Krzysztof Piasecki
Wanda Ronka-Chmielowiec

Matematyka finansowa

C.H.BECK

PODRĘCZNIK REKOMENDOWANY PRZEZ KOMITET NAUK O FINANSACH PAN

Matematyka finansowa

F I N A N S E

Krzysztof Piasecki
Wanda Ronka-Chmielowiec

Matematyka finansowa

Wydawnictwo C.H. Beck
Warszawa 2011

Wydawca: Dorota Ostrowska-Furmanek
Redakcja merytoryczna: Dorota Ostrowska-Furmanek
Recenzent: prof. dr hab. Edward Smaga

Projekt okładki i stron tytułowych: GRAFOS
Ilustracja na okładce: Jiri Moucka/iStockphoto.com

Seria: Finanse

Podręcznik rekomendowany przez
Komitet Nauk o Finansach PAN

UWAGA !!!
KOPIOWANIE
ZABIJA
KSIĄŻKĘ

© **Wydawnictwo C.H. Beck 2011**

Wydawnictwo C.H. Beck Sp. z o.o.
ul. Bonifraterska 17, 00-203 Warszawa

Skład i łamanie: GRAFOS
Druk i oprawa: P.W.P. Interdruk, Warszawa

ISBN 978-83-255-3069-3
ISBN e-book 978-83-255-3070-9

Spis treści

Przedmowa 9

Przewodnik dla studentów 15

1. Zmienne matematyki finansowej 19
1.1. Przesłanki procesu aprecjacji kapitału 19
1.2. Reprezentacja płatności 22
1.3. Rachunek czasu 23
1.4. Stopy procentowe 28
1.5. Struktura bazowej stopy procentowej 38
1.6. Struktury terminowe 40
1.7. Zadania 42

2. Wartość przyszła 46
2.1. Oprocentowanie proste 48
2.2. Oprocentowanie składane 50
2.3. Wartość skapitalizowana z dołu 51
2.4. Wartość skapitalizowana z góry 60
2.5. Kapitalizacja ciągła 66
2.6. Zadania 69

3. Wartość bieżąca 75
3.1. Dyskonto proste rzeczywiste 76
3.2. Dyskonto składane 79
3.3. Dyskonto składane handlowe 82
3.4. Dyskonto ciągłe 84
3.5. Dyskonto proste handlowe 86
3.6. Zadania 89

4. Podstawy matematyki finansowej w środowisku zróżnicowanej ceny pieniądza 92
4.1. Nieregularna struktura terminowa *forward* 92
4.2. Wartość przyszła 97
4.3. Wartość bieżąca 101
4.4. Struktura terminowa *spot* 104
4.5. Zadania 107

5. Wartość bieżąca netto . . . 110
5.1. Reprezentacja inwestycji finansowej . . . 111
5.2. Wartość bieżąca netto – dyskonto składane . . . 118
5.2.1. Przypadek nieregularnej struktury terminowej *forward* . . . 121
5.2.2. Przypadek regularnej struktury terminowej *forward* . . . 123
5.2.3. Przypadek bazowej stopy procentowej . . . 125
5.3. Wartość bieżąca netto – dyskonto ciągłe . . . 126
5.4. Zmienność wartości bieżącej netto . . . 130
5.5. Zadania . . . 137

6. Rachunek rent . . . 141
6.1. Klasyfikacja rent . . . 142
6.2. Renty proste . . . 145
6.3. Stałe renty proste . . . 147
6.4. Zmienne renty proste . . . 154
6.4.1. Renta arytmetyczna . . . 154
6.4.2. Renta geometryczna . . . 159
6.4.3. Renta seriami stała . . . 163
6.4.4. Renta pseudoarytmetyczna . . . 163
6.4.5. Renta pseudogeometryczna . . . 168
6.5. Renty uogólnione . . . 173
6.5.1. Renta w podokresach . . . 176
6.5.2. Renta w nadokresach . . . 177
6.6. Zadania . . . 178

7. Rachunek kredytów . . . 184
7.1. Wycena długu . . . 186
7.2. Równomierne plany spłaty długu . . . 194
7.2.1. Kredyty ze stałą ratą umorzeniową . . . 197
7.2.2. Kredyty ze stałą ratą kapitałową . . . 199
7.3. Nierównomierne plany spłaty długu . . . 201
7.4. Koszt kredytu . . . 205
7.4.1. Księgowy koszt kredytu . . . 206
7.4.2. Rzeczywista roczna stopa oprocentowania . . . 209
7.5. Zadania . . . 213

8. Rachunek obligacji . . . 222
8.1. Obligacje stałokuponowe . . . 223
8.2. Obligacje bez arkusza kuponowego . . . 229
8.3. Zadania . . . 233

9. Dynamiczna ocena projektów inwestycyjnych . . . 238
9.1. Ocena projektu inwestycyjnego . . . 239
9.2. Porównywanie pary projektów inwestycyjnych . . . 254
9.2.1. Przypadek równoważnych wydatków i identycznych momentów rozliczenia . . . 256
9.2.2. Przypadek równoważnych wydatków i różnych momentów rozliczenia . . . 257
9.2.3. Przypadek nierównoważnych wydatków i identycznych momentów rozliczenia . . . 260
9.2.4. Przypadek nierównoważnych wydatków i różnych momentów rozliczenia . . . 262
9.3. Projekty optymalne . . . 262

9.3.1. Porównania wielokryterialne 264
9.3.2. Metoda PROMETHEE. 267
9.4. Zadania 271

10. Składki w ubezpieczeniach na życie 276
10.1. Wprowadzenie 276
10.2. Czynniki wpływające na składkę netto w ubezpieczeniach na życie 277
10.3. Ryzyko ubezpieczeniowe w ubezpieczeniach na życie 278
10.3.1. Modele czasu trwania życia 279
10.3.2. Konstrukcja tablic trwania życia 282
10.4. Metody kalkulacji jednorazowej składki netto w podstawowych typach ubezpieczeń na życie 287
10.4.1. Kalkulacja jednorazowej składki netto dla ubezpieczeń płatnych w momencie śmierci ubezpieczonego 287
10.4.2. Kalkulacja jednorazowej składki netto dla ubezpieczeń płatnych w końcu roku śmierci ubezpieczonego 293
10.4.3. Zastosowanie liczb komutacyjnych do wyznaczenia jednorazowej składki netto 298
10.5. Metody kalkulacji okresowej składki netto w ubezpieczeniach na życie . . . 301
10.5.1. Kalkulacja dyskretnej okresowej składki netto 301
10.5.2. Zastosowanie liczb komutacyjnych do wyznaczania okresowej składki netto 303
10.6. Zadania 306

Dodatki 309
A. Metody wyznaczania rozkładu oprocentowania 309
B. Aktuarialny rachunek rent jednostkowych 316
C. Dowód jednoznaczności metod wyceny długu 321
D. Tablice aktuarialne 325

Bibliografia 337

Indeks 339

Przedmowa

Przedstawiam Państwu podręcznik zatytułowany *Matematyka finansowa*. Zazwyczaj bywa tak, że tytuł podręcznika określa zakres merytoryczny prezentowanych w nim treści. W przypadku terminu „matematyka finansowa" sytuacja jednak jest bardziej złożona. W języku polskim, w ciągu ostatniego dwudziestolecia, zakres merytoryczny tego pojęcia ewoluował. Spostrzeżenie to odnosi się zarówno do oryginalnych opracowań polskich autorów, jak i do dzieł, głównie anglojęzycznych, tłumaczonych na język polski. Pierwotnie termin „matematyka finansowa" był identyfikowany z modelami oprocentowania kapitału. Takiemu zakresowi tematycznemu z grubsza odpowiadały podręczniki: [Dobija, Smaga, 1995][1], [Smaga, 1999], [Sobczyk, 2001][2], [Chrzan, 2001], [Ronka-Chmielowiec W., Kuziak K., 2001], [Podgórska, Klimkowska, 2005][3]. W chwili obecnej ten obszar wiedzy stanowi jedynie jeden z działów matematyki finansowej, nazywany teorią procentu [Chrzan, 2001; Luenberger, 2003] lub arytmetyką finansową [Smaga, 1999; Piasecki, 2005].

Arytmetyka finansowa stanowi podstawę do ogólnej teorii narzędzi finansowych o zdeterminowanych przepływach finansowych. Dotyczy to między innymi teorii portfeli immunizowanych lub teorii krzywych terminowych. W polskim piśmiennictwie obszerne omówienie tych teorii można znaleźć w: [Piasecki, 2007b]. Od początku minionego stulecia zaczęła rozwijać się teoria narzędzi finansowych o losowych przyszłych przepływach finansowych. W błyskotliwy

[1] Podręcznik zawiera również elementy matematyki ubezpieczeniowej.

[2] Podręcznik zawiera również elementy obliczeń z zakresu finansów przedsiębiorstw.

[3] Podręcznik zawiera również elementarne podstawy teorii instrumentów pochodnych.

sposób rozwinęły się tutaj przede wszystkim matematyka aktuarialna, zawierająca w sobie arytmetykę finansową i poszerzona o teorię portfelową, teorię martyngałową i teorię instrumentów pochodnych. Jak się wydaje, teoria instrumentów finansowych o losowych przepływach finansowych stanowi w chwili obecnej dominującą część matematyki finansowej W polskim piśmiennictwie obszerne omówienie tych teorii można znaleźć w podręcznikach: [Jakubowski i inni, 2003] oraz [Pliska, 2005]. Do elementów tej teorii nawiązują też Podgórska i Klimkowska [2005] oraz Piasecki [2007b]. Omawiając te rozszerzone pojęcia matematyki finansowej, świadomie wymieniłem te pozycje literatury, które zawierają pełny wykład arytmetyki finansowej i w tytule mają słowa „matematyka finansowa". W moim mniemaniu właśnie one odzwierciedlają nasze rozumienie zakresu merytorycznego tego terminu. Warto tutaj dodać, że wszystkie wspomniane teorie są również obszernie omówione w bogatej literaturze poświęconej teorii i praktyce inwestowania.

Reasumując, zakres merytoryczny podręcznika *Matematyka finansowa* obejmuje arytmetykę finansową i jest poszerzony o problematykę składki w ubezpieczeniach na życie. Skąd taki wybór?

O kształcie merytorycznym książki zadecydowała jej geneza. Jest ona wydana przez Wydawnictwo C.H. Beck w serii Finanse, podserii Podręczniki Rekomendowane przez Komitet Nauk o Finansach. Komitet ten określił szereg warunków stawianych rekomendowanym przez siebie podręcznikom. Jednym z takich wymogów było jednoznaczne zdefiniowanie zakresu merytorycznego, jako identycznego z zakresem merytorycznym wymagań określonych w standardach kształcenia dla kierunków studiów Finanse i rachunkowość[4]. I tak, zgodnie z tym wymogiem, zakres merytoryczny ukazującego się w tej podserii podręcznika *Matematyka finansowa* został jednoznacznie zdefiniowany przez treści i efekty kształcenia w zakresie matematyki finansowej podane we wspomnianych standardach kształcenia.

Wiadomo już, że obligatoryjne standardy kształcenia zostaną zastąpione ramami kompetencyjnymi. Nie wydaje się jednak, aby ta zmiana w sposobie zarządzania dydaktyką akademicką w radykalny sposób zmieniła treści kształcenia z zakresu arytmetyki finansowej czy też problematyki składki w ubezpieczeniach na życie. W moim przekonaniu modernizacja zainicjowana reformą nie zdeprecjonuje proponowanego tutaj podręcznika.

[4] Rozporządzenie Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego z dnia 12 lipca 2007 w sprawie standardów kształcenia dla poszczególnych kierunków oraz poziomów kształcenia, a także warunków, jakie musi spełniać uczelnia, by prowadzić studia międzykierunkowe oraz makrokierunki.

Kolejnym atrybutem każdej książki jest zastosowany język opisu merytorycznego. W przypadku tego podręcznika są to: język matematyki, język finansów i – *signum temporis* – język informatyki. Od czytelnika oczekuje się poziomu wiedzy matematycznej w zakresie wymaganym na kierunku finanse i rachunkowość. Podręcznik został skonstruowany w ten sposób, że poszczególne elementy teorii arytmetyki finansowej czy też teorii składki w ubezpieczeniach na życie zostały przedstawione jako fakty, a nie jako formalne składniki pewnej matematycznej struktury aksjomatyczno-dedukcyjnej. Jest to już tradycja podręczników akademickich przekazujących wspomniane powyżej treści dydaktyczne. Podejście takie czyni tę książkę przyjazną także dla osób minimalizujących swoje kontakty z matematyką. Z drugiej strony trzeba pamiętać, że w przypadku prezentowanej w tej książce tematyki, całkowite ominięcie matematyki nie jest możliwe. Czytelników pragnących poszerzyć swą wiedzę o aksjomatyczno-dedukcyjną teorię arytmetyki finansowej zapraszam do lektury książki [Piasecki, 2007b].

Proponowany podręcznik został uformowany w ten sposób, aby wykład z matematyki finansowej mógł poprzedzać wykłady poświęcone finansom *sensu stricte*. Od czytelnika wymaga się znajomości jedynie potocznych elementów wiedzy finansowej. Z drugiej strony pamiętano, że matematyka finansowa wspomaga finanse. Chcąc ułatwić takie zastosowanie matematyki finansowej, wielu jej pojęciom przyporządkowano ich synonimy stosowane na gruncie finansów. Lista tych synonimów pewnie zawsze będzie listą otwartą.

Złożoność obliczeniowa wielu procedur arytmetyki finansowej oraz powszechna dostępność technik komputerowych skłaniają do wykorzystywania tych ostatnich w obliczeniach arytmetyki finansowej. Przyjęto założenie, że obliczenia te powinny być prowadzone z zastosowaniem oprogramowania taniego i tym samym powszechnie dostępnego. Oprogramowaniem takim jest arkusz kalkulacyjny EXCEL. Wszędzie tam, gdzie jest to możliwe, opis zależności arytmetyki finansowej został poszerzony o jej implementację w arkuszu EXCEL. Każda taka implementacja jest przedstawiona jako wywołanie funkcji czasowej lub funkcji finansowej arkusza EXCEL realizującej podstawienie wyznaczone przez opisywaną zależność. Podejście takie powinno ułatwić stosowanie arkusza EXCEL w obliczeniach arytmetyki finansowej. W podręczniku posłużono się funkcjami arkusza EXCEL wchodzącego w skład pakietu biurowego OFFICE Professional 2007.

Na końcu każdego rozdziału zamieszczono zadania do samodzielnego rozwiązania. Wśród nich są też takie, które typowy student kierunków ekonomicznych może rozwiązać jedynie z zastosowaniem arkusza kalkulacyjnego EXCEL lub bardziej zaawansowanego pakietu obliczeniowego.

Arytmetyka finansowa może być błędnie postrzegana, jako sztywny zestaw niezmiennych reguł obliczeniowych. Wyraźnie widoczne są tylko zmiany zachodzące w tych działach matematyki finansowej, które są bardzo zaawansowane formalnie. Nieustannie rozwija się też teoria i praktyka finansów. Wpływa to na zmianę uzasadnienia wyboru procedur obliczeniowych arytmetyki finansowej. W tym podręczniku dynamiczne zmiany wartości kapitału uzasadniono za pomocą czasowej relacji preferencji kapitału opisanej przez de Soto [2009]. Takie podejście stanowi kolejny krok w ewolucji instrumentarium arytmetyki finansowej.

Podręcznik został pomyślany w taki sposób, aby mógł stanowić bazę dla wielu różnych wykładów matematyki finansowej. Możliwe warianty tych wykładów zostały opisane w „Przewodniku dla studentów".

Powstanie każdej książki jest zawsze zasługą szeregu ludzi. Pierwszych wymieniam tutaj wszystkich autorów książek wspomnianych w pierwszym akapicie przedmowy. To uważna lektura tych dzieł otworzyła przede mną mikrokosmos arytmetyki finansowej i pozwoliła mi na wyrobienie sobie własnych poglądów na ten temat.

Drugą ważną grupą, która wniosła istotny wkład w powstanie tego podręcznika, są moi studenci. To oni wielokrotnie nękali mnie dociekliwymi pytaniami, w których sam sposób stawiania problemu był dla mnie bardzo kreatywny. Odpowiedzi na te pytania wykorzystałem przy pisaniu tej książki.

Istotną rolę przy przygotowaniu tej książki odegrali moi współpracownicy, którzy pierwsi wykorzystali jej maszynopis do przygotowania ćwiczeń z matematyki finansowej. Szczególne podziękowania składam tutaj Pani dr Annie Łyczkowskiej-Hanćkowiak z Katedry Badań Operacyjnych Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu. Szczegółowa i krytyczna analiza tekstu przygotowana mi przez Panią Doktor pozwoliła na wychwycenie i poprawienie wielu wad pierwotnej wersji maszynopisu.

Z drugiej strony na powstanie tej książki mieli wpływ członkowie Komitetu Nauk o Finansach Polskiej Akademii Nauk. To oni zainicjowali powstanie serii: Podręczniki rekomendowane przez Komitet Nauk o Finansach, w której znalazła się również *Matematyka finansowa*.

Na liście osób, które miały wpływ na powstanie tej książki, jest również Pani Redaktor Dorota Ostrowska-Furmanek. To jej kategoryczna sugestia skłoniła mnie napisania tego podręcznik. Książkę tę planowałem napisać w „nadchodzących latach" i tylko Pani Redaktor zawdzięczam to, że została napisana już teraz. Dyskretny nadzór Pani Redaktor pozwolił mi na dotrzymanie terminów wydawniczych i właściwej jakości finalnej wersji podręcznika.

Panu Profesorowi Edwardowi Smadze dziękuję z recenzję zawierającą zalecenia i uwagi do dyskusji nad książką. Materia ta stanowiła inspirację do dalszych modyfikacji kształtu przedstawianych treści merytorycznych. Wprowadzone zmiany uczyniły przygotowywany podręcznik lepszym.

Pani Profesor Wandzie Ronce-Chmielowiec dziękuję za przyjęcie zaproszenia do przygotowania rozdziału o składce w ubezpieczeniach życiowych. Ten rozdział, napisany przez Autorkę o powszechnie znanych kompetencjach, będzie na pewno stanowić atut tego podręcznika.

Na koniec zostawiam wspomnienie o naszym Koledze – ś.p. Profesorze Piotrze Chrzanie. Miał razem z nami pisać tę książkę. Na początku lipca 2010 już umawialiśmy się na szczegółowe wrześniowe dyskusje nad formą i treścią podręcznika. W pierwszą niedzielę wrześniową dogoniła mnie tragiczna wiadomość: „Piotr nie żyje". Z początku była jeszcze nadzieja, że może nie jest to prawda. Niestety bardzo szybko ta informacja została miarodajnie potwierdzona. 3 września 2010 zmarł ś.p. Profesor Piotr Chrzan. Nie mogłem już z nim porozmawiać o tym, jak ma wyglądać nasza książka. Nie ustaliliśmy, czy będziemy pisać o teorii procentu, czy też o arytmetyce finansowej. Zostałem z tym problemem sam. Książkę napisałem o arytmetyce finansowej. Myślę, że Piotr akceptuje ten wybór.

Każda książka ma swoje dobre i złe cechy. Za to, co w niej dobre, dziękuję wszystkim wymienionym wcześniej osobom. Za to, co w niej złe, odpowiedzialność ponoszę jedynie ja.

Krzysztof Piasecki

Jako autorka ostatniego, 10. rozdziału pragnę dodać kilka uwag. W roku 2009 dowiedziałam się o inicjatywie pisania podręcznika *Matematyka finansowa* i wówczas zostałam przez moich znakomitych kolegów Panów Profesorów ś.p. Piotra Chrzana oraz Krzysztofa Piaseckiego poproszona do współpracy, aby podręcznik uzupełnić o rozdział dotyczący kalkulacji składek w ubezpieczeniach na życie. Zaproszenie to przyjęłam z wielką przyjemnością, gdyż od lat osobiście i pracownicy Katedry Ubezpieczeń Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu wykładamy te zagadnienia studentom, co wzbogaciło mnie w doświadczenie dydaktyczne.

W ostatnich miesiącach współpracowałam już tylko niestety z Panem Profesorem Krzysztofem Piaseckim oraz Panią Redaktor Dorotą Ostrowską-Furmanek. W efekcie tej współpracy powstał rozdział 10. Rozdział ten zawiera podstawowe zagadnienia wykładane studentom uczelni ekonomicznych związane z ustalaniem składki ubezpieczeniowej netto w ubezpieczeniach na życie oraz ryzyko

ubezpieczeniowe w ubezpieczeniach na życie, w tym zasady konstrukcji tablic trwania życia. Następnie przedstawiono metody kalkulacji jednorazowej i okresowej składki netto w podstawowych typach ubezpieczeń na życie, jak również wprowadzono liczby komutacyjne i pokazano, jak można je wykorzystywać do obliczeń wysokości składki.

Pragnę również złożyć podziękowania recenzentowi Profesorowi Edwardowi Smadze za cenne uwagi, które wpłynęły na lepszy ostateczny kształt tekstu.

Wanda Ronka-Chmielowiec

Przewodnik dla studentów

Jednym z dwóch celów, jaki postawili sobie autorzy tej książki, było przygotowanie podręcznika wspierającego wykład z matematyki finansowej. Wykład matematyki finansowej, tak jak wykład każdego działu matematyki musi być zorganizowany w sposób liniowy. Prezentowany podręcznik nie narusza tego ograniczenia. Mimo to struktura książka została tak pomyślana, aby przy zachowaniu warunku liniowości wykładu umożliwić każdemu czytelnikowi pełne zapoznanie się z wybranymi przez niego obszarami zastosowań matematyki finansowej. Realizacji tego celu służy odpowiednio dobrany podział na rozdziały i podrozdziały.

W rozdziale 1 zawarto wybrane informacje o rynkach finansowych. Czytelnik znający już tę problematykę może pominąć ten rozdział. Może on także zostać pominięty przez czytelnika zainteresowanego jedynie kalkulacyjnymi aspektami arytmetyki finansowej. Wtedy jednak, zdaniem autorów, pominięcie to byłoby ze szkodą dla zrozumienia finansowych aspektów arytmetyki finansowej.

Bazowy wykład arytmetyki finansowej jest zawarty w rozdziałach 2, 3 i 5. W rozdziale 2 omówiono problematykę wartości przyszłej przedstawionej dla przypadku stałej stopy nominalnej. Stałość nominalnej stopy procentowej jest tu rozumiana w ujęciu płaskiej krzywej terminowej. Dla tego samego przypadku w rozdziale 3 przedstawiono problematykę wartości bieżącej. W rozdziale 5 zaprezentowano pojęcia wartości bieżącej netto i duracji. Przestudiowanie tych rozdziałów jest konieczne, gdyż musi poprzedzać lekturę wszystkich pozostałych rozdziałów.

W rozdziale 4 omówiono tematykę wartości przyszłej i bieżącej dla przypadku zmiennej krzywej terminowej. Rozdział ten stanowi propedeutykę do dalszych studiów nad krzywymi terminowymi *spot* i *forward*. Problematyka ta

w zdecydowany sposób wykracza poza zakres tego podręcznika. Lektura rozdziału 4 jest więc opcjonalna. Rozdział ten jest poszerzony o dodatek A, w którym przedstawiono przykład prostej procedury wyznaczania krzywych terminowych na podstawie obserwacji rynku finansowego.

Istotną pomocą w przyswojeniu sobie treści kolejnych rozdziałów, począwszy od rozdziału 7, jest lektura podrozdziałów 6.1, 6.2 i 6.3. Omówiono tam stałe renty proste. Znajomość rachunku tych rent ułatwia w pewnym stopniu lekturę dalszych, już aplikacyjnych rozdziałów. W pierwszej lekturze można ten fragment podręcznika jednak pominąć i do niezbędnych dalej treści powrócić poprzez odsyłacze z dalszych rozdziałów.

Każdy z rozdziałów od 6 do 10 stanowi integralną całość i może być studiowany z pominięciem pozostałych. Ich wybór zależy od indywidualnych potrzeb Czytelnika. Lektura każdego z tych rozdziałów może też zostać ograniczona do wybranych kolejnych początkowych podrozdziałów.

Dokończenie lektury rozdziału 6 gwarantuje gruntowne zapoznanie się z problematyką rachunku rent zdeterminowanych. Pełna znajomość rachunku rent wyposaża czytelnika w umiejętność stosowania gotowych złożonych procedur obliczeniowych arytmetyki finansowej. Rozdział ten został poszerzony o dodatek B, w którym przedstawiono pełny opis aktuarialnego rachunku rent jednostkowych.

Rozdział 7 jest poświecony problematyce wyceny długu i spłaty kredytu oraz problemowi oszacowania kosztów kredytu. Rozdział ten został poszerzony o dodatek C, w którym porównywano poszczególne metody wyceny długu.

W rozdziale 8 przedstawiono elementy rachunku obligacji. Ograniczono się tutaj do tych rodzajów obligacji i bonów skarbowych, które są notowane na polskim rynku finansowym.

Rozdział 9 jest poświęcony problematyce oceny inwestycji finansowych. Przedstawione tutaj narzędzia obliczeniowe tworzą jednorodny aparat formalny służący do oceny zarówno inwestycji rzeczowych, jak i inwestycji finansowych. W podrozdziale 9.1 skupiono się na problemie oceny pojedynczej inwestycji. Zadanie porównania pary inwestycji jest tematem podrozdziału 9.2. Następnie, w podrozdziale 9.3 przedstawiono problem wyboru optymalnych inwestycji finansowych. Treści zawarte w podrozdziałach 9.2 i 9.3 mogą być prezentowane w ramach kursu z badań operacyjnych wykładanych w sekwencji po arytmetyce finansowej.

W rozdziale 10 zaprezentowano złożoną problematykę składki na życie. Omówiono tutaj kolejno: specyficzne ryzyko ubezpieczeniowe w ubezpieczeniach na życie, modele trwania życia i metody kalkulacji składki netto.

Rozdział jest rozszerzony o dodatek D, w którym przedstawiono tablice trwania życia i tablice liczb komutacyjnych.

Materia matematyki finansowej jest bardzo złożona obliczeniowo i sprawne posługiwanie się nią wymaga korzystania z kompendium wiedzy na jej temat. Prezentowany podręcznik może odgrywać rolę takiego kompendium. Dużą pomocą dla korzystających w ten sposób z tej książki będzie indeks umieszczony na jej końcu.

1 Zmienne matematyki finansowej

1.1. Przesłanki procesu aprecjacji kapitału

Przedmiotem rozważań w matematyce finansowej są teraźniejsze lub przyszłe płatności przypisane terminom ich realizacji. Płatności te możemy podzielić na należności przypisane terminom ich spłaty oraz na zobowiązania przypisane terminom ich wymagalności.

Referując podstawy teorii kapitału, de Soto [2009] przedstawił regułę preferencji czasowej. Reguła ta głosi, że przy uwzględnieniu zasady *ceteris paribus* podmiot ekonomiczny woli zaspokoić swoje potrzeby bądź osiągać postawione cele możliwie jak najszybciej. Inaczej mówiąc, kiedy podmiot ma przed sobą dwa cele o subiektywnie jednakowej wartości, wówczas wyżej sobie ceni ten, który może osiągnąć w krótszym czasie. W szczególnym przypadku oznacza to, że inwestor, porównując dwie należności o takiej samej wartości, preferuje zawsze należność szybciej dostępną. Oznacza to, że użyteczność należności maleje wraz z upływem czasu, po jakim ta należność będzie płatna.

Z drugiej strony jest oczywiste, że każdy podmiot ekonomiczny w swym działaniu kieruje się regułą preferencji majątkowej. Reguła ta oznacza, że przy uwzględnieniu zasady *ceteris paribus* podmiot ekonomiczny woli wchodzić we władanie możliwie jak najbardziej wartościowych przedmiotów ekonomicznych. Czyli kiedy ma przed sobą dwa przedmioty ekonomiczne równocześnie dostępne, wybiera ten, który charakteryzuje się większą subiektywną wartością. W szczególnym przypadku oznacza to, że inwestor, porównując dwie równocześnie dostępne należności, wybiera zawsze należność o wyższej wartości. Oznacza to, że użyteczność należności rośnie wraz ze wzrostem jej wartości.

Bibliography

Brans J.P., Vincke Ph., Mareshal B. [1986], *How to Select and How to Rank Projects: The PROMETHEE Method*, „European Journal of Operational Research", nr 24.

Brigham E.F., Gapenski L.C. [2000], *Zarządzanie finansami*, Warszawa.

Brigham E.F.[1997], *Podstawy zarządzania finansami*, Warszawa.

Chrzan P. [2001], *Matematyka finansowa. Podstawy teorii procentu*, Katowice.

Dobija M., Smaga E. [1995], *Podstawy matematyki finansowej i ubezpieczeniowej*, Warszawa–Kraków.

Fabozzi F.J., Fong G. [2000], *Zarządzanie portfelem inwestycji przynoszących stały dochód*, Warszawa.

Francis J.C. [2000], Inwestycje, analiza i zarządzanie, Warszawa.

Gajdka J., Walińska E. [1998], *Zarządzanie finansowe – teoria i praktyka*, Warszawa.

Gerber H.U.[1990], *Life Insurance Mathematics*, Berlin–Heidelberg,

Haugen R.A., Wichern D.W. [1974], *The elastity of financial assets*, „Journal of Finance", wrzesień.

Jakubowski J., Palczewski A., Rutkowski M., Stettner Ł. [2003], *Matematyka finansowa; instrumenty pochodne*, Warszawa.

Johnson H. [2000], *Ocena projektów inwestycyjnych – Maksymalizacja wartości projektów inwestycyjnych*, Warszawa.

Kowalczyk P., Poprawska E., Ronka-Chmielowiec W. [2006], *Metody aktuarialne*, Warszawa.

Luenberger D.G. [2003], *Teoria inwestycji finansowych*, Warszawa.

Macaulay F.R. [1938], *Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the U.S. Since 1859*, Nowy Jork.

Matłoka M. [1997], *Matematyka w ubezpieczeniach na życie*, Poznań.

Michalski T., Twardowska K., Tylutki B. [2005], *Matematyka w ubezpieczeniach, jak to wszystko policzyć?*, Warszawa.

Piasecki K. [2005], *Od arytmetyki handlowej do inżynierii finansowej,* Poznań

Piasecki K. (red.) [2007a], *Matematyka wspomagająca zarządzanie*, Poznań.

Piasecki K. [2007b], *Modele matematyki finansowej. Instrumenty podstawowe*, Warszawa.

Pliska S.R. [2005], *Wprowadzenie do matematyki finansowej: modele z czasem dyskretnym*, Warszawa.

Podgórska M, Klimkowska J. [2005], *Matematyka finansowa*, Warszawa.

Ronka-Chmielowiec W., Kuziak K. [2001], *Podstawy matematyki finansowej*, Wrocław.

Skałba M. [1999], *Ubezpieczenia na życie*, Warszawa,

Smaga E. [1999], *Arytmetyka finansowa*, Warszawa–Kraków.

Sobczyk M. [2001], *Matematyka finansowa. Podstawy teoretyczne, przykłady, zadania* Warszawa.

Soto de J. H. [2009], *Pieniądz, kredyt bankowy i cykle koniunkturalne*, Warszawa.

Stępniak I., Zieliński J. [2000], *Estymacja i interpretacja zero-kuponowej krzywej dochodowości*, Materiały i Studia NBP, z. 108, Warszawa

Stoner J.A.F., Wankel Ch. [1992], *Kierowanie*, Warszawa

Stroiński E. [2003], *Ubezpieczenia na życie, teoria i praktyka*, Warszawa.

Szkutnik W., Wolny A. [2000], *Podstawy analizy aktuarialnej w ubezpieczeniach życiowych*, Katowice.

Śliwiński A. [2002], *Ryzyko ubezpieczeniowe, taryfy-budowa i optymalizacja*, Warszawa.

Świętoń M. [2002], *Terminowa struktura dochodowości skarbowych papierów wartościowych w Polsce w latach 1998–2001*, Materiały i Studia NBP, z. 150, Warszawa.