

# COMPARACIÓN DE DISTINTAS TÉCNICAS DE MODELADO ROBÓTICO DE UN BRAZO INDUSTRIAL UTILIZANDO ALGEBRA GEOMÉTRICA CONFORMAL Y ALGEBRA DE MATRICES

Jesús A. Medrano<sup>1</sup>, Emilio Sánchez<sup>1</sup>, Iván Zendejas-Hernández<sup>2</sup>, Ricardo Jara<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Depto. De Control Automático.

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional Unidad Guadalajara.

Av. Del Bosque 1145, Col. del Bajío, Zapopan, 45019, Jalisco, México.

Tel +52(333) 777 3609

e-mail: [jamedrano@gdl.cinvestav.mx](mailto:jamedrano@gdl.cinvestav.mx), [esortega@gdl.cinvestav.mx](mailto:esortega@gdl.cinvestav.mx), [rjara@gdl.cinvestav.mx](mailto:rjara@gdl.cinvestav.mx)

<sup>2</sup>Depto. De Control Automático.

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey Campus Chihuahua.

Av. Heróico Colegio Militar 4700, Col. Nombre de Dios, 31300, Chihuahua México.

Tel +52(614) 439 5000

e-mail: [izendejas@itesm.mx](mailto:izendejas@itesm.mx)

## RESUMEN.

El presente artículo habla sobre una comparativa entre varios modelados robóticos, lo anterior ya que se ha comprobado que existen distintas y muy variadas técnicas para modelar sistemas robóticos en la literatura, por lo cual en este texto se ilustran algunos modelados para mostrar ventajas y desventajas de cada uno de ellos. Por un lado se exhibe el modelado clásico por medio de matrices homogéneas, y por otro un modelado diferente a lo usual, el cual es denominado utilizando Algebra Geométrica Conformal.

Palabras Clave: Modelado, Algebra Geométrica Conformal, Algebra de Matrices.

## ABSTRACT.

The present paper talks about a comparative between two different kinds to the robot modeling. In the literature there exist a lot of types of robot modeling as quaternions, homogeneous matrix, etc. Each technic has advantages and disadvantages, therefore in this text we want to focus in two technics and show the advantages and disadvantages of each method. The two methods to implement are using the Conformal Geometric Algebra and using the Matrix Algebra.

Keywords: Model, Conformal Geometric Algebra, Matrix Algebra

## 1. INTRODUCCIÓN

El modelado robótico es sin duda alguna de suma importancia a la hora de diseñar un robot, ya que mediante dicha técnica se pueden simular movimientos del robot y probarlo sin necesidad de manufacturarlo. La investigación mediante matrices homogéneas se encuentra ampliamente estudiado, por lo cual no es necesario mencionarlo tan afondo, los interesados en observar dicho estudio pueden observar las siguientes referencias [1]. Ahora mediante la técnica utilizando Algebra Geométrica Conformal es conveniente hablar un poco sobre las propiedades del Algebra Geométrica, dichas propiedades se ilustran en la siguiente sección.

## 2. ALGEBRA GEOMÉTRICA

El álgebra geométrica, también conocida como álgebra de Clifford (denominada de tal manera por el matemático William K. Clifford) es una herramienta que mediante una serie de operaciones y propiedades cuenta con la aptitud de extender el sistema de números reales hacia el cálculo vectorial [2]. Sin embargo, esta algebra fue olvidada por el pronto fallecimiento de Clifford; así fue hasta la década de 1960 cuando el Algebra Geométrica fue vuelta a la escena por medio del matemático David Hestenes, donde planteó dicha algebra como una herramienta para unificar los conceptos de la geometría con el álgebra y la trigonometría, ya que con lo anterior se facilitarían las aplicaciones en las diversas áreas.

Como aportación fundamental se encuentra el producto Clifford, el cual es una multiplicación de vectores que satisface las propiedades de los números reales, donde también es llamado como producto geométrico, la Ecuación 1 muestra el producto Clifford.

$$ab = a \cdot b + a \wedge b \quad (1)$$

Donde  $a, b$  suele ser un vector o incluso un multivector (se definirá próximamente en el texto). El resultado que se observa en la Ecuación 1 hace referencia a una suma entre dos operadores, el primero de ellos es el producto interno que suele ser muy utilizado y no es necesario enfocarse en dicho operador, pero el segundo es nombrado el producto exterior o *wedge*, el cual es una multiplicación asociativa y distributiva con funciones multilineales, pero dicha multiplicación a diferencia del producto interior es anti-conmutativa. Una relación a resaltar es que en cierta forma el producto *wedge* se comporta como el producto cruz pero para distintas dimensiones, es decir, se sabe que el producto cruz sólo puede

ser manejado en un espacio tridimensional ( $R^3$ ), pero por otro lado el producto exterior puede utilizarse en cualquiera; así de esa manera utilizando el álgebra geométrica podríamos decir que podemos obtener propiedades tipo como el producto cruz pero en cualquier dimensión (realizando una cierta transformación). Además de que el producto exterior en el álgebra geométrica puede comportarse como un operador de expansión y también como de intersección entre objetos geométricos [1].

A lo largo de este texto se especifica la algebra geométrica mediante  $G_n$ , donde  $n$  representa la dimensión en la cual se trabaja, es decir,  $n$  puede ser representado por la suma de  $p$ ,  $q$  y  $r$  ( $G_{n=p,q,r}$ ), donde  $p$ ,  $q$  y  $r$  representan las bases (la base vectorial se representa como  $e_i$ ) que su valor cuadrático son: 1, -1 y 0, respectivamente. El álgebra geométrica cuenta con ciertas propiedades, donde el producto Clifford entre las distintas bases que se manejen del algebra debe de cumplir con lo mencionado en la Ecuación 2.

$$e_i e_j = \begin{cases} 1 & \forall i = j \in 1, \dots, p \\ -1 & \forall i = j \in p + 1, \dots, p + q \\ 0 & \forall i = j \in p + q + 1, \dots, n \\ e_i \wedge e_j & \forall i \neq j \end{cases} \quad (2)$$

Los valores de  $i, j \in [0, \infty]$ . Mediante la Ecuación 2 se crea el generador del algebra, el cual se expresa mediante la Ecuación 3.

$$\{1; e_i; e_i \wedge e_j; e_i \wedge e_j \wedge e_k; \dots; I = e_i \wedge e_j \wedge \dots \wedge e_n\} \quad (3)$$

Donde  $I$  representa el pseudoescalar y es una combinación de todas las bases. Con el generador ilustrado se introduce el concepto de multivector, es decir, un multivector es una combinación lineal de diferentes  $k$ -vectores, donde los  $k$ -vectores son los distintos tipos de estructuras del generador ( $1; e_i; e_i \wedge e_j; e_i \wedge e_j \wedge e_k \dots$ ), donde  $k$  representa el orden de cada elemento. El primer elemento 1 es la parte escalar (0-vector), el segundo  $e_i$  es elemento de orden uno denominado vector (1-vector), el tercero  $e_i \wedge e_j$  es de segundo orden también llamado bivector (2-vector), y así sucesivamente hasta llegar al pseudoescalar. El número de elementos del generador quedan dependientes del algebra geométrica que se maneje, mediante  $2^n$ . Para ejemplificar de mejor manera lo descrito, si se cuenta con una algebra  $G_{2,0,0}$  ( $R^2$ ), entonces el generador va a contar con cuatro elementos, y un multivector que maneje todos los elementos de dicho algebra puede observarse en la Ecuación 4.

$$M = \alpha_1 + \alpha_2 e_1 + \alpha_3 e_2 + \alpha_4 I \quad (4)$$

Donde  $M$  es el multivector y  $\alpha_i$  es un escalar multiplicativo a las distintas bases y al pseudoescalar. Observar como el ejemplo se encuentra en un espacio  $R^2$ , se cuenta con dos bases ortogonales denominadas por  $e_1$  y  $e_2$ .

## 2.1. Algebra geométrica conformal

El álgebra geométrica conformal (AGC) es representado mediante  $G_{4,1,0}$  (también escrita en la literatura mediante  $G_{4,1}$ ), esta algebra es elegida ya que es indispensable en distintas áreas a trabajar con entidades geométricas y el álgebra geométrica conformal tiene una muy buena relación con lo mencionado. Cuando se trabaja en robots es común utilizar matrices homogéneas en un espacio tridimensional ( $R^3$ ), por lo que para trabajar con algebra geométrica hay que embeber la representación de  $R^3$  en un espacio  $G_{4,1}$ , para observar lo anterior es necesario ir a [3], por otra parte para visualizar y entrar de forma más concreta a lo mencionado anteriormente se debe consultar [1].

Mediante el uso de algebra geométrica conformal es posible representar algebraicamente distintas entidades geométricas, las cuales ayudan a desarrollar distintos algoritmos como puede ser modelar un sistema robótico, por lo que a continuación se ilustran las distintas entidades que pueden modelarse mediante el AGC.

**El punto.** El punto, desde una vista cartesiana, puede ser representado mediante un vector, pero por medio del AGC se representa como la Ecuación 5.

$$x_c = x_e + \frac{1}{2} x_e^2 e_\infty + e_0 \quad (5)$$

Donde  $x_c$  es un punto conformal,  $x_e \in R^3$  es un punto euclidiano,  $e_\infty$  es el punto en el infinito denotado por  $e_\infty = \frac{e_4 - e_5}{2}$ . Las propiedades de los puntos en el origen y en el infinito van relacionadas con la proyección estereográfica, el lector interesado en su desarrollo puede observarse en [1-3].

**La línea.** La línea en el AGC se crea por medio del producto exterior, es decir, como el producto *wedge* cuenta con la característica de poder expandir, entonces al unir dos puntos y expandirlo hacia el infinito va a dar como resultante la línea (Ecuación 6).

$$L^* = x_{c_1} \wedge x_{c_2} \wedge e_\infty \quad (6)$$

Donde  $L^*$  es la línea en conformal (en su forma dual),  $x_{c_i}$  es un punto conformal y  $e_\infty$  es el punto en el infinito.

**El plano.** El plano al igual que la línea en el AGC se crea por medio del producto exterior, es decir, se observa que en la línea es necesario expandir dos puntos y el punto en el infinito, por lo tanto para la creación del plano es necesario expandir tres puntos conformales y el punto en el infinito, tal como se ilustra en la Ecuación 7.

$$\pi^* = x_{c_1} \wedge x_{c_2} \wedge x_{c_3} \wedge e_\infty \quad (7)$$

Como se fue describiendo anteriormente, se van creando distintas entidades geométricas de forma similar, donde las distintas entidades que se pueden crear en AGC se ilustran en la Tabla 1.

Tabla 1. Representación de entidades en AGC

Entidad	Representación IPNS	Representación OPNS
Punto	$x_c = x_e + \frac{1}{2}x_e^2 e_\infty + e_0$	$x_c^* = s_1 \wedge s_2 \wedge s_3 \wedge s_4$
Línea	$L = nI_e - e_\infty mI_e$	$L^* = x_{c_1} \wedge x_{c_2} \wedge e_\infty$
Plano	$\pi = n + de_\infty$	$\pi^* = x_{c_1} \wedge x_{c_2} \wedge x_{c_3} \wedge e_\infty$
Círculo	$z = s_1 \wedge s_2$	$z^* = x_{c_1} \wedge x_{c_2} \wedge x_{c_3}$
Par de puntos	$P_p = s_1 \wedge s_2 \wedge s_3$	$P_p = x_{c_1} \wedge x_{c_2}$
Esfera	$s = x_c - \frac{1}{2}\rho^2 e_\infty$	$s^* = x_{c_1} \wedge x_{c_2} \wedge x_{c_3} \wedge x_{c_4}$

En la Tabla 1 se muestran dos representaciones, una es la IPNS (*Inner Product Null Space*) y la otra es OPNS (*Outer Product Null Space*). Ambos espacios descritos son isomorfos, por lo que si se trabaja en cualquiera de los dos espacios es equivalente al otro, claro está, con una transformación de por medio [1]. Descrito lo anterior, se dice que las entidades representadas en OPNS son la forma dual de las entidades en IPNS. La transformación mencionada para pasar de una representación a otra se muestra en la Ecuación 8.

$$IPNS = I_c Q(OPNS) \text{ y } OPNS = I_c^{-1} Q(IPNS) \quad (8)$$

Donde  $I_c$  es el pseudoescalar conformal ( $I = e_1 e_2 e_3 e_4 e_5$ ),  $Q(IPNS)$  es cualquier entidad de la Tabla 1 representada en IPNS y  $Q(OPNS)$  es cualquier entidad de la Tabla 1 representada en OPNS.

**Reflexión.** Las transformaciones rígidas son de gran importancia ya que con ellas podemos modelar cualquier robot, por parte de la reflexión la forma de representarse es por medio de la Ecuación 9.

$$Q' = -\pi Q \pi^{-1} \quad (9)$$

Donde como se mencionó anteriormente,  $Q$  es cualquier entidad geométrica y  $Q'$  la entidad ya aplicando la reflexión.

**Traslación.** La traslación se representa en AGC como dos reflexiones con planos paralelos, tal como la Ecuación 10 y 11 lo describe.

$$Q' = \pi_2 \pi_1 Q \pi_1^{-1} \pi_2^{-1} = T_a Q \widetilde{T}_a \quad (10)$$

$$T_a = \pi_2 \pi_1 = e^{\frac{x_e}{2} e_\infty} \text{ y } \widetilde{T}_a = \pi_1^{-1} \pi_2^{-1} = e^{-\frac{x_e}{2} e_\infty} \quad (11)$$

Con  $x_e$  (distancia euclidiana) y donde  $\widetilde{T}_a$  es la traslación aplicándole el operador de reversa (ver [1]).

**Rotación.** La rotación se representa en AGC como dos reflexiones con planos no paralelos, tal como las Ecuaciones 12 y 13 lo describen.

$$Q' = \pi_2 \pi_1 Q \pi_1^{-1} \pi_2^{-1} = R_\theta Q \widetilde{R}_\theta \quad (12)$$

$$R_\theta = n_2 n_1 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) l = e^{-\frac{\theta}{2} l} \text{ y } \widetilde{R}_\theta = \pi_1^{-1} \pi_2^{-1} = e^{\frac{\theta}{2} l} \quad (13)$$

Con  $l = n_2 \wedge n_1$  ( $n_i$ =plano) y  $\theta$  es el valor angular a rotar. Las transformaciones que realizan los robots involucran rotaciones y traslaciones, por lo que es necesario combinar dichas transformaciones, tal como se ilustra en las Ecuaciones 14 y 15.

$$Q' = TR\widetilde{T}Q\widetilde{T}R\widetilde{T} = M_\theta Q \widetilde{M}_\theta \quad (14)$$

$$M_\theta = TR\widetilde{T} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) L = e^{-\frac{\theta}{2} L} \quad (15)$$

Donde  $M_\theta$  es la transformación denominada como motor y  $L$  es la combinación de la rotación y traslación ( $l + e_\infty(x_e, l)$ ).

## 2.2. Cinemática directa utilizando AGC

La cinemática directa es la relación de posición y traslación entre distintos eslabones, donde en un robot generalmente se utiliza la relación de la base con el efector final. La forma de resolver lo anterior mediante AGC es con el operador motor, donde la Ecuación 16 muestra la forma de operarlo para  $n$  grados de libertad.

$$Q' = M_{\theta_1} \dots M_{\theta_n} Q \widetilde{M}_{\theta_n} \dots \widetilde{M}_{\theta_1} = (\prod_{i=1}^n M_i) Q (\prod_{i=1}^n \widetilde{M}_{n-i+1}) \quad (16)$$

Este método se vuelve iterativo y muy intuitivo, donde como propiedad por cada grado de libertad va a existir un operador motor. El modelo robótico a implementar en este texto es un robot tipo SCARA industrial y se observa en la Figura 1 [5].



Figura 1. Robot industrial SCARA

De la Figura 1 se obtienen los sistemas coordenados a modelar, los cuales se muestran en la Figura 2.

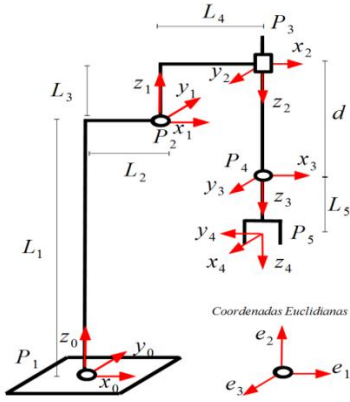


Figura 2. Sistemas coordenados del robot SCARA

Se observa en la Figura 2 que se ilustran las coordenadas euclidianas, en base a ellas se modela el sistema. Encontrando los puntos  $P_i$  mediante el plano euclidiano se obtienen las Ecuaciones 17-19.

$$P_1 = 0; P_2 = L_2 e_1 + L_1 e_2; P_3 = (L_2 + L_4) e_1 + (L_1 + L_3) e_2 \quad (17)$$

$$P_4 = (L_2 + L_4) e_1 + (L_1 + L_3 - d) e_2 \quad (18)$$

$$P_5 = (L_2 + L_4) e_1 + (L_1 + L_3 - d - L_5) e_2 \quad (19)$$

Por su parte los motores quedan representados mediante las Ecuaciones 20-23. Note que el punto euclidiano  $x_e$  en este caso va a ser  $P_i$ .

$$M_{\theta_1} = e^{-\frac{\theta}{2}(l + e_{\infty}(x_e, l))} = e^{-\frac{\theta_1}{2}(l)} \quad (20)$$

$$M_{\theta_2} = e^{-\frac{\theta}{2}(l + e_{\infty}(x_e, l))} = e^{-\frac{\theta_2}{2}(e_3 e_1 + e_{\infty}(P_2, e_3 e_1))} \quad (21)$$

$$M_{\theta_3} = e^{-\frac{\theta}{2}(l + e_{\infty}(x_e, l))} = 1 \quad (22)$$

$$M_{\theta_4} = e^{-\frac{\theta}{2}(l + e_{\infty}(x_e, l))} = e^{-\frac{\theta_4}{2}(e_1 e_3 + e_{\infty}(P_4, e_1 e_3))} \quad (23)$$

Donde  $M_{\theta_3}$  es igual a uno por ser una junta transversal. Con lo mencionado anteriormente la cinemática directa que relaciona la base con el efector final queda definida mediante la Ecuación 24.

$$P'_5 = M_{\theta_1} M_{\theta_2} M_{\theta_4} P_5 \tilde{M}_{\theta_4} \tilde{M}_{\theta_2} \tilde{M}_{\theta_1} \quad (24)$$

### 2.3. Cinemática inversa utilizando AGC

La obtención de los distintos valores angulares por medio de AGC se realiza utilizando relaciones geométricas, donde la representación desde una vista transversal se observa en la Figura 3.

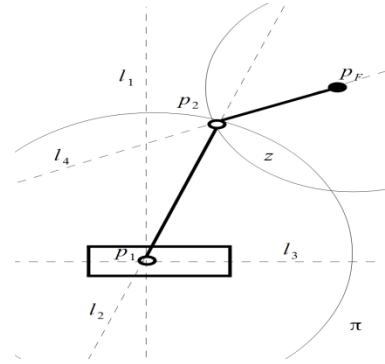


Figura 3. Representación geométrica en el plano transversal

Las entidades creadas en la Figura 3 y los distintos ángulos requeridos se obtienen mediante las Ecuaciones 25-29.

$$P_F = P_{deseado}; s_1 = P_1 - \frac{1}{2} L_2^2 e_{\infty}; s_2 = P_F - \frac{1}{2} L_4^2 e_{\infty} \quad (25)$$

$$z = s_1 \wedge s_2; l_1^* = e_3(e_{\infty} \wedge e_0); \pi^* = l_1^* \wedge P_F \quad (26)$$

$$P_p = z \wedge \pi; P_{12} = \frac{PP^* \pm \sqrt{PP^* \cdot PP^*}}{PP^* \cdot e_{\infty}} \quad (27)$$

$$l_2^* = e_{\infty} \wedge P_1 \wedge P_2; l_3^* = e_1(e_{\infty} \wedge e_0); l_4^* = e_{\infty} \wedge P_2 \wedge P_F \quad (28)$$

$$\theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{l_2^* \cdot l_3^*}{|l_2^*| |l_3^*|}\right); \theta_2 = -\cos^{-1}\left(\frac{l_2^* \cdot l_4^*}{|l_2^*| |l_4^*|}\right) \quad (29)$$

El valor angular  $\theta_4$  se omite ya que para el propósito de este artículo es innecesario, por otro lado el grado de libertad que falta de este robot de cuatro grados de libertad es tipo prismática, para encontrar dicho grado adicional se ilustra la Figura 2, claramente se observa que  $d = L_1 + L_3 - L_5 - e_2(P_F)$ ; donde  $e_2(P_F)$  es el valor de  $e_2$  en el punto final ( $P_F$ ).

## 3. ALGEBRA DE MATRICES

El modelado robótico por medio de AM (álgebra de matrices) es el más utilizado en la literatura [5, 6], diversos grupos manejan las denominadas matrices homogéneas para encontrar la relación de los distintos eslabones.

### 3.1. Cinemática directa utilizando AM

El modelado directo utilizando AM es una técnica que involucra la multiplicatoria de las distintas matrices homogéneas que se derivan de cada eslabón, donde para el caso del robot estudiado en este texto se encuentra la Ecuación 30 [5,6].

$$T_0^4 = T_0^1 T_1^2 T_2^3 T_3^4 \quad (30)$$

Así cada valor  $T_{i-1}^i$  representa una matriz homogénea; así de acuerdo a los sistemas coordenados de la Figura 2 y a la multiplicatoria mencionada anteriormente se obtiene la

Ecuación 31, la cual es la relación entre la base y el efector final del robot manipulador.

$$T_0^4 = \begin{bmatrix} \cos_{12-4} & -\sin_{12-4} & 0 & L_2 \cos_1 + L_4 \cos_{12} \\ -\sin_{12-4} & -\cos_{12-4} & 0 & L_2 \sin_1 + L_4 \sin_{12} \\ 0 & 0 & -1 & L_1 + L_3 - L_5 - d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Donde  $\cos_{12-4} = \cos(\theta_1 + \theta_2 - \theta_4)$ ,  $\sin_{12-4} = \sin(\theta_1 + \theta_2 - \theta_4)$ ,  $\cos_1 = \cos(\theta_1)$ ,  $\sin_1 = \sin(\theta_1)$ ,  $\cos_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$  y  $\sin_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$ .

### 3.2. Cinemática inversa utilizando trigonometría

Existen diversas formas de realizar la cinemática inversa de un manipulador, donde para efectos de simplicidad se realiza una relación de triángulos, es decir, utilizando trigonometría en base a la Figura 2 (ver Ecuaciones 32-34) [6].

$$\alpha = \text{atan2}(e_2(P_F), e_1(P_F)); c = \sqrt{e_1(P_F)^2 + e_2(P_F)^2} \quad (32)$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{L_2^2 - L_4^2 - c^2}{-2L_4c}\right); \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{c^2 - L_2^2 - L_4^2}{-2L_2L_4}\right) \quad (33)$$

$$\theta_1 = \alpha + \beta; \theta_2 = \gamma - \pi \quad (34)$$

El grado de libertad  $d$ , se demuestra de la misma manera anteriormente ilustrada, es decir,  $d = L_1 + L_3 - L_5 - e_2(P_F)$ .

## 4. TRAYECTORIAS

El método de trayectorias a implementar es la técnica de polinomios cúbicos a trazos 4-3-4, con el cual se realiza cierta trayectoria deseada. Para efectuar el método es necesario dividir la ruta en tres polinomios, donde las Ecuaciones 35-37 representan los polinomios utilizados [7].

$$h_1 = a_{14}t^4 + a_{13}t^3 + a_{12}t^2 + a_{11}t + a_{10} \quad (35)$$

$$h_2 = a_{23}t^3 + a_{22}t^2 + a_{21}t + a_{20}t \quad (36)$$

$$h_3 = a_{34}t^4 + a_{33}t^3 + a_{32}t^2 + a_{31}t + a_{10} \quad (37)$$

Cada polinomio representado anteriormente se refiere a la posición de la trayectoria, sin embargo para la determinación de la velocidad y aceleración es necesario implementar las Ecuaciones 38 y 39 respectivamente.

$$\dot{h}_i = \frac{d}{dt} h_i \quad (38)$$

$$\ddot{h}_i = \frac{d^2}{dt^2} h_i \quad (39)$$

En primera instancia para facilitar el análisis se normaliza el tiempo en cada tramo, una vez normalizado se obtienen los valores de cada coeficiente en cada intervalo, el resultado de las trayectorias se ilustra en las Figuras 4-6.

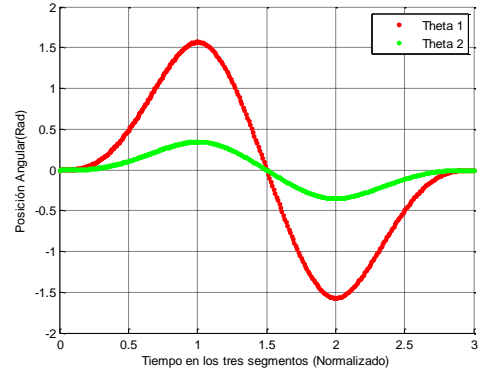


Figura 4. Perfil de posición angular

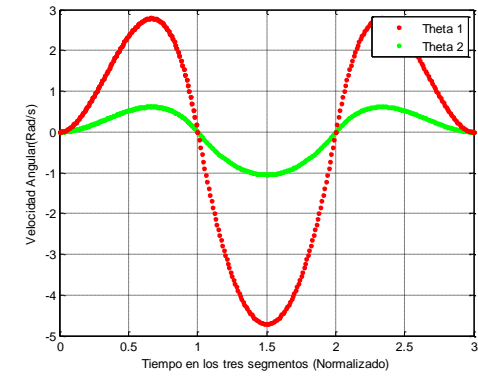


Figura 5. Perfil de velocidad angular

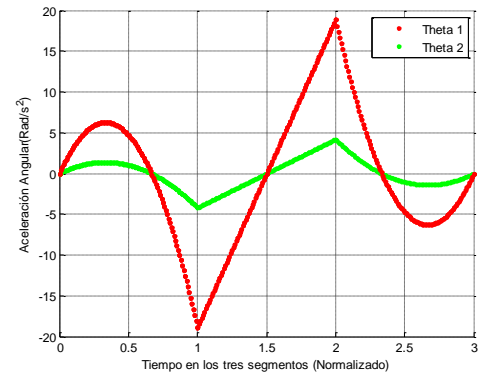


Figura 6. Perfil de aceleración angular

## 5. RESULTADOS

Utilizando el modelado mediante AGC se verifica la capacidad del mismo, lo anterior por medio de aplicar las trayectorias definidas anteriormente. Para poder ilustrar cada punto conformal en coordenadas euclidianas se aplica la Ecuación 40 [2].

$$P_E(P_5^i) = (P_E \wedge (e_0 \wedge e_{\infty}))(e_0 \wedge e_{\infty}) \quad (40)$$

Efectuado lo anterior se ilustra la Figura 7, la cual es el resultado utilizando AGC implementando la trayectoria, donde  $d \in [d_{inicial}, n]$ . Nota, para efectos de visualización se hizo un sobre paso en la trayectoria definida, es decir, se hace un muestreo de la trayectoria cada diez muestras.

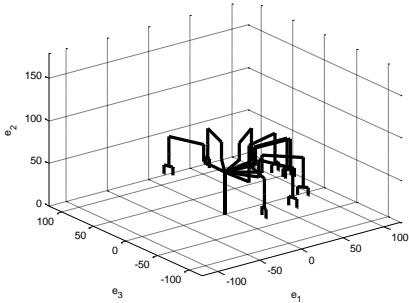


Figura 7. Algoritmo del robot utilizando AGC

Por otra parte, el resultado del comportamiento del sistema utilizando AM se muestra en la Figura 8, por obvias razones es el mismo que el método con AGC.

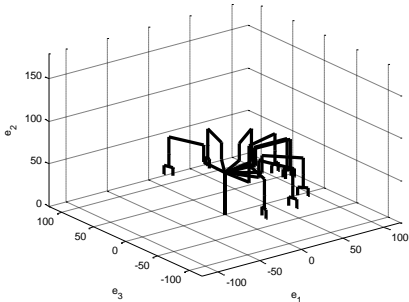


Figura 8. Algoritmo del robot utilizando AM

Como comparativa entre los dos modelos se efectúa una prueba estadística de treinta mediciones para medir el tiempo computacional en cada técnica. Dichas pruebas de AGC y AM se ilustran en las Figuras 9 y 10, respectivamente. Donde el tiempo en las figuras representa distribución (Tiempo ( $\sigma$ )).

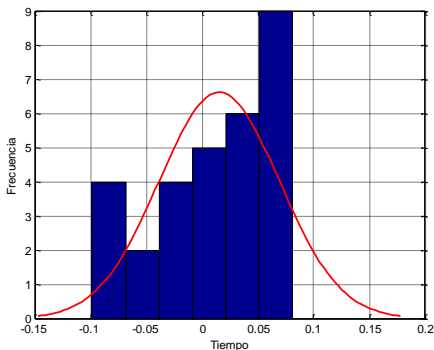


Figura 9. Histograma de la prueba utilizando AGC

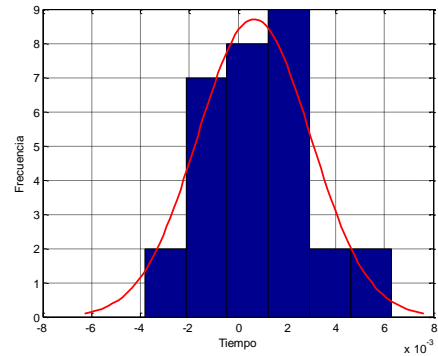


Figura 10. Histograma de la prueba utilizando AM

## 6. CONCLUSIONES Y TRABAJO A FUTURO

A lo largo del trabajo se ilustra el modelado del robot mediante dos técnicas, lo anterior en base al modelado cinemático. Cabe resaltar que sin lugar a dudas mediante la prueba estadística el modelado con AGC lleva ventaja sobre el AM, sin embargo, la aplicación en este trabajo es simple, pero conforme aumentan los grados de libertad de algún manipulador aumenta la complejidad del robot y el AM se vuelve un método tedioso; por su parte el AGC mantiene la misma esencia. Además, al trabajar con matrices en algunos casos suelen surgir singularidades, donde en AGC no existen.

En el texto se observaron dos tipos de modelados, sin embargo, a futuro se debe de ilustrar algunos otros, como pueden ser los cuaterniones por mencionar alguno. Además por la limitante del texto no se ilustra el modelado dinámico, que es parte fundamental del modelado robótico y es a considerarse.

## 7. REFERENCIAS

- [1] E. Bayro-Corrochano, Geometrical Computing for Wavelet Transforms, Robot Visio, Learning, Control and Action, Londres, Ed. Springer-Verlag, 2010.
- [2] Oscar E. Carbajal, “Modelado y Control de un Robot Humanoide”, Tesis Doctoral, Dep. Control Automático, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados de Instituto Politécnico Nacional Unidad Guadalajara, Zapopan, 2015.
- [3] H. Li, D. Hestener, and A. Rockwood, “Generalized Homogeneous Coordinates for Computational geometry”, *Geometric Computing with Clifford Algebras*, Heidelberg, 2001, pp. 27-52.
- [5] John J. Craig, Robótica, Edo. de México, Ed. PEARSON, 2006. <http://new.abb.com/products/robotics/es/robots-industriales/irb-2400>.
- [6] Mario L Chacón, Rafael Sandoval, Javier Vega, Percepción Visual Aplicada a la Robótica, Ciudad de México, Ed. ALFAOMEGA, 2015, pp. 1-362.
- [7] Jesús A. Medrano, “Implementación a Escala de un Exoesqueleto de Miembros Inferiores para la Movilidad y Rehabilitación de Personas con Deficiencia Motriz”, Tesis Maestría, Departamento de Posgrado e Investigación, Instituto Tecnológico de Chihuahua, Chihuahua 2015.