

FISICA PER TUTTI

Alla scoperta della natura quantistica della realtà Discovering the quantum nature of reality

Ido Borsini

*Scuola di Scienze e Tecnologie, Dipartimento di Fisica, Università di Camerino
Camerino (MC), Italy*

Riassunto. Viene descritto un esperimento, analogo allo scambio di fotoni tra le onde stazionarie in una cavità e gli atomi delle pareti che la contengono. Viene descritto l'utilizzo dell'esperimento analogo nel contesto del Inquiry-Based Learning (IBL) e la ricerca della causalità, indicando i passaggi essenziali del percorso didattico che porta alla comprensione della natura quantistica della radiazione del corpo nero. Si indicano le relazioni matematiche che permettono di passare dal sistema reale a quello analogo, e dal sistema analogo si deduce la distribuzione di energia nella cavità, in funzione della frequenza. Il sistema è reso più efficiente e flessibile dalla sua simulazione al computer, che permette di effettuare ricerche e verifica delle ipotesi che storicamente hanno portato alla soluzione del problema.

Abstract. An experiment, analogous to the exchange of photons between the standing waves in a cavity and the atoms of the walls containing the cavity, is described. The use of the analogous experiment in the context of Inquiry-Based Learning (IBL) and of causality searching is described, indicating the essential steps of the path which leads to understanding of the quantum nature of black body radiation. The mathematical relationships that allow to pass from the real system to the analogous one are indicated, and the distribution of energy in the cavity is deduced from the analogous system, as a function of the frequency. The system is made more efficient and flexible through its computer simulation, which allows to carry out the research and verification of the hypotheses that historically led to the solution of the problem.

Introduzione

La metodologia Inquiry-Based Science Education (IBSE) o Inquiry-Based Learning (IBL), promosse dalla Commissione Europea [1], prevedono fasi didattiche innovative rispetto al normale modo di fare lezione. Il contatto educativo principale non è con l'insegnante ma con l'oggetto di studio, e lo studente, a partire dalle proprie conoscenze, idee, teorie, formula ipotesi e domande, inferisce andamenti e conclusioni, li prova attraverso l'esperienza pratica, li discute con professori e compagni.

Lo studente si allena a costruire la conoscenza esattamente come lo scienziato: attraverso il rapporto di causalità tra quello che ci si aspetta in astratto e quello che si stabilisce concretamente.

Questo fatto non comporta necessariamente di dover condurre esperimenti complessi, che prevedono l'utilizzo di attrezzature costose e sofisticate. Le esperienze possono infatti essere molto semplici e prevedere l'utilizzo di materiali poveri e facilmente disponibili. A questo proposito è particolarmente utile l'uso di sistemi analoghi.

L'analogia è una forma del processo di costruzione e rappresentazione della conoscenza [2], nella didattica del laboratorio di fisica, essa si manifesta come relazione tra due sistemi reali, la sperimentazione di uno dei quali, permette di inferire le proprietà dell'altro non direttamente osservabile.

Gli esperimenti sui sistemi analoghi attivano i processi cognitivi, che portano alla scoperta del modello matematico del sistema fisico indagato; inoltre, il sistema analogo è spesso strumento di calcolo del modello che quel sistema realizza, permettendo allo studente di superare praticamente gli ostacoli rappresentati dalla complessità matematica, delle soluzioni ai problemi posti.

Quale esemplificazione di questi metodi, verranno presentati gli strumenti didattici utili per la costruzione di un percorso IBL che conduce gli studenti:

- alla scoperta della relazione matematica che descrive i dati sperimentali della radiazione di corpo nero;
- alla scoperta della natura quantistica della realtà fisica;
- alla determinazione della costante di Planck.

La ricerca della causalità

Per ricerca di causalità si intende la necessità di provare attraverso esperienze ed osservazioni che le proprie idee astratte corrispondono a conseguenze concrete ed osservabili. Il fatto che ci si aspetta di trovare nella realtà sperimentabile quello che si è pensato in astratto e viceversa, è una funzione che costruisce la conoscenza scientifica. Nel IBL l'attività principale cui è sottoposto lo studente è appunto la ricerca della causalità, di qui la necessità di individuare opportune esperienze pratiche che sostengano lo studente nel suo sforzo.

Le esperienze sono costruite sulla base delle idee che si sono affermate e che hanno portato alla costruzione del modello matematico di quella parte della realtà fisica.

Come stabilito dalla Quantizzazione del Campo Elettromagnetico (Seconda Quantizzazione), la radiazione di corpo nero è il frutto della interazione tra due sistemi, gli atomi della parete e le onde stazionarie elettromagnetiche nella cavità, che scambiano tra loro le particelle che mediano la interazione elettromagnetica: i fotoni.

Elenchiamo le conoscenze essenziali per guidare lo sviluppo del percorso didattico:

- 1) Una onda stazionaria oscilla con lunghezza d'onda e frequenza quantizzata

$$\lambda = \frac{2L}{n}; \quad \nu = \frac{c}{2L}n,$$

dove n è un numero naturale, c la velocità di ognuna delle due onde progressive che costituiscono l'onda stazionaria, L la dimensione lineare della cavità. La differenza tra due frequenze successive è costante e vale quanto la frequenza fondamentale ($n = 1$).

- 2) Il fotone, la particella che media l'interazione elettromagnetica, è stabile, ha energia $E = h\nu$, quantità di moto $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, polarizzazione $\mu = \pm 1$, massa nulla e si muove alla velocità della luce nel vuoto.
- 3) Gli scambi di energia tra gli oscillatori delle pareti e le onde elettromagnetiche stazionarie nella cavità avvengono attraverso lo scambio di fotoni in modo tale che le onde stazionarie di frequenza fondamentale ν scambiano con gli oscillatori delle pareti della cavità fotoni di energia multipla di $h\nu$.
- 4) Il numero di onde stazionarie presenti in cavità per unità di volume e frequenza intorno alla frequenza ν è

$$n = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3}$$

(vedi appendice).

Il percorso didattico utilizza dati sperimentali del sistema reale, in particolare, la legge di Wien dello spostamento del massimo di emissione [3]

$$\nu_{\max}(\text{Hz}) \cong 5.878 \times 10^{10} T(\text{K})$$

e la legge di Stefan-Boltzmann, circa l'irradianza I (la potenza irradiata per unità di superficie) [4, 5]:

$$I(\text{W/m}^2) \cong 5.397 \times 10^{-8} T^4 (\text{K}^4).$$

Il sistema analogo e quello reale

Gli studenti possono familiarizzare col sistema reale. Nei laboratori di chimica e fisica è frequente la presenza di un forno di forma cubica, con pareti interne in materiale refrattario, con un dispositivo di termoregolazione e dotato di uno sportello con un piccolo foro al centro. La radiazione di corpo nero è la radiazione elettromagnetica che esce dal piccolo foro, quando il forno sia tenuto a temperatura costante.

Gli atomi delle pareti interne del forno, sottoposte alla agitazione termica, emettono ed assorbono onde elettromagnetiche, un campione delle quali, uscendo dal piccolo foro del forno, può essere studiato. Il potere emissivo specifico, cioè la quantità di energia emessa dal foro per unità di tempo, superficie e frequenza, con buona approssimazione, è indipendente dalla forma e dalle dimensioni della cavità oltre che è indipendente dal materiale cui la cavità è costituita, dipendendo solo dalla temperatura e dalla frequenza osservate.

Il sistema analogo utilizzato, descritto in [6], è una scacchiera con pedine, in grado di risolvere il problema di Boltzmann:

$$\begin{cases} \sum_i \delta n_i = 0, \\ \sum_i E_i \delta n_i = 0, \\ \delta \ln(W) = \sum_i \delta \ln(n_i!) = 0, \end{cases}$$

dove n_i rappresenta il numero di oscillatori armonici (scacchi) con energia E_i (numero di pedine i) ed il $\ln(W)$ è l'entropia statistica del sistema.

Si ottiene sperimentalmente la soluzione, nella analogia l'equilibrio termico di un sistema termodinamico, come funzione del numero di scacchi con r pedine (numero di occupazione) nella forma

$$n_r = \frac{n}{\sum_i e^{-\frac{r}{kj}}} e^{-\frac{r}{kj}},$$

dove j è il numero medio di pedine per scacco, n il numero totale di scacchi e $k \cong 1.38$.

Il passaggio del sistema analogo al sistema reale si ha introducendo il valore del quanto di energia $h\nu$:

$$n_r = \frac{n}{\sum_i e^{-\frac{ih\nu}{kjh\nu}}} e^{-\frac{r h\nu}{kjh\nu}}.$$

Confrontando questa relazione con la distribuzione di Boltzmann, si può porre

$$kjh\nu = KT$$

e poiché $K \cong 1.38 \times 10^{-23}$ J/K (costante di Boltzmann), abbiamo che $j h\nu \cong 10^{-23} T$.

L'equilibrio termico

Gli oscillatori delle pareti della cavità e le onde elettromagnetiche stazionarie all'interno della cavità sono in equilibrio termico tra loro.

Si divide in due parti una scacchiera, una parte rappresenta la cavità e l'altra la parete della cavità, si assegna ad ogni parte un certo numero di pedine. Scambiando in modo casuale le pedine tra le due parti, dopo un numero di scambi si raggiunge l'equilibrio, caratterizzato dal fatto che, a meno di fluttuazioni, il numero medio di pedine per scacco è lo stesso nelle due parti della scacchiera, e poiché il sistema analogo risolve il problema di Boltzmann, l'entropia statistica del sistema fluttuerà sotto il valore massimo [6]. Per analogia con il sistema reale, si conclude che, l'energia media delle onde elettromagnetiche stazionarie presenti in cavità è la stessa degli oscillatori che costituiscono la parete.

Per approfondirne lo studio, gli studenti utilizzano un software che simula la scacchiera e permette di sperimentare le caratteristiche del sistema (fig. 1).

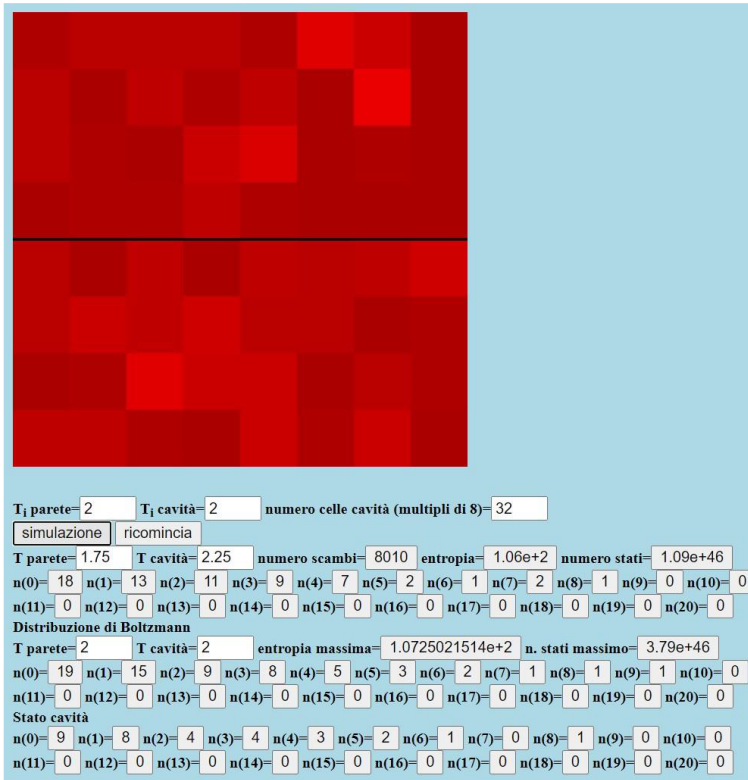


Fig. 1. – Le due parti della scacchiera scambiano pedine tra loro a partire da uno stato iniziale. La temperatura è fornita come numero di pedine medio per scacco. L’algoritmo mostra lo stato dell’intero sistema per ogni scambio di pedine, della parete e della cavità quando l’entropia è massima.

Il software permette di dividere le 64 celle in due parti, di assegnare ad ogni parte il numero medio di pedine. Inoltre, la simulazione fornisce lo stato del sistema, delle sue parti e valuta l’entropia massima. Ricordiamo che gli scambi casuali di pedine sono permessi solo tra scacchi che rappresentano oscillatori di natura differente, quindi oscillatori della parete ed onde elettromagnetiche stazionarie nella cavità.

Il software riproduce le proprietà essenziali dell’equilibrio termico, in particolare, la relazione tra la fluttuazione della energia media di ognuna delle parti cui abbiamo diviso la scacchiera, e la dimensione di quella parte, cioè con il numero di oscillatori o di onde stazionarie che la costituiscono.

La simulazione

Per simulare lo stato delle onde stazionarie in cavità occorre stabilire il numero di scacchi ed il numero medio di pedine da assegnare ad ogni scacco all’equilibrio. Il numero di scacchi è funzione della frequenza che si osserva

$$n = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3},$$

mentre il numero medio di pedine dipende dalla temperatura oltre che dalla frequenza

$$j = \frac{10^{-23}T}{h\nu}.$$

Fissata la frequenza di massima emissione del corpo nero, corrispondente ad un numero di onde stazionarie per unità di volume e frequenza trattabile dalla scacchiera, nel nostro caso 40, possiamo stabilire la temperatura del sistema dalla legge di Wien, ottenendo $T = 111.41$ K. Costruiamo la tabella che fornisce l'energia per unità di volume e frequenza immagazzinata nelle onde stazionarie in funzione della frequenza:

n (Hz ⁻¹ m ⁻³)	ν (Hz)	E (JHz ⁻¹ m ⁻³)
8	2.93E+12	8.91E-21
16	4.14E+12	1.78E-20
24	5.07E+12	2.67E-20
32	5.86E+12	3.57E-20
40	6.55E+12	4.46E-20
48	7.17E+12	5.35E-20
56	7.75E+12	6.24E-20
64	8.28E+12	7.13E-20

e notiamo che, $\nu = 6.55 \times 10^{12}$ Hz, frequenza nell'infrarosso associata ad $n = 40$ Hz⁻¹m⁻³, non corrisponde ad un massimo per l'energia per unità di volume e frequenza.

Il numero medio di pedine per scacco da dare al nostro simulatore è infatti

$$j = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

come gli studenti potranno scoprire calcolando l'energia media di un oscillatore dalla distribuzione dei numeri di occupazione.

Ripetendo il calcolo precedente con la nuova condizione, si ottiene

n (Hz ⁻¹ m ⁻³)	ν (Hz)	E (JHz ⁻¹ m ⁻³)
8	2.93E+12	6.13E-21
16	4.14E+12	8.86E-21
24	5.07E+12	1.02E-20
32	5.86E+12	1.08E-20
40	6.55E+12	1.10E-20
48	7.17E+12	1.09E-20
56	7.75E+12	1.06E-20
64	8.28E+12	1.02E-20

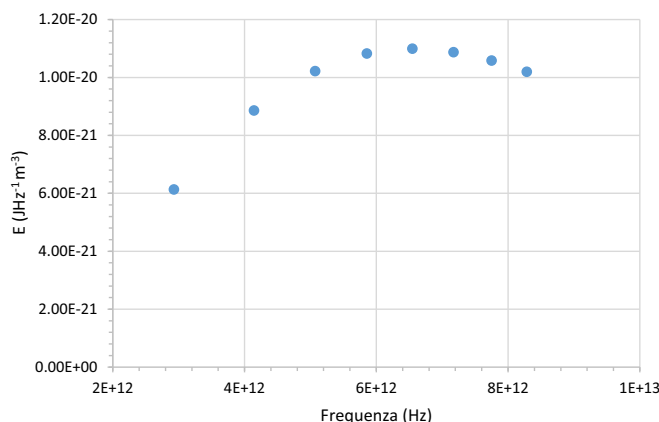


Fig. 2. – L'andamento della energia per unità di volume e frequenza mostra un massimo alla frequenza di 6.55×10^{12} Hz, corrispondente a 40 scacchi della scacchiera, in accordo con la legge di Wien che stabilisce quella frequenza come massimo di emissione alla temperatura del corpo nero di 111.407 K.

e si vede (fig. 2) come l'andamento ricavato corrisponda a quanto previsto dalla legge di Wien

L'equilibrio termico delle onde stazionarie è garantito dagli scambi con gli oscillatori della parete. Considerando il processo:

- scambio di un fotone tra onda stazionaria ed oscillatore,
- scambio di un fotone tra oscillatore ed onda stazionaria,

come un unico processo:

- scambio di un fotone tra onda stazionaria ed onda stazionaria,

possiamo simulare l'equilibrio termico nella cavità come semplice scambio di pedine tra scacchi con stessa natura.

Lo spettro del corpo nero

Il numero di onde elettromagnetiche stazionarie per unità di volume e frequenza intorno a ν è dato da

$$n = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} .$$

I numeri di occupazione delle onde elettromagnetiche stazionarie, determinati dalla distribuzione, sono

$$n_r = \frac{8\pi \frac{\nu^2}{c^3}}{\sum_i e^{-\frac{ih\nu}{KT}}} e^{-\frac{rh\nu}{KT}} ,$$

quindi, la energia per unità di volume e frequenza potrà essere calcolata dalla relazione

$$\rho(\nu) = \sum_r rh\nu n_r = \sum_r \frac{8\pi h \frac{\nu^3}{c^3}}{\sum_i e^{-\frac{ih\nu}{KT}}} r e^{-\frac{rh\nu}{KT}} .$$

Calcolando come serie le due somme

$$\sum_i e^{-\frac{ih\nu}{KT}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{h\nu}{KT}}},$$

$$\sum_r r e^{-\frac{r h\nu}{KT}} = \frac{e^{-\frac{h\nu}{KT}}}{(1 - e^{-\frac{h\nu}{KT}})^2},$$

si ottiene

$$\rho(\nu) = 8\pi \frac{h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1},$$

da cui si deduce anche che

$$j = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1},$$

essendo $j h\nu$ la energia media che la formula assegna ad ognuna delle n onde stazionarie per unità di volume e frequenza.

Si noti che, se $h\nu/KT \ll 1$, allora

$$\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1} \cong KT,$$

che è il risultato che ci si aspetta nel caso valga la Termodinamica Classica e quindi, il teorema di equipartizione della energia.

Costante di Planck ed irradianza della cavità

Fissata la temperatura, la funzione $\rho(\nu)$ ha un massimo che si manifesta anche nella radiazione emessa dal corpo nero. Come abbiamo già visto, questo massimo corrisponde ad una frequenza fondamentale particolare che è determinata sperimentalmente dalla espressione che esprime la legge di Wien.

Il problema di massimo consiste nel determinare gli zeri della derivata prima della funzione $\rho(\nu)$, che può essere semplificata nella funzione $y(x)$:

$$y(x) = \frac{x^3}{e^x - 1},$$

dove $x = \frac{h}{kT}\nu$. Il problema è risolto dalle radici della equazione trascendente:

$$x e^x - 3e^x + 3 = 0.$$

Con il metodo della bisezione si trova la soluzione approssimata

$$x = \frac{h}{kT}\nu \cong 2.8214.$$

Questa radice permette di stimare la costante di Planck; sostituendo la frequenza con il valore previsto dalla legge di Wien, abbiamo che

$$h = \frac{2.8214}{5.8789 \times 10^{10}} 1.3806 \times 10^{-23} \cong 6.6260 \times 10^{-34} \text{ Js.}$$

Il valore esatto [7] per questa costante è assunto sia

$$h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ Js.}$$

La legge di Stefan-Boltzmann mette ulteriormente alla prova l'ipotesi utilizzata per contare le onde stazionarie nella cavità. Si può dimostrare che l'irradianza I (la potenza irradiata per unità di superficie del foro dal quale la radiazione esce) vale

$$I = \frac{c}{4} \int_0^{+\infty} \rho(\nu) d\nu.$$

Sostituendo l'espressione esplicita di $\rho(\nu)$ ed eseguendo l'integrale si trova che

$$I = \frac{2}{15} \pi^5 \frac{K^4}{c^2 h^3} T^4 \cong 5.67 \times 10^{-8} T^4.$$

Il valore accettato per la costante di Stefan-Boltzmann è $5.670374419 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ [8].

Conclusioni

Le possibilità di simulare l'energia immagazzinata sottoforma di onde elettromagnetiche stazionarie con la nostra scacchiera è limitata dal numero esiguo di scacchi cui la scacchiera reale o il software che la riproduce sono vincolati, tuttavia il metodo non dipende da questa limitazione ed è quindi un metodo generale.

Ad esempio, per simulare lo spettro alle frequenze nel visibile, quindi da $\nu_{\min} = 4.3 \times 10^{14} \text{ Hz}$ a $\nu_{\max} = 7.7 \times 10^{14} \text{ Hz}$ avremo bisogno di un numero di scacchi da $n_{\min} = 172470$ a $n_{\max} = 553043$. Nel caso all'interno di quel intervallo di frequenze ci fosse un massimo di emissione, bisognerebbe osservare il sistema reale a temperature che vanno da circa 7000 K a circa 13000 K, infatti ricordiamo che il sistema analogo riproduce lo stato all'equilibrio termico, quindi a temperatura costante.

Nonostante le limitazioni indicate, è importante sottolineare che, nella nostra esperienza, l'uso didattico di questo sistema analogo permette di organizzare attività di ricerca ed approfondimento di notevole valore conoscitivo, permettendo l'avvicinamento culturale ad un argomento poco sviluppato nei libri di testo del liceo, cioè

quello della Quantizzazione della energia in relazione al Campo Elettromagnetico che la contiene.

Appendice

Conteggio degli oscillatori in cavità – È noto, il risultato corretto si ottiene considerando un fronte d'onda in una cavità a forma di parallelepipedo, che a $t = 0$ ha un punto sull'intersezione degli spigoli e ad un istante successivo $t = \frac{\lambda}{2c}$ nei punti l_x, l_y, l_z degli spigoli. Rispetto ai coseni direttori definiti dalla direzione della propagazione di una delle due onde progressive che sovrapponendosi formano l'onda stazionaria abbiamo

$$\begin{aligned} l_x \cos \alpha &= \frac{\lambda}{2}, \\ l_y \cos \beta &= \frac{\lambda}{2}, \\ l_z \cos \gamma &= \frac{\lambda}{2}. \end{aligned}$$

La condizione di stazionarietà impone che

$$\begin{aligned} \frac{L_x}{l_x} &= n_x, \\ \frac{L_y}{l_y} &= n_y, \\ \frac{L_z}{l_z} &= n_z, \end{aligned}$$

dove n_x, n_y, n_z sono numeri interi, L_x, L_y, L_z le dimensioni della cavità.

Per la proprietà dei coseni direttori

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1,$$

quindi

$$\frac{n_x^2}{\left(\frac{2L_x}{\lambda}\right)^2} + \frac{n_y^2}{\left(\frac{2L_y}{\lambda}\right)^2} + \frac{n_z^2}{\left(\frac{2L_z}{\lambda}\right)^2} = 1.$$

L'equazione ottenuta è quella di un ellissoide di opportuni semiassi. Il numero totale di modi di oscillazione N delle onde stazionarie di lunghezza d'onda fondamentale minore di λ è dato da 2 volte il volume della parte dell'ellissoide contenuto nell'ottante con

n_x, n_y, n_z maggiori od uguali a 0 (fissata la lunghezza d'onda, si hanno due possibili stati di polarizzazione), cioè

$$N = 2 \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi \frac{8L_x L_y L_z}{\lambda^3} = \frac{8}{3} \pi \frac{V}{\lambda^3} = \frac{8}{3} \pi \frac{V \nu^3}{c^3}.$$

In definitiva si ottiene che il numero n di onde stazionarie per unità di volume e frequenza intorno alla frequenza ν è

$$n = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3}.$$

Bibliografia

- [1] https://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_en.pdf.
- [2] GLYNN S. M., DUIT R. and THIELE R. B., "Teaching science with analogies: A strategy for constructing knowledge", in *Learning Science in the Schools: Research Reforming Practice*, edited by GLYNN S. M. and DUIT R. (Routledge) 2012.
- [3] WIEN W., "Ueber die Energievertheilung im Emissionsspektrum des schwarzen Körpers", *Wied. Ann.*, **58** (1896) 662.
- [4] STEFAN J., "Über die Beziehung zwischen der Wärmestrahlung und der Temperatur", *Sitzungsber. Kais. Akad. der Wiss. Wien*, **79** (1879) 391.
- [5] BOLTZMANN L., "Ableitung des Stefan'schen Gesetzes, betreffend die Abhängigkeit der Wärmestrahlung von der Temperatur aus der electromagnetischen Lichttheorie", *Ann. Phys.*, **258** (1884) 291.
- [6] BORSINI I., "An analog experience on Statistical Mechanics of Thermal Equilibrium", *Giornale di Fisica*, **60** (2019) 31.
- [7] https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?h|search_for=planck+contant.
- [8] <https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?sigma>.

Referenze
[4, 6]:
numero di
pagina
mancante
trovato da
noi.
