e-pública
Revista electrónica sobre la enseñanza de la Economía Pública

Nº 2, 2007

Los criterios Valor Actual Neto y Tasa Interna de Rendimiento

Joan Pasqual Rocabert jpasqual@ecap.uab.es

Departamento de Economía Aplicada, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Autónoma de Barcelona. Campus de Bellaterra, 08193–Bellaterra, España.

Recibido:
Aceptado:

Resumen

La tasa interna de rendimiento (TIR) es un buen criterio para medir la deseabilidad de un proyecto, complementa el criterio del Valor Actual Neto (VAN) y, en muchos casos, lo sustituye con ventaja. Las mal llamadas anomalías que surgen en el cálculo y la interpretación del Valor Actual Neto (VAN) y la Tasa Interna de Rendimiento (TIR) son fácilmente superables, si se tienen en cuenta las propiedades de la función VAN y se define adecuadamente lo que es una inversión y un crédito. Todas las raíces de la función VAN tienen significado económico y, cuando existe por lo menos una TIR, los criterios VAN y TIR coinciden.

Palabras clave: tasa interna de rendimiento, valor actual, análisis de inversiones, evaluación de proyectos.

Códigos JEL: Q28; D92

1. INTRODUCCIÓN

1.1. ANTECEDENTES

El examen de la literatura existente y de la práctica habitual entre profesionales y expertos, pone de manifiesto que existen algunas lagunas en el conocimiento de las características del Valor Actual Neto (VAN) y de la Tasa Interna de Rendimiento (TIR). Como además los resultados que proporcionan estos criterios de decisión no siempre son intuitivos, pueden aparecer errores de concepto al llevar a cabo la interpretación económica.
Diversos autores, como, Peumans (1974), Weston y Brigham (1984), Brealey y Myers (1985) y Belli (1996) entre otros muchos, reconocen la dificultad de aplicar el criterio de la TIR por la falta de buenas propiedades de este indicador de deseabilidad de un proyecto. Así, en Gronchi (1986) se afirma: *The internal rate of return can be* unanbiguously *used in decision-making procedures only if it is* unique. Ante estas dificultades se puede optar por prescindir de la TIR y emplear el VAN, que es la conclusión principal de Oehmke (2000) y punto de partida para Castelo (2001): *if the researcher is quite sure of the appropiate discount rate to use, then there is no real issue: either the NPV is positive at that rate or is not.* Para Ross (1995), la TIR no es un buen criterio de decisión en absoluto, porque no conduce a la misma decision que el VAN: *In fact, it is not uncommon to spend a considerable amount of time in class making sure that the student understands all the*

wrong ways of thinking about investment decision making -from the IRR rule to payback period. Wrong, of course, because they don't coincide with the NPV rule. También cabe ignorar el problema sin más, examinando exclusivamente el caso de TIR única, como en Christopher Yost y Rich Carreiro. (ver http://invest-faq.com/articles/analy-int-rate-return.html). Por su parte, Ray Martin separa el dominio relevante de la función VAN del que, en su opinión, carece de sentido, (ver http://members.tripod.com/~Ray_Martin/DCF/nr7aa003.html#end, y también http://members.tripod.com/~Ray_Martin/DCF/B-MFAQs.html). Abundan las reglas practicas sin justificación, como tomar como TIR relevante la media aritmética de las TIRs o bien la recomendada por Fintray Consulting Services Limited: "The prudent rule is to take the smallest of the IRRs as a basis for comparison." (ver http://www.fintray.co.uk/irr.htm), que es bastante empleada.

La dificultad en la interpretación económica de las TIRs y la aparente discordancia con la aplicación del VAN, es un viejo problema que tiene una explicación muy simple. Es evidente que la rentabilidad de un proyecto de inversión debe disminuir al aumentar los costes y, en concreto, al aumentar el precio del capital[1] r. Esta deseable característica sólo se conserva si la rentabilidad se mide con una función monótona decreciente respecto a la tasa de descuento r, y como la función VAN no tiene esta propiedad, aparecen resultados contraintuitivos. En particular, la falta de monotonía puede provocar que la función VAN tenga varias raíces reales distintas –ver Hirshleifer (1958)- y, en este caso, cabe preguntarse cual de ellas es la TIR relevante para aplicar el criterio en un caso concreto y si todas tienen o no sentido económico.

Se ha abordado el problema mediante diversas aproximaciones. En Massé (1962) se señala que todas las raíces de la función VAN son significativas, lo que constituye un paso ineludible para interpretarlas y aplicar correctamente el criterio de la TIR. En Teichroew, Robicheck y Montalbano (1965a, 1965b), al distinguir entre inversiones puras y mixtas, se abre el camino para entender un proyecto como la agregación de varios subproyectos de distinto tipo que, en conjunto, pueden comportarse como una inversión o un crédito en función del peso relativo de cada uno de ellos.

Como se verá seguidamente, para solventar estos problemas basta con adoptar una definición apropiada de inversión y crédito y aplicar la regla de decisión habitual. De esta forma resulta evidente que todas las TIR reales tienen significado económico y que, si al menos existe una TIR, los criterios VAN y TIR coinciden.

Este texto puede emplearse de varias formas. La más rápida y directa consiste en una lectura de la sección 2.2, en la que se presentan de forma intuitiva los conceptos básicos y la forma de proceder para el análisis de la deseabilidad de un proyecto. Si desea profundizar un poco, siga dicha sección con ayuda de la hoja de cálculo que se proporciona[2], rehaga los cálculos y examine las gráficas que confecciona dicha hoja. No es mala idea comparar el texto de la sección 2.3 con el contenido del Anexo I, más formalizado. Si prefiere un análisis más riguroso y detallado vea Pasqual, Tarrío y Pérez (2005).

[1] La tasa r se expresa como precio del capital y tasa de descuento, entre otras denominaciones. Que r responda en realidad a una u otra denominación depende del caso concreto que se esté examinando -ver Hirshleifer (1958) y Souto (2001).

[2] Esta hoja Excel se ha preparada para confeccionar una gráfica de la función VAN y calcular el valor del VAN y de todas las TIR, entre otros indicadores de deseabilidad. Su uso es simple, basta con que proporcione el valor de la tasa de descuento (hoja A, casilla B28) y de los flujos (hoja A, casillas c36 y siguientes para los períodos 0, 1, …, 100); los resultados se muestran en la misma hoja A. Hay tres hojas (todas protegidas con la contraseña UAB) pero sólo se muestra la hoja A que es la que se necesita para entrar los datos y observar los resultados.

2. EL CRITERIO TIR COMPARADO CON EL DEL VAN

2.1. OBJETIVO

El propósito del presente trabajo es ampliar el marco de análisis de los criterios VAN y TIR con el fin de obtener un método de decisión más general, que permita aplicar dichos criterios tanto en los casos convencionales como en los supuestamente anómalos. Se trata además de proporcionar una explicación económica de los resultados que se obtienen al aplicar los criterios VAN y TIR, sea cual sea el caso examinado.

2.2. DESCRIPCIÓN, ANÁLISIS Y RESULTADOS

2.2.1 El VAN

El VAN mide la deseabilidad de un proyecto en términos absolutos. Calcula la cantidad total en que ha aumentado el capital como consecuencia del proyecto.

Dadas unas cantidades C_t y una tasa de descuento r, el VAN de un proyecto que se ejecuta en el momento M se mide mediante la función:

$$VAN(C_t, r) = C_M/(1+r)^M + C_{M+1}/(1+r)^{M+1} + \ldots + C_{M+T}/(1+r)^{M+T} \quad (1)$$

siendo $r \neq -1$ y $t = 0, 1, \ldots, M+T$.

La función VAN es continua para toda $r \neq -1$.

El VAN existe siempre y proporciona un valor único.

La función VAN no es monótona salvo casos especiales.

Si se multiplican los flujos C_t por una constante K, el VAN queda multiplicado por K (la función VAN es homogénea de grado uno respecto a los flujos C_t), es decir

$$VAN(KC_t, r) = K[VAN(C_t, r)] \quad (2)$$

. La función VAN tiene la propiedad aditiva, es decir

$$VAN(X) + VAN(Y) = VAN(X + Y) \quad (3)$$

La regla de aceptación de un proyecto para el VAN, sea cual sea el tipo de proyecto[3], es VAN ≥ 0. Para elegir el mejor entre dos proyectos se dispone de dos reglas equivalentes, a) escoger el mayor VAN: el proyecto X es mejor o igual al Y si y sólo si $VAN(X) \geq VAN(Y)$, b) el proyecto X es mejor o igual al Y si y sólo si el VAN del proyecto diferencia (X – Y) es no

[3] La condición VAN ≥ 0 se puede interpretar como de no rechazo y no se mantiene necesariamente en un problema de selección de proyectos -ver Cantor y Lippman (1995)- dado que un proyecto puede comportarse como inversión o como crédito.

negativo, es decir VAN(X - Y) ≥ 0, siendo el proyecto diferencia (X – Y) el formado por la diferencia de los flujos de X e Y en cada período, (C^X_t - C^Y_t).

Ejemplo 1. Determinar la rentabilidad de los proyectos X e Y de la tabla 1 con el criterio VAN, sabiendo que la tasa de descuento es del 100% (r = 1).

Tabla 1.

proyectos\períodos	0	1
X	-3	12
Y	-1	6
(X – Y)	-2	6

El VAN de los proyectos vale:

VAN(X) = -3 + 12/(1+1) = 3

VAN(Y) = -1 + 6/(1+1) = 2

VAN(X - Y) = -2 + 6/(1+1) = 1

Los dos proyectos son rentables porque su VAN es positivo. Es preferible el X al Y porque VAN(X) > VAN(Y) o, lo que es lo mismo, porque VAN(X – Y) > 0.

2.2.2 La TIR.

La TIR, expresa el crecimiento del capital en términos relativos y determina la tasa de crecimiento del capital por período. Las TIR se definen como

$$\text{toda } r^*_j \text{ tal que VAN}(C_t, r^*_j) = 0 \qquad (4)$$

Para evitar los problemas que comporta la discontinuidad de la función VAN en el punto r = -1, se examinan aquí sólo los casos en que tanto la tasa de descuento como las TIR son mayores que menos uno.

No siempre hay una única TIR. Puede que no exista o que haya más de una. Cuando la función VAN es monótona y existe TIR, entonces esta TIR es única.

A diferencia del VAN, para aplicar el criterio de la TIR es necesario saber el tipo de proyecto que se pretende evaluar. En efecto, como la TIR es la tasa de crecimiento del capital, cuanto más alta sea, mejor si se trata de una inversión porque la TIR estará midiendo la rentabilidad. Sin embargo, si se trata de un crédito ocurre lo contrario, porque la TIR mide el coste del crédito en este caso.

Para aceptar un proyecto con el criterio de la TIR se exige que no sea menor que la tasa de descuento r_0 si se trata de una inversión y que no sea mayor que la tasa de descuento si se trata de un crédito. Es necesario definir pues lo que se entiende por inversión y crédito y, con este fin, es preciso caracterizar todos los posibles tipos de proyectos.

Se distinguen dos grandes grupos de proyectos según el signo de los flujos[4] C_t. Si por lo menos una de las cantidades C_t es estrictamente positiva y otra estrictamente negativas como en {-1, 0 , 3}, {2, -1, -3} y {-10, 1, …, 1, …}, el proyecto pueda caracterizarse como *inversión* o como *crédito*. En caso contrario, todos los flujos son del mismo signo, como {-1, 0}, {2, 0, 0, 1} por ejemplo, y los proyectos tienen la característica de *regalo* o *pérdida*.

Regalo. Un proyecto es un regalo si todos los flujos son no negativos y al menos uno es estrictamente positivo. Por ejemplo, el proyecto con flujos {2, 0, 3, 9}. El VAN de un regalo es siempre positivo, su pendiente es siempre negativa y no existe TIR.

Pérdida. Un proyecto es una pérdida si todos los flujos son no positivos y al menos uno es negativo. Por ejemplo, el proyecto con flujos {-2, 0, -3, -9}. El VAN de una pérdida es siempre negativo, su pendiente es siempre positiva y no existe TIR.

Inversión. Un proyecto con algunos flujos positivos y otros negativos se comporta como una inversión en el punto r_j si $\partial VAN/\partial r < 0$ en ese punto. Por ejemplo, el proyecto con flujos {-1, 2}, ejecutado en el momento 0 se comporta como una inversión para cualquier valor de r > -1.

Crédito. Un proyecto con algunos flujos positivos y otros negativos se comporta como un crédito en el punto r_j si $\partial VAN/\partial r > 0$ en ese punto. Por ejemplo, el proyecto con flujos {1, -2}, ejecutado en el momento 0 se comporta como un crédito para cualquier valor de r > -1.

Para saber si un proyecto es una regalo o una pérdida basta con observar el signo de los flujos. Esta regularidad no se mantiene en el caso de inversiones y créditos, ya que la caracterización como inversión y crédito depende, en general, de la tasa de descuento r y del momento de ejecución M, como se pone de manifiesto con los siguientes ejemplos.

El proyecto con flujos {1, -4, 4} ejecutado en el momento 0 se comporta como una inversión para -1 < r < 1 y como un crédito para toda r > 1. El proyecto con flujos {-3, 2} se comporta como una inversión para toda r > 0 si se ejecuta en el momento 0 y como un crédito si se ejecuta en el momento 5. El proyecto con flujos {-1, 4, -4} ejecutado en el momento 0 se comporta como un crédito para -1 < r < 1 y como una inversión para toda r > 1. El proyecto con flujos {3, -2} se comporta como un crédito para toda r > 0 si se ejecuta en el momento 0 y como una inversión si se ejecuta en el momento 5. Por lo tanto, es más apropiado hablar de un proyecto que *se comporta como* una inversión (o como un crédito) que afirmar que *es* una inversión (o que es un crédito).

El punto relevante para observar el comportamiento como inversión o crédito con el criterio TIR es precisamente el de la TIR r_j^* (ver nota[5]) Por lo tanto, la regla para aceptar un proyecto si la TIR es r_j^* y la tasa de descuento r_0 resulta:

$$r_j^* \geq r_0 \text{ si } \delta VAN/\delta r < 0 \text{ en el punto } r_j^* \qquad (5)$$

$$r_j^* \leq r_0 \text{ si } \delta VAN/\delta r > 0 \text{ en el punto } r_j^* \qquad (6)$$

[4] Se deja de lado el caso trivial en el que todos los flujos son nulos, {0, …, 0}.

[5] De forma más general., para determinar si el proyecto se comporta como una inversión o un crédito se observa el signo de la derivada del VAN en el punto $r^*+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to 0$, si $r^* < r_0$ y en $r^*-\varepsilon$ cuando $r^* > r_0$. Se previene así el caso de derivada nula en el punto de la TIR.

Cuando existe más de una TIR se aplica la misma regla de decisión una vez hallada la TIR relevante, que está en función de la tasa de descuento r^0. La TIR relevante en cada caso es *la que está más cerca* de la tasa de descuento. Dicho de otro modo, si la tasa de descuento es menor que la TIR más pequeña, se toma esta TIR, si la tasa es mayor que la TIR más alta, se toma dicha TIR y si la tasa está situada entre dos TIR es indiferente tomar una u otra.

Dados dos proyectos, no es cierto que siempre sea preferible el proyecto con mejor TIR, característica que comparte con cualquier indicador relativo de rentabilidad. Para elegir el mejor entre dos proyectos X e Y, es necesario y aplicar la regla de decisión habitual al proyecto diferencia (X - Y). Con independencia de si X e Y son proyectos de un tipo u otro, el proyecto diferencia puede ser del mismo tipo o de cualquier otro.

Cuando existe por lo menos una TIR, las recomendaciones de los criterios TIR y VAN coinciden[6].

Ejemplo 2. Determinar la rentabilidad de los proyectos X e Y de la tabla 2 con el criterio TIR, sabiendo que la tasa de descuento es del 100% (r = 1). Comparar el resultado de los criterios TIR y VAN.

Tabla 2.

proyectos\períodos	0	1
X	-3	12
Y	-1	6
(X – Y)	-2	6
(Y – X)	2	-6

La TIR de es toda r* real tal que VAN = 0.

La TIR de X es tal que VAN(X) = -3 + 12/(1+ r*) = 0, de donde $r^*_X = 3$. Se trata de una inversión[7] y ocurre que la TIR (300%) es mayor que la tasa de descuento (100%), por lo tanto X es rentable.

La TIR de Y es tal que VAN(Y) = -1 + 6/(1+ r*) = 0, de donde $r^*_Y = 5$. El proyecto Y es una inversión y es rentable porque su TIR (500%) supera la tasa descuento (100%).

La TIR del proyecto diferencia (X – Y) es tal que VAN(X – Y) = -2 + 6/(1+r*) = 0, de donde $r^*_{(X-Y)} = 2$. El proyecto (X – Y) es una inversión y su TIR (200%) es mayor que la tasa de descuento, por lo tanto el proyecto X es mejor que el Y.

La TIR del proyecto diferencia (Y – X) es la misma que la del (X – Y) como puede comprobarse con facilidad, porque tiene los mismos flujos con el signo contrario. Se comporta como un crédito y su TIR (200%) es mayor que la tasa de descuento, por lo que se

[6] Ver Pascual, Tarrío y Pérez (2005) para la demostración de este resultado.
[7] Con ayuda de la hoja de cálculo, dibuje la gráfica y compruebe que la pendiente de la función VAN es negativa.

perdería si se llevara a cabo Y en lugar de X, luego Y es peor que X, como ya sabíamos (ver tabla 3).

Tabla 3

proyectos\períodos	0	1	tipo de proyecto	VAN	TIR
X	-3	12	inversión	3	300%
Y	-1	6	inversión	2	500%
(X – Y)	-2	6	inversión	1	200%
(Y – X)	2	-6	crédito	-1	200%

Ejemplo 3. Sea el proyecto Z con flujos {-1, 4, -4} y que se ejecuta en el momento 0. El VAN es siempre negativo para cualquier $r > -1$, excepto en el punto $r = 1$, en el que vale cero. Por lo tanto el criterio VAN no rechaza el proyecto si $r = 1$ y lo rechaza siempre que $r \neq 1$. No parece pues que se trate de una buena operación. Sin embargo, tiene un único valor para la TIR y es alto, $r^* = 100\%$, comparado con el de la tasa de descuento que es de $r = 10\%$. Aunque el proyecto parezca raro, como existe una TIR, nada impide que se pueda aplicar este criterio. Si la tasa de descuento es menor que la TIR entonces el proyecto se comporta como un crédito ya que la pendiente del VAN es positiva para toda $-1 < r < 1$, la TIR mide el coste del crédito y, como es superior al valor de la tasa, el proyecto se rechaza. En el caso contrario, la tasa de descuento será mayor que la TIR; pero en este intervalo la pendiente del VAN es negativa y el proyecto se comporta como una inversión, una mala inversión porque la TIR mide la rentabilidad de la inversión y es menor que la tasa de descuento. Si la tasa de descuento r coincide con la TIR r^*, el criterio TIR acepta el proyecto. En cualquier caso, se ha comprobado que el criterio TIR concuerda con el criterio VAN.

El proyecto Z del ejemplo anterior {-1, 4, -4} no es paradójico sino que tiene una interpretación económica simple. Supongamos que en el momento 0 se llevan a cabo dos proyectos, el X y el Y con flujos {-2, 2, 0} y {1, 2, -4}, respectivamente. Estos proyectos no tiene complicación alguna, X es una inversión e Y un crédito para toda $r > -1$. Sin embargo, si sumamos los flujos de X e Y período a período, ($z_t = x_t + y_t$), se obtiene el proyecto Z anterior, Z = X+Y. Puede verse pues Z como si fuera el resultado de la agregación de dos proyectos de distinto tipo. El proyecto (Z) será una inversión o un crédito según que "pese" más la inversión X o el crédito Y. El peso de uno u otro proyecto depende de los flujos de cada uno pero también de la tasa de descuento. Por esta razón, es posible que un proyecto se comporte como una inversión para determinados valores de la tasa de descuento y como un crédito para otros.

Ejemplo 4. Considérese ahora el proyecto con flujos {-20, 80, -59} que se ejecuta en el momento 0. Tiene dos TIR, $r^*_1 = -2{,}47\%$ y $r^*_2 = 202{,}47\%$. El VAN es estrictamente positivo en el intervalo abierto formado por las dos TIR y estrictamente negativo en el resto. Supóngase que la tasa de descuento es $r^0 = -3\%$, la TIR que está más cerca es r^*_1, en este punto el proyecto se comporta como un crédito y como $r^*_1 > r^0$, el criterio TIR rechaza el proyecto. Si la tasa de descuento fuera de $r^0 = 250\%$, la TIR relevante sería r^*_2, en este punto el proyecto se comporta como una inversión, mala, porque $r^*_2 < r^0$. Si la tasa de descuento está situada entre las dos TIR, $r^*_1 < r^0 < r^*_2$, entonces tanto da elegir una TIR como otra. En efecto, si se toma r^*_1 se trata de un buen crédito porque $r^*_1 < r^0$; si se opera con r^*_2 entonces se trata de una buena inversión porque $r^*_2 > r^0$. En cualquier caso el criterio TIR coincide con el criterio VAN, como ya sabíamos. Por otra parte, la negatividad de la tasa de descuento o de la TIR no supone problema alguno, ni para aplicar el criterio ni para interpretar el resultado[8].

3. CONCLUSIONES

La función VAN no es monótona excepto en casos particulares[9], lo que causa las mal llamadas anomalías que dificultan la interpretación de los resultados. Un proyecto puede comportarse como una inversión o un crédito en función de la tasa de descuento y del momento de ejecución, y puede entenderse como el resultado de la agregación de varios subproyectos de distinto tipo. Todas las raíces reales de la función VAN tienen significado económico, unas miden la rentabilidad del proyecto como inversión y otras computan el coste del proyecto como crédito. Para descifrar la información que proporcionan las raíces múltiples de la función VAN, basta con adoptar una nueva definición de inversión y crédito. De esta forma, es posible interpretar correctamente los resultados contra intuitivos que provoca la falta de monotonía de la función VAN, sin que sea preciso modificar las hipótesis del modelo estándar ya que, contra lo que se suponía, las decisiones tomadas mediante el criterio de la TIR coinciden siempre con las basadas en el VAN.

No es necesario añadir que si se relaja alguna de las hipótesis del modelo VAN, como la de mercado perfecto de capitales, los resultados pierden validez y es necesario recurrir a modelos de evaluación más generales. Por ejemplo, cuando la tasa de inversión y la de reinversión no coinciden, es necesario aplicar un modelo más general, como el de Montllor (1978). Por otra parte, no se ha tratado aquí el problema de la selección de proyectos; se pueden consultar al respecto las aportaciones de Cantor y Lippman (1995) y Herreolen, Van der Dommelen y Demeulemeester (1995).

4. Referencias bibliográficas

Arrow K. y Levhari (1969) "Uniquiness of the internal rate of return with variable life of investment". *Economic Journal, 79, 315: 560-566.*

Belli. P., (1996) *Hanbook on economic analysis of investment operations research.* Policy Department, The World Bank, Washington, DC.

Brealey R. y Myers, S. (1985) *Principles of corporate finance.* 3ª Ed. (5ª Ed.1996) Mc Graw-Hill. Nueva York.

Cantor, D. G. y Lippman, S. A. (1995) "Optimal Investment Selection with a Multitude of Projects". *Econometrica, 63, 5: 1231-1240.*

---

[8] El lector interesado puede preguntarse que ocurre cuando a) tanto la tasa de descuento como algunas TIR son menores que menos uno y b) la tasa de descuento es mayor (menor) que menos uno y algunas TIR son menores (mayores) que menos uno. La respuesta es trivial.

[9] El resultado del análisis de la monotonía de la función VAN aquí realizado contrasta con la reciente contribución de Saak y Hennessy (2001) para el caso continuo. En casos especiales la función VAN es monótona, como se demuestra en Arrow y Levhari (1969)

Castelo, D. (2001). "Anomalies in net present value calculations?". *Economics Letters, 72: 127-129.*

Gronchi, S. (1986). "On Investment criteria based on the Internal Rate of Return". *Oxford Economic Series, New Series 38, 1: 174-180.*

Hawkins, C. J. y Pearce, D. W. (1974) *Evaluación de las inversiones.* MacMillan/Vicens-Vives. Barcelona.

Herreolen, W. S., Van der Dommelen, P. y Demeulemeester, E. L. (1995) "Project network models with discounted cash flows a guided tour trough recent developments". *European Journal of Operational Research, 100: 97-121.*

Hirshleifer, J. (1958) "On the Theory of Optimal Investment Decision". *The Journal of Political Economy, 66, 4: 329-352.*

Massé, P. (1962) *Optimal investment decisions. Rules for action and criteria for choice.* Prentice-Hall Inc. London.

Montllor, J. (1978) "Un modelo determinista de proyectos agregados de inversión-financiación: El valor final neto". *Económicas y empresariales, 9: 152-163.*

Oehmke, J. F. (2000) "Anomalies in net present value calculations" *Economics Letters 67: 349-351.*

Pasqual, J., Tarrío, J.A. and Pérez, M.J. (2005) "Anomalies in net present value calculations. A solution" *Hacienda Pública Española / Revista de Economía Pública,vol 173 nº 2, pp 47-60.*

Peumans, H. (1974) *Valoración de proyectos de inversión.* Ed. Deusto. Bilbao.

Promislov, D. S. y Spring D. (1996) "Postulates for the internal rate of return of an investment project" *Journal of Mathematical Economics, 26: 325-361.*

Rodríguez, A. (1984) *Matemática de la inversión.* Ed El Autor. Barcelona.

Ross, S. R. (1995) "Uses, Abuses, and Alternatives to the Net-Present-Value Rule". *Financial Management, 24, 3: 96-102.*

Saak, A. y Hennessy D. A. (2001) "Well-behaved cash flows". *Economics Letters 73: 81-88.*

Solanet, M. A., Cozzetti, A. y Rapetti, E. O. (1984) *Evaluación económica de proyectos de inversión.* Ed. El Ateneo. Buenos Aires.

Souto, G. (2001) *Trabajo y capital en la evaluación pública de proyectos.* Instituto de Estudios Fiscales. Madrid.

Teichroew, D., Robicheck, A. y Montalbano, M. (1965a) "Mathematical Analysis of Rates of Return under Certainty". *Management Science, 11: 395-403.*

Teichroew, D., Robicheck, A. y Montalbano, M. (1965b) "An Analysis of Criteria for Investment and Financing Decisions under Certainty". *Management Science, 12: 151-179.*

Weston, J. F. y Brigham, E. F. (1984) *Finanzas en administración.* Ed. Interamericana. México.

ANEXO I

DEFINICIONES BÁSICAS Y RESULTADOS

Valor actual neto (VAN). Mide la variación que se produce en la riqueza hoy (período 0) por realizar el proyecto:

$$VAN = N(C_t, r) = \sum_{t=0}^{M+T} \frac{C_t}{(1+r)^t} \qquad (1)$$

con $r \neq -1$, siendo M el momento en el que se ejecuta el proyecto.

Aditividad. El VAN del proyecto A más el VAN del proyecto B es igual al VAN de la suma de ambos proyectos:

$$N(C^A_t; r) + N(C^B_{t'}; r) = N(C^A_t + C^B_{t'}; r) \qquad (2)$$

Tasa interna de rentabilidad (TIR). Las TIRs r_j^*, $j = 1, \ldots, J$, miden la tasa de variación de la riqueza generada por el proyecto por unidad de tiempo. Se definen como:

$$\text{todas aquellas } r_j^* \text{ reales tales que } N(C_t, r_j^*) = 0 \qquad (3)$$

Condición básica para todo indicador de deseabilidad de un proyecto: el indicador mejora frente a cualquier mejora[10] del proyecto.

Tipos de proyectos
a- Inversión: todo proyecto cuyas cantidades tienen signos positivos y negativos, se comporta como una inversión en el intervalo (r^a, r^b), $r^a \leq r^b$, si $\partial N(C_t, r)/\partial r < 0$ en el intervalo.
b- Crédito: todo proyecto cuyas cantidades tienen signos positivos y negativos, se comporta como un crédito en el intervalo (r^a, r^b) , $r^a \leq r^b$, si $\partial N(C_t, r)/\partial r > 0$ en dicho intervalo.
c- Regalo: Todo proyecto con flujos no negativos y al menos uno estrictamente positivo.
d- Pérdida: Todo proyecto con flujos no positivos y al menos uno estrictamente negativo

Criterios de aceptación
a- Aceptación de un proyecto.
La regla de aceptación para el VAN, sea cual sea el tipo de proyecto[11], es $N(C_t, r) \geq 0$.

[10] Se entiende aquí, que un proyecto mejora siempre que aumenta el valor de un flujo cualquiera o se añade (suprime) un flujo positivo (negativo) $\forall r \in \Re$. Si r > 0, el proyecto mejora si se adelanta (atrasa) un flujo positivo (negativo) mientras que si r < 0 ocurre lo contrario. Ante una mejora el VAN aumenta siempre. Si existe por lo menos una raíz, ante una mejora del proyecto, la TIR aumenta su valor cuando el proyecto se comporta como una inversión y disminuye en el caso de un crédito.

El criterio de la TIR es aplicable cuando existe por lo menos una raíz[12] de $N(C_t,r)$. Si la TIR (r^*) es única, se acepta el proyecto si la TIR no es menor (no es mayor) que la tasa de descuento (r^0) cuando se trata de una inversión (crédito):

$$r^* \geq r^0 \text{ si el proyecto se comporta como una inversión} \quad (4)$$

$$r^* \leq r^0 \text{ si el proyecto se comporta como un crédito} \quad (5)$$

Para determinar si el proyecto se comporta como una inversión o un crédito se observa el signo de la derivada de $N(C_t,r)$ en el punto $r^*+\varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow 0$, si $r^* < r_0$ y en $r^*-\varepsilon$ cuando $r^* > r_0$.

Si existe más de una TIR se aplica el criterio de la misma forma, una vez escogida la TIR relevante en cada caso, como se muestra seguidamente. Sean $r^*_1 < r^*_2 < \ldots < r^*_n$ las n raíces reales de la función VAN y r^0 el coste del capital, la TIR r* relevante es:

$$r^*_1 \text{ si } r^0 \leq r^*_1 \quad (6)$$

$$r^*_s \text{ y } r^*_{s+1} \text{ si } r^*_s \leq r^0 \leq r^*_{s+1} \quad (7)$$

$$r^*_n \text{ si } r^0 \geq r^*_n \quad (8)$$

b- Elección entre dos proyectos X e Y. Se conviene que X es preferible o indiferente a Y si y sólo si el proyecto diferencia (X-Y), cuyos flujos son (C^X_t - $C^Y_{t'}$), es aceptable.

Proposición.
Si existe por lo menos una TIR, entonces los criterios VAN y TIR coinciden[13].

[11] La condición VAN ≥ 0 se puede interpretar como de no rechazo y no se mantiene necesariamente en un problema de selección de proyectos -ver Cantor y Lippman (1995)- dado que un proyecto puede comportarse como inversión o como crédito (ver 2.6 y 3.4).
[12] Se supone que tanto la TIR como la tasa de descuento es mayor que menos uno.
[13] La demostración se presenta en Pasqual, Tarrío y Pérez (2005).