试验中允许的最小颗粒直径, $d_{50}$ 为颗粒集合体的平均粒径,可知在同一 $d_{limit}$ 下颗粒碎片数目越多模拟耗时越长, $d_{limit}$ 取值越小耗时的差异越明显。同样,对于破碎次数的统计结果也呈现出类似的规律,如图5(b)中所示。Ciantia等<sup>[46]</sup>也指出一维固结时14碎片的替换模式能得到与57碎片

表 2 颗粒破碎准则

Table 2 Information of used particle breakage criteria

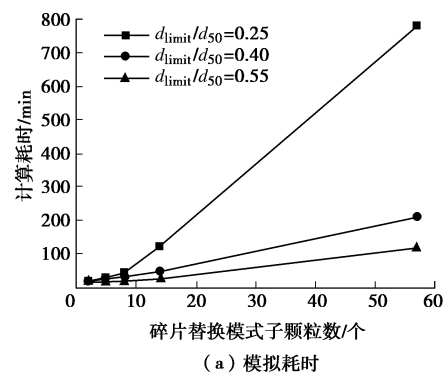
离散元维数		2D	
序号	1	2	
颗粒破碎准则	$2\tau - p \geq \sigma_{\text{crit}}(R) = \frac{K_0}{\pi} R^{\alpha-1},$ $p = (\bar{\sigma}_{\text{max}} + \bar{\sigma}_{\text{min}})/2, \quad \tau = (\bar{\sigma}_{\text{max}} - \bar{\sigma}_{\text{min}})/2,$ $\bar{\sigma}_{\text{max,min}} = \frac{\bar{\sigma}_{\text{xx}} + \bar{\sigma}_{\text{yy}}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\bar{\sigma}_{\text{xx}} - \bar{\sigma}_{\text{yy}}}{2}\right)^2 + \bar{\sigma}_{\text{xy}}\bar{\sigma}_{\text{yx}}},$ $\bar{\sigma}_{ij} = \frac{R}{V_p} \sum_{c=1}^{n_c} n_i^{(c)} F_j^{(c)}.$	$\bar{F}_n \geq F_{\text{crit}}^*,$ $\bar{F}_n = \frac{1}{N_c} \sum_{c=1}^{n_c} F_n^{(c)}, \quad F_{\text{crit}}^* = d\sigma_{\text{fm}}f_{\text{w}}f_{\text{D}}f_{\text{CN}},$ $f_{\text{w}} = f_{\text{w}}(P) = \left(\frac{d}{d_{\text{M}}}\right)^{-\frac{2}{m}} \ln P^{-\frac{1}{m}}, \quad f_{\text{D}} = \frac{D/d}{D/d+1},$ $f_{\text{CN}} = (C-1)e^{(D/d)(C-2)(C-3)/4C}.$	
判定准则类型	应力判定准则	力判定准则	
参考文献	文献[42, 55]	文献[42, 57]	
离散元维数		3D	
序号	3	4	
颗粒破碎准则	$q \geq q_{\text{crit}},$ $q = \frac{1}{3}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2},$ $q_0 = 0.9 \frac{F}{d_0^2}, \quad q_{\text{crit}} = q_0 d^{-\frac{3}{m}}.$	$\sigma_{ij} = \frac{1}{V^p} \sum_{c \in N_c} f_j^c d_i^c, \quad f^t = \sigma_3 - \sigma_1,$ $f^s = \sigma_1 - \sigma_3 \frac{1 + \sin(\varphi)}{1 - \sin(\varphi)} + 2c \sqrt{\frac{1 + \sin(\varphi)}{1 - \sin(\varphi)}},$ $c = \frac{\sigma_t}{\tan(\varphi)}, \quad F = \eta d^\lambda, \quad \sigma_a^t = \sigma_0 \left(\frac{d_0}{d}\right)^{2-\lambda}.$	
判定准则类型	应力判定准则	应力判定准则	
参考文献	文献[18, 44]	文献[22, 45]	
离散元维数		3D	
序号	5	6	
颗粒破碎准则	$k_{\text{mob}} \leq k,$ $k = \frac{1+\chi}{\sqrt{3}}  \sigma_c , \quad \chi = \frac{ \sigma_c }{\sigma_1} - 1, \quad k_{\text{mob}} = f(\chi, \nu) \frac{F}{\pi R^2 \sin^2 \theta_0},$ $f(\chi, \nu) = \frac{\sqrt{3}(1+\chi)^2}{\chi} \times \frac{\left(\frac{3}{32} + \frac{\sqrt{2}}{24} + \left(\frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{4}\right)\nu + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\nu^2\right)}{(2-\sqrt{2})(1+\nu)},$ $F \leq \frac{k}{f(\chi, \nu)} \pi R^2 \sin^2 \theta_0 = \sigma_{\text{lim}} A_p = F_{\text{lim}}.$	同 3, 颗粒强度除了采用 3 中服从 Weibull 理论的尺寸效应公式外, 还采用了另两种: ① $\bar{\sigma}_f = \bar{\sigma}_0 \left(\frac{d}{d_0}\right)^{-1/2}$ , ② $\bar{\sigma}_f = \bar{\sigma}_0 \left(\frac{d}{d_0}\right)^{-3/2}$ .	
判定准则类型	力判定准则	应力判定准则	
参考文献	文献[46]	文献[24]	

的替换模式几乎相同的力学响应, 考虑到计算效率, 认为表 1 中序号 13 的碎片替换模式比较合适。因此在进行模拟时不仅需要以模拟的精细程度作为选取依据, 而且还要考虑数值模拟的效率。

### 2.2 碎片颗粒尺寸分布

现有碎片替换模式根据碎片颗粒尺寸分布可分为包含相同尺寸碎片和不同尺寸碎片的替换模型 (见表 1), 这些碎片替换模式中碎片尺寸分布大多是根据颗粒排列的几何关系确定的。物理试验表明颗粒破碎后碎片有大有小<sup>[17, 40, 54]</sup>, 因此由不同尺寸碎片构建的替换模式更能反映真实情况。除了 Brosh 等<sup>[43]</sup>提出了一种考虑真实情况下颗粒碎片分布的碎片替代模式构建方法外, 目前研究中很少有依据颗粒真实破碎情况概化出碎片的粒径分布。虽然现有的碎片替换模型能在一定程度上模拟颗粒破碎<sup>[18, 22, 24, 42, 45]</sup>, 但考虑到颗粒

级配对集体力学特性有着不可忽略的影响, 因此依据颗粒真实破碎情况构建具有不同尺寸碎片的替换模式将是进行精细模拟研究的需求。然而, 真实的颗粒破碎后碎片具有较宽的尺寸分布、较多的数目<sup>[62]</sup>, 因此如何取定碎片颗粒的数目、概化碎片颗粒的尺寸分布是构建精细碎片替换模式需要解决的问题。



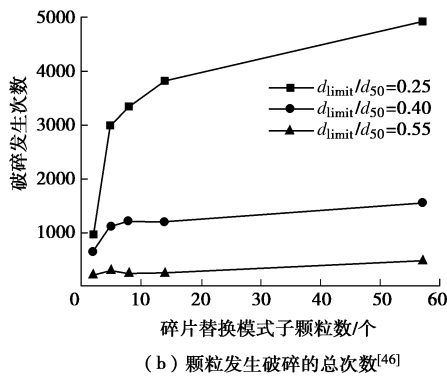


图5 不同颗粒破碎替换模式固结试验结果<sup>[46]</sup>

Fig. 5 Results of numerical oedometric compression tests with different fragment replacement modes<sup>[46]</sup>

### 2.3 碎片替换模式质量守恒策略

离散元中基本颗粒为圆盘或圆球，这使得碎片颗粒不可能填满原始颗粒所占空间，碎片替换模式中颗粒的质量小于原始颗粒质量，从而导致替换后系统质量不守恒。为满足破碎过程中系统质量守恒，国内外学者提出了几种策略，如在原始颗粒周边空隙放置小颗粒<sup>[40]</sup>、替换后膨胀碎片颗粒的尺寸<sup>[42]</sup>、碎片颗粒的预先重叠<sup>[18, 22, 43, 45]</sup>，增加子颗粒密度<sup>[47]</sup>等。本文分别简称为后置法、膨胀法、重叠法、变密度法。

后置法除了能满足质量守恒外，也能在一定程度上反映更真实的颗粒破碎情况，即真实颗粒破碎会产生很多的小尺寸碎片。但这种方法等于是增加了颗粒替换模式中碎片颗粒的数目，违背了标准①，随着模拟的进行，计算效率将显著降低。此外，这种方法需要额外加入新的检索判断以放置小颗粒，也增加了计算成本。

膨胀法避免了增加小颗粒和额外检索的工作，能保证模拟计算的效率。但膨胀会造成一定程度的局部应力突增，违背了标准②；Ben-Nun等<sup>[42]</sup>在其研究中指出模拟中颗粒的膨胀发生在一瞬间，时间远小于颗粒碎片的重排列时间，对整体的影响可以忽略不计，因此认为这种修正质量的方法有较好的实用性。

重叠法与膨胀法类似，可以看做是在原始颗粒所占空间内碎片颗粒的预先膨胀，同样也避免了增加小颗粒和额外检索的工作。颗粒的重叠会使颗粒间产生较大的接触反力，替换后预先重叠的碎片颗粒会以较大的加速度分离，同样会造成局部应力的突增。McDowell等<sup>[18]</sup>采用这种方法来满足质量守恒定律，并认为由碎片颗粒重叠造成的碎片颗粒分离现象与单颗粒压碎试验中颗粒破碎时碎片分离现象相似，也指出原始颗粒在一瞬间被替换，碎片颗粒在随后极短时间内（相对于整个试验时间）的重排足以耗散由叠加产生的能量，对系统的稳定影响极小。与膨胀法相比，

该方法是在原始颗粒空间内等效的膨胀，相同的碎片尺寸分布时该方法产生的重叠量更大，会产生更大的局部应力突增。Brosh等<sup>[43]</sup>依颗粒级配曲线选取碎片颗粒尺寸，通过碎片颗粒的重叠来满足质量守恒，为了消除叠加产生的局部应力的突增现象，提出假定尺寸（temporary diameter,  $d_t$ ）和实际尺寸（physical diameter,  $d_p$ ）概念，且有  $d_t < d_p$ ，通过设定碎片颗粒的假定尺寸提出了一种碎片颗粒间的接触策略。这种方法使颗粒碎片替换模式服从质量守恒的同时，避免了局部应力的突增。虽然Brosh等<sup>[43]</sup>在研究中没有提及该方法的计算效率，但文中指出这种接触策略需要在每个计算步对碎片颗粒间的相互位置进行判定。不难想象额外增加的检索判断会削弱模拟的效率，尤其在较大规模的三维离散元模拟中将更为明显。

变密度法避免了引入额外小颗粒和局部应力突增问题，但会产生额外的孔隙率，对计算结果会有不可避免的影响。此外，增加碎片颗粒的密度相当于改变了颗粒的材料属性，这对计算结果是否有影响目前没有相关研究。

综上，基于FRM考虑颗粒破碎的模拟研究中需要解决碎片替换模式质量不守恒的问题。以上四种策略均能保证破碎过程中系统质量守恒，但不同策略缺点与优点共存，概括来说主要是局部应力的突增和模拟效率的问题。一般认为局部应力的突增对系统的影响极小，虽然一些方法不会引起或能消除局部应力的突增，但增加了额外的检索判断，降低了模拟效率。因此，模拟中采用何种方法需要根据研究目的有所侧重，综合考虑研究的目的、所需精细程度以及计算效率等。

### 3 总结与展望

颗粒破碎对颗粒集合体的力学响应有显著的影响。由于室内试验手段的限制，基于离散元的模拟研究仍是连系宏观与细观研究的主要手段，在今后仍会有长足的发展。颗粒破碎的模拟是进行此类模拟研究的前提，本文对离散元中颗粒破碎的模拟方法进行介绍，梳理归纳了研究现状，并对相关问题进行了讨论，为今后离散元中颗粒破碎模拟方法的着重点做出展望。总结和下一步的研究着重点主要有：

(1)目前基于离散元法的颗粒破碎模拟方法主要有两种，即基于颗粒黏结模型（BPM）和基于颗粒碎片替代法（FRM）的颗粒破碎模拟方法。这两种方法有着各自的优缺点：基于BPM的颗粒破碎模拟方法能在一定程度上模拟复杂形状颗粒的破碎，但该方法颗粒破碎的程度有限且只适用小规模的模拟计算。基

于 FRM 的颗粒破碎模拟方法能结合室内试验进行较大规模的数值模拟研究, 但需要预设碎片替换模式和破碎判定准则。

(2) 现有碎片替换模式的主要差别在于碎片颗粒的数目、尺寸分布以及服从质量守恒定律的策略。目前碎片替换模式的构建较为主观, 缺少物理试验数据支撑和理论依据, 有待通过研究解决。应力判定准则和力判定准则是目前研究中经常采用的两类颗粒破碎准则。颗粒集合体中颗粒的受力环境决定了颗粒破碎行为的复杂性, 提出合理的颗粒破碎准则是使用碎片替换模式进行相关模拟研究时要解决的主要问题。在当前研究基础上, 提出一套适用于三维情况下考虑颗粒配位数影响的力判定准则十分必要。

(3) 构建碎片替换模式时考虑真实颗粒破碎后碎片的尺寸分布, 模拟更符合实际的颗粒破碎情况有利于开展精细模拟研究。真实颗粒破碎会产生较宽尺寸分布以及数目较多的碎片, 如何取定碎片颗粒数目、概化碎片颗粒的尺寸分布是今后进行精细模拟需要解决的问题。

(4) 已有研究中一般使用后置法、膨胀法、重叠法、变密度法来满足碎片替换模式的质量守恒。不同的方法对模拟有不同的影响, 主要是局部应力的突增(膨胀法、重叠法)和模拟计算效率降低(后置法)两个问题。在进行相关模拟研究时需要根据研究的目的、精细程度以及计算效率来选择合适的方法。在现有方法的基础上提出更合理高效的解决方法也是后续模拟研究中值得研究的问题。

#### 参考文献:

- [1] HARDIN B O. Crushing of soil particles[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1985, **111**(10): 1177 - 1192.
- [2] BOLTON M D. The strength and dilatancy of sands[J]. Géotechnique, 1986, **36**(1): 65 - 78.
- [3] 郭熙灵, 胡 辉, 包承纲. 堆石料颗粒破碎对剪胀性及抗剪强度的影响[J]. 岩土工程学报, 1997, **19**(3): 86 - 91. (GUO Xi-ling, HU Hui, BAO Cheng-gang. Experimental studies of the effects of grain breakage on the dilatancy and shear strength of rock fill[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1997, **19**(3): 86 - 91. (in Chinese))
- [4] 汪 稔, 孙吉主. 钙质砂不排水性状的损伤-滑移耦合作用分析[J]. 水利学报, 2002, **7**(7): 75 - 78. (WANG Ren, SUN Ji-zhu. Damage-slide coupled interaction behavior of undrained calcareous sand[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2002, **7**(7): 75 - 78. (in Chinese))
- [5] 刘汉龙, 秦红玉, 高玉峰, 等. 堆石粗粒料颗粒破碎试验研究[J]. 岩土力学, 2005, **26**(4): 562 - 566. (LIU Han-long, QIN Hong-yu, GAO Yu-feng, et al. Experimental study on particle breakage of rockfill and coarse aggregates[J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, **26**(4): 562 - 566. (in Chinese))
- [6] 魏 松, 朱俊高. 粗粒料三轴湿化颗粒破碎试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, **25**(6): 1252 - 1258. (WEI Song, ZHU Jun-gao. Study on wetting breakage of coarse-grained materials in triaxial test[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2006, **25**(6): 1252 - 1258. (in Chinese))
- [7] 井国庆, 封 坤, 高 亮, 等. 循环荷载作用下道砟破碎老化的离散元仿真[J]. 西南交通大学学报, 2012, **47**(2): 187 - 191. (JING Guo-qing, FENG Kun, GAO Liang, et al. DEM simulation of ballast degradation and breakage under cyclic loading[J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2012, **47**(2): 187 - 191. (in Chinese))
- [8] INDRARATNA B, LACKENBY J, CHRISTIE D. Effect of confining pressure on the degradation of ballast under cyclic loading[J]. Géotechnique, 2005, **55**(4): 325 - 328.
- [9] 陈生水, 霍家平, 章为民. “5.12”汶川地震对紫坪铺混凝土面板坝的影响及原因分析[J]. 岩土工程学报, 2008, **30**(6): 795 - 801. (CHEN Sheng-shui, HUO Jia-ping, ZHANG Wei-min. Analysis of effects of “5.12” Wenchuan Earthquake on Zipingpu Concrete Face Rock-fill Dam[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, **30**(6): 795 - 801. (in Chinese))
- [10] COOP M R, LEE I K. The behaviour of granular soils at elevated stresses: predictive soil mechanics[C]// Proceedings of Wroth Memorial Symposium. London, 1993: 186 - 198.
- [11] MCDOWELL G R, BOLTON M D. On the micromechanics of crushable aggregates[J]. Géotechnique, 1998, **48**(5): 667 - 679.
- [12] 张家铭, 汪 稔, 张阳明, 等. 土体颗粒破碎研究进展[J]. 岩土力学, 2003, **24**(增刊 1): 661 - 665. (ZHANG Jia-ming, WANG Ren, ZHANG Yang-ming, et al. Advance in studies of soil grain crush[J]. Rock and Soil Mechanics, 2003, **24**(S1): 661 - 665. (in Chinese))
- [13] 刘汉龙, 孙逸飞, 杨 贵, 等. 粗粒料颗粒破碎特性研究述评[J]. 河海大学学报: 自然科学版, 2012, **40**(4): 361 - 369. (LIU Han-long, SUN Yi-fei, YANG Gui, et al. A review of particle breakage characteristics of coarse aggregates[J]. Journal of Hohai University: Natural Sciences, 2012, **40**(4): 361 - 369. (in Chinese))
- [14] KH A B, MIRGHASEMI A A, MOHAMMADI S. Numerical



- simulation of particle breakage of angular particles using combined DEM and FEM[J]. *Powder Technology*, 2011, 205(1): 15 - 29.
- [15] MA G, ZHOU W, CHANG X L, et al. A hybrid approach for modeling of breakable granular materials using combined finite-discrete element method[J]. *Granular Matter*, 2016, 18(1): 1 - 17.
- [16] MA G, ZHOU W, CHANG X L. Modeling the particle breakage of rockfill materials with the cohesive crack model[J]. *Computers and Geotechnics*, 2014, 61: 132 - 143.
- [17] LOBO-GUERRERO S, VALLEJO L E. Discrete element method analysis of railtrack ballast degradation during cyclic loading[J]. *Granular Matter*, 2006, 8(3/4): 195 - 204.
- [18] MCDOWELL G R, DE BONO J P. On the micro mechanics of one-dimensional normal compression[J]. *Géotechnique*, 2013, 63(11): 895 - 908.
- [19] 刘 君, 刘福海, 孔宪京. 考虑破碎的堆石料颗粒流数值模拟[J]. *岩土力学*, 2008, 29(增刊): 107 - 112. (LIU Jun, LIU Fu-hai, KONG Xian-jing. Particle flow code numerical simulation of particle breakage of rockfill[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2008, 29(S0): 107 - 112. (in Chinese))
- [20] 姜 浩, 徐 明. 碎石料应力路径大型三轴试验的离散元模拟研究[J]. *工程力学*, 2014, 31(10): 151 - 157. (JIANG Hao, XU Ming. Study of stress-path-dependent behavior of rockfills using discrete element method[J]. *Engineering Mechanics*, 2014, 31(10): 151 - 157. (in Chinese))
- [21] 邵 磊, 迟世春, 张 勇, 等. 基于颗粒流的堆石料三轴剪切试验研究[J]. *岩土力学*, 2013, 34(3): 711 - 720. (SHAO Lei, CHI Shi-chun, ZHANG Yong, et al. Study of triaxial shear tests for rockfill based on particle flow code[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2013, 34(3): 711 - 720. (in Chinese))
- [22] ZHOU W, YANG L, MA G, et al. DEM analysis of the size effects on the behavior of crushable granular materials[J]. *Granular Matter*, 2016, 18(3): 1 - 11.
- [23] CIL M B, ALSHIBLI K A. 3D evolution of sand fracture under 1D compression[J]. *Géotechnique*, 2014, 64(5): 351 - 364.
- [24] CIL M B, BUSCARNERA G. DEM assessment of scaling laws capturing the grain size dependence of yielding in granular soils[J]. *Granular Matter*, 2016, 18(3): 1 - 15.
- [25] DRUCKREY A M, ALSHIBLI K A. 3D finite element modeling of sand particle fracture based on in situ X - Ray synchrotron imaging[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2016, 40(1): 105 - 116.
- [26] 罗 滔, OOI E T, CHAN A H C, 等. 一种模拟堆石料颗粒破碎的离散元-比例边界有限元结合法[J]. *岩土力学*, 2017(5): 883 - 892. (LUO Tao, OOI E T, CHAN A H C, et al. A combined DEM-SBFEM for particle breakage modelling of rock-fill materials[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2017(5): 883 - 892. (in Chinese))
- [27] MCDOWELL G R, HARIRECHE O. Discrete element modelling of soil particle fracture[J]. *Géotechnique*, 2002, 52(2): 131 - 136.
- [28] MCDOWELL G R, HARIRECHE O. Discrete element modelling of yielding and normal compression of sand[J]. *Géotechnique*, 2002, 52(4): 299 - 304.
- [29] CHENG Y P, NAKATA Y, BOLTON M D. Discrete element simulation of crushable soil[J]. *Géotechnique*, 2003, 53(7): 633 - 642.
- [30] CHENG Y P, BOLTON M D, NAKATA Y. Grain crushing and critical states observed in DEM simulations[C]// *Proceedings of the 5th International Conference on Micromechanics of Granular Media*. Stuttgart, 2005, 2: 1393 - 1397.
- [31] LIM W L, MCDOWELL G R. Discrete element modelling of railway ballast[J]. *Granular Matter*, 2005, 7(1): 19 - 29.
- [32] LU M, MCDOWELL G R. Discrete element modelling of ballast abrasion[J]. *Géotechnique*, 2006, 56(9): 651 - 655.
- [33] LU M, MCDOWELL G R. Discrete element modelling of railway ballast under triaxial conditions[J]. *Geomechanics and Geoengineering: An International Journal*, 2008, 3(4): 257 - 270.
- [34] 史旦达, 周 健, 贾敏才, 等. 考虑颗粒破碎的砂土高应力一维压缩特性颗粒流模拟[J]. *岩土工程学报*, 2007, 29(5): 736 - 742. (SHI Dan-da, ZHOU Jian, JIA Min-cai, et al. Numerical simulations of particle breakage property of sand under high pressure 1D compression condition by use of particle flow code[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2007, 29(5): 736 - 742. (in Chinese))
- [35] BOLTON M D, NAKATA Y, CHENG Y P. Micro-and macro-mechanical behaviour of DEM crushable materials[J]. *Géotechnique*, 2008, 58(6): 471 - 480.
- [36] CIL M B, ALSHIBLI K A. 3D assessment of fracture of sand particles using discrete element method[J]. *Géotechnique Letters*, 2012, 2(3): 161 - 166.
- [37] ALONSO E E, TAPIAS M, GILI J. Scale effects in rockfill behaviour[J]. *Géotechnique Letters*, 2012, 2(3): 155 - 160.

- [38] WANG J, YAN H. On the role of particle breakage in the shear failure behavior of granular soils by DEM[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2013, **37**(8): 832 – 854.
- [39] ÅSTRÖM J A, HERRMANN H J. Fragmentation of grains in a two-dimensional packing[J]. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 1998, **5**(3): 551 – 554.
- [40] TSOUNGUI O, VALLET D, CHARMET J C. Numerical model of crushing of grains inside two-dimensional granular materials[J]. *Powder Technology*, 1999, **105**(1): 190 – 198.
- [41] MARKETOS G, BOLTON M D. Compaction bands simulated in discrete element models[J]. *Journal of Structural Geology*, 2009, **31**(5): 479 – 490.
- [42] BEN-NUN O, EINAV I. The role of self-organization during confined comminution of granular materials[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2010, **368**(1910): 231 – 247.
- [43] BROSH T, KALMAN H, LEVY A. Fragments spawning and interaction models for DEM breakage simulation[J]. *Granular Matter*, 2011, **13**(6): 765 – 776.
- [44] DE BONO J P, MCDOWELL G R. DEM of triaxial tests on crushable sand[J]. *Granular Matter*, 2014, **16**(4): 551 – 562.
- [45] ZHOU W, YANG L, MA G, et al. Macro–micro responses of crushable granular materials in simulated true triaxial tests[J]. *Granular Matter*, 2015, **17**(4): 497 – 509.
- [46] CIANTIA M, ARROYO ALVAREZ DE TOLEDO M, CALVETTI F, et al. An approach to enhance efficiency of DEM modelling of soils with crushable grains[J]. *Géotechnique*, 2015, **65**(2): 91 – 110.
- [47] 杨 贵, 许建宝, 刘昆林. 粗粒料颗粒破碎数值模拟研究[J]. *岩土力学*, 2015, **36**(11): 3301 – 3306. (YANG Gui, XU Jian-bao, LIU Kun-lin. Numerical simulation of particle breakage of coarse aggregates[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2015, **36**(11): 3301 – 3306. (in Chinese))
- [48] THORNTON C, YIN K K, ADAMS M J. Numerical simulation of the impact fracture and fragmentation of agglomerates[J]. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 1996, **29**(2): 424 – 435.
- [49] POTYONDY D O, CUNDALL P A. A bonded-particle model for rock[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2004, **41**(8): 1329 – 1364.
- [50] DE BONO J P, MCDOWELL G R. Investigating the effects of particle shape on normal compression and over consolidation using DEM[J]. *Granular Matter*, 2016, **18**(3): 1 – 10.
- [51] CLARKE D R, FABER K T. Fracture of ceramics and glasses[J]. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 1987, **48**(11): 1115 – 1157.
- [52] LI Y S, DUXBURY P M. From moduli scaling to breakdown scaling: A moment-spectrum analysis[J]. *Physical Review B*, 1989, **40**(7): 4889.
- [53] LOBO-GUERRERO S, VALLEJO L E. Analysis of crushing of granular material under isotropic and biaxial stress conditions[J]. *Soils and Foundations*, 2005, **45**(4): 79 – 87.
- [54] LOBO-GUERRERO S, VALLEJO L E. Crushing a weak granular material: experimental numerical analyses[J]. *Géotechnique*, 2005, **55**(3): 245 – 249.
- [55] TSOUNGUI O, VALLET D, CHARMET J C. Numerical model of crushing of grains inside two-dimensional granular materials[J]. *Powder Technology*, 1999, **105**(1): 190 – 198.
- [56] NAKATA Y, HYODO M, HYDE A F L, et al. Microscopic particle crushing of sand subjected to high pressure one-dimensional compression[J]. *Soils and Foundations*, 2001, **41**(1): 69 – 82.
- [57] BEN-NUN O, EINAV I. A refined DEM study of grain size reduction in uniaxial compression[C]// *Proceedings of the 12th International Conference of the International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics (IACMAG)*. Goa, 2008: 702 – 708.
- [58] RUSSELL A R, WOOD D M. Point load tests and strength measurements for brittle spheres[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2009, **46**(2): 272 – 280.
- [59] RUSSELL A R, WOOD D M, KIKUMOTO M. Crushing of particles in idealised granular assemblies[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2009, **57**(8): 1293 – 1313.
- [60] DE BONO J P, MCDOWELL G R. Particle breakage criteria in discrete element modelling[J]. *Géotechnique*, 2016. DOI: 10.1680/jgeot.15.P.280
- [61] SUKUMARAN B, EINAV I, DYSKIN A V. Qualitative assessment of the influence of coordination number on crushing strength using DEM[C]// *Proceeding of the Fifth World Congress on Particle Technology*. Florida, 2006.
- [62] TAKEI M, KUSAKABE O, HAYASHI T. Time-dependent behavior of crushable materials in one-dimensional compression tests[J]. *Soils and Foundations*, 2001, **41**(1): 97 – 121.