“Математика XX века. Взгляд из Петербурга”, МЦНМО, 2010, стр. 170-174.

К.М.Подниекс

Теорема Гёделя о неполноте

Если оценивать открытия XX века по их влиянию на образ научного мышления, то открытие Курта Гёделя следует (по значению) приравнять к открытию принципов теории относительности и квантовой механики.

Проблема простых чисел - близнецов. Представим себе, что мы продвигаемся вперед вдоль последовательности натуральных чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,... и время от времени встречаем пары т.н. простых чисел - близнецов: (3,5), (5,7), (11,13), (17,19), (29,31), (41,43), ... Гипотеза: существует бесконечно много пар близнецов. Это предположение известно с 1849.г., но оно не доказано (и не опровергнуто) до сих пор. Тем не менее, существует ведь только две возможности: а) мы доходим до последней пары близнецов и больше их не встречаем (в этом случае гипотеза оказывается ложной), б) пары близнецов появляются все время (тогда гипотеза истинна)? Третьего не дано?

Континуум-проблема. Согласно известной теореме Георга Кантора, количество точек на отрезке прямой не зависит от длины отрезка, и оно больше чем количество членов в последовательности натуральных чисел. Итак, существуют два "инфинитных числа", первое больше второго, а между ними - других "инфинитных чисел" нет? На практике, какое бы конкретное бесконечное множество точек на отрезке прямой мы не построили, количество точек в нем всегда оказывается равным либо первому, либо второму из упомянутых "чисел". Отсюда - континуум-гипотеза: промежуточных "инфинитных чисел" не существует. Это предположение было выдвинуто Кантором в1878 г., но оно не доказано (и не опровергнуто) до сих пор. Тем не менее, существует ведь только две возможности: а) промежуточные "числа" существуют (в этом случае гипотеза оказывается ложной), б) промежуточных "чисел" не существует (тогда гипотеза истинна)? Третьего не дано?

В своём докладе, прочитанном 8 августа 1900 г. на II Международном Конгрессе математиков в Париже, Давид Гильберт подчеркнул "... уверенность, которую разделяет, несомненно, каждый математик, но которую до сих пор никто не подтвердил доказательством, - уверенность в том, что каждая определенная математическая проблема непременно должна быть доступна строгому решению...". И ещё: "... мы слышим внутри себя постоянный призыв: вот проблема, ищи решение. Ты можешь найти его с помощью чистого мышления; ибо в математике не существует Ignorabimus!". Объясняется ли оптимизм Гильберта только его молодостью (38 лет), его исключительно успешной работой во многих областьях математики, и приближающимся наступлением нового века (нечто подобное мы только-что пережили)?

После своего выступления 1900 г. Гильберт сам предпринял попытку подтвердить доказательством свою уверенность в том, что "каждая определенная математическая проблема непременно должна быть доступна строгому решению...". Но как это сделать? Гильберт предложил программу исследований, состоящую из двух этапов:

а) Представить математику в виде совершенно формальной теории, в которой все рассуждения проводятся по точно определенным правилам (вроде правил игры в шахматы), без каких-либо ссылок на очевидность и интуицию.

б) Исследовать полученную теорию как математический объект, и доказать, что эта теория является **непротиворечивой и полной** в том смысле, что любое определенное утверждение, которое в ней можно сформулировать, можно в ней либо доказать, либо опровергнуть (но не одновременно).

Решить задачу этапа а) означало довести до конца процесс аксиоматизации математики, который в

XIX в. и так уже продвинулся решительным образом (уточнение понятий функции, непрерывности, действительного числа, аксиоматизация геометрии и даже арифметики натуральных чисел, и т.д.). Задача же этапа. б) была радикальным нововведением - попытаться **доказать** непротиворечивость и полноту полученной на этапе а) всеобъемлющей теории. Гильберт первым понял, что решение до конца задачи а) делает возможной постановку задачи б). Дело в том, что, не решив до конца задачу а), т.е. оставаясь в области неформальной, интуитивной математики, нельзя говорить о точном доказательстве каких-либо свойств математики как целого. В интуитивной теории можно надеяться доказать или опровергнуть некоторое конкретное утверждение. Но никак нельзя даже пытаться доказывать абсолютную непротиворечивость и полноту интуитивной теории, поскольку такое утверждение относится к множеству всех теорем теории, т.е. к бесконечной совокупности, точного определения которой мы не имеем. Однако, если вместо интуитивной теории мы имеем совершенно формальную теорию, то положение изменяется. Множество теорем формальной теории является уже точно определенным (хотя и бесконечным) объектом. Гильберт рассчитывал получить доказательство непротиворечивости и полноты математики как совершенно конкретных свойств этого бесконечного множества.

Через 6 лет, 28 апреля 1906 г. родился Курт Гёдель. В возрасте 24 лет, 23 октября 1930 г. на заседании одной из секций Венской академии наук он изложил свою знаменитую теорему о неполноте. Статья с развернутым изложением поступила в редакцию 17 ноября и вышла в следующем, 1931 г. Одна из интерпретаций теоремы Гёделя гласит: **не** каждая определенная математическая проблема доступна строгому решению...

ТЕОРЕМА ГЕДЕЛЯ О НЕПОЛНОТЕ. Если формальная теория T содержит арифметику натуральных чисел, то найдется определенное формулой утверждение G_T, выражающее некоторое свойство натуральных чисел, такое, что:

а) если в теории T можно доказать, что **все** натуральные числа обладают свойством G_T, то эта теория противоречива,

б) если в теории T можно доказать, что некоторое натуральное число **не** обладает свойством G_T, то эта теория противоречива.

Чисто математическое содержание этой теоремы (без попыток философской оценки) состоит в следующем. Гёдель предлагает два метода:

Пусть T - формальная теория, содержащая арифметику натуральных чисел. По первому методу Гёделя в языке T строится определенное формулой утверждение G_T, трактующее о свойствах натуральных чисел. Если бы в теории T удалось доказать, что **все** натуральные числа обладают свойством G_T, то, следуя второму методу Гёделя, мы сумели бы вывести в этой теории противоречие. Если бы, с другой стороны, нам удалось средствами теории T доказать, что некоторое натуральное число **не** обладает свойством G_T, то, следуя тому же второму методу Гёделя, мы опять получили бы в этой теории противоречие. Эти два метода - метод построения утверждений G_T и метод, преобразующий доказательства и опровержения G_T в доказательства противоречия, и составляют чисто математическую сторону достижений Гёделя.

Таким образом, не следует думать, что Гёдель доказал неполноту хотя бы одной формальной теории (хотя его теорему и принято называть теоремой о неполноте). Он мог доказать только следующее: если формальная теория содержит арифметику натуральных чисел, то эта теория либо противоречива, либо неполна. Чтобы доказать "по Гёделю" неполноту какой-либо теории, мы должны сначала доказать, что эта теория не содержит противоречий. Однако, никаких убедительных методов, позволяющих доказывать абсолютную (а не относительную!) непротиворечивость, XX век нам не оставил...

Если же применить теорему Гёделя к двухэтапной программе Гильберта, то получается: если бы мы сумели представить всю математику в виде совершенно формальной теории, то эта теория неизбежно оказалась бы либо противоречивой, либо неполной (т.е. такой, что "**не** каждая определенная математическая проблема доступна строгому решению"). Формально, отсюда можно сделать один из двух выводов: а) математика **сама является** противоречивой или неполной, б) математику **невозможно представить** в виде совершенно формальной теории. Гёдель сам склонялся ко второму варианту до своей смерти 14 анваря 1978 г. И сегодня в научно-популярной литературе тоже все еще больше пропагандируется второй вариант: говорят об "ограниченности аксиоматического построения математики", и даже о превосходстве "живого человеческого разума" над вычислительной машиной. К сожалению, за 70 лет, прошедшие с 1930 г., эта точка зрения показала только свою совершенную бесплодность - никаких неформализуемых математических идей XX век нам не оставил... Другими словами, логическая техника, развитая Г.Фреге, Б.Расселом, Д.Гильбертом и их последователями, достаточна для формализации любой четко определенной математической идеи.

Реальное же развитие математики идет больше в соответствии с первым вариантом. Фантазия математиков не раз приводила к парадоксам, т.е. к ситуациям, когда их доказательства и даже теории приходится исправлять. Как в результате работ Я.Бойяи и Н.И.Лобачевского не стало единственно верной геометрии, так в результате работ Гёделя и его последователей не стало единственно верной теории множеств. Сегодня исследуется не один, а несколько вариантов аксиоматической теории множеств. Самый популярный вариант - теория множеств Э.Цермело и А.Френкеля. И вторым по значению результатом математической логики XX века считается именно "формальное решение" проблемы континуума, полученное Полем Коэном в 1963.г.: в теории множеств Цермело-Френкеля проблема континуума неразрешима. Никаких убедительных доводов, позволяющих думать, что теория Цермело-Френкеля не охватывает какую-либо часть неформальной теории множеств Г.Кантора, XX век нам не оставил. Поэтому можно полагать, что проблема континуума в том смысле, как ее поставил и пытался решать Кантор и его последователи, действительно неразрешима. И вы можете "без вредных последствий" принять как гипотезу, что промежуточных инфинитных чисел не существует, так и гипотезу, что таких чисел существует ровно 17 шт. (шутка Н.Н.Лузина). А сколько их "на самом деле"? Ignorabimus! Этот вопрос лишен смысла - ответ может зависеть от того, какой вариант теории множеств вы предпочитаете...

Поэтому и проблема простых чисел-близнецов, и не менее знаменитая проблема Гольдбаха, и гипотеза Римана, сегодня видятся (должны!) в новом свете. Если мы продвигаемся вперед вдоль последовательности натуральных чисел, то существует ведь только две возможности: а) мы доходим до последней пары близнецов и больше их не встречаем, б) пары близнецов появляются все время? Третьего не дано? А что, если аксиомы математиков не позволяют решить проблему простых чисел-близнецов, и эту неразрешимость удастся строго доказать? Тем хуже для аксиом? Не похожа ли такая реакция на первоначальный прием (частью публики) идей теории относительности и квантовой механики - "этого не может быть потому, что этого не может быть никогда"?

Из теоремы Гёделя **не** вытекает "ограниченность аксиоматического построения математики". Из теоремы Гёделя **не** вытекает превосходство "живого человеческого разума" над вычислительной машиной. Гёдель сумел показать только, что любая достаточно сильная, но замкнутая в себе, неизменная система принципов рассуждения неизбежно приводит либо к противоречиям, либо к проблемам, которые невозможно решить без изменения или дополнения этих принципов. Способен ли "живой человеческий разум" **безошибочно**, с первой попытки находить эти изменения и дополнения?

Рига, 3 августа 2000 г.