Ejemplo de aplicación de cinemática directa e inversa a un manipulador de 2 grados de libertad.

Israel.Cerón-Morales[1]

[1]Maestría en Ingeniería en Automatización de Procesos Industriales

Universidad Politécnica de Puebla
3er. Carril del ejido serrano s/n, San Mateo Cuanalá, Puebla, México. C.P. 72640

Israel.ceron@uppuebla.edu.mx

***Resumen*- Este documento presenta un ejemplo de aplicación de cinemática directa e inversa a un manipulador de dos grados de libertad. La manera rápida de explicar este ejercicio es propicia para estudiantes de alto rendimiento que buscan información puntual con relación a este tema y que cuentan con las bases matemáticas necesarias para entender lo desarrollado en este trabajo. Se presentan de manera concisa las soluciones de aplicar la cinemática directa e inversa a un manipulador de dos grados de libertad.**

***Palabras Clave*- Cinemática Directa, Cinemática Inversa, Manipulador.**

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo aporta un ejemplo rápido y conciso de la aplicación de la cinemática directa y de la cinemática inversa a un manipulador de dos grados de libertad, se debe de contar con conocimientos de algebra lineal amplios para entender el desarrollo realizado.

ANTECEDENTES

El uso del manipuladores es muy utilizado en actividades académicas e industriales, y el empleo de este tipo de robots es creciente, por lo que entender los algoritmos de comportamiento de estos mecanismos es básico en la formación de todo estudiante de ingeniería, por lo anterior es necesario aportar ejemplos que puedan ser de utilidad a estudiantes que requieren este tipo de conocimientos.

Existen textos en español que aportan amplia teoría acerca de los robots manipuladores [1], y textos especializados en el algebra lineal [2].los textos que aparecen en la bibliografía son amplios y detallados para ser aplicados al ejemplo aquí presentado sin embargo con el propósito de ahorrar tiempo este trabajo presenta una breve aplicación de la cinemática directa de inversa a un manipulador de dos grados de libertad.

DESARROLLO

En la Figura 1 vemos un esquema de un manipulador de dos grados de libertad.

Cinemática directa:

Primero aplicaremos la cinemática directa, lo que significa que las siguientes cantidades son conocidas.

$l1$ Es la longitud del eslabón 1.
$l2$ Es la longitud del eslabón 2.
$q1$ Es el ángulo del eslabón 1 con respecto al eje –y.
$q2$ Es el ángulo del eslabón 2 con respecto a la línea *l1'*.

La incógnita en el problema de cinemática directa es encontrar los valores del punto (*x, y*) es decir las componentes del vector $\vec{r}$.

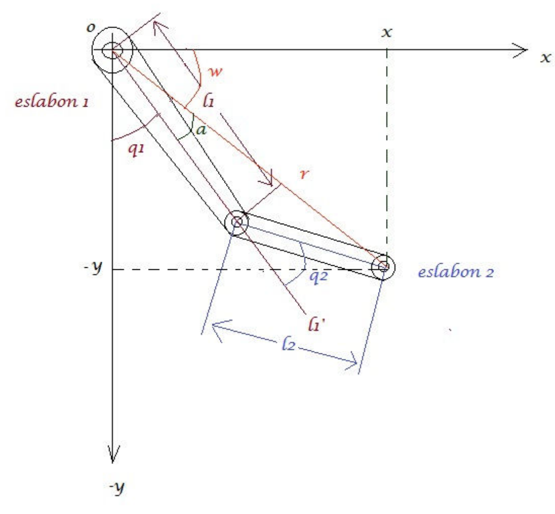

Figura. 1. Diagrama de un manipulador de dos grados de libertad al cual se le aplica la cinemática directa e inversa.

Al tomar como referencia el ángulo $q1$ las componentes del primer eslabón son mostradas en la ecuación Ec.1.

$$\overrightarrow{l_1} = (l_1 sen(q1), -l_1 \cos(q1)) \qquad \text{Ec.1}$$

De la misma manera se obtiene la expresión vectorial del eslabón 2 como lo indica la ecuación Ec.2.

$$\overrightarrow{l_2} = (l_2 sen(q1+q2), -l_2 \cos(q1+q2)) \qquad \text{Ec.2}$$

Entonces las componentes del vector de posición $\vec{r}$. son la suma de las componentes de los vectores $\overrightarrow{l_1}$ y $\overrightarrow{l_2}$. En otras palabras la componente x del vector de posición esta expresada matemáticamente en la ecuación Ec.3.

$$x = l_1 sen(q1) + l_2 sen(q_1 + q_2) \qquad \text{Ec.3}$$

Y en la ecuación Ec.4, esta la expresión matemática para la componente y del vector se posición del manipulador.

$$y = -l_1 cos(q1) - l_2 cos(q_1 + q_2) \qquad \text{Ec.4}$$

Si las ecuaciones Ec.3 y Ec.4 son escritas en forma de matriz se tiene el modelo de cinemática directa necesario, la forma matricial se aprecia en la ecuación Ec.5.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 sen(q1) + l_2 sen(q_1 + q_2) \\ -l_1 cos(q1) - l_2 cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \qquad \text{Ec.5}$$

Cinemática inversa.

El problema en la cinemática inversa es encontrar los ángulos $q1$ y $q2$ siento la posición final del manipulador un dato conocido, es decir sabemos cuáles son los valores de x y y del vector $\vec{r}$.

Considerando la Figura 1 se aprecia que el ángulo $q1$ cumple la ecuación Ec.6.

$$q_1 = \frac{\pi}{2} - a - w \qquad \text{Ec.6}$$

Donde:

a Es el ángulo entre el vector de posición $\vec{r}$ y el vector $\overrightarrow{l_1}$.
w Es el ángulo entre el vector de posición $\vec{r}$ y el eje $\vec{x}$.

Como las longitudes de los vectores $\overrightarrow{l_2}$ y $\overrightarrow{l_1}$ son cantidades conocidas, entonces se aplica la ley de los cosenos para encontrar el valor del ángulo a. Realizando el algebra correspondiente se tiene la ecuación Ec.7. Para el ángulo entre el vector de posición $\vec{r}$ y el vector $\overrightarrow{l_1}$.

$$a = cos^{-1}\left(\frac{l_1^2 - l_2^2 + x^2 + y^2}{2l_1\sqrt{x^2+y^2}}\right) \qquad \text{Ec.7}$$

Y para encontrar una expresión matemática para el ángulo w se debe tener presente que el coseno del ángulo w es el cateto adyacente dividido entre la hipotenusa. Lo cual es escrito en la ecuación Ec.8.

$$w = cos^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \qquad \text{Ec.8}$$

Se sustituyen las ecuaciones Ec.7 y Ec.8 en Ec.6 y tenemos la expresión para el ángulo $q1$.

$$q_1 = \frac{\pi}{2} - cos^{-1}\left(\frac{l_1^2 - l_2^2 + x^2 + y^2}{2l_1\sqrt{x^2+y^2}}\right) - cos^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \qquad \text{Ec.9}$$

Ahora solo falta aplicar la ley de los cosenos para el ángulo $q2$ observando cuidadosamente la Figura 1 se tiene la ecuación Ec.10.

$$r^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2\cos(q_2) \qquad \text{Ec.10}$$

Despejando $q2$ de la ecuación Ec.10 se tiene la expresión Ec.11.

$$q_2 = cos^{-1}\left(\frac{x^2+y^2-l_1^2-l_2^2}{2l_1l_2}\right) \qquad \text{Ec.11}$$

Aplicando a las ecuaciones Ec.9 y Ec.11 un formato de matrices se tiene el problema de cinemática inversa resuelto.

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} - cos^{-1}\left(\frac{l_1^2 - l_2^2 + x^2 + y^2}{2l_1\sqrt{x^2+y^2}}\right) - cos^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ cos^{-1}\left(\frac{x^2+y^2-l_1^2-l_2^2}{2l_1l_2}\right) \end{bmatrix} \qquad \text{Ec.5}$$

CONCLUSIONES

1.- La aplicación de la cinemática directa requiere contar con amplios conocimientos del algebra vectorial, con las herramientas matemáticas indicadas es fácil resolver problemas de cinemática directa aplicados a robot de dos grados de libertad como el ejemplo presentado en este trabajo.

2.- El problema de cinemática inversa requiere aplicar las definiciones básicas de trigonometría, como ejemplo el coseno de un ángulo es equivalente al valor numérico de dividir la longitud del cateto adyacentes entre el valor numérico de la longitud de la hipotenusa.

3.- Resolver los ejercicios de cinemática directa e inversa para un robot manipulador de dos grados de libertad es relativamente fácil si te tienen adecuadas habilidades matemáticas en trigonometría y algebra vectorial.

REFERENCIAS

[1] – Reyes, C. F., Robotica: Control de Robots Manipuladores, Marcombo S.A, 2011.

[2] – Grossman S. I. Algebra lineal Mc. Graw-Hill, 1995.