Horizontes Educativos

Rutas hacia el álgebra

Actividades en Excel y Logo

Proyecto Conacyt: Introducción temprana al pensamiento algebraico en entornos tecnológicos de aprendizaje: un estudio teórico experimental en el nivel básico (convocatoria SEB/SEP/Conacyt; número 145906).

Horizontes
Educativos

Rutas hacia el álgebra

Actividades en Excel y Logo

Cristianne Butto Zarzar
Joaquín Delgado Fernández

UNIVERSIDAD
PEDAGOGICA
NACIONAL

CONACYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Rutas hacia el álgebra. Actividades en Excel y Logo
Cristianne Butto Zarzar / cristianne_butto@hotmail.com
Joaquín Delgado / jdf@xanum.uam.mx

Edición y corrección de estilo: Adriana Hernández Uresti
Formación y gráficos CD: María Eugenia Hernández Arriola
Diseño de portada, fotografías, ilustraciones y diseño CD: Rodrigo García García

Primera edición, octubre de 2012

ISBN 978-607-413-137-6

QA157 B8.7
Butto Zarzar, Cristianne
Rutas hacia el álgebra : actividades en Excel y Logo / Cristianne Butto Zarzar, Joaquín Delgado -- México : UPN, 2012.
1v. (Horizontes educativos)
ISBN: 978-607-413-137-6

1. Álgebra - Problemas, ejercicios, etcétera 2. Computadoras en la educación 3. Excel (Archivo para computadora) 4. Logo (Lenguaje de programación para computadora) I. Delgado, Joaquín, coaut.

ÍNDICE

Transeúnte, ésta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta
sorprendente distribución te dice el número de años que vivió.
Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la
doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo.
Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa
y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez
alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció
de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle,
llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad.

Los autores agradecen enormemente la excelente labor
profesional de edición y revisión de Adriana Hernández.

PREFACIO

En *Rutas hacia el álgebra. Actividades en Excel y Logo* los autores* nos presentan el tema fascinante del acceso temprano a dos ideas poderosas en matemáticas: la proporcionalidad y la generalización, como puertas de entrada al álgebra escolar. Su aproximación al tema, a través de distintas perspectivas, nos permite asomarnos de cerca al mundo de los procesos cognitivos y de construcción social del conocimiento involucrados en el aprendizaje de dichos tópicos, así como al contexto especial de los entornos tecnológicos y su papel en tales procesos en el caso de alumnos muy jóvenes.

A pesar de ser una obra especializada, no está dirigida sólo a investigadores especialistas, pues una de sus principales características es que tiende puentes entre teoría y práctica. Es decir, si bien se hace una revisión de la literatura de investigación sobre pensamiento algebraico en edades tempranas y se sintetizan resultados de estudios empíricos realizados por los propios autores, también hay una propuesta concreta para la implementación en el aula de secuencias didácticas que promueven ese acceso temprano.

---

* Cristianne Butto Zarzar de la UPN Ajusco.
Joaquín Delgado Fernández del Departamento de Matemáticas, UAM-Iztapalapa.

El universo de lectores potenciales incluye a profesores de primaria y secundaria; a diseñadores y desarrolladores del currículo, quienes pueden encontrar en este libro modelos de actividades cuidadosamente diseñados para su uso expedito en un laboratorio de cómputo o en aulas con equipamiento básico de una computadora y un proyector. En otras palabras, la propuesta de enseñanza tiene la flexibilidad suficiente como para ponerla en obra tanto en la modalidad de trabajo de los alumnos en equipo o por parejas frente a una computadora, como en la modalidad de discusión grupal frente a lo que se proyecte en el salón de clases desde una computadora manipulada por el profesor o por un estudiante.

El álgebra simbólica es una de las áreas de las matemáticas en la que los estudiantes de un rango amplio de edades encuentran las mayores dificultades. Como los mismos autores afirman, éstas se presentan aun en alumnos de educación media superior y superior. Las investigaciones de los años ochenta y hasta mediados de los noventas reportaron la presencia de errores que los estudiantes cometen de manera generalizada y persistente al interpretar y operar los símbolos algebraicos. También se analizaron los obstáculos que los aprendices tienen que remontar para adquirir los conceptos algebraicos y en general el uso del álgebra manipulativa.

Estos resultados motivaron otro tipo de estudios, como por ejemplo, aquellos en los que se ponían a prueba distintos acercamientos de enseñanza al álgebra, como el funcional, resolución de problemas, modelación y generalización. Otros proyectos involucraban el uso de la tecnología para ayudar a los alumnos a transitar hacia el álgebra de una manera más práctica y experimental, al utilizar herramientas como el lenguaje de programación Logo, las hojas electrónicas de cálculo y los manipuladores simbólicos (o CAS, por sus siglas en inglés). Pero ha sido en los años recientes cuando surge la corriente llamada *álgebra temprana* o *early algebra,* dentro de la cual se estudia la factibilidad de iniciar a los alumnos de primaria en conceptos básicos del álgebra, para de esta manera, garantizarles los antecedentes necesarios en su adquisición del lenguaje algebraico en la escuela secundaria. Hoy en día, la literatura en esta área es muy nutrida y abarca un espectro amplio de acercamientos, algunos de los cuales resultan antagónicos entre sí, como es el caso de quienes proponen una iniciación a través de experiencias conceptuales del álgebra (a partir de la generalización o de la modelación) sin el uso "prematuro" de una simbolización formal, o como el caso de quienes proponen una iniciación temprana al álgebra vía la utilización de su simbología para representar situaciones concretas o familiares para el estudiante.

Rutas hacia el álgebra. Actividades en Excel y Logo conjuga y hasta cierto punto concilia varias de estas propuestas e incorpora la experiencia de estudios previos al surgimiento de la corriente del early algebra, pues por un lado aprovecha resultados anteriores sobre una iniciación al álgebra por medio de procesos de generalización en tareas de percepción y representación de patrones y por otro utiliza los ambientes de Logo y Excel para la representación simbólica y figurativa de dichos patrones. Si bien la sintaxis en Logo y en Excel no coinciden totalmente con la sintaxis algebraica, su similitud con ella es suficiente para fines de representación y comprensión de la generalidad, lo cual ha quedado documentado por investigaciones realizadas con estudiantes pre-algebraicos.

Otra de las aportaciones originales de esta obra es la propuesta alterna de acceso al álgebra por la ruta de la proporcionalidad, la cual se inspira en las investigaciones que conciben a la aritmética, de hecho a la matemática de la escuela elemental, como un piso firme sobre el cual pueden construirse conceptos algebraicos como el de incógnita y el de variable en una relación funcional. Aquí también los entornos tecnológicos de Logo y Excel juegan un papel central, en razón de que uno de ellos (Logo) permite verificar una regla general que represente una situación de relación de proporcionalidad, por medio de retroalimentación visual de figuras que se reproducen en la pantalla, al variar uno de los parámetros de la regla que se ha expresado en el lenguaje del programa. En lo que respecta a Excel, éste permite desplegar tablas de variación que se generan a partir de la introducción de una fórmula o regla general escrita con la sintaxis del programa.

Las rutas de acceso temprano al álgebra propuestas en el libro, con apoyo de las tecnologías digitales, pueden considerarse una innovación en la enseñanza, sin embargo, no irrumpen de manera drástica en el currículo actual de matemáticas, en virtud de que los autores se dieron a la tarea de analizar en éste la presencia (explícita o no) de los tópicos en cuestión (proporcionalidad y patrones y generalización). Lo anterior le da viabilidad a la propuesta para su implementación en la enseñanza elemental.

Finalmente, quiero señalar que el contenido de la obra, sin duda, resultará relevante para la comunidad de investigadores y estudiantes de posgrado en el área de la educación matemática, debido a la reseña tan amplia que hacen los autores de la literatura de *early algebra* y a la presentación de los resultados de sus propios estudios, los cuales han contribuido al enriquecimiento teórico y metodológico de la investigación sobre este novedoso tema.

Teresa Rojano

INTRODUCCIÓN

El álgebra temprana se refiere a la introducción del pensamiento algebraico a edades que van del cuarto al sexto año de primaria y primero de secundaria del ciclo escolar. En el *currículum* mexicano, la enseñanza y el aprendizaje del álgebra se pospone al ciclo de educación secundaria (séptimo a octavo año), se argumenta la dificultad inherente a los contenidos matemáticos, inaccesibles a edades tempranas. Desde la perspectiva piagetiana, el enfoque de álgebra temprana en el niño se sitúa en una etapa de su desarrollo cognitivo en la cual no se han desarrollado completamente el pensamiento lógico formal y la abstracción sobre lo concreto; en cambio la conservación de la cantidad, la reversibilidad y las operaciones concretas se hallan bien consolidadas. El tema parece contradecir las investigaciones originales que afirman que el pensamiento algebraico corresponde más bien a la etapa de las operaciones formales, situadas alrededor de los 15-16 años. Sin embargo, estudios posteriores a Piaget han permitido dilucidar etapas más finas en el desarrollo cognitivo del niño y entender otros factores que permitirían abordar el desarrollo del pensamiento algebraico a edades más tempranas, con los enfoques pertinentes y al tomar en cuenta otros factores que han demostrado influir en el desempeño de las tareas.

El álgebra temprana es también un tema de investigación activa con contribuciones de diversas áreas tales como la psicología cognitiva o la matemática educativa. Los autores de este libro sostienen la importancia de la interacción social como detonador de los procesos de aprendizaje y proponen la incorporación de elementos de la teoría sociohistórico-cultural de Vigotski como marco teórico para estudiar las diversas interacciones que se dan en el aula: alumno-alumno, alumno-profesor, entorno-alumno, por citar algunos ejemplos. Sin duda la parte motivacional es un factor importante para despertar el interés por el aprendizaje de las matemáticas, pero no se aborda en esta obra.

Es importante distinguir los términos álgebra temprana y pre-álgebra. En el primero se hace énfasis en los procesos de pensamiento que conducen a las ideas algebraicas, incluso cuando no sean totalmente acabadas, pero que ofrezcan verdaderos medios para acceder con soltura a las ideas algebraicas más acabadas. Ello está fundamentado por la psicología piagetiana que señala los diversos estadios en el desarrollo del pensamiento matemático del niño. En el enfoque de pre-álgebra se hace énfasis en los contenidos matemáticos previos a la introducción formal de los conceptos algebraicos, tales como propiedades de exponentes, polinomios, productos notables, etcétera. En este libro proponemos dos rutas de acceso al pensamiento algebraico temprano, basadas en la noción de razón y proporción, y de los procesos de generalización. El por qué el concepto de razón y proporción permite una ruta de acercamiento al pensamiento algebraico puede explicarse de la siguiente manera: desde el punto de vista matemático, la igualdad de dos razones es una proporción: $a/b = c/d$. En problemas de valor faltante, la íncognita puede ser un término de la proporción: $x/b = c/d$, lo que plantea una ecuación lineal o dos incógnitas: $x/b = y/d$, que da la idea de co-variación o función lineal; o una incógnita doble (razón primera y última): $x/a = c/x$, lo cual resulta en una ecuación cuadrática.

Los procesos de generalización consisten en descubrir un patrón o regla a partir de una secuencia de objetos, que pueden ser numéricos o geométricos. Las investigaciones al respecto muestran que un niño puede comprender una regla, aun cuando no pueda expresarla en lo que llamamos un lenguaje algebraico. Sin embargo, es capaz de constuir una tabla y extrapolar o interpolar correspondencias fuera del dato.

CONTENIDO

La presente obra consta de dos partes. La primera es el material escrito en forma de libro en el que presentamos las investigaciones realizadas en el campo del álgebra temprana, que sustentan nuestra propuesta de las dos rutas de acceso al pensamiento algebraico. La segunda parte es un CD que contiene tres secciones: Actividades en Excel,[1] Actividades en WinLogo y Actividades lápiz y papel, el cual se describe en el capítulo VI.

Todas las prácticas incluyen sugerencias para el profesor de cómo llevar a cabo la actividad, cuáles son los conceptos algebraicos involucrados y recomendaciones de tareas adicionales. El uso de Excel sin Visual Basic, por un lado tiene la ventaja de requerir pocos recursos computacionales como procesador, memoria, modelo, etcétera. Está disponible en casi cualquier plataforma y se pueden usar otras hojas de cálculo libres, como Open Office, por ejemplo. La desventaja es que requiere una familiarización con el lenguaje propio de Excel. Sin embargo, creemos que este reto es más bien una ventaja, ya que el diseñar una fórmula en Excel que funcione exige el dominio pleno de conceptos tales como variable, así como sumo cuidado en el orden de asociación de las operaciones aritméticas. Por ejemplo, el equivalente de la fórmula matemática $(n-1)^2+2n-1$ se escribiría en Excel =(A1-1)^2+2*A1-1. Para el lector interesado recomendamos las notas básicas de Excel en el sitio: *http://mat.izt.uam.mx/notas_de_clase/ManualExcel.pdf*

[1] Reconocemos que los programas WinLogo©, Excel©, Visual Basic© y el paquete Office Microsoft© son marcas registradas, pero por razones editoriales en este libro y en el CD que lo acompaña se omitirá incluir el símbolo de *copyright* correspondiente cada vez que se mencionen dichos productos.

En las referencias se listan diversos sitios donde se puede descargar la versión gratuita de WinLogo. La hoja de cálculo Excel forma parte de la suite de Microsoft Office y existen licencias académicas de bajo costo.

¿A QUIÉN VA DIRIGIDO EL LIBRO?

Este libro está dirigido a profesores de matemáticas de educación básica primaria y secundaria, así como a pedagogos y psicólogos educativos interesados en el aprendizaje del álgebra temprana con el uso de nuevas tecnologías. Las nuevas tendencias en educación apoyadas por investigaciones en psicología cognitiva apuntan a una introducción más temprana de los conceptos básicos del álgebra de una manera progresiva donde el conocimiento previo de conceptos aritméticos, tablas, series numéricas, figuras geométricas se usa como puentes para acceder a conceptos naturales en el álgebra tales como incógnita, variable, inducción, función, etcétera.

El interés que los autores pretenden despertar en el lector es doble: por una parte en la investigación reciente en el área de álgebra temprana, la obra presenta las principales investigaciones en el tema desarrolladas por diversos autores nacionales y extranjeros, así el lector encontrará algunas de las ideas principales que se manejan en este campo del conocimiento y de investigación activa. Por otra parte se incluyen prácticas que se han diseñado y probado con alumnos de diversos grados desde tercero de primaria hasta el primer año de bachillerato de escuelas técnicas. Aunque el término álgebra temprana está pensado para un público de los últimos grados de primaria: cuarto, quinto y sexto, nuestras propias experiencias nos han revelado que muchas de las dificultades originales en el aprendizaje del álgebra persisten a lo largo de los grados siguientes. Las prácticas tienen diverso grado de dificultad. Las diseñadas en ambiente Logo se han aplicado a niños pequeños de segundo y tercero años de primaria; las prácticas en Excel en alumnos de secundaria y bachillerato.

CAPÍTULO I
LAS DOS GRANDES RUTAS: PROPORCIONALIDAD Y PROCESOS DE GENERALIZACIÓN

En este capítulo se hace referencia a dos rutas conceptuales para acceder al pensamiento algebraico: el razonamiento proporcional y los procesos de generalización, ambas pretenden tender un puente hacia el pensamiento algebraico.

La elección de la primera ruta (razonamiento proporcional) se fundamenta, en primera instancia, en la familiaridad de los niños con ese contenido matemático en la escuela primaria específicamente quinto grado, aun cuando están en transición del pensamiento aditivo al multiplicativo, y examina el hecho de que ese contenido matemático se conecta conceptual e históricamente (Radford, 1996) a la idea de variación proporcional, variable en una relación funcional y como número general. Esto a su vez lo vinculamos con la segunda ruta de acceso (los procesos de generalización) que promueve la percepción de patrones como la expresión y escritura del patrón mediante actividades que involucran el razonamiento acerca de patrones en gráficas, patrones numéricos y figuras. Se busca que los niños sean capaces de detectar similitudes, diferencias, repetición y otros aspectos, así como de realizar operaciones aritméticas para generalizar, a partir de casos particulares hacia lo general y viceversa.

A diferencia de los tratamientos tradicionales para enseñar álgebra, partimos de la variación funcional hacia los procesos de generalización en su condición de tema perteneciente al campo de las estructuras multiplicativas, desde donde proyectamos dicho contenido matemático a la variación proporcional, variable como relación funcional y número general, vía los procesos de generalización.

El contenido del capítulo caracteriza el pensamiento matemático como un período de transición entre las estructuras aditivas y multiplicativas propias de esas edades y de la instrucción escolar en la escuela primaria, que privilegia contenidos matemáticos pertenecientes al campo de las estructuras aditivas. Vergnaud (1983, 1998), propone la noción de campo conceptual con el interés de entender la adquisición y el desarrollo de conocimientos específicos y de destrezas relacionadas con situaciones y problemas. El campo conceptual de la estructura multiplicativa ha sido estudiado desde la década de 1980 y se han realizado importantes aportaciones, tanto en su delimitación teórica como en las estrategias, dificultades y errores que cometen los estudiantes en tareas ligadas de este campo conceptual. Para tratar los problemas de estructura multiplicativa, Vergnaud distingue los siguientes contenidos: comparación múltiple de magnitudes, proporcionalidad simple, proporcionalidad simple compuesta, proporcionalidad doble o múltiple.

Problemas de estructura aditiva: para Vergnaud (1991) los problemas de estructura aditiva son todos aquellos para cuya resolución intervienen sumas o restas y no pueden estudiarse en forma separada, pues pertenecen a una misma familia de problemas o a un mismo campo conceptual. Involucran la construcción de conocimientos matemáticos que van más allá de los algoritmos de la suma y la resta, como son el dominio de diversas estrategias de cálculo y el reconocimiento de los problemas que se resuelven con esas operaciones.

Problemas de estructura multiplicativa: Vergnaud (1991) define los problemas de tipo multiplicativo como aquellos que incluyen una multiplicación o una división, y clasifica tres categorías: proporción simple, producto de medidas, y proporción múltiple.

Por su parte, el pensamiento algebraico involucra la comprensión de las relaciones funcionales, la generalización de patrones y de las relaciones numéricas, el trabajo con la estructura, el simbolismo y la modelización como medio de expresión y formalización de generalizaciones.

De acuerdo con Vergnaud (1991) una estructura multiplicativa se basa en la estructura aditiva, aunque determinados elementos intrínsecos de la estructura multiplicativa no están presentes en la primera. De las investigaciones publicadas sobre razonamiento proporcional que se han identificado inicialmente como apoyo para este capítulo sobresalen las siguientes: Inhelder y Piaget, 1958; Hart *et al.,* 1982; Spinillo y Bryant, 1991; English y Halford, 1995, y Noelting, 1980.

Diversos estudios se han centrado en el desarrollo del razonamiento multiplicativo; específicamente, en la transición del pensamiento aditivo al multiplicativo en estudiantes de educación primaria. El análisis de algunos problemas de estructuras multiplicativas tienen aspectos comunes a la estructura aditiva; por ejemplo, la multiplicación como la adición de partes repetidas, pero también tienen características que no se reducen a aspectos aditivos.

La comprensión del razonamiento proporcional, por ejemplo, requiere del estudiante un cambio cualitativo en los esquemas cognitivos para que pueda transitar del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo. La mayoría de los alumnos de educación primaria presenta dificultades para realizar ese cambio cualitativo. Una de esas dificultades consiste precisamente en poder diferenciar situaciones de estructura multiplicativa de situaciones de estructura aditiva. Esto se manifiesta en el uso de métodos aditivos erróneos.

Por otro lado, en los planes y programas de estudio de la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2011), el estudio de la proporcionalidad se desarrolla, principalmente, en los dos últimos grados de educación primaria (quinto y sexto grados) y en los dos primeros grados de la educación secundaria. En educación primaria se estudia el pensamiento proporcional relacionado con los problemas de estructura multiplicativa: multiplicación, división, número racional, escala, porcentaje y probabilidad, entre otras (Block, 2006; Block, *et al.*, 2010).

En educación secundaria las relaciones de proporcionalidad se estudian vinculadas al pensamiento algebraico, como, funciones lineales. El estudio del pensamiento proporcional en educación básica forma un eje articulador de contenidos matemáticos diversos, que continúan y se generalizan en niveles de estudios posteriores.

Pensamiento algebraico temprano

La transición de la aritmética al álgebra es un paso importante para acceder a ideas más complejas dentro de las matemáticas escolares. Una de las dificultades que la mayoría de los estudiantes enfrenta al iniciarse en el estudio del álgebra obedece a que ésta ha sido vista como una transición lineal, como una extensión de los cálculos numéricos a la operación con incógnitas y variables. Se pretende que el pensamiento del alumno evolucione del manejo de cantidades definidas, como números y operaciones, a la abstracción de propiedades generales tales como $a + b = b + a$, o que distinga la tenue diferencia entre coeficiente y variable, siendo ambas desconocidas: $ax + b$. Que maneje con soltura el análisis de una expresión algebraica: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y su síntesis: $a^2 + ab = (a + b/2)^2 - b^2/4$.

Las dificultades en el aprendizaje del álgebra se deben en parte a que este contenido matemático se enseña, por lo general, a partir de fuentes de significados limitadas, usualmente se toma como base el dominio numérico y se dejan de lado ideas importantes que se interconectan con otros dominios matemáticos, como por ejemplo, el geométrico.

Por otro lado, numerosos estudios en didáctica del álgebra han investigado y catalogado las dificultades y los errores que cometen los estudiantes al iniciarse en el estudio del álgebra elemental; autores como Booth (1984), Kieran (1980 y 1988), Mason *et al.* (1985);

Filloy y Rojano (1989); Filloy, Rojano y Puig (2008) señalan que estos alumnos tienden a usar métodos aritméticos en lugar de métodos algebraicos para resolver problemas de enunciado y tienen dificultades para comprender y manejar conceptos propios del álgebra como el de incógnita, número general y variable, así como para comprender que las operaciones en álgebra pueden no llevar a un resultado numérico y que eventualmente pueden quedar como operaciones suspendidas. Estos estudios, además, evidenciaron que un bagaje predominantemente aritmético puede resultar un obstáculo para el aprendizaje del álgebra –ver por ejemplo, el estudio de Filloy y Rojano (1989) y Kieran, (1988)–. En ese sentido, algunos estudiosos afirman que para el desarrollo del pensamiento algebraico es imprescindible que los alumnos puedan pensar y percibir la simbología y las operaciones aritméticas de manera distinta a la que se cultiva tradicionalmente en la escuela primaria, para que sobre ese nuevo modo de pensamiento aritmético construyan las nociones básicas del álgebra.

Cabe mencionar que el acercamiento más tradicional empieza por enseñar la sintaxis algebraica, se enfatizan sus aspectos manipulativos y al final se resuelven problemas. La principal crítica a este acercamiento es que se introduce al estudiante a un simbolismo desprovisto de significado y de sentido, se ignora que viene de trabajar con aritmética, donde los símbolos se relacionan con diversas fuentes de significado y los contextos de los problemas determinan en buena medida la manera de resolverlos.

Por otra parte, los tiempos didácticos para el aprendizaje del álgebra son prolongados y parece oportuno iniciarse en ese pensamiento a edades tempranas (7-11 años), al aprovechar las fuentes de significados que están presentes en los contenidos curriculares de la primaria. En respuesta a cuestionamientos como los anteriores, se han llevado a cabo diversos estudios para investigar la transición del álgebra, como: la perspectiva de la aritmética generalizada (Mason, 1985), la evolución por rupturas (Filloy y Rojano, 1989); la reificación (Sfard y Linchesvski, 1994); el sentido de las operaciones (Slavit,1999); la interpretación de los símbolos (Kieran, 1992, Matz, 1980 y Booth, 1984); el tratamiento de las operaciones y las funciones (Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000); el álgebra como una herramienta de representación y resolución de problemas (Da Rocha Falcão, 1993); la dialéctica entre la teoría y la práctica: un proyecto de iniciación temprana al álgebra (Malara, 2003), álgebra en la escuela elemental (Carraher, Schliemann y Brizuela y Earnest, Goodrow, Lara Roth y Peled, 2003), funciones lineales (Carraher y Earnest, 2003), transiciones entre las diferentes generalizaciones simbólicas por principiantes en álgebra en un ambiente intensivo computacional (Tabach, Hershkowitz y Arcavi, 2008); con relación a la generalización y la formalización progresiva (Kaput y Blanton, 2000), hacia la representación en álgebra: puntos de vista (Kaput, Blanton y Moreno, 2008). Todos esos estudios han mostrado que en dicha transición hay obstáculos que requieren ser superados por los alumnos para llegar a las nociones del álgebra simbólica. Algunos resultados sugieren que la posibilidad de remontar tales obstáculos depende directamente de la manera como se concibe el pensamiento algebraico y específicamente de qué forma se introduce la iniciación temprana a dicho pensamiento.

Existen diversas maneras de mirar al álgebra: como un lenguaje, una herramienta, aritmética generalizada o como cultura. Esta forma de entender el pensamiento algebraico y por extensión su iniciación temprana involucra no solamente una mirada a estas perspectivas sino también su factibilidad como una ruta para acceder a las primeras ideas algebraicas.

En esta obra se propone la iniciación temprana al pensamiento algebraico a partir de dos rutas de acceso: la variación proporcional y los procesos de generalización.

La variación proporcional se refiere a cantidades que varían de acuerdo con la ley simple: si una cantida aumenta cierto número de veces, entonces la otra aumenta en la misma proporción. Esta ruta conduce de manera natural a las ecuaciones lineales, cuando hay una variación proporcional y una cantidad desconocida; a sistemas de ecuaciones lineales cuando hay más de una cantidad desconocida; a la funciones lineales $f(x) = ax$ o $f(x) = ax + b$. Se hace un amplio uso de la idea de proporción en figuras geométricas, ya que con éstas se generan objetos concretos capaces de ser medidos (por ejemplo con una regla o una cuadrícula) o comparados. Inclusive, a edades tempranas, permiten detectar si la idea de proporción está plenamente desarrollada en el niño.

Los procesos de generalización son inductivos: a partir de una secuencia de objetos ordenados en secuencia, el alumno intenta dar una regla de generación del siguiente objeto. Ejemplos de procesos de generalización han sido usados en muchas investigaciones de secuencias de patrones, como por ejemplo, los números cuadrados, números triangulares, etcétera.

En los estudios sobre la aritmética como una entrada al álgebra hay una diversidad de opiniones sobre cómo implemetarla, Kaput, Carraher y Blanton (2008) basan su postura en la premisa de que la aritmética y la matemática en la escuela primaria se han abordado de maneras que muchas veces restan importancia a la generalización, siendo ésta una parte inherente al pensamiento algebraico. En el campo del álgebra temprana muchos piensan que los alumnos en la escuela primaria pueden estar preparados para pensar sobre estructuras y relaciones, aunque no puedan usar símbolos convencionalmente aceptados. No se trata de quitar importancia a las habilidades básicas (por ejemplo la fluidez en el cálculo), lo que se enfatiza es que se pueden desarrollar otras habilidades más complejas o avanzadas mientras se aprenden y ejercitan las más básicas.

En una segunda postura del enfoque prealgebraico no se exige agregar más contenidos al programa escolar sino tratar con mayor profundidad los temas que ya se cubren, para que enfaticen la generalización. Los investigadores en álgebra temprana tienden a concebir una visión amplia del razonamiento simbólico, para ellos éste incluye, pero no se restringe, al razonamiento con una notación algebraica; por ejemplo, este grupo de investigadores incorporan al uso del lenguaje oral, las tablas y los gráficos, además de la notación algebraica.

En este libro se toma el enfoque de pensamiento algebraico temprano o álgebra temprana; las rutas conceptuales que se proponen no rompen con el pensamiento numérico o geométrico en etapas tempranas, más bien este abordaje requiere de una exploración más profunda de elementos que ya formando parte del *curriculum* en el nivel primario, permiten tender un puente al pensamiento algebraico.

Campos conceptuales de Vergnaud

La teoría de los campos conceptuales pretende dar un marco de referencia en investigaciones relacionadas con actividades cognitivas, particularmente con aquellas que tienen que ver con aprendizajes científicos y técnicos. En primera instancia fue elaborada con el fin de explicar los procesos de conceptualización de las estructuras aditivas, multiplicativas, del álgebra y relaciones espacio-número. Iniciada por Vergnaud (1982, 1983).

Esta escuela francesa trabaja sobre dos hipótesis, una de tipo epistemológica y otra constructivista; la primera supone que los problemas son una fuente de conocimiento y el aprendizaje se produce como consecuencia del reconocimiento y resolución de éstos dentro de un contexto. La segunda supone que el aprendizaje se construye a partir de un conflicto cognitivo y en interacción con su entorno.

Para Vergnaud (1990) la teoría de los campos conceptuales "es una teoría cognitivista que pretende proporcionar un marco coherente y algunos principios base para el estudio del desarrollo y del aprendizaje de competencias complejas, especialmente las que se refieren a las ciencias y las técnicas".

Se trata de una teoría psicológica del proceso de conceptualización de lo real que permite localizar y estudiar continuidades y rupturas entre conocimientos desde el punto de vista de su contenido conceptual (1990, p. 133). El problema que se plantea Vergnaud

(1996) es la relación entre el conocimiento y los problemas teóricos y prácticos a los cuales responde. Además, aborda esta relación tal como aparece en una situación real, como por ejemplo en un salón de clase.

Vergnaud (1996) reconoce la importancia de la teoría del suizo Jean Piaget, al destacar las ideas de adaptación, equilibrio y desequilibrio como piedras angulares para la investigación en didáctica de las ciencias y de la matemática. Considera que la gran piedra angular colocada por Piaget fue el concepto de esquema. Reconoce igualmente que su teoría de los campos conceptuales fue desarrollada también a partir del legado de Vigotski; eso se percibe, por ejemplo, en la importancia atribuida a la interacción social, al lenguaje y a la simbolización en el progresivo dominio de un campo conceptual por los alumnos (Moreira, 2002].

Aunque Piaget haya hecho un trabajo muy importante para la educación, él mismo no impartió en el aula matemáticas o ciencias, de ahí que sea importante estudiar los contenidos que se enseñan. Una de las contribuciones de Vergnaud es sin duda su teoría de los campos conceptuales particularizados a las estructuras aditivas y multiplicativas.

Para Vergnaud un concepto consiste de una terna $C = (S, I, R)$ donde S es el conjunto de situaciones a las que el alumno se enfrenta y dan sentido al concepto por sus vivas experiencias; I es el conjunto de invariantes que son los objetos, propiedades y sus relaciones, los cuales se traducen en reglas de aplicación en ciertos dominios; R es el conjunto de representaciones diversas del concepto: lenguaje natural, gráficas, tablas, diseños, sentencias, etcétera, forman el bagaje que el alumno usa para enfrentar las situaciones del concepto. El primer conjunto –el de situaciones– es el *referente* del concepto, el segundo –el de invariantes operatorios– es el *significado* del concepto; en cuanto al tercero –el de representaciones simbólicas– es el *significante*.

Esquemas

En la construcción de los invariantes operatorios juega un papel importante la noción de esquema: un esquema describe la organización invariante de la conducta de una persona en una clase de situaciones. "Es dentro de los esquemas que se pueden investigar los conocimientos en acto del sujeto; es decir, los elementos cognitivos que le permiten al sujeto ser operatorio" Vergnaud (1991).

Los esquemas son clasificados en tres tipos:

1. Teoremas en acción o de tipo "proposición": son las propiedades o relaciones que usa el alumno cuando resuelve un problema, aunque no sea capaz de explicitar o justificar.
2. Conceptos en acto: forman parte de los teoremas en acción. Indispensables en su formulación.
3. Argumentos, por ejemplo los objetos, los números. Los invariantes tienen un dominio de aplicación. A menudo los errores se presentan como la aplicación de esquemas fuera de su dominio.

La idea de esquema puede parecer muy abstracta, por ello pongamos algunos ejemplos.

Ejemplo:
En el nivel de secundaria, los chicos deben resolver la ecuación lineal:

$$ax + b = c, \text{ con } a, b > 0 \text{ y } b < c$$

Típicamente siguen el esquema de solución donde se observan con claridad los invariantes:

"se conserva la igualdad al restar b de ambos lados"

"se conserva la igualdad al dividir de ambos lados"

Este esquema es menos confiable cuando se considera por ejemplo la ecuación:

$$(1/2)x - 3 = 1$$

Ejemplo:
Los trabajos de investigación sobre el número decimal (Sackur-Grisvard, C. y Leonard, F., 1985) han permitido ver que las respuestas falsas y sin duda muchas de las correctas de los alumnos de secundaria al tratar de comparar números decimales siguen ciertas reglas que pueden descomponerse en dos subreglas:

1. Un algoritmo de descomposición de la parte entera.
2. La distinción entre las cifras delante y después del punto decimal.

Cuando la parte entera es igual, la comparación de la parte decimal en 80% de los casos se hace de acuerdo con las reglas R1 (mayormente) y R2:

R1: El número que tiene la parte decimal más grande, como entero, es la mayor. Por ejemplo:

$12.113 > 12.4$	porque	$113 > 4$
$12.8 > 12.4$	porque	$8>4$

R2: El número que tenga el mayor número de decimales es el más pequeño. Por ejemplo:

$$12.04 < 12.4$$
$$12.98 < 12.9$$

Ejemplo:
Las siguientes reglas se obtienen con frecuencia en el nivel básico primaria-secundaria:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

$$|a+b| = |a| + |b|$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

se pueden considerar que revelan el teorema en acción

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

fuera de su dominio de aplicación.

Ejemplo:
Las siguientes reglas concernientes a las razones entre números reales se encuentran en varios niveles del currículum de matemáticas.

R1: Si se multiplica (divide) un número por otro, entonces éste aumenta (disminuye).
R2: El cuadrado de un número es más grande que el número.
R3: La raíz cuadrada de un número es más pequeña que el número.

Se ve claro que el teorema en acto subyacente es la generalización de las propiedades R1-R3 válidas en los enteros positivos a los números reales.

Estructuras aditivas

Se entiende por problema de tipo aditivo aquel cuya solución amerita tan sólo sumar o restar. Estructuras aditivas son las relaciones en juego que sólo están formadas por adiciones o sustracciones. El proceso de sumar está íntimamente relacionado con el acto de contar o más generalmente de medir, siendo una medida discreta el acto de contar. En el sentido matemático una media es una manera de asignar un número no negativo a conjuntos de un universo. Esta asignación la podemos denotar por:

$$A \rightarrow m(A)$$

para todo conjunto A dentro del universo. Esta asignación mínimamente satisface las propiedades intuitivas de medida:

1. $A \subset B \Rightarrow m(A) \leq m(B)$.
2. $A \cap B = \varnothing \Rightarrow m(A \cap B) = m(A) + m(B)$.

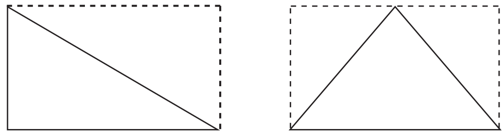
Menos obvio es la existencia de conjuntos de medida cero; por consistencia el conjunto vacío tiene medida cero. La noción de medida depende del "ambiente" de los conjuntos. Por ejemplo, tratándose de figuras planas, la medida de un rectángulo se calcula como:

$$m(\text{rectángulo}) = \text{base} \times \text{altura}$$

pero la medida de uno de sus lados es cero. Al continuar con este ejemplo, la medida de figuras que no son rectángulos se extiende:

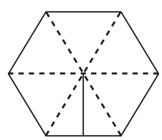
$$m(\text{triángulo}) = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

debido a que dos triángulos forman un rectángulo:



De esta manera se puede calcular el área de un polígono regular como la suma de las áreas de los triángulos que lo componen: obteniendo así la fórmula:

$$m(\text{polígono}) = \frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$$



La medida discreta se usa para medir conjuntos finitos y es el número o cantidad de elementos (cardinalidad) del conjunto:

$$m(A) = \#(A)$$

Es bien sabido que el proceso de contar no se da sino hasta edades relativamente grandes en el niño, 6-7 años, cuando la noción de correspondencia entre conjuntos y de ahí la de número o conteo está bien desarrollada. En el ejemplo citado por Vergnaud, en niños de 5 o 6 años se les presenta la siguiente situación de copitas y huevos, se le pide al niño que diga si hay más copitas que huevos. Sin dificultad contestan "hay las mismas" o que "es igual". En la situación mostrada con los huevos desalineados de las copitas, se plantea la misma pregunta. Hasta los 5, 6 o 7 años, dependiendo del individuo contestan "hay más copitas" porque es más largo o "hay más huevos" porque están más apretados. Es sólo hasta los 7 años, según Piaget, que los niños contestan "es igual" con argumentos del tipo "no se quitó ni se puso nada" o "se puede volver a como estaba antes". Así la noción de medida discreta sintetiza el proceso psicológico de contar.

El proceso de sumar se pude sintetizar en la propiedad dos de la noción abstracta de medida:

Figura 1.1 ¿Hay más copitas que huevos?

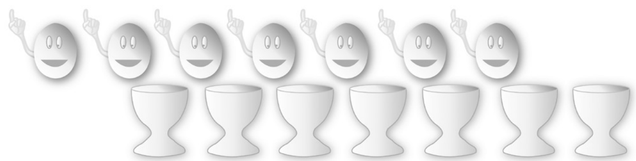


Figura 1.2 ¿Hay más copitas que huevos?

Ejemplo:

Juan tiene cuatro canicas en la bolsa izquierda y tres canicas en la bolsa derecha, ¿cuántas canicas tiene Juan? En símbolos:

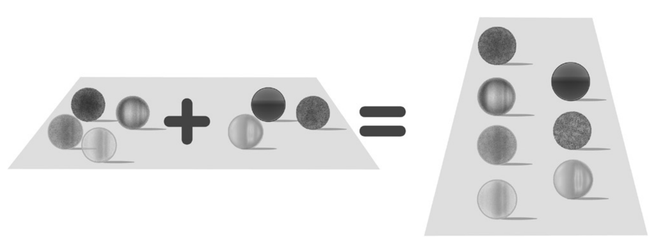


Figura 1.3 ¿Cuántas canicas hay?

En el marco conceptual de las estructuras aditivas, Vergnaud clasifica en seis grandes categorías el tipo de relaciones aditivas. Hay que recordar que la operación de suma es una relación ternaria (comúnmente llamada operación binaria) que relaciona la suma c con los sumandos a, b:

$$(a, b) \rightarrow c = a + b$$

Las seis categorías son las siguientes:

1. Primera: dos medidas se componen para dar una tercera medida.
2. Segunda: una transformación opera sobre una medida para dar otra medida.
3. Tercera: una relación une dos medidas.
4. Cuarta: dos transformaciones se componen para dar una transformación.
5. Quinta: una transformación opera sobre un estado relativo para dar un estado relativo.
6. Sexta: dos estados relativos se componen para dar un tercer estado relativo.

Cabe aclarar al lector que la noción de medida de Vergnaud no coincide totalmente con la definición matemática dada anteriormente. Vergnaud llama medida al resultado de medir: $m(A)$ y no a la función de medida m. El término transformación lo usa en el sentido de una acción que se efectúa –función– sobre un objeto.

Para la primera categoría podemos tomar el ejemplo de las canicas; las dos medidas se distinguen porque el primer conjunto de canicas es de vidrio y el segundo de metal. Podríamos enunciar la situación así: Juan tiene cuatro canicas de vidrio en la bolsa izquierda y tres canicas de metal en la bolsa derecha, ¿cuántas canicas tiene Juan?

De la segunda categoría: una transformación opera sobre una medida para dar otra medida; considere el problema:

Ejemplo:

Pablo tenía siete canicas antes de empezar a jugar; ganó cuatro ahora tiene 11. Se puede representar por el esquema:

$$\boxed{7} \xrightarrow{\quad +4 \quad} \boxed{11}$$

En esta notación los cuadrados representan: números naturales y los círculos números relativos (enteros). Se podría ser más preciso y definir la transformación (función):

$$f(x) = x + 4 \text{ y entonces } f(7) = 11,$$

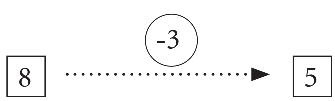
o bien

$$f(m(A)) = m(B), \text{ siendo } m(A) = 7,\ m(B) = 11,$$

la medida de las canicas que Juan tenía antes y después.

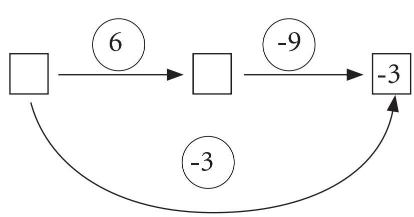
De la tercera categoría: una relación une dos medidas.

Ejemplo:
Juan tiene ocho canicas, Ernesto tiene tres menos; entonces tiene cinco, donde la flecha punteada indica la relación “tiene menos que”.



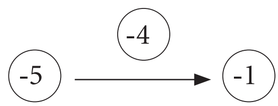
De la cuarta categoría: dos transformaciones se componen para dar una transformación. Considere la siguiente situación:

Ejemplo:
Pablo ganó seis canicas ayer y hoy perdió nueve, en total perdió tres.



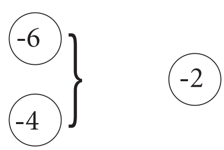
De la quinta categoría: una transformación opera sobre un estado relativo para dar un estado relativo.

Ejemplo:
Andrea le debe cinco monedas a Lidia, le devuelve cuatro, sólo le debe una.



De la sexta categoría: dos estados relativos se componen para dar un tercer estado relativo.

Ejemplo:

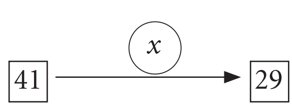


Pablo le debe seis canicas a Enrique, pero Enrique le debe cuatro. Entonces Pablo le debe a Enrique sólo dos canicas. Aquí los corchetes representan la relación "le debe a".

Las categorías aditivas de Vergnaud dan un marco teórico para el planteamiento de problemas algebraicos más simples.

Ejemplo:
Pablo acaba de jugar a las canicas. Tenía 41 antes de jugar y ahora tiene 29. Por lo tanto perdió. ¿Cuántas canicas perdió?

El problema se pude enmarcar como un problema aditivo de la segunda categoría con una cantidad desconocida x o en notación algebraica: $41 + x = 29$



Una ecuación lineal de primer grado

Problemas algebraicos más complejos de tipo aditivo pueden analizarse dentro de este marco.

Ejemplo:

Pablo tenía cierta cantidad de canicas, el primer día ganó seis. El siguiente día perdió dos; de cualquier manera acabó con el doble de canicas que tenía el primer día. ¿Con cuántas canicas comenzó a jugar? ¿Con cuántas canicas comenzó a jugar el segundo día?

El problema es complejo de plantear; aun para chicos de secundaria. Pero se pueden abordar las ideas anteriores. Denotemos por:

x la cantidad de canicas con las que Pablo comenzó el primer día
y la cantidad de canicas con las que Pablo comenzó el segundo día

Entonces podemos plantear la situación en cada día como sigue:

Primer día:

$$\boxed{x} \xrightarrow{\quad +6 \quad} \boxed{y}$$

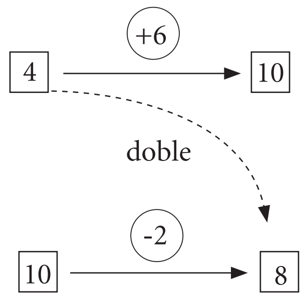
Segundo día:

$$\boxed{y} \xrightarrow{\quad -2 \quad} \boxed{2x}$$

que se traduce en el sistema de ecuaciones

$$x + 6 = y$$
$$y - 2 = 2x$$

cuya solución, obtenida por cualquiera de los métodos conocidos nos da $x = 4$, $y = 10$. Verifiquemos:



Estructuras multiplicativas

El campo conceptual de las estructuras multiplicativas consiste en todas las situaciones en que pueden ser analizadas como problemas de proporciones simples y múltiples para los cuales generalmente es necesaria una multiplicación, una división o una combinación de estas operaciones.

Es importante hacer referencia a los problemas de estructuras multiplicativas para interpretar de mejor manera los contenidos matemáticos que se presentan en la educación primaria tales como el razonamiento proporcional y la idea de variable. Sin duda la instrucción escolar privilegia el estudio de las estructuras aditivas y deja para más tarde el estudio de las estructuras multiplicativas, lo que ocasiona algunos problemas para que los niños puedan comprender, por ejemplo, el razonamiento proporcional y, vía este contenido matemático, el pensamiento algebraico.

De acuerdo con Vergnaud (1983), la estructura multiplicativa se basa en la estructura aditiva, pero ciertos aspectos intrínsecos de la primera no están presentes en la segunda; los clasifica en tres categorías: proporción simple, producto de medidas y proporción múltiple; afirma que ese campo conceptual se desarrolla entre los siete y 18 años de edad; comenta que las dificultades a menudo se sitúan en dos grandes categorías: isomorfismo de medida y producto de medida.

Vergnaud entiende por isomorfismo de medida una relación entre cantidades *x* (primera medida) e *y* (segunda medida) relacionadas funcionalmente por una proporción simple:

$$\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}$$

o funcional y = f (x) = mx. Así diversos problemas algebraicos se pueden entender como determinar una de las medidas desconocidas dada la relación:

$$\begin{array}{ccc} M_1 & | & M_2 \\ \hline x & \to & y = f(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x' & \to & y' = f(x') \end{array}$$

donde M_1, M_2 representan las "medidas" o cantidades.

Ejemplo:

Tengo tres bolsas de canicas. Hay cuatro canicas en cada bolsa ¿Cuántas canicas tengo?

$$\begin{array}{c} \text{bolsas} \mid \text{canicas} \\ \hline 1 \to 4 \\ 3 \to y' \end{array}$$

Ejemplo:

El metro de tela para un vestido cuesta $ 40, se necesitan tres metros de tela para confeccionar el vestido. ¿Cuánto debo pagar?

$$\begin{array}{c} \text{metros} \mid \text{pesos} \\ \hline 1 \to 40 \\ 3 \to y' \end{array}$$

Ejemplo:

Pagué \$12 por un paquete de gelatinas que tiene cuatro. ¿Cuánto cuesta cada gelatina?

gelatinas | pesos
$1 \rightarrow y$
$4 \rightarrow 12$

Ejemplo:

Pedro tiene \$12 y quiere comprar varios paquetes de caramelos que cuestan \$3 cada paquete. ¿Cuántos paquetes puede comprar?

paquetes | pesos
$1 \rightarrow 3$
$x' \rightarrow 12$

Ejemplo:

Hablar tres minutos por celular cuesta \$2. Si hablo 15 minutos ¿Cuánto me costará?

minutos | costo
$3 \rightarrow 2$
$15 \rightarrow y'$

Producto de medidas

Dos medidas se pueden combinar para dar otra medida, de un tipo nuevo, posiblemente.

Ejemplo:

El área de un rectángulo es la medida de la base por la altura. La nueva medida (el área) tiene unidades distintas de la base y la altura: se mide en metros cuadrados.

Ejemplo:
El volumen (la nueva medida) de una pirámide es el área de la base (la primera medida) por la altura (la segunda medida). La nueva medida tiene unidades de m^3.

Ejemplo:
Para saber cuántos soldados hay en un pelotón se puede contar cada soldado (razonamiento aditivo), o bien contar cuántas filas hay de fondo, cuántas de frente y multiplicar ambas (razonamiento multiplicativo).

Figura 1.4 Soldados.

Razonamiento proporcional

El tema razón y proporción ha sido uno de los más investigados en el campo de la educación matemática y existe una literatura muy extensa. Aquí sólo se hará referencia a aquellos trabajos que se relacionan directamente con la posibilidad de desarrollar ideas algebraicas a partir de este concepto.

La enseñanza del razonamiento proporcional en la escuela primaria enfatiza con frecuencia su carácter numérico y deja de lado el carácter geométrico de la noción y proporción. Esto trae como consecuencia una fragmentación del tema, que hace que los estudiantes adquieran habilidades principalmente en un contexto numérico, pero sin alcanzar un conocimiento integral. En la instrucción escolar muchas veces se reduce el concepto de proporcionalidad a un conjunto de algoritmos tales como proporciones simples *versus* compuestas, se deja que el niño comprenda a través de muchos ejemplos la distinción entre una y otra.

La teoría de Piaget divide cronológicamente el desarrollo cognitivo del niño en cuatro estadios principales:

- Sensorio-motor (hasta los dos años).
- Preoperatorio (de dos a siete años).
- Operaciones concretas (de siete a 11 años).
- Operaciones formales (de 12 años en adelante).

En el estadio sensorio-motor el niño depende de sus sentidos para explorar el mundo, pero rápidamente se da cuenta que puede intervenir en éste. Son característicos movimientos repetitivos o circulares, como agitar una sonaja. En la etapa preoperatoria, los niños son capaces de manejar símbolos, por ejemplo dibujar un rectángulo y un tríangulo encima para representar una casa, así como algunos símbolos alfa numéricos. Piaget afirma que el razonamiento proporcional se sitúa en el estadio de las operaciones formales ya que se trata de operar sobre una operación y no sobre los objetos; por lo tanto es necesario un proceso de abstracción.

Los siguientes expermientos realizado por Piaget son bien conocidos en esta etapa.

Experimento 1

La edad del niño va de cinco a seis años situándolo en la fase preoperatoria. Se le muestran dos hileras de fichas con la misma cantidad, perfectamente alineadas. Cuando se le pregunta ¿en cuál hilera hay más fichas?, es capaz de responder que hay el mismo número de fichas sin contarlas o bien puede contarlas y afirma que hay el mismo número. En seguida, delante de él, se separan las fichas de una de las hileras sin variar el número. El niño responde a la misma pregunta que hay más fichas en la hilera que tiene las fichas más separadas (figura 1.5).

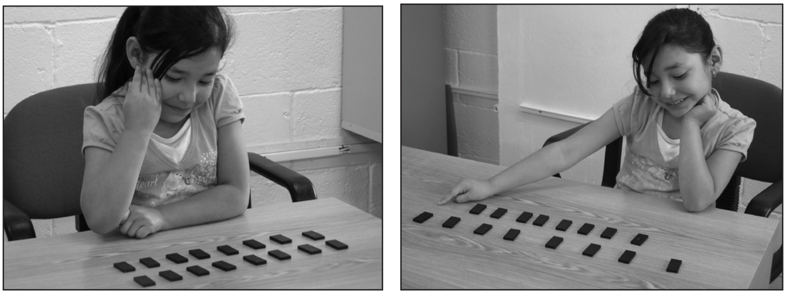


Figura 1.5 Conservación de la cantidad 1.

Experimento 2

La edad del niño va de cinco a seis años, como antes. Se le muestran dos recipientes idénticos con agua. En presencia del niño se vacía el contenido de uno de los vasos en uno más alto y se pregunta en qué recipiente hay más agua. Las respuestas del infante varían dependiendo de si el niño juzga el contenido por el ancho o la altura del algua en el recipiente (figura 1.6).

Figura 1.6 Conservación de la cantidad 2.

Experimento 3

La edad del niño es alrededor de nueve años. Se le presenta la misma situación que en el experimento anterior. El niño verifica con sumo cuidado que las cantidades de agua en los vasos son iguales. Cuando el contenido de uno de ellos se vacía en un vaso más delgado es capaz de argumentar que como el contenido del agua en el vaso más delgado se puede regresar al vaso original hay la misma cantidad de agua (figura 1.7). Este comportamiento se conoce también como reversibilidad concreta, pues se puede lograr identificar la igualdad e objetos concretos, pero no siempre en objetos abstractos.

Figura 1.7 Reversibilidad concreta.

Estos experimentos muestran que en el estadio preoperatorio el niño aún no desarrolla plenamente el concepto de conservación de la cantidad. Se desprende de los estudios de Piaget que las relaciones que involucren igualdades o equivalencias son inaccesibles a los niños a estas edades tempranas. Sin embargo, diversos autores sostienen críticas relativas a la diversidad en los grados de desarrollo de los infantes o a la manera como son formuladas las preguntas e inclusive el contexto.

En el estadio de las operaciones concretas el niño es capaz de comprender conceptos tales como peso o velocidad y puede entender que la cantidad de agua en los dos recipientes del experimento tres es la misma. También son capaces de concebir relaciones causa-efecto aunque no explicarlas a detalle, sin embargo tienen dificultad de asumir situaciones hipotéticas. Los niños en esta etapa son capaces de usar el razonamiento inductivo, donde pueden ir de situaciones particulares a generales, pero se les dificulta el razonamiento deductivo en el que deben plantearse hipótesis. La reversibilidad es uno de los conceptos más importantes que se desarrollan en esta etapa. El niño es capaz de comprender que si a una cantidad se le agrega y se le quita lo mismo, queda igual. Por ejemplo, puede entender que $4 + 4 = 8$ y $8 - 4 = 4$, pero ligado a objetos concretos (cuatro manzanas se agregan a un montón de cuatro manzanas y se retiran las mismas, quedan las mismas cuatro manzanas).

Piaget identifica tres operaciones esenciales involucradas en todos los niveles de desarrollo, ya sea físico o mental: asimilación, acomodación y adaptación o re-equilibración. La acomodación se da cuando al contacto con los objetos modifica la acción refleja. La consolidación y fortalecimiento de estos reflejos es la asimilación. En suma, la acomodación es la modificación de la acción de asimilación. La adaptación es cómo los procesos de asimilación y acomodación llegan a un balance; es decir se re-equilibran para asegurar que el individuo se adapte a su ambiente.

En todas las etapas de desarrollo y en cada nivel las tres operaciones están en constante interacción. Por ejemplo, las etapas cognitivas posteriores permanecen interconectadas con el nivel sensomotor aunque con un mayor grado de complejidad.

La etapa de las operaciones formales se inicia en la preadolescencia y dura el resto de la vida adulta. El niño va más allá: de lo concreto a lo abstracto, es capaz de pensar lógicamente y obtener información a partir de la información disponible. Usa el razonamiento hipotético-deductivo, lo cual significa que es capaz de hacer hipótesis o suposiciones y concluir el mejor camino para resolver un problema.

En cuanto a la demanda cognitiva que representa el razonamiento proporcional, estudios desarrollados en una primera etapa por Inhelder y Piaget (1958) afirman que el concepto de proporcionalidad es característico del estadio de las operaciones formales, propio de la pre y adolescencia. Según Piaget *et al.* (1987) el concepto de proporcionalidad no se puede entener [a menos que] se establezca una relación entre dos leyes de progresión (aritmética y geométrica).

De acuerdo con Lowell (1971) para Piaget hay dos elementos que caracterizan el razonamiento formal: el estudiante debe ser capaz de manipular condiciones límite de las variables y razones entre valores ordenados de las variables; eso requiere la cuantificación de la proporción, más que la descripción en términos cuantitativos.

Entre las réplicas a los estudios de Piaget, Lunzer y Pumfrey (1966 citados en Hart, 1989), registran tareas y describen las estrategias utilizadas con las distintas diferentes razones matemáticas (1:1, 2:1 y 3:1), estas razones resultaban ser las más fáciles y preferían resolver los problemas de manera aditiva. Varios autores contestan tal postura básicamente entorno a dos puntos: el primero, que el razonamiento proporcional en efecto pertenece al estadio de las operaciones formales, pero que el tipo de tareas puede hacer la diferencia. En el primer caso, Bryant y Spinillo (1990), Spinillo y Bryant (1989) y Spinillo (1993) afirman que el razonamiento proporcional no es una habilidad propia de las operaciones formales y puede ser desarrollado a edad temprana.

Los estudios con niños de cuatro a seis años de edad muestran que ellos comprenden la idea de mitad, que desde temprano tienen una apreciación perceptual y empiezan a comparar razones de cantidad antes de cualquiera experiencia con razones numéricas. Esto indica que el juicio perceptual (geométrico) como habilidad puede ser desarrollado desde temprana edad. El segundo cuestionamiento se refiere al tipo de tareas propuestas a los niños, al lenguaje utilizado y al contexto de los problemas como elementos que posiblemente interferían en el entendimiento y desempeño en la tarea.

El propio Piaget, también en otra etapa de su trabajo, describe estadios tempranos más finos al usar correspondencias cualitativas y seriaciones: el llamado estadio intermedio para adicionar compensaciones de dos razones 2:1, y el estadio avanzado en el razonamiento proporcional aplicado a valores numéricos con datos y sus razones. Concluye, así, que puede haber un entendimiento temprano de algunos conceptos matemáticos, por ejemplo, el concepto de proporcionalidad.

English y Halford (1995) afirman que una de las características esenciales del razonamiento proporcional involucra relaciones de 2º orden (relaciones entre dos relaciones), relaciones entre dos cantidades directamente perceptibles. Esta perspectiva defiende que en la fase temprana del razonamiento proporcional de los niños, éste involucra un razonamiento aditivo, en la forma de $a - b = c - d$. Entretanto, el trabajo de Lesh *et al.* (1988, citado en English y Halford 1995) apunta hacia un razonamiento paradigmático en el que los niños usan varias estrategias multiplicativas, típicas de una ecuación $a \times b = c \times d$ y pueden ser indicadores de razonamiento proporcional, especialmente cuando tienen una solución algorítmica.

En otro orden de ideas y ubicados en el terreno de la educación, es interesante hacer referencia a estudios como el de Karplus y Peterson (1970), quienes caracterizan las respuestas de los niños agrupándolas a partir de su nivel de comprensión. Aquí es muy conocido el estudio sobre el señor bajo y el señor alto, en la figura 1.8 se muestra el problema adaptado al lenguaje español cotidiano

En el trabajo original de Karplus y Petersen el problema se plantea así:

Experimento 4

El señor Bajo mide seis clips. Si se le mide con botones, mide cuatro botones (figura 1.8). El señor Alto es parecido al señor Bajo, pero mide seis botones. ¿Cuál es la altura del señor Alto en clips de papel? En seguida se muestran alguna soluciones típicas.

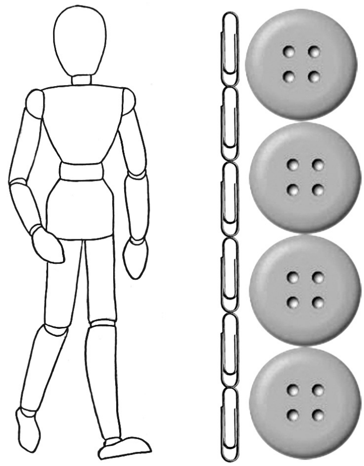


Figura 1.8 El problema del señor Alto y el señor Bajo.

Tabla 1.1 Tipo de razonamiento señor Alto y señor Bajo

Tipo de razonamiento	Explicación
Multiplicativo 1	Cada botón es igual a uno y medio clips de papel. Si el señor Alto mide seis botones de alto, multiplicas 6 por $1\frac{1}{2}$ y por lo tanto el señor Alto mide nueve clips.
Multiplicativo 2	El señor Alto es $1\frac{1}{2}$ veces más alto que el señor Bajo. Puesto que el señor Bajo mide seis clips de alto, el señor Alto debe ser $6 \times 1\frac{1}{2} = 9$ clips alto.
Multiplicativo usando sumas	Por cada dos botones hay tres clips de papel. El señor Alto es dos botones más alto que el señor Bajo, así que él debe ser tres clips de papel más alto: $6 + 3 = 9$ clips de papel.
Aditivo 1	El Sr. Bajo mide cuatro botones y seis clips de papel, o sea que los botones son dos menos que los clips de papel. Puesto que el señor Alto y el señor Bajo son similares y el señor Alto mide seis botones, entonces debe medir ocho clips de papel.
Aditivo 2	El señor Alto es dos botones más alto que el señor Bajo, así que él será también dos clips de papel más alto que el señor Bajo, lo que da ocho clips de papel de alto.
Estimativa	Nueve. Me imaginé que sería un poco más alto.
Azar	Puesto que el señor Alto es dos botones más alto que el señor Bajo, tomé los seis clips de papel y los multipliqué por dos para obtener 12 clips.

Por mucho, las respuestas más comunmente se encuentran entre las estrategias aditivas. La estrategia aditiva, a pesar de ser sistemática y dar resultados plausibles, es incorrecta.

El análisis de las distintas estrategias procede como sigue: denotemos la altura señor alto como A y la del señor bajo como B; por b, c la altura de un botón y un clip respectivamente.

Estrategia aditiva 1:

$B = 4b = 6c$ y $6 = 4 + 2$ y $A = 6b$
$\therefore\ A = 6 + 2 = 8c.$

Estrategia aditiva 2:

$A = B + 2b \Rightarrow A = B + 2c$
$B = 6c \ \therefore\ A = 8c.$

Estrategia multiplicativa 1:

$b = 1\frac{1}{2}c$ y $A = 6b$
$\therefore\ A = 6 \times 1\frac{1}{2}c = 6 \times \frac{3}{2}c = 9c.$

Estrategia multiplicativa 2:

$A = 1\frac{1}{2}B$ y $B = 6c$
$\therefore\ A = 1\frac{1}{2} \times 6c = \frac{3}{2} \times 6c = 9c.$

Estrategia multiplicativa con sumas:

$B = 6c$ y $2b = 3c$ y $A = B + 2b$
$\therefore\ A = 6c + 3c = 9c$

Estrategias en proporcionalidad inversa

Matemáticamente, en una proporción inversa dos cantidades varían de manera que su producto permanece constante. Sin embargo, en situaciones concretas el niño se enfrenta a la variación de dos cantidades. Un primer requisito para reconocer una variación inversamente proporcional es que al aumentar una cantidad la otra disminuya. Esto no es sin embargo suficiente. Es necesario primero reconocer la invariancia de cierta propiedad, la cual depende del contexto; por ejemplo, si x es el número de trabajadores que realizan una labor e y es el número de horas empleadas para realizar la misma labor, entonces x varía en proporción inversamente con y porque si aumenta el número de trabajadores, disminuye el número de horas empleadas. En este caso $x \times y$ se interpreta como la labor completa.

El siguiente ejemplo muestra una situación que ilustra diversas estrategias que involucran una variación inversa proporcional.

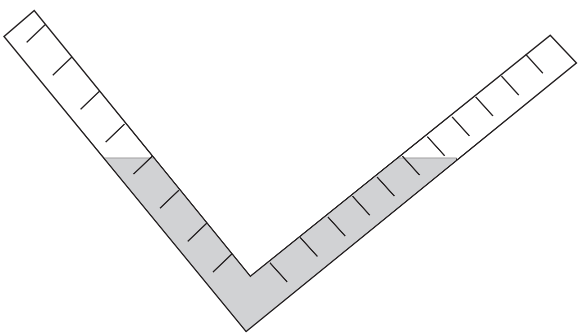


Figura 1.9 El triángulo de agua.

Experimento 5

El llamado "triángulo de agua" es un contenedor de líquido en forma de triángulo rectángulo (ángulo recto), el cual puede inclinarse y los niveles en los lados (catetos) izquierdo y derecho se pueden determinar mediante una escala en ellos (figura 1.9). El triángulo de agua se rota hasta que la altura en el lado derecho mida seis unidades y la altura en el lado izquierdo mida cuatro. Supóngase que el triángulo se rota un poco más hasta que la altura en el lado derecho es de ocho unidades. ¿Cuál será la altura del agua en el lado izquierdo?

Una respuesta multiplicativa correcta rara vez se observa en niños en la transición de la estrategia aditiva a una muliplicativa.

Tabla 1.2 Tipo de razonamiento triángulo de agua

Tipo de razonamiento	Explicación
Aditivo 1	La altura del lado izquierdo sería de dos unidades, porque el nivel del agua en el lado derecho aumentó en dos, así que el nivel en el lado izquierdo debe disminuir en 2 : $4 - 2 = 2$.
Aditivo 2	Antes había un total de 10 unidades porque $4 + 6 = 10$. El número total de unidades queda igual, así que la respuesta es dos porque $2 + 8 = 10$.
Multiplicativo	Al principio el área del triángulo de agua es 12 porque $\frac{4 \times 6}{2} = 12$. La cantidad de agua no cambia, por lo que la respuesta es tres porque $\frac{3 \times 8}{2} = 12$.

Este ejemplo muestra que los niños que no están aún en el nivel de las operaciones formales típicamente aplican una estrategia aditiva para resolver problemas de variación proporcional inversa. Al igual que en la variación directa proporcional, esta estrategia incorrecta le parece lógica y razonable al niño, pero se sorprenden cuando llevan a cabo realmente el experimento inclinando el triángulo y descubren que la respuesta correcta es 3 y no 2 como lo habrían predicho bastante seguros.

Noelting (1980) estudia el razonamiento proporcional en experimentos en los que no se requiere una respuesta numérica, sino que los niños deben comparar razones.

Experimento 6

Se dice a los niños que los vasos sombreados representan jugo de naranja concentrado y aquellos que no están sombreados representaban agua (figura 1.10). Se les pide que imaginen que se vierte en la jarra vacía el jugo de naranja concentrado y los vasos de agua indicados. Se pregunta a los alumnos cuál jarra contiene la naranjada con un sabor más fuerte o si las dos tienen el mismo sabor. El estudio se realizó con niños de entre seis y 12 años. Los resultados indican que los niños pueden comparar razones tales como 1 : 2 y 2 : 4 pero adoptan una estrategia aditivia cuando comparan razones como 2 : 3 y 3 : 4.

Karplus y Peterson (1970) presenta problemas de comparación de razones, usa concentraciones de jugo en el que se le pide al niño que diga qué limonada es más dulce en la situación mostrada en la figura 1.11.

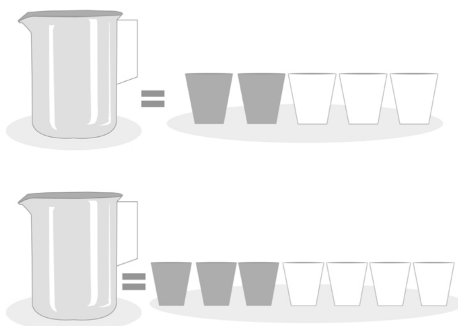


Figura 1.10 El problema de la limonada.

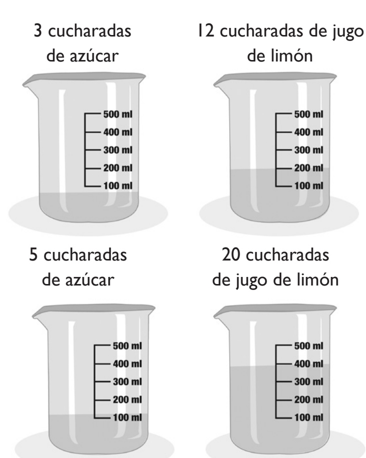


Figura 1.11 Comparación de concentraciones.

Basándose en problemas de comparación mostrados en la figura 1.11, Noelting (1980) consigue identificar entre seis y siete etapas en la comprensión del concepto de razón en niños y jóvenes de seis a 16 años, que incluyen los estadios de las operaciones concretas y formales, en la clasificación de Piaget.

El tipo de problema y características de las etapas se muestran en la tabla siguiente. La edad de acceso se determina cuando 50% de la clase resuelve al menos un problema. En la columna de ítem típico los cuadros negros representan vasos de naranja y los cuadros blancos vasos de agua. Podría usarse la notación compacta (n, a) para un número n de vasos de naranja y a de agua, para la razón n/a.

La característica de la etapa representa el tipo de problema que puede resolver.

Tabla 1.3 Etapas de comprensión

Etapa	Edad	Ítem típico	Característica
0	2	■ vs. □	Identificación de elementos.
IA	3	■■■■□ vs. ■□	Comparación de primeros términos solamente.
IB	6	■□□ vs. ■□□□□□	Mismo primer término. Comparación de segundos términos.
IC	7	■■■□□□□ vs. ■■□	Relación inversa entre términos en las parejas ordenadas.
IIA	8	■□ vs. ■■□□	Clase de equivalencia de razón 1:1.
IIB	10	■■□□□ vs. ■■■■□□□□□□	Clase de equivalencia de cualquier razón.
IIIA	12	■□□□ vs. ■■□□□□□	Razón de dos términos correspondientes múltiplos uno de otro.
IIIB	15	■■■□□□□□ vs. ■■■■■□□□□□□□□	Cualquier razón.

Noelting (1980b) clasifica las estrategias usadas en la comparación de razones (a, b) *vs.* (c, d), como "estrategias dentro", si se comparan términos correspondientes a y b dentro de la misma razón (a, b) y "estrategias entre", cuando se comparan términos correspondientes *a* y *c,* y *b* y *d*. En el mismo estudio, Noelting reconoce un proceso de equilibración creciente o reestructuración adaptativa, cuando las estrategias pasan del fallo al éxito.

Tournaire y Pulus (1985) presentan un resumen de la investigación hecha sobre razonamiento proporcional hasta 1985. Revisa el tipo de tareas usadas en la investigación: balanzas y poleas; proyección de sombras; comidas y peces; Sr. Alto y Sr. Bajo; jugo de naranja, etcétera, las cuales se resumen en las siguientes categorías: problemas de razón, problemas de mezcla y tareas de probabilidad. Hace la diferencia entre problemas de mezclas, en los que la unidad es la misma (onzas por ejemplo o vasos), de problemas de razón (onzas y dólares).

Dentro de las estrategias correctas para resolver problemas de proporcionalidad menciona las estrategias multiplicativas y las estrategias en marcha (*building-up*). Un ejemplo de una estrategia en marcha sería la siguiente: en una tienda, el tendero vende dos dulces por ocho centavos, ¿cuánto cuestan seis dulces? En la estrategia en marcha la respuesta correcta se obtiene de manera recursiva: "ocho centavos por dos dulces, ocho centavos más son 16 centavos por cuatro dulces y ocho centavos más son 24 centavos por seis dulces.

Una estrategia errónea puede ocurrir de usar mal una estrategia correcta. Un error común consiste en usar parte de los datos, por ejemplo comparar sólo los numeradores al intentar comparar una proporción. Otro tipo de error frecuente es usar la estrategia de la diferencia constante o estrategia aditiva, en la cual la razón en una proporción se calcula con la diferencia de los términos de la proporción y se supone la misma diferencia entre los términos de la otra proporción. En ocasiones el niño puede usar una estrategia en marcha cuando la razón es entera, pero utiliza una estrategia aditiva en razones que no son enteras.

Los mismos autores mencionan varios aspectos que interfieren en la comprensión de problemas de proporcionalidad. De los referentes a la tarea están: las estructurales que incluyen la presencia de razones enteras, en qué término de la proporción aparece la incógnita y la magnitud de los términos y razones. Esta información puede usarse con ventaja al desarrollar una secuencia didáctica, por ejemplo al presentar primero problemas de proporcionalidad 1:2, luego del tipo 1:n, con razones enteras y luego no enteras. Otra clase de dificultades en la tarea se relacionan con el contexto: los problemas de mezclas son en general más difíciles que los que ivolucran razones de distintas cantidades. El contexto, discreto o continuo, familiar o ajeno, puede afectar también e desempeño. Finalmente el uso de materiales puede influir favorablemente en el éxito de problemas de proporción: balanzas, poleas, etcétera, aunque el porcentaje pueda ser bajo, de alrededor de 25 por ciento.

Sobre las características del alumno que pueden influir en el desempeño, los autore mencionan el género, la edad, la inteligencia.

Hart *et al.* (1989) hacen referencia a un estudio en el salón de clase sobre el tópico de razón y proporción. El estudio se realizó con niños entre 10 y 13 años de edad en cuatro clases de cuatro escuelas diferentes, en tres etapas:

1. Formalización de las lecciones (*pre test*).
2. Aplicación de una secuencia didáctica.
3. Formalización (*pos test*).

Las tareas consistieron en hacer parejas de escuadras (triángulos equiláteros, romboides) para diferenciar las partes y mostrar parejas de líneas; se les preguntó acerca de centros de aumento, semejanza, factor de escala y partes aumentadas. Se trataba de investigar el reconocimiento del aumento por un factor escala (concepción de los alumnos) y la construcción de los métodos utilizados.

Los profesores también participaron en el estudio, desarrollaron inicialmente un esquema de trabajo y pusieron algunos pre-requisitos tales como: medir las tareas de aumento y habilidades a medir. Además, introducían nuevas técnicas para el factor escala, tales como centro de aumento de líneas, tiempo grande, más grande y mayor tiempo, así como relacionar el aumento con los distintos significados que tiene en el mundo. Uno de los objetivos del estudio era investigar el papel de la enseñanza y la preformalización en ideas de semejanza.

El análisis de los resultados revela (pre entrevista) que los niños usaban términos como similar o algunos para describir el número de lados o alguna área. En el poscuestionario los niños desarrollaron diferentes respuestas en términos del reconocimiento de la escala y usaron el centro de aumento o la idea de pares de líneas para resolver los problemas. Utilizaban estrategias aditivas y de área para la descripción de las diferentes estrategias. La variación en el desempeño fue atribuida a aspectos de la instrucción escolar. Los profesores se concentraron en la producción de esquemas particulares para el trabajo e ignoraron los pre-requisitos y habilidades para el trabajo durante las clases. El concepto de razón es visto como una operación esencialmente aditiva y no multiplicativa, por lo que se repite la adición.

Las dos estrategias más utilizadas son: la adición con área y la estrategia aditiva con uso del factor escala y la nueva medida alrededor del borde. También predominaba la integración de factores de escala en los módulos de enseñanza con ciertos pre-requisitos. Otro aspecto de la enseñanza fueron los ángulos y su invariancia en el aumento; eso ayudó a explicar la variación en el desempeño de los niños relacionado con las partes regulares e irregulares. También sobresale el contexto de los problemas y el papel que juega la naturaleza de las relaciones numéricas que influyen en el problema, pero estos aspectos pueden comprenderse mejor si los profesores varían las relaciones numéricas y el contexto de los problemas en el aula.

Streefland (1985, citado en Hart 1989), sugiere que el aprendizaje de razón y proporción empieza con la comparación cualitativa y argumenta que la formalización y la introducción de algoritmos no deberían ser inmediatas, pues el razonamiento proporcional, inicialmente, es percibido en situaciones realistas. Según Streefland la realidad puede ser microinterpretada fácilmente, esto quiere decir que los primeros significados de las matemáticas pueden pensar-se en conexión con la realidad o a la inversa; que la realidad sirve para ambas cosas: como fuente para concebir matemáticas y como su dominio de aplicación. El abordaje realista se refiere a la manera como los estudiantes realizan su proceso de enseñanza y aprendizaje. Para establecer el vínculo entre lo concreto y abstracto, ellos necesitan desarrollar herramientas, por ejemplo, modelos visuales, esquemas y diagramas. Éste es un vehículo de pensamiento para que los estudiantes puedan avanzar en matemáticas.

Czarnocha (1999) desarrolló un estudio al usar la técnica de Bruner (1961) y Shulman (1968), citados en Czarnocha (1999), cuya principal idea es que el alumno aprende de manera más efectiva cuando descubre el conocimiento por sí solo en vez de hacerlo por instrucción directa. El profesor actúa como agente para que el menor pueda realizar el descubrimiento. Esta técnica propicia que los alumnos revelen su proceso de pensamiento, denominado momentos de cognición matemática, que ayudan a que los infantes construyan su propia realidad matemática, y ésta les permite acercarse de manera creativa y muy semejante a la forma como actúa un científico cuando plantea un nuevo concepto o teorema.

Es importante indicar que tal técnica no se debe tomar como una demostración de resultados, sino como un ejercicio para los alumnos, en el cual se les muestra su error y se les conduce a un momento de reflexión que en el mejor de los casos llega a la reestructuración de su pensamiento. La técnica se convierte así en una herramienta de investigación, recientemente asociada a la enseñanza experimental constructivista y relacionada con la idea vigotskiana de que es necesario estudiar los cambios mentales bajo la instrucción, mediante la interacción con el alumno.

En el mismo artículo el autor hace referencia a un estudio realizado en una escuela, con siete estudiantes con dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. El curso contenía los temas de razones y proporciones. En el trabajo con proporciones se planteó una secuencia didáctica que incluía figuras a escala, trabajo con mapas, dibujo de objetos de acuerdo con una razón preestablecida, recetas de cocina, entre otras. El investigador decidió empezar por la percepción de semejanza, por considerarla más intuitiva, y las razones como una herramienta de comparación, conceptual y numérica para expresar semejanzas; éstas deberían aparecer de manera natural para la idea de semejanza y problemas de receta de cocina.

Los resultados revelan dificultades en las proporciones (dibujos) con respecto al descubrimiento del concepto de medida común que debían utilizar para resolver esos problemas; sin embargo, los cuestionarios aplicados al final del curso demostraron una actitud diferente de los niños frente a las matemáticas: aprendieron a pensar formas diferentes de ver los problemas matemáticos. Desde el punto de vista del investigador, el estudio generó otras preguntas tales como el desarrollo de la noción de medida común, comprensión matemática y la interrelación con la verbalización de los procesos de pensamiento, así como la equivalencia entre la madurez intelectual y los niveles de pensamiento concreto y abstracto.

Cramer y otros (citado en English y Halford, 1995) comentan que el razonamiento proporcional involucra la habilidad para discriminar lo proporcional de lo no proporcional. Resnick y Singer (1993), citados en English y Halford (1995), comentan acerca del desarrollo del razonamiento proporcional en los pequeños y presentan un análisis de los orígenes de dicho razonamiento proporcional en edades tempranas; éstos parecen percibir patrones y covariación entre dos series de cantidades. Algunos estudios muestran que niños de seis años pueden hacer inferencias basadas en una comparación directa de la co-variación, pero no pueden en la co-variación inversa; sólo lo logran a partir de los nueve años. Para Acredolo, Adams, Schmind (1994); Kun (1977), Straus y Stavy, (1982), citados en English y Halford (1995), la co-variación es una relación binaria, porque se establece sólo entre dos variables.

Otros estudios, como los de Campbell y Graham (1984); Cueno, 1982, Miller y Gelmen (1983), citados en English y Halford (1995), indican que los niños utilizan las propiedades multiplicativas de los números antes de la adolescencia y que los estudiantes usan estrategias aditivas, porque recurren a la adición repetida para la multiplicación, como un medio para facilitar los problemas con situaciones multiplicativas. El razonamiento proporcional es mejor comprendido en situaciones realistas y a partir de la percepción cualitativa de la percepción cuantitativa. Podríamos argumentar, entonces, que el aspecto geométrico es más fácil de ser aprendido por los niños en edades tempranas, al vincular esto con el surgimiento del pensamiento algebraico en la historia de las matemáticas. De esta manera pretendemos acceder al pensamiento algebraico a partir del razonamiento proporcional.

Evolución histórica del concepto de proporcionalidad

De acuerdo con Radford (1996), la teoría de las proporciones en aritmética jugó un papel importante en el álgebra de la civilización antigua, uno de carácter geométrico y otro de carácter numérico. El primero se refería a problemas de cálculo de área y perímetro de figuras y el segundo a números dentro de un contexto. En las dos categorías los problemas se resolvían al usar un tipo de razonamiento proporcional; esto forma parte del pensamiento matemático mesopotámico, en el cual, a partir de la idea de proporcionalidad hallaron una solución al problema más sofisticado de encontrar raíces de ecuaciones algebraicas, usando el método de posición falsa; esto indica claramente una reconstrucción histórica de la transición de la aritmética al álgebra en Mesopotamia y muestra que el pensamiento algebraico (numérico) emerge del pensamiento proporcional.

De acuerdo con el autor, el desarrollo de nuevos métodos para la investigación de la historia de las matemáticas ha contribuido a la comprensión de las matemáticas del pasado y los resultados nos hacen ver la matemática tradicional de una manera distinta. Radford (1996) analiza también la influencia de la matemática griega y revisa las raíces de ciertos contenidos matemáticos, en especial la transición del pensamiento aritmético al algebraico y el papel del lenguaje y del simbolismo del pensamiento algebraico.

La segunda parte de este reporte se refiere a la transición de la aritmética al álgebra y muestra que el pensamiento algebraico (numérico) emerge del pensamiento proporcional. El pensamiento proporcional mesopotámico estaba fuertemente relacionado con el desarrollo social, histórico y económico de las ciudades. Radford (1996) menciona que los signos numéricos cuneiformes usados en Mesopotamia surgen de las actividades comerciales, basadas principalmente en la expansión de las ciudades, como por ejemplo, para calcular el área de una pieza.

Ya en las civilizaciones egipcia y babilónica se observan las dos corrientes mencionadas: lo geométrico y lo numérico, en problemas prácticos y otros más abstractos; en la primera categoría se sitúan el descubrimiento de áreas y perímetros de figuras geométricas, los principios de las palancas (idea de igualdad o balance); en la segunda, problemas puramente algebraicos y del cálculo infinitesimal aún ligado al pensamiento geométrico, esencialmente en la idea de las series aritméticas y geométricas. En la historia del desarrollo de las ideas algebraicas, éste es uno de los antecedentes importantes del pensamiento geométrico para los significados subyacentes a los símbolos de las primeras ideas desarrolladas por los egipcios y babilonios hasta el simbolismo algebraico más elaborado (Witmer 1983).

En este sentido, hay razones de orden epistemológico para explicar la transición de la aritmética al álgebra y por tanto es posible establecer un vínculo entre la historia del pensamiento algebraico y su uso en la didáctica de la matemática, motivando así un camino de acceso al álgebra a partir de la idea de proporcionalidad.

Pasando de la historia de las matemáticas a su enseñanza se nota un rompimiento significativo, tanto en el pensamiento proporcional y geométrico como en la transición del pensamiento aritmético al algebraico; se genera así, no sólo un rompimiento histórico, sino también una quiebra en el proceso de transposición didáctica; tal rompimiento es notorio en tres aspectos: el aritmético, el geométrico y el algebraico.

La argumentación de Radford (1996) acerca del papel de la teoría de las proporciones en la historia del álgebra es válida también para proponer el razonamiento proporcional como cimiento del pensamiento algebraico en los niños. En el trabajo que aquí se presenta ha sido un argumento de peso para seleccionar el razonamiento proporcional como un ruta de acceso temprano al pensamiento algebraico, así como para posibilitar el diseño de las actividades propuestas en este libro.

PROCESOS DE GENERALIZACIÓN

Internacionalmente se reconocen cuatro acercamientos a la enseñanza del álgebra (Bednard, Kieran y Lee 1996): generalización de patrones numéricos y geométricos, modelación de situaciones matemáticas y de situaciones concretas, estudio de situaciones funcionales y a partir de resolución de problemas y ecuaciones. En este libro se adopta la perspectiva del acercamiento por medio de generalizaciones.

Por su parte, Wheeler (citado en Mason *et al.,* 1985) señala el carácter artificial de la división anterior, pues los cuatro aspectos son fundamentales en un programa de álgebra elemental. Sin embargo, en el campo de la didáctica esta división resulta útil para conocer en cuál de los cuatro aspectos pone el énfasis un tratamiento escolar del álgebra en particular.

De acuerdo con Castro, Rico y Castro, 1995, toda situación repetida con regularidad involucra un patrón, éstas pueden formarse a partir de un núcleo que genera situaciones y se repite; en otros crece de manera regular.

La matemática descubre patrones en los números, en la computadora, en el espacio y en la imaginación. Las teorías matemáticas ayudan a comprender las relaciones entre patrones y sus estructuras, con el objetivo de explicar y predecir fenómenos que fija un patrón. La utilización de patrones en la enseñanza de las matemáticas es pertinente por lo menos por dos razones: primero, porque el mundo en que vivimos contiene patrones y regularidades; segunda, porque los patrones están presentes en las matemáticas y la habilidad para reconocerlos contribuye a llegar intuitivamente a fórmulas y relaciones que pueden ser utilizadas en matemáticas, como por ejemplo, en álgebra.

De acuerdo con Mason *et al.*, 1985, el álgebra no se debe enseñar como parte separada del programa de aritmética y geometría; trazar una línea divisoria entre ambas no es recomendable, pues el conocimiento algebraico se relaciona con todo el conocimiento matemático. Con base en estas ideas, se propone la incorporación de un modelo de enseñanza que tenga en cuenta los aspectos cognitivos, el uso de distintos lenguajes (numérico, geométrico y algebraico) y la organización de situaciones que incorporen aspectos significativos para el alumno. En este sentido, las situaciones significativas tienen un carácter diferenciado al comúnmente usado; aquí importa crear situaciones que hayan sido debidamente organizadas a partir del conocimiento que los alumnos ya adquirieron y también sobre el conocimiento de las dificultades que enfrentan en el aprendizaje escolar.

Mason (1985) señala que la generalidad es fundamental para el pensamiento matemático y algebraico. La generalización en álgebra es algo primario hacia la abstracción matemática y puede ser desarrollada a partir del trabajo con patrones o regularidades, que favorecen la articulación de la generalización en actividades cotidianas. Por consiguiente, para aprender el lenguaje algebraico es importante que los estudiantes tengan algo que comunicar; para ello necesita percibir un patrón o una regularidad y después intentar expresarlo y comunicarlo a alguien. Para el referido autor hay cuatro etapas para trabajar la generalidad en el salón de clases: percibir un patrón, expresar un patrón, registrar un patrón y prueba de la validez de las fórmulas.

1. Percibir un patrón. Se puede percibir un patrón a partir de la sucesión de figuras y, entonces, pueden surgir preguntas matemáticas, por ejemplo: ¿cuál sería una regla para reconocer el patrón? Se hace necesario el uso de técnicas matemáticas para generar los números o patrones *vgr.* recursividad, la inducción. Una de las ideas centrales es que un primer encuentro con el álgebra pueda ocurrir partiendo de la identificación y comunicación de patrones o de relaciones, las cuales se pueden establecer con diversos ejemplos particulares para que los niños perciban lo que es común en esas situaciones, decir y registrar lo que percibieron.

2. Expresar un patrón. El siguiente paso es expresar cuál es el patrón. Es necesario decir y registrar un patrón para que posteriormente se pueda reflexionar sobre él. Este tipo de actividad se puede facilitar mediante un trabajo colaborativo en el salón de clases, donde los estudiantes puedan trabajar en equipo y comunicar sus resultados, al preguntar y cambiar sus percepciones, hasta llegar a un acuerdo. Aquí el profesor actúa como un mediador de la actividad, al hacer preguntas que lleven a los estudiantes a reflexionar sobre sus propias ideas.

3. Registrar un patrón. Este paso hace posible la verificación de la regla. Esta actividad puede ser apoyada por dibujos o palabras para posteriormente describir las variables clave de un problema.

4. Prueba de la validez de las fórmulas. Para que una fórmula tenga validez se debe probar de diferentes formas; por ejemplo, mediante su aplicación en otros casos, se puede dar una respuesta por otros medios como: cálculos, dibujos o cuentas. Pero también es importante que la regla sea correcta y, para eso, se necesita tener una noción de lo general, lo cual involucra la idea de cómo un ejemplo particular puede mostrar lo general, para esto es necesario reestructurar el ejemplo particular y señalar características generales, lo cual se logra al observar características específicas en cada caso, las cuales, a pesar de que cambien, lo hacen de forma regular.

Al seguir lo que propone Mason con respecto a la última etapa para trabajar los procesos de generalización (la prueba de la validez de las fórmulas), Ursini (1996) observó dificultades en un estudio realizado con niños de secundaria (12-13 años de edad) para reconocer patrones al no cubrir las cuatro etapas mencionadas por Mason. De esta manera, Ursini resalta la importancia de dichas etapas para que los alumnos puedan comprender y usar adecuadamente el lenguaje algebraico.

Por otro lado, Alonso *et al.* (1996) también comenta los errores y las dificultades de los estudiantes en la generalización y argumenta que encontrar términos generales y llegar a una expresión simbólica es difícil para la mayoría de los estudiantes, si no se realiza un tratamiento didáctico adecuado. La dificultad radica en cómo abordar el problema, principalmente cuando se inicia el trabajo con patrones con secuencias aritméticas y geométricas. Tratándose específicamente de las secuencias geométricas, en muchas ocasiones, los estudiantes presentan dificultades para tratar con todas las componentes del problema, pues requiere el uso de la memoria a largo plazo: algunos casos, sólo consiguen ver algunas de las componentes del problema; en otras reducen su campo de observación y permanecen solamente con una parte de las propiedades que toman por características; y en otros más, se apegan a propiedades que no son importantes, pero que llaman su atención y con eso resuelven el problema de encontrar una solución. También hay errores en la comprobación de las hipótesis; al comprobarlas en pocos casos en los cuales se cumple, aunque en otros no, el estudiante tiene una percepción incompleta de lo que es una ley general, por ejemplo en la siguiente sucesión:

$$1, 3, 7, 13, \cdots$$

La conjetura de que para pasar de cada uno al siguiente se multiplica por dos y se suma uno, que es cierta para los tres primeros términos, puede que algunos estudiantes no sientan la necesidad de comprobar si esta regla se cumple para todos los casos. Además en el momento de escribir letras y relaciones se pueden encontrar errores de traducción que aparecen cuando se simbolizan las expresiones verbales de los problemas. El trabajo con patrones está recomendado también en los estándares curriculares y de evaluación por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de EU (NTCM, 1989). En este documento se sugiere el uso de patrones desde muy temprana edad (lo equivalente a la enseñanza preescolar) con extensión hasta los grados superiores y se señala que el trabajo con los procesos de generalización se puede, inicialmente, desarrollar de manera intuitiva, al observar la regularidad y desarrollar patrones. De acuerdo con este documento, en la educación preescolar, que equivale a los niveles 5-8, el trabajo con matemáticas debe incluir la exploración de patrones y de funciones para que los estudiantes sean capaces de:

- Descubrir, extender, analizar y crear una amplia gama de patrones.
- Describir y representar relaciones con tablas, gráficas y reglas.
- Analizar relaciones funcionales para explicar de qué forma un cambio en una cantidad provoca un cambio en la otra.
- Usar patrones y funciones para representar y resolver problemas.

En el currículo mexicano, este contenido (el de patrones y generalización) no aparece con un gran énfasis en la escuela primaria; sin embargo, hay una presencia extensa del razonamiento proporcional. A partir de esto, se asignan significados de la comparación cuantitativa y cualitativa de cantidades. La idea de variable y de relación funcional se introduce en una etapa más avanzada que conduce, a su vez, hacia procesos de generalización. De acuerdo con Pegg (1990), citado en Durán Ponce (1999), el descubrimiento de patrones requiere el trabajo en tres procesos a seguir: experiencias de actividades con patrones numéricos; expresar las reglas que caracterizan patrones numéricos particulares, mediante oraciones, involucrando a los estudiantes para que hagan aclaraciones y precisiones y propiciar que los estudiantes expresen en forma abreviada dichas reglas.

Para Pegg, la parte más compleja de la introducción al álgebra requiere el trabajo con patrones numéricos hasta llegar a la descripción de éstos al utilizar la notación algebraica; recomienda las siguientes actividades:

- Desarrollar por escrito las reglas que caracterizan un patrón numérico, comparar diferentes alternativas correctas y que son originarias de un mismo patrón.
- Generar patrones numéricos a partir de una regla dada, encontrar varias reglas para un mismo patrón.
- Socializar con los estudiantes el surgimiento de patrones numéricos.
- Explicar la creación de reglas que caracterizan patrones numéricos.

Las investigaciones de MacGregor y Stacey (1993) con estudiantes australianos revelan que cuando se trabaja con patrones numéricos los niños presentan dificultades para describir y expresar algebraicamente dicho patrón. El estudio desarrollado por Durán Ponce (1999) con estudiantes de 6º año de primaria revela que con el programa de enseñanza que se utiliza los niños consiguen avanzar conceptualmente respecto al reconocimiento de patrones en secuencias numéricas y de figuras. Esto se manifiesta cuando usan inicialmente un procedimiento de tipo recurrente para el uso de la relación horizontal. Algunos alumnos tenían un desempeño menor cuando trabajaban solos que cuando lo hacían con ayuda de un experto.

Reggiani (1994) afirma que la generalización es un término utilizado en las matemáticas para indicar el paso de lo particular a lo general y para ver lo general en casos particulares. Para la autora, el trabajo con la generalización constituye un aspecto indispensable para el desarrollo del pensamiento algebraico. Afirma que lo que impera en la práctica didáctica es el aspecto puramente técnico en la capacidad operativa y una mala comprensión de número general. Contrariamente, comenta que la base del pensamiento algebraicos se consolida cuando las propiedades de las operaciones entre números son aprendidas y empieza el trabajo con símbolos en diversos contextos (aritméticos, geométricos, procesamiento de datos), pero que esto es un logro gradual. La capacidad para adquirir la generalidad en el resultado puede ser aparente, por ello es importante investigar cuándo este resultado corresponde realmente a una conciencia de la generalización.

Diversos estudios han investigado las diferentes componentes del pensamiento algebraico y examinaron tanto las dificultades que los niños enfrentan como los contextos del pensamiento algebraico. Han estudiado la relación entre el lenguaje algebraico y el lenguaje de la programación, al señalar la contribución del ambiente de la programación para llegar a un uso correcto de la variable y finalmente, el entrenamiento con el trabajo algebraico.

Kaput y Balacheff 1989, Chiapini y Lemut 1999, Rojano y Sutherland 1993 y Ursini 1991 han resaltado la coexistencia de dificultades específicas conectadas al ambiente de la programación con la dificultad conectada al requisito de la formalización. Estas dificultades podrían revelarse en el uso de cualquier idioma formal y con dificultades más profundas conectadas a la conceptualización de las estructuras involucradas. Estas últimas podrían relacionarse con las dificultades con la generalización.

Las investigaciones describen algunas limitaciones en habilidades espontáneas para pasar de lo particular a lo general y sugieren estimular a los niños con procedimientos dirigidos. Específicamente, el estudio de Ursini (1996) con niños entre 11-12 años de edad, cuyo objetivo era la comprensión de la generalidad, les ofreció una actividad con un procedimiento guiado paso por paso y éste tuvo lugar en la zona de desarrollo próximo. Se requirió la estimulación e intervención externa para que la zona fuera activada y, a pesar de que los niños no habían sido introducidos al álgebra, se cree que éstos se encontraban en una etapa pre-algebraica.

El trabajo en edades tempranas requiere ser estimulado con una intervención externa para que el niño pueda pensar en términos prealgebraicos. En el estudio no se exigía que los niños llegaran a la formalización algebraica, pero sí que pudieran analizar casos particulares y así llegar al descubrimiento de una regla general. Algunos estudios revelan que la generalización no es una adquisición estable y que la expresión escrita juega un papel importante.

Ursini (1994) investigó el uso correcto de la variable en un ambiente de programación, específicamente Logo; se cree que éste no es una garantía de adquisición del propio significado, y que podría ser simplemente visto como una asignación de un nombre al espacio de memoria, que podría ser utilizado posteriormente para presentar un elemento concreto y particular, pero no abstracto y general. El pensamiento algebraico exige una interacción continua de la sintaxis en el nivel de la expresión general y de la semántica interna que se intenta como la comprensión del significado de las reglas independiente del contexto y la semántica externa, que es un contexto específico.

Los resultados revelaron que los niños podían generalizar y verificar una forma verbal o simbólica de sus adquisiciones. En este estudio la verbalización y la simbolización son partes importantes y se usan representaciones, esquemas y tablas. Ursini (1994) destaca las primeras etapas y el involucramiento de las mismas hacia los procesos de generalización; comenta que para aprender el lenguaje algebraico es importante tener algo que decir, percibir patrones y regularidades para expresarlos brevemente y poder comunicarlos y argumenta que se da poca importancia a las etapas involucradas en la generalización. Se pasa rápido a la expresión de la generalidad sin evidencias de que los niños han identificado una regularidad.

El lenguaje algebraico está conectado a la generalidad, pero si no se alcanzan los pasos previos necesarios para tal generalidad, los niños presentan dificultades. Los hallazgos de Ursini (1994) revelaron que los niños eran capaces de ver el patrón en una secuencia de gráficas. Algunos usaron una estrategia horizontal, otros inventaron una regla, unos más trataron de generalizar con números grandes, otros no consideraban los dibujos, pasaban de una secuencia numérica a patrones y usaban una estrategia proporcional al multiplicar el resultado conocido por un factor apropiado. Algunos niños tratan de expresar la generalidad algebraicamente, pero no son capaces de expresar el patrón. En términos generales, los resultados revelan que los infantes no eran capaces de integrar dos representaciones, la gráfica y la numérica, aun cuando existía una relación clara entre ellas. Por el contrario, usaban dibujos para completar la secuencia numérica, no eran capaces de expresar la generalización y descuidaban todos los patrones cuando trataban de generalizar.

Es necesario que los niños realicen representaciones en dos lenguajes diferentes del mismo problema, y sean capaces de pasar de un lenguaje a otro, de arraigar la regla del patrón, para realizar representaciones gráficas y numéricas y tener un lenguaje para expresar la regla.

Con relación al programa Logo, los estudios de Hoyles y Sutherland (1989) en el proyecto Logo Math revelaron que el trabajo con la generalización era un camino importante a ser desarrollado y que su investigación en este ambiente mostraba evidencias importantes acerca de la contribución del trabajo en parejas, cuando los niños programaban. El ambiente numérico y geométrico de Logo permite a los niños observar patrones numéricos y geométricos y, en función de eso, construir una regla general en términos algebraicos o prealgebraicos.

Lee (2001), al abordar el pensamiento algebraico como una manera de pensar, propone estimular a los estudiantes a extender su pensamiento acerca de objetos matemáticos (números, formas y medidas) para pensar acerca de las relaciones entre esos objetos, darles la oportunidad para operar mentalmente y pensar acerca de los números que ellos no conocen. Según esta autora, el lenguaje algebraico puede ser iniciado en la escuela primaria como un lenguaje natural, al establecer el uso de la simbolización algebraica mediante la representación.

A partir de los estudios desarrollados con la generalización se percibe que este trabajo necesita ser dirigido por alguien más experto y ofrecer a los niños situaciones problemas, donde no sólo puedan reconocer patrones, sino también expresarlos adecuadamente para poder avanzar hacia el pensamiento algebraico. En este sentido, es oportuno elaborar una secuencia didáctica en esta dirección, conectada con la proporcionalidad aritmética y geométrica para conferir significado a los procesos de generalización en edades tempranas, como un camino alterno de acceder al pensamiento algebraico.

CAPÍTULO II
CONTENIDOS MATEMÁTICOS EN LOS LIBROS DE TEXTO DE PRIMARIA

En esta sección nos proponemos esbozar los ejes temáticos de los contenidos matemáticos de los libros de texto de quinto y sexto grados de nivel primaria; con ello sentamos las bases para una discusión seria sobre la conveniencia de implementar las ideas expuestas en este libro sobre introducción temprana al pensamiento algebraico, al tomar como base los ejes temáticos presentes en la educación básica. Partimos de la hipótesis fundamentada, en los estudios teóricos, metodológicos y empíricos, de que esto es posible.

Es importante mencionar que los nuevos planes y programas de estudio para la educación básica se enmarcan en el Plan Nacional de Desarrollo 2007-2012 y en la Reforma Integral de la Educación Básica. En este sentido, los cambios planteados en los planes y programas de estudios de la educación básica se justifican en función de las modificaciones planteadas por la Secretaría de Educación Pública (SEP).

Mapa curricular de la educación básica

El mapa curricular de la educación básica está representado por espacios organizados en cuatro campos de formación, que permiten visualizar la articulación curricular conforme se muestra en el mapa curricular de la educación básica 2011 propuesto por la Secretaría de Educación Pública(siguiente página).

De acuerdo con los documentos oficiales emitidos por la Secretaría de Educación Pública de los Estados Unidos Mexicanos (SEP-México), los estándares curriculares se describen como lo que los alumnos "deben saber y ser capaces de hacer" en los cuatro periodos escolares para su evaluación que son:

1. Primer periodo: 1º a 3º de preescolar.
2. Segundo periodo: 1º a 3º de primaria.
3. Tercer periodo: 4º a 5º de primaria.
4. Cuarto periodo: 1º a 3º de secundaria.

Los estándares curriculares de matemáticas presentan una idea de lo que se espera que los estudiantes aprendan sobre contenidos matemáticos escolares. Con el estudio de las matemáticas en la educación básica se busca que los estudiantes desarrollen:

- Una forma de pensamiento que les permita interpretar y comunicar matemáticamente situaciones en diferentes entornos socioculturales.
- Técnicas adecuadas para reconocer, plantear y resolver problemas matemáticos.
- Una actitud positiva hacia el estudio de las matemáticas, de colaboración y de crítica, en el ámbito social y cultural.

Tabla 2.1 Mapa curricular de la educación básica 2011

<table>
<tr><td rowspan="14">Habilidades digitales</td><td>Estándares curriculares</td><td colspan="3">1er. Periodo escolar</td><td colspan="3">2do. Periodo escolar</td><td colspan="3">3er. Periodo escolar</td><td colspan="3">4to. Periodo escolar</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Campos de formación para la educación básica</td><td colspan="3">Preescolar</td><td colspan="6">Primaria</td><td colspan="3">Secundaria</td></tr>
<tr><td>1°</td><td>2°</td><td>3°</td><td>1°</td><td>2°</td><td>3°</td><td>4°</td><td>5°</td><td>6°</td><td>1°</td><td>2°</td><td>3°</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Lenguaje y comunicación</td><td colspan="3">Lenguaje y comunicación</td><td colspan="6">Español</td><td colspan="3">Español I, II y III</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Segunda Lengua Inglés</td><td colspan="6">Segunda Lengua Inglés</td><td colspan="3">Segunda Lengua Inglés I, II y III</td></tr>
<tr><td>Pensamiento matemático</td><td colspan="3">Pensamiento matemático</td><td colspan="6">Matemáticas</td><td colspan="3">Matemáticas I, II y III</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Exploración y comprensión del mundo natural y social</td><td colspan="3">Exploración y conocimiento del mundo</td><td colspan="3" rowspan="4">Exploración de la Naturaleza y la Sociedad</td><td></td><td colspan="2">Ciencias Naturales</td><td>Ciencias I (énfasis en Biología)</td><td>Ciencias II (énfasis en Física)</td><td>Ciencias III (énfasis en Química)</td></tr>
<tr><td colspan="3" rowspan="3">Desarrollo físico y salud</td><td rowspan="3">La entidad donde vivo</td><td colspan="2" rowspan="2">Geografía</td><td colspan="3">Tecnología I, II y III</td></tr>
<tr><td>Geografía de México y del Mundo</td><td colspan="2">Historia I y II</td></tr>
<tr><td colspan="2">Historia</td><td>Asignatura Estatal</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="4">Desarrollo personal y para la convivencia</td><td colspan="3" rowspan="2">Desarrollo personal y social</td><td colspan="6" rowspan="2">Formación Cívica y Ética</td><td colspan="2"></td><td>Formación Cívica y Ética I y II</td></tr>
<tr><td colspan="3">Tutoría</td></tr>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">Expresión y apreciación artísticas</td><td colspan="6">Educación Física</td><td colspan="3">Educación Física I, II y III</td></tr>
<tr><td colspan="6">Educación Artística</td><td colspan="3">Artes I, II y III (Música, Danza, Teatro o Artes Visuales)</td></tr>
</table>

Fuente: SEP.

OBJETIVOS DE LA EDUCACIÓN PRIMARIA

De acuerdo con la SEP, se espera que los estudiantes desarrollen conocimientos y habilidades dirigido a que:

- Conozcan y sepan usar las propiedades del sistema decimal de numeración para interpretar o comunicar cantidades en distintas formas.
- Utilicen de manera flexible el cálculo mental, la estimación de resultados y las operaciones escritas con números naturales, fraccionarios y decimales para resolver problemas aditivos o multiplicativos; en el caso de estos últimos, en este nivel no se estudiarán la multiplicación ni la división con números fraccionarios.
- Conozcan las propiedades básicas de triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares, prismas y pirámides.
- Usen e interpreten diversos códigos para orientarse en el espacio y ubicar lugares.
- Sepan calcular perímetros, áreas o volúmenes y expresar medidas en distintos tipos de unidad.
- Emprendan procesos de búsqueda, organización, análisis e interpretación de datos para comunicar información que responda a preguntas planteadas por sí mismos y por otros.
- Identifiquen conjuntos de cantidades que varían proporcionalmente y sepan calcular valores faltantes y porcentajes en diversos contextos.
- Sepan reconocer experimentos aleatorios comunes, sus espacios muestrales y desarrollen una idea intuitiva de su probabilidad.

COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

Las competencias específicas de matemáticas que se espera desarrollar en la educación primaria se refieren en la siguiente tabla.

Tabla 2.2 Competencias matemáticas a desarrollar en la educación primaria

Resolver problemas de manera autónoma. Implica que los alumnos sepan identificar, plantear y resolver diferentes tipos de problemas o situaciones; por ejemplo, problemas con solución única, otros con varias soluciones o ninguna solución; problemas en los que sobren o falten datos; problemas o situaciones en los que sean los alumnos quienes planteen las preguntas. Se trata también de que los alumnos sean capaces de resolver un problema utilizando más de un procedimiento, reconociendo cuál o cuáles son más eficaces; o bien, que puedan probar la eficacia de un procedimiento al cambiar uno o más valores de las variables o el contexto del problema, para generalizar procedimientos de resolución.
Comunicar información matemática. Comprende la posibilidad de que los alumnos expresen, representen e interpreten información matemática contenida en una situación o en un fenómeno. Requiere que se comprendan y empleen diferentes formas de representar la información cualitativa y cuantitativa relacionadas con la situación; se establezcan relaciones entre estas representaciones; se expongan con claridad las ideas matemáticas encontradas; se deduzca la información derivada de las representaciones, y se infieran propiedades, características o tendencias de la situación o del fenómeno representado.
Validar procedimientos y resultados. Consiste en que los alumnos adquieran la confianza suficiente para explicar y justificar los procedimientos y soluciones encontradas, mediante argumentos a su alcance, que se orienten hacia el razonamiento deductivo y la demostración formal.
Manejar técnicas eficientemente. Se refiere al uso eficiente de procedimientos y formas de representación que hacen los alumnos al efectuar cálculos, con o sin apoyo de calculadora. Muchas veces el manejo eficiente o deficiente de técnicas establece la diferencia entre quienes resuelven los problemas de manera óptima y quienes alcanzan una solución incompleta o incorrecta. Esta competencia no se limita a usar mecánicamente las operaciones aritméticas; apunta principalmente al desarrollo del significado y uso de los números y de las operaciones, que se manifiesta en la capacidad de elegir adecuadamente la o las operaciones al resolver un problema; en la utilización del cálculo mental y la estimación, en el empleo de procedimientos abreviados o atajos a partir de las operaciones que se requieren en un problema y en evaluar la pertinencia de los resultados. Para lograr el manejo eficiente de una técnica es necesario que los alumnos la sometan a prueba en muchos problemas distintos. Así, adquirirán confianza en ella y la podrán adaptar a nuevos problemas.

Fuente: SEP.

Estándares curriculares de matemáticas

Los estándares curriculares de matemáticas constituyen el conjunto de aprendizajes que se espera de los alumnos a finalizar los cuatro periodos escolares para conducirlos a niveles más altos de alfabetización matemática. La asignatura de matemáticas, para su estudio, se divide en tres niveles: el primer nivel corresponde a los *ejes*, el segundo a los *temas* y el tercero a los *contenidos*. Para primaria y secundaria, los ejes son:

1. Sentido numérico y pensamiento algebraico

Se refiere al estudio de la aritmética y el álgebra a través de:

- La modelización de situaciones mediante el uso del lenguaje aritmético.
- La exploración de propiedades aritméticas que en la secundaria podrán ser generalizadas con el álgebra.
- La puesta en juego de diferentes formas de representar y efectuar cálculos.

2. Forma, espacio y medida

- Se refiere al estudio de la geometría y la medición a través de:
- La exploración de las características y propiedades de las figuras y cuerpos geométricos.
- Fomentar el tránsito hacia la argumentación y la deducción.
- Los principios básicos de ubicación espacial y cálculo geométrico.

3. Manejo de la información

Análisis de la información que proviene de distintas fuentes y su uso para la toma de decisiones informadas. En este eje se incluye la proporcionalidad porque provee de nociones y técnicas que constituyen herramientas útiles para interpretar y comunicar información, como el porcentaje y la razón. Se fomenta:

- La búsqueda, organización y análisis de información para responder preguntas.
- El uso eficiente de la herramienta aritmética que se vincula de manera directa con el manejo de la información.
- La vinculación con el estudio de otras asignaturas.

4. Actitud hacia el estudio de las matemáticas

Este eje es nuevo en la reciente reforma curricular. Es de carácter transversal y pretende cultivar el gusto por aprender matemáticas, al aplicar el razonamiento matemático en la vida personal, como ente social y parte de un ambiente.

De cada uno de los ejes se desprenden grandes *temas* que son: números y sistemas de numeración, problemas aditivos, problemas multiplicativos, figuras y cuerpos, ubicación espacial, medida, proporcionalidad y funciones, así como análisis y representación de datos. Los temas a su vez se desglosan en *contenidos,* los cuales son las unidades conceptuales de enseñanza que requieren entre dos y cinco sesiones de clase.

Los grandes temas se presentan organizados por bloques temáticos, para cada año de primaria. Los bloques en quinto y sexto son cuatro y se presentan en forma de tabla, con rúbricas de competencias que se favorecen aprendizajes esperados, ejes y contenidos. Los aprendizajes esperados son enunciados que señalan de manera resumida los conocimientos y las habilidades que todos los alumnos deben alcanzar como resultado del estudio de los contenidos del bloque. Naturalmente, algunos aprendizajes esperados pueden trascender el bloque e inclusive el grado.

Las competencias matemáticas mostradas en la tabla 1 se refieren a toda la educación primaria. Los contenidos de los bloques son distintos para el quinto y sexto año, aunque pretenden presentarse de manera integrada, un análisis muestra que en la práctica, los contenidos del eje de forma, espacio y medida aparecen desconectados del eje de sentido numérico y pensamiento algebraico.

Presentamos en seguida cómo están organizados los contenidos en cada bloque temático del sexto año de primaria, pues es aquí donde se plantea la hipótesis de factibilidad de la introducción de las primeras ideas algebraicas.

Tabla 2.3 Bloque I

Competencias que se favorecen: • Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
Aprendizajes esperados	**Ejes**		
	Sentido numérico y pensamiento algebraico	**Forma, espacio y medida**	**Manejo de la información**
• Identifica rectas paralelas, perpendiculares y secantes, así como ángulos agudos, rectos y obtusos.	Problemas auditivos • Resolución de problemas que impliquen sumar o restar fracciones cuyos denominadores son múltiplos uno de otro. Problemas multiplicativos • Anticipación del número de cifras del cociente de una división con números naturales. • Conocimiento y uso de las relaciones entre los elementos de la división de números naturales.	Figuras y cuerpo • Identificación de rectas paralelas, secantes y perpendiculares en el plano, así como de ángulos rectos, agudos y obtusos. Ubicación espacial • Lectura de planos y mapas viales. Interpretación y diseño de trayectorias. Medida • Conocimiento y uso de unidades estándar de capacidad y peso: el litro, el mililitro, el gramo, el kilogramo y la tonelada. • Análisis de las relaciones entre unidades de tiempo.	Proporcionalidad y funciones • Análisis de procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad del tipo valor faltante (dobles, triples, valor unitario).

Fuente: SEP.

Tabla 2.4 Bloque II

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN: • Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
Aprendizajes esperados	**Ejes**		
	Sentido numérico y pensamiento algebraico	**Forma, espacio y medida**	**Manejo de la información**
• Resuelve problemas que implican el uso de las características y propiedades de triángulos y cuadriláteros.	Números y sistemas de numeración • Conocimiento de diversas representaciones de un número fraccionario: con cifras, mediante la recta numérica, con superficies, etcétera. Análisis de las relaciones entre la fracción y el todo. • Análisis del significado de la parte decimal en medidas de uso común; por ejemplo: 2.3 metros, 2.3 horas. Problemas multiplicativos • Resolución de problemas que impliquen una división de números naturales con cociente decimal.	Figuras y cuerpos • Localización y trazo de las alturas en diferentes triángulos. Ubicación espacial • Reproducción de figuras usando una cuadrícula en diferentes posiciones como sistema de referencia. Medida • Construcción y uso de una fórmula para calcular el área de paralelogramos (rombo y romboide).	Proporcionalidad y funciones • Identificación y aplicación del factor constante de proporcionalidad (con números naturales) en caso sencillo.

Fuente: SEP.

Tabla 2.5 Bloque III

<table>
<tr><th colspan="4">COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN:
• Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática
• Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Aprendizajes esperados</th><th colspan="3">Ejes</th></tr>
<tr><th>Sentido numérico y pensamiento algebraico</th><th>Forma, espacio y medida</th><th>Manejo de la información</th></tr>
<tr><td>• Calcula el perímetro y el área de triángulos y cuadriláteros.
• Resuelve problemas de valor faltante en los que la razón interna o externa es un número natural.</td><td>Números y sistemas de numeración
• Comparación de fracciones con distinto denominador, mediante diversos recursos.

Problemas aditivos
• Uso de calculo mental para resolver adiciones y sustracciones con números fraccionarios y decimales.

Problemas multiplicativos
• Análisis de las relaciones entre los términos de la división, en particular la relación: r = D – (d x c), a través de la obtención del residuo en una división hecha en la calculadora.</td><td>Figuras y cuerpos
• Construcción de cuerpos geométricos con distintos materiales (incluyendo cono, cilindro y esfera). Análisis de sus características referentes a la forma y al número de caras, vértices y aristas.

Ubicación espacial
• Descripción oral o escrita de rutas para ir de un lugar a otro.

Medida
• Construcción y uso de una fórmula para calcular el área del triángulo y el trapecio.
• Identificación de múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado y las medidas agrarias.</td><td>Proporcionalidad y funciones
• Análisis de procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad del tipo valor faltante (suma término a término, cálculo de un valor intermedio, aplicación del factor constante).</td></tr>
</table>

Fuente: SEP.

Tabla 2.6 Bloque IV

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN:
• Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente

Aprendizajes esperados	Ejes		
	Sentido numérico y pensamiento algebraico	**Forma, espacio y medida**	**Manejo de la información**
• Resuelve problemas que implican sumar o restar números fraccionarios con igual o distinto denominador. • Identifica problemas que se puedan resolver con una división y utiliza el algoritmo convencional en los casos en que sea necesario. • Describe rutas y ubica lugares utilizando sistemas de referencia convencionales que aparecen en planos o mapas. • Resuelve problemas que implican conversiones entre unidades de medida de longitud, capacidad, peso y tiempo. • Resuelve problemas que implican leer o representar información en gráficas de barras.	Números y sistemas de numeración • Análisis de las similitudes y diferencias entre el sistema decimal de numeración y algunos sistemas de numeración no posicionales, como el egipcio o el romano. • Identificación de la regularidad en sucesiones con números (incluyendo números fraccionarios) que tengan progresión aritmética, para encontrar términos faltantes o continuar la sucesión. Problemas aditivos • Resolución de problemas que impliquen sumas o restas de fracciones comunes con denominadores diferentes. Problemas multiplicativos • Análisis de las relaciones entre la multiplicación y la división como operaciones inversas.	Ubicación espacial • Interpretación y descripción de la ubicación de objetos en el espacio, especificando dos o más puntos de referencia. Medida • Construcción y uso de una fórmula para calcular el perímetro de polígonos, ya sea como resultado de la suma de lados o como producto. • Resolución de problemas en que sea necesaria la conversión entre los múltiplos y submúltiplos del metro, del litro y del kilogramo.	Análisis y representación de datos • Análisis de las convenciones para la construcción de gráficas de barras.

Fuente: SEP.

Factibilidad del álgebra temprana en la primaria

En los contenidos de sexto grado se enfatiza, sobre todo en el bloque temático I, la particularidad de los problemas de tipo aditivo y multiplicativo que a continuación se explicarán.

Problemas aditivos

Los problemas de estructura aditiva según Vergnaud (2003) son "las estructuras o las relaciones en juego que sólo están formadas de adiciones y sustracciones", esto se refiere a aquellos problemas que para su solución implican la realización de una suma o una resta.

Como lo señala Cantero (2003) existen dos tipos de problemas en la enseñanza de los problemas de estructura aditiva. A los primeros se les denominan *consistentes* y se refiere a aquellas situaciones de tarea donde tanto los términos como la operación aritmética a utilizar (suma o resta) son del mismo orden, es decir, que dentro del problema plateado va explícita la operación que se va a realizar y por tanto siempre se pregunta por la cantidad final; por ejemplo: Pepe tenía seis coches y Mario le regaló cuatro más ¿cuántos coches tiene ahora Pepe? Al segundo tipo de problema se le denomina *inconsistentes*. Con ello se refiere que tanto los datos como las preguntas que se utilizan dentro de un problema están en un orden inverso y por tanto la operación aritmética requerida también, por ejemplo: ¿cuántas canicas tenía Simón cuando empezó a jugar, si ganó cinco y ahora tiene 12? Como se puede apreciar la pregunta está situada al inicio, además de que el orden de los datos es el inverso requerido de la operación; es decir, pareciera que es una suma pero en realidad es una resta. Otra característica de este tipo de problemas es que sus incógnitas pueden estar al inicio, en la transformación o al final del problema.

De acuerdo con Castro (1995) los problemas de estructura aditiva se pueden entender con base en cuatro modelos: lineales, cardinales, de medidas y modelos funcionales. A continuación se explicará cada uno.

Modelos lineales

Una representación de este modelo es la recta numérica que sirve para que podamos contar pequeñas cantidades, o bloques lineales con unidades marcadas puesto uno en seguida de otro; este modelo se utiliza comúnmente en preescolar, sirve para tener una representación visual y para comparar cantidades. Un ejemplo concreto de este modelo son las regletas de Cuisenaire usadas de la siguiente manera:

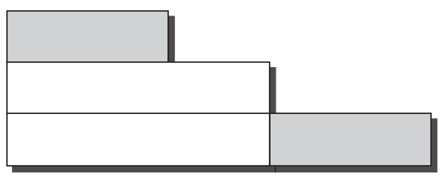


Figura 2.1 Regletas de Cuisenaire

Modelos cardinales

Este modelo propone ver al problema como un conjunto formado por dos partes disjuntas:

$$\text{Todo}\left\{\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r}5\\ +\ \underline{4}\end{array}\right\}\text{Partes disjuntas}\\ 9\end{array}\right.$$

donde cinco y cuatro son las partes que dan lugar a un todo que en este caso es nueve. Básicamente en este modelo se trata de ver la relación parte/todo.

Modelos de medida

En el caso de la adición existen dos formas comunes para llevar a cabo este modelo, una de ellas son las regletas de Cuisenaire y la balanza en la que se agrega o quita un peso que representa una cantidad.

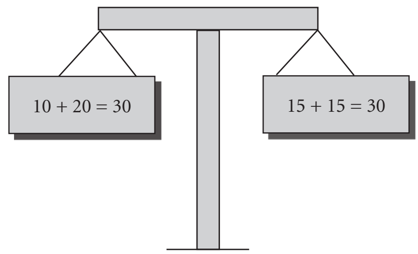
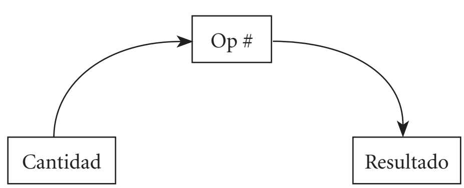


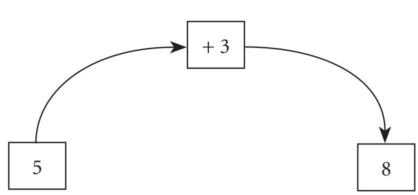
Figura 2.2 Balanza

Modelos funcionales

En este modelo propuesto por Maza (1999), la suma se entiende como una operación binaria o como unaria. Como operación binaria aparecen los dos sumandos sin ninguna alteración hasta que se realiza la operación, por ejemplo; 2 + 2 = ? Mientras que, la suma es vista como una operación unitaria tiende a ser más dinámica debido a que la incógnita del problema se puede encontrar en cualquiera de las partes que conforma la suma. El esquema se puede representar como sigue:



Donde Op # denota una operación, suma o resta de la cantidad #. La cantidad es el número inicial y el resultado es el número que se obtiene al operar con el número # sobre el resultado, por ejemplo:



Los problemas se clasifican de acuerdo con este esquema como problemas de cambio, indicando un horizonte temporal de antes y después de la operación. Castro *et al.* clasifican los problemas de cambio según las combinaciones posibles de la incógnita que pueden ser la Cantidad, el Resultado, la Operación o el número # que opera. Los mismos autores distinguen entre problemas de cambio, de combinación y de igualación; proponen dos grandes categorías. Los problemas de combinación se refieren a aquellos en los que se tienen dos cantidades que se diferencia por alguna característica de la clase, por ejemplo naranjas y plátanos, que en el resultado quedan contenidos en una nueva clase (frutas, por ejemplo). En la categoría de igualación, se transforma una de las cantidades dadas de tal manera que se dé una igualdad.

Problemas multiplicativos

Los problemas de tipo multiplicativo se definen como aquellos que incluyen una multiplicación o una división. Se clasifican, de acuerdo con Vergnaud, en tres categorías:

1. Proporción simple.
2. Producto de medidas.
3. Proporción múltiple.

Vergnaud afirma que ese campo conceptual se desarrolla entre los siete y 18 años de edad. Para las operaciones de multiplicación y división simples se sitúan en dos grandes categorías:

- Isomorfismo de medida
- Producto de medidas

Para la proporción múltiple se necesita de problemas de proporcionalidad en los cuales intervienen por lo menos tres magnitudes y son problemas compuestos en los que se debe emplear más de una operación.

A continuación se describen algunos de esos problemas:

Isomorfismo de medidas: es una estructura que involucra problemas que contienen una proporcionalidad simple directa entre dos magnitudes involucradas: se incluyen los problemas de repartes iguales (personas y objetos), precios constantes (bienes y costos), movimiento uniforme (espacio y velocidad), entre otras. Vergnaud utiliza las tablas de correspondencia para representar esta estructura, como se muestra en seguida:

M_1 - - - M_2

____

x____ $y = f(x)$

…

x'____ $y' = f(x')$

En esta estructura la función $f : M_1 \rightarrow M_2$ es una proporcionalidad simple directa entre dos magnitudes representadas por los conjuntos M_1 y M_2 e identifica cuatro grandes subclases de: multiplicación, división y problemas generales de regla de tres.

Producto de medidas. La subclase de la multiplicación se representa de la siguiente manera:

M_1 - - - M_2

____

1 _____a

…

b______x

El ejemplo ilustra esta subclase: Mariana compra seis chocolates a $12 cada uno ¿Cuánto tiene que pagar?

$a = 12$, $b = 6$, $M_1 =$ [número de chocolates], $M_2 =$[pesos]

La subclase de la división (primer tipo) se organiza de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} M_1 \text{ - - - } M_2 \\ \hline 1 \underline{\qquad} x = f(1) \\ \quad \ldots \\ a \underline{\qquad} b = f(a) \end{array}$$

que consiste en encontrar el valor de la unidad *f(1)* conociendo *a* y *f(a)*.

El siguiente ejemplo ilustra esta subclase: José quiere repartir sus dulces entre Mariana y Angélica, en partes iguales; su padre le da un total de 12 dulces. ¿Cuántos dulces recibirá cada una?

$a = 3$, b = 12, $M_1 =$ [número de niñas], $M_2 =$[números de dulces]

Subclase división (segundo tipo): se organiza de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} M_1 \text{ - - - } M_2 \\ \hline 1 \underline{\qquad} a = f(1) \\ \quad \ldots \\ x \underline{\qquad} b = f(x) \end{array}$$

que consiste en encontrar x conociendo $f(x)$ y $f(1)$

A continuación, el ejemplo ilustra esta subclase: José tiene \$1,500 y quiere comprar discos compactos; cada uno de ellos cuesta \$300. ¿Cuántos discos puede comprar?

$a = 300$, $b = 1500$, $M_1 =$ [número de CDs], $M_2 =$[costo]

Problemas de reglas de tres (caso general): se organiza de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{l}
M_1 \text{ - - - } M_2 \\
\hline
a \underline{\qquad} b \\
\quad \ldots \\
c \underline{\qquad} x
\end{array}
$$

En este tipo de problemas intervienen tres datos: a, *b* y *c*.

PROPORCIONALIDAD

Es importante iniciar el trabajo con la idea de proporcionalidad aritmética y geométrica, lectura, elaboración y análisis de tablas y gráficas en las que se registran y analizan datos numéricos que pueden leerse gráficamente, procesos de cambio en tablas de variación proporcional y no proporcional, relación entre situaciones de variación, tablas y gráficas correspondientes y la idea de variable entendida de diferentes maneras: como relación funcional, como número general y como incógnita.

En lo que respecta específicamente al razonamiento proporcional, los programas de matemáticas plantean que a partir de cuarto y hasta sexto grados, este eje debe iniciar con situaciones sencillas en el cuarto grados e ir gradualmente en aumento en los grados posteriores, abordando la variación proporcional y no proporcional y la idea de función.

El eje conductor para el desarrollo de la proporcionalidad es la lectura, elaboración y el análisis de tablas y gráficas en las que se registran y analizan procesos de variación proporcional y no proporcional. El razonamiento proporcional se enmarca en un conjunto de problemas que Vergnaud denomina de estructuras multiplicativas.

Los problemas de estructuras multiplicativas son fundamentales en la interpretación del razonamiento proporcional y la idea de variable. Además, mediante el razonamiento proporcional se facilita el pensamiento algebraico. De acuerdo con Vergnaud (1991), una estructura multiplicativa se basa en la aditiva, aunque determinados elementos intrínsecos de la primera no están presentes en la segunda. De las investigaciones sobre razonamiento proporcional que sirven de apoyo para este proyecto de investigación sobresalen las siguientes: Inhelder y Piaget 1958; Hart *et al.* 1982; Spinillo y Bryant 1991; English y Halford 1995, y Noelting 1980. Diversos estudios se han centrado en el desarrollo del razonamiento multiplicativo, sobre todo en la transición del pensamiento aditivo al multiplicativo en estudiantes de educación primaria.

De acuerdo con los programas vigentes (SEP, 2011), el estudio sistemático de la proporcionalidad se lleva a cabo, sobre todo, en los dos últimos grados de educación primaria y en los dos primeros de secundaria. En los primeros se estudia el razonamiento proporcional en las relaciones multiplicativas vinculadas a las nociones de multiplicación, división, número racional, escala, porcentaje y probabilidad, entre otras. En secundaria, el razonamiento proporcional se estudia con las herramientas del álgebra como funciones lineales: se pone énfasis en obtener su expresión algebraica y sus gráficas, así como también en el análisis de sus características estructurales.

El estudio de la proporcionalidad en educación básica constituye un eje articulador de contenidos matemáticos diversos, cuyo estudio se continúa y se generaliza en los niveles posteriores. En la educación media superior y la superior, por ejemplo, se continúa con el estudio de las funciones lineales en el contexto de las funciones y de la variación, en general, y se vinculan estrechamente con otros campos de estudio de las matemáticas superiores, tales como la geometría analítica y el cálculo diferencial e integral. Este paso del estudio de la proporcionalidad al estudio de las funciones lineales corresponde un doble tránsito: de un campo de conocimiento aritmético a uno algebraico, y entre diferentes niveles de estudios, *vgr*., de la educación primaria a la secundaria y de ésta a la media superior.

CAPÍTULO III
ENTORNOS DIGITALES DE APRENDIZAJE

Desde hace más de 20 años, esfuerzos de diferentes investigadores en diversas áreas de la educación y específicamente en educación matemática han centrado su interés en investigar el uso de las tecnologías de la información y comunicación (TIC) para facilitar el aprendizaje de contenidos escolares, sin embargo, la incorporación de las herramientas tecnológicas en el sistema escolar es relativamente reciente. Resultados de investigaciones como la de Dunham y Dick, 1994; Boers-Van Oosterum, 1990; citado en Rojano (2003) mencionan que los estudiantes experimentan un aprendizaje significativo mediante el uso adecuado de las TIC, pero su incorporación en el aula requiere además un conocimiento tecnológico de los profesores. MacFarlane (2001, citado en Rojano 2003), argumenta que si los profesores no tienen el dominio tecnológico, no se apreciará el potencial de las TIC como una herramienta de aprendizaje. Por otro lado es importante que las instituciones educativas definan una posición con respecto al uso de las tecnologías.

A nivel internacional se reconocen tres concepciones sobre el uso de las TIC: como un conjunto de habilidades o competencias; como un conjunto de herramientas o de medios para hacer lo mismo, pero de un modo más eficiente; como un agente de cambio con impacto revolucionario. La primera concepción propone las TIC como una disciplina de enseñanza y ésta se dirige al logro de competencias meramente informáticas y no garantiza de manera directa que esos logros se reflejen en otras áreas del conocimiento. La segunda relaciona las TIC con el currículo, pero básicamente intenta agregar elementos de tecnología informática a las tareas de aprendizaje para un mejor logro de los objetivos incluidos en el currículo escolar. La tercera concepción considera a las TIC como un agente de cambio, con una gran potencialidad para cambiar las prácticas matemáticas y principalmente el aprendizaje en el aula.

Por su parte, Moret y Labrador (2006) argumentan que la tecnologización de la educación matemática se ha expandido desde una nueva concepción de la pedagogía y de la didáctica de las matemáticas, que se sustenta en la tecnología digital; ésta transformará la manera de enseñar, aprender, aplicar y comunicar contenidos matemáticos en el salón de clase, pero de acuerdo con Senk y Thompson (2003) citado en Moret y Labrador (2006), la introducción de la tecnología digital en el aula deberá ser paulatina, reemplazada por otra pedagogía distinta a la tradicional.

De acuerdo con De Guzmán 2002; Godino y Batanero, 1994; Kilpatrick y Swafford, 2002, citado en Moret y Labrador, 2006, actualmente existe una diversidad de reflexiones teóricas que exploran la potencialidad de las TIC, por ejemplo, el impacto en el desarrollo del pensamiento matemático en la comunicación de dichos contenidos y en la diversidad de significados semióticos que su uso puede generar en el aprendizaje de las matemáticas.

Fruto de esas reflexiones, se discute sobre cuáles serían los contenidos matemáticos que deben ser enseñados en la escuela, el propio lenguaje matemático y la comunicación de ese conocimiento vía las tecnologías digitales. De acuerdo con Feldstein, 2005; Orozco, 2006 y Ramos, 2005, citado en Moret y Labrador 2006, existe un consenso en la comunidad de investigadores en educación matemática argumenta que la incorporación de las tecnologías digitales en el aula tendrá que presentar una visión renovada del conocimiento matemático, revisitando concepciones, procedimientos, lenguaje, derivados de la potencialidad de la electrónica digital. Además de reconceptualizar los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos, los tiempos y las formas de trabajar en el salón de clase.

Micromundo Logo

Papert (1993) desarrolló los llamados "micromundos computacionales", como un ambiente que utiliza la computadora para que el estudiante explore y construya sus propias ideas. De acuerdo con las ideas que el propio Papert explicita sobre este paradigma… "es que las construcciones que se dan 'en la cabeza' suceden de manera particularmente oportuna cuando son apoyadas por construcciones externas, 'en el mundo', llevando a productos que se pueden ver, discutir, examinar 'allí afuera', tales como la construcción de un castillo de arena, un pastel, una empresa, un programa de computación, un poema o la teoría del universo" (Papert 1993, p. 142, citado en Sacristán, 2000, p. 198).

Este paradigma es el que llevó a la construcción de los micromundos computacionales. Según el autor, el contexto computacional permite el acceso a diferentes tipos de representación, por ejemplo, simbólico, visual, numérico, así como la oportunidad de construir e interactuar, mediante actividades de programación y manipulación, con dichos objetos. De este modo, la computadora y sus representaciones pueden ser usados como herramientas para pensar.

Pensamiento algebraico en el micromundo Logo

En 1989, Hoyles y Sutherland publicaron los resultados del estudio que realizaron con alumnos de 11 a 14 años de edad, utilizaron el lenguaje de programación Logo para realizar tareas matemáticas.

Los niños trabajaban en parejas durante las clases normales de matemáticas y se exploraron la naturaleza y extensión del trabajo colaborativo con Logo, así como las estrategias de resolución de problemas utilizadas por los infantes en el ambiente y la intervención del maestro en el proceso de aprendizaje (Hoyles y Sutherland, 1989).

Las implicaciones de estudios como el anterior para las prácticas en el salón de clases son diversas: por ejemplo, al cambiar las relaciones didácticas en las clases de matemáticas los niños adquieren más autonomía y responsabilidad en su desempeño, pues son involucrados activamente en la construcción de su conocimiento y toman decisiones acerca de las estrategias que usan.

De acuerdo con Noss (1986), el pensamiento matemático es algo que siempre tiene sentido en nuestra cultura y Logo es un ambiente donde las heurísticas y las ideas matemáticas son recreadas. De acuerdo con Clements (1986), Pea y Kurland (1985), citados en Holyes y Sutherland (1989), programar en Logo aumenta el desempeño de la cognición específica; por ejemplo, la reflexibilidad y el pensamiento divergente, así como también el desarrollo de habilidades meta-cognitivas y de creatividad. En este sentido, el uso del lenguaje de Logo crea un puente entre las acciones de los estudiantes y su entendimiento de las relaciones generales matemáticas que requieren para escribir el programa. Así, los niños son capaces de capturar su entendimiento en la forma simbólica y lo aclaran al contar con el apoyo de la computadora.

Ventanas y micromundos

Si bien la primera utilización del término micromundo fue dentro del área de la inteligencia artificial, Papert utilizó este término, pero cambió su significado para describir los ambientes computacionales que él estaba construyendo, como lugares para familiarizarse con un conjunto de ideas, de situaciones problemáticas, de actividades; el estudiante y el maestro podían probar ideas dentro de un tema de interés (Weir, 1987). Los micromundos pertenecen por lo tanto a la tradición de aprendizaje vía descubrimiento. En el libro *Desafío a la mente*, Papert (1981) enfatiza la importancia de la naturaleza exploratoria de los micromundos, así como la relevancia de que los niños sean los que estén a cargo de sus propias actividades dentro del micromundo.

Para el referido autor, los infantes aprenden a explorar las propiedades de un micromundo y, al hacer esto, transfieren hábitos de exploración de sus vidas personales al dominio formal de la construcción de teorías científicas. Weir (1987, p.15) afirmaba que un micromundo computacional debe ser un lugar donde se evocan las intuiciones del sujeto y sus explicaciones sobre un fenómeno, durante el proceso de aprendizaje de algún tema a través de la actividad de programación. Para Thompson (1987) un micromundo matemático es un sistema compuesto de objetos, relaciones entre éstos y operaciones que los transforman (a los objetos y sus relaciones). Lo que es esencial es el hecho de que existan operaciones mediante las cuales se puedan construir nuevos objetos, ya que esto es lo que hace a un micromundo "matemático": la construcción de relaciones y el uso de éstas como nuevos objetos a los que se pueden aplicar operaciones.

La meta de un micromundo matemático es pues la construcción de significado y de relaciones que sirvan como modelo para un sistema formal; es decir, el micromundo da a los estudiantes oportunidades para crear modelos mentales que reflejen la estructura y composición de los sistemas formales (Weir, 1987, p. 85). Es así como se ha llegado a la definición de micromundos como mundos computacionales donde las ideas matemáticas se expresan y desarrollan. Hoyles (1993) explica que la meta de los micromundos ha cambiado desde sus orígenes, su actual propósito es diseñar ambientes de aprendizaje para la apropiación del conocimiento, donde juegan un papel central los "objetos transicionales" (aquellos que son intermediarios entre lo concreto y directamente manipulable, y lo formal y abstracto; ver Papert, 1987).

Noss y Hoyles (1987) llevaron la idea de micromundo más lejos al considerar también la situación didáctica en la que la interacción se lleva a cabo. Los investigadores mencionados consideran que la definición de micromundo debe tomar en cuenta los siguientes elementos: el estudiante y el maestro, el entorno (social y físico) en el que las actividades se llevan a cabo y la actividad como algo que depende de las experiencias pasadas e intuiciones del estudiante, así como de las metas y experiencias del profesor.

Estos autores argumentan que el objetivo de la programación es proveer al estudiante una herramienta para que pueda modelar los temas matemáticos; argumentan que la programación (lenguaje Logo) puede servir como una manera para involucrarse en la actividad matemática, como un ambiente para hacer matemáticas. Más recientemente, estos mismos autores, al enfatizar el papel mediador de las herramientas computacionales, propusieron la idea de abstracción contextual, como una manera para describir cómo los estudiantes pueden construir ideas matemáticas apoyándose en la red conceptual de un contexto particular, dando a su vez forma a las ideas expresadas (Hoyles, 1996). Sugieren que los alumnos que se involucran en actividades dentro de un micromundo pueden abstraer dentro de la situación y contexto. De esta manera, los ambientes computacionales proporcionan un medio donde los objetos y relaciones puedan hacerse significativos mediante acciones dentro del micromundo, y donde los estudiantes puedan generar y articular relaciones matemáticas que aparecen en la situación computacional en la que están trabajando.

Es importante señalar que, aunque se puede considerar que estos procesos son un paso hacia la formación de estructuras matemáticas formales, una abstracción contextual está condicionada por la tecnología y el lenguaje que se utilizan. Lo relevante, desde la perspectiva educativa, es que el alumno que construye una abstracción contextual puede no tener acceso a la semántica y sintaxis del lenguaje matemático oficial. De este modo, mediante un adecuado diseño que tome en cuenta los principios arriba planteados, los ambientes computacionales y los medios de construcción que proveen pueden ser utilizados como herramientas para pensar, mediante las cuales los alumnos pueden expresar, articular y poner de manifiesto sus propias percepciones e ideas. Más aún, simultáneamente, se revelan partes del mundo interior del sujeto.

Además de ser ambientes exploratorios de aprendizaje, los micromundos computacionales también pueden servir como herramientas de investigación para estudiar los procesos de aprendizaje. Al respecto, Noss y Hoyles (1996, p. 5) señalan que la computadora puede ser utilizada como una "ventana" hacia el conocimiento, concepciones, creencias y actitudes de alumnos, maestros, y todos aquellos que estén involucrados en el proceso de construcción de significados. Dichos autores explican que la computadora funciona como una pantalla donde los estudiantes, maestros y otros involucrados pueden "pintar" sus expectativas e ideas, con lo que ayudan a hacer explícito aquello que es implícito y apuntan aquello que, a menudo, pasa desapercibido.

Uno de los factores fundamentales señalados por Noss y Hoyles (1996) es el hecho de que la computadora obliga al usuario a expresarse de manera semiformal. Es en este sentido en el que la computadora funciona como pantalla donde los alumnos pueden expresar su forma de pensar, simultáneamente dan al observador la oportunidad de vislumbrar sus pensamientos.

Weir (1987, p. 19) explica que la actividad computacional sirve de catalizador para que las intuiciones del alumno emerjan, así es posible observar las reacciones de los estudiantes al ver el efecto de sus acciones en la pantalla, así como el rango de sus respuestas. Se puede entonces utilizar la computadora para estudiar lo que Noss y Hoyles (1996) han descrito como "pensamiento-en-cambio": en lugar de intentar evaluar el estado mental de un individuo en un momento dado, la idea es poner en movimiento al pensamiento e investigar los cambios que ocurren cuando, por ejemplo, se introducen nuevas nociones, y observar las maneras en que el sujeto hace conexiones y construye significados. Por ejemplo, la computadora puede utilizarse como herramienta para explorar las interacciones que se dan cuando se construyen significados simbólicos y visuales.

De hecho, Goldenberg (1995) sugiere que al observar a los estudiantes manipular múltiples representaciones, interactuar alternadamente con una u otra representación, se pueden vislumbrar los complejos modelos internos que los alumnos construyen en su intento por comprender. Explica además que esto puede ayudarnos en nuestro intento por conocer lo que es entender, lo cual difícilmente puede lograrse si sólo observamos la manipulación aislada de una única forma de representación.

A continuación damos un breve ejemplo de uno de estos micromundos computacionales, intentamos ilustrar cómo dicho ambiente funcionó tanto para que los alumnos exploraran sus ideas, como para que los investigadores vislumbraran las concepciones de los alumnos.

Los diversos estudios realizados en el ambiente Logo, principalmente los de Hoyles y Sutherland (1989), pretendían observar en qué condiciones ese lenguaje podía ser usado para la comprensión de las matemáticas. Uno de tales estudios se realizó en escuelas secundarias, con niños de 11 a 14 años de edad. Se trabajó con pares de niños durante las clases normales de matemáticas y se exploró la naturaleza y extensión del trabajo colaborativo con Logo, en pequeños grupos, así como las estrategias de resolución de problemas usadas por los niños en el ambiente y la intervención del maestro en el proceso de aprendizaje. También se investigó la potencialidad de Logo para facilitar el entendimiento de algunos conceptos específicos en matemáticas. El diseño metodológico constituyó un esquema pre, pos-test y la exploración de una secuencia didáctica con los niños, con fichas de trabajo; se incorporó también entrevista individual para algunos estudios de caso.

Las implicaciones para el salón de clases son diversas; primero, cambiar las relaciones didácticas en las clases de matemáticas, donde los niños deben tener más autonomía y responsabilidad, pues son involucrados activamente en la construcción de su conocimiento y toman decisiones acerca de las estrategias que usan. Varios autores citan la importancia de esta postura. Por ejemplo, Shoenfeld (1985), citado en Hoyles y Sutherland (1989) destaca el papel de la meta-cognición: cuando los alumnos son llevados a pensar sobre sus propias acciones y pensamientos asumen también el control de sus actividades, son capaces de tomar decisiones por sí mismos, cambian sus estrategias y la manera como organizan y resuelven los problemas e influencian así, también, el conocimiento.

De acuerdo con Noss (1986) el pensamiento matemático es algo que siempre tiene sentido en nuestra cultura y Logo es un ambiente donde las heurísticas y las ideas matemáticas son recreadas. De acuerdo con Clements (1986), Pea y Kurland (1985) citados en Holyes y Sutherland (1989), programar en Logo aumenta el desempeño de la cognición específica; por ejemplo, la reflexibilidad y el pensamiento divergente, así como también el desarrollo de habilidades meta-cognitivas y medidas de creatividad. En este sentido, el uso de Logo crea un puente entre las acciones de los estudiantes y su entendimiento de las relaciones generales matemáticas que requieren para escribir el programa. De esta manera, los infantes son capaces de capturar su entendimiento en la forma simbólica y lo aclaran, al contar con el apoyo de la computadora.

Una vez elegidas las dos rutas de acceso y al considerar la experiencia reportada por Hoyles y Sutherland (1989) se considera el lenguaje Logo como idóneo para el razonamiento proporcional y los procesos de generalización. Ursini propicia el acercamiento a las ideas algebraicas, específicamente para explorar la idea de variable. Su estudio (1996) reporta que, cuando se explora la idea de variable como número general, los estudiantes son capaces de escribir un programa general, usar ejemplos numéricos verbales y programas particulares para que posteriormente puedan llegar a un programa general con el lenguaje Logo, lo que ciertamente demostró que dicho estudio era factible como un medio capaz de ofrecerles a los alumnos experiencias que los acercaran a las ideas algebraicas.

El micromundo y las situaciones didácticas

Hoyles y Noss (1987) ampliaron la idea de micromundo al considerar también la situación didáctica en la que los procesos de interacción social se llevan a cabo; mencionan que se deben tomar en cuenta los siguientes elementos: el estudiante, el maestro, el entorno social y físico en el que las actividades se realizan y la actividad como algo que depende de las experiencias pasadas e intuiciones del estudiante, de las metas y experiencias del profesor.

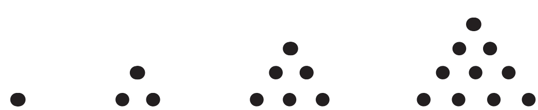
A continuación se describen brevemente los cuatro componentes:

1. Técnico: está formado por el software o lenguaje de programación. Además de un conjunto de herramientas que proveen un sistema de representaciones para la comprensión de una estructura matemática o campo conceptual.
2. Del estudiante: involucra los entendimientos y concepciones parciales que el alumno tiene antes de entrar a una situación didáctica.
3. Pedagógico: son las intervenciones didácticas que se llevan a cabo durante las actividades de programación.
4. Contextual: se conforma por el entorno social de las actividades.

Estos autores han enfatizado el papel mediador de las herramientas computacionales y bajo esa consideración propusieron la idea de "abstracción contextual", ésta se puede entender como una manera para describir cómo los estudiantes pueden construir ideas matemáticas apoyándose en una red conceptual de un contexto particular, dando forma a las ideas expresadas. Noss y Hoyles (1996) sugieren que los alumnos deben involucrarse en actividades dentro de un micromundo para que puedan abstraer dentro de la situación y contexto contenidos matemáticos. Así, los ambientes computacionales proporcionan un medio donde los objetos y las relaciones pueden ser significativos para los niños por medio de acciones que se ejecutan en un micromundo, y donde los estudiantes pueden generar y articular relaciones matemáticas. Es importante señalar que, aunque se puede considerar que estos procesos son un paso hacia la formación de estructuras matemáticas formales, una abstracción contextual está condicionada por la tecnología y el lenguaje que se utilizan. Es importante que los estudiantes construyan una abstracción contextual; evidentemente, ésta sólo es posible si existe un diseño instruccional que considere los principios anteriormente planteados.

Procesos de generalización en la hoja de cálculo

La hoja de cálculo es muy conveniente para diseñar actividades de generalización. Es necesaria, sin embargo, cierta experiencia en la sintaxis y lenguaje de la hoja, así como en el uso de algunas características tales como copiar y pegar, referencias absolutas y relativas. Tomemos como ejemplo, los números triangulares, los cuales presentan una configuración puntual en forma de triángulo como se muestra:



Éstos forman la siguiente secuencia:

1	3	6	10	15	o bien:
$T_1 = 1$	$T_2 = 3$	$T_3 = 6$	$T_4 = 10$	$T_5 = 15$	$T_6 = 21$

En esta secuencia numérica se presenta una regularidad en la formación que descubre el patrón numérico: sumar un natural consecutivo partiendo del primer término que es 1, para obtener los restantes. Se descubre el patrón geométrico al observar la formación de los números triangulares, por ejemplo, para formar T_2 se parte de T_1; se van colocando dos puntos en la línea inferior, para formar T_3 se parte de T_2 y se coloca una línea de tres puntos debajo de las que ya se tenían y así para todos los casos.

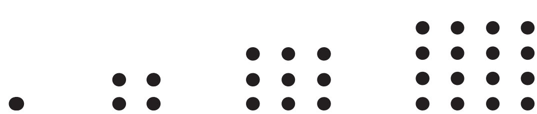
En Excel construimos dos columas: n y Tn. Comenzamos por dar T1=1 y para calcular T2 se suma: T2=T1+2. El cálculo está ilustrado en la figura 3.1. Para calcular el resto de los números triangulares hasta T10 se copia y se arrastra al resto de la columna.

Figura 3.1 Números triangulares en Excel

	A	B
1		
2	n	Tn
3	1	1
4	2	3
5	3	6
6	4	10
7	5	15
8	6	21
9	7	28
10	8	36
11	9	45
12	10	55

	A	B
1		
2	n	Tn
3	1	1
4	2	=B3+A4
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	
10	8	
11	9	
12	10	

Los números cuadrados se obtienen de contar los puntos que se pueden disponer en forma de tablero o cuadrado, que forman la siguiente secuencia



$C_1 = 1$	$C_2 = 4$	$C_3 = 9$	$C_4 = 16$	$C_5 = 25$	$C_6 = 36$

En esta secuencia numérica el patrón de formación es sumar los números impares consecutivos empezando por el 1, que es el primer término. Se descubre el patrón al observar la formación de un cuadrado, por ejemplo, se toma el primero y se van incrementando filas de puntos en forma de ángulo recto, que contienen 3, 5, 7, 9, etcétera, respectivamente, para así obtener un número cuadrado. Por lo tanto, el segundo número cuadrado es la suma de los dos primeros impares partiendo de 1, el tercer cuadrado es la suma de los tres primeros números impares a partir de 1.

En general $C_{n+1} = C_n + 2(n - 1) + 1$. En la hoja de cálculo se procede similarmente.

Estos números tienen estructuras, patrones y relaciones que otorgan una herramienta para la observación sobre las estructuras comunes, y las regularidades pueden ayudar a los estudiantes en la comprensión y abstracción de las propiedades numéricas relacionadas con las estructuras aditivas y las multiplicativas. Además, este mismo trabajo puede ser desarrollado en ambientes computacionales, como por ejemplo, en Logo, donde encontrar el patrón puede ser una tarea importante para acceder a estos contenido matemáticos.

Figura 3.2 Números cuadrados en Excel

	A	B
1		
2	n	Cn
3	1	1
4	2	=B3+2*A3+1
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	
10	8	
11	9	
12	10	

	A	B
1		
2	n	Cn
3	1	1
4	2	4
5	3	9
6	4	16
7	5	25
8	6	36
9	7	49
10	8	64
11	9	81
12	10	100

CAPÍTULO IV
MODELOS TEÓRICOS LOCALES

El modelo teórico local (MTL) propuesto por Filloy (1999) ofrece un marco de referencia teórico y metodológico para la investigación en matemática educativa, plantea un diseño metodológico distinto al tradicionalmente utilizado en la investigación de esta materia. Como teoría y como metodología, el MTL pretende observar los hechos y proponer nuevas observaciones que desentrañen las relaciones de las componentes que entran en juego en la matemática educativa. Se caracteriza por la interconexión entre sus cuatro componentes: modelo de los procesos cognitivos, modelo de enseñanza, modelo de comunicación y modelo de competencia formal. Es recursivo, pues se orienta al significado dado por el uso, desde el cual se mira el problema original con una nueva perspectiva: se parte de la problemática, se plantea el MTL que se va a desarrollar en la experimentación, y los resultados de la misma inciden sobre la manera como se va a observar la problemática y a replantear el MTL. Es local porque, sin pretender ser una teoría ni tener un carácter universal ni replicable en cualquier fenómeno educativo, sirve para explicar fenómenos específicos y para dar cuenta de los procesos que se desarrollan cuando se enseña un determinado contenido matemático en los sistemas educativos al tomar en cuenta las cuatro componentes.

Para la construcción de los componentes del modelo teórico local se necesitó de varios aspectos, como la aplicación de diversos tipos de análisis fenomenológicos. Freudenthal (1983) organiza sus trabajos en lo que denomina de análisis fenomenológico y lo describe como una herramienta para el trabajo en matemática educativa. En la exposición de su método, Freudenthal (1983) distingue el *noumenon* (objeto de pensamiento, la clase a la que pertenecen los objetos matemáticos), del *phainomenon* que son los medios que organizan los normen. Si en la relación entre el *noumenon* y el *phainomenon* se subraya el elemento didáctico-proceso de enseñanza y aprendizaje se habla de fenomenología didáctica del *noumenon*; si se enfatiza el avance cognitivo, se habla de la fenomenología genética. Para este autor, el concepto se adquiere a partir de la constitución de objetos mentales, los cuales preceden a la conceptualización y evolucionan al redescubrir sus interrelaciones con otros objetos mentales. En la fenomenología didáctica de Freudenthal, estas relaciones guían el proceso de enseñanza y aprendizaje, en vez de pretender que el concepto se enseñe mediante concreciones, instancias, *embodiments* (encajes), que muchas veces no reflejan lo esencial de dicho proceso.

De acuerdo con Freudenthal, citado en García (2008), los *noumenon* son primero objetos mentales y de manera secundaria son conceptos, por consiguiente, la manipulación de objetos mentales antecede a la explicitación de los propios conceptos. Y considera que en cada caso particular se deberían establecer criterios para poder considerar el objeto mental constituido. Freudenthal defiende una actividad matemática o una matemática activa, y para tal objetivo menciona que la matemática posee una característica importante que denomina de "matematización", que consiste en organizar y estructurar la información que aparece en un problema e identificar los aspectos matemáticos.

La construcción de los modelos teóricos locales utilizan la propuesta de Freudenthal; tienen como base un análisis fenomenológico que consiste en describir los fenómenos para los cuales este sistema matemático de símbolos (SMS) es un medio de organización, en su relación actual con esos fenómenos; aquí los SMS se toman como productos cognitivos y sus relaciones con los fenómenos son las ya establecidas; la fenomenología pura se complementa con una fenomenología histórica, pues es indispensable considerar los fenómenos para cuya organización se creó el concepto en cuestión y cómo se extendió a otros. Así se define la componente formal.

El análisis se sigue, además, por una fenomenología didáctica, que implica conocer el proceso de enseñanza-aprendizaje, los fenómenos presentes en el mundo de los estudiantes y lo que se propone en las secuencias didácticas de enseñanza. Los SMS se tratan como materia de enseñanza a ser aprendida por los estudiantes. Así se define la componente de modelo de enseñanza. Por último, es también una fenomenología genética pues los fenómenos se consideran con respecto al desarrollo cognitivo de los niños, y así se define la componente de los procesos cognitivos.

En cada una de las componentes se hace referencia a modelos teóricos. El MTL interrelaciona cuatro componentes:

- Modelos de enseñanza.
- Modelo de los procesos cognitivos.
- Modelo de competencia formal.
- Modelo de comunicación.

De acuerdo con Filloy (1999) considerar estas cuatro componentes en un MTL sirve como forma para incorporar al modelo teórico los resultados de otras observaciones, y experimentos, otorgándole al modelo una confiabilidad para el manejo de ciertos fenómenos que ocurren en la matemática educativa. Los resultados que son obtenidos en una investigación no se consideran adecuados para cualquier situación en general, por eso se habla de modelos teóricos locales.

Esta teoría incorpora la idea que al inicio una investigación en matemática educativa cuenta con un modelo teórico local inicial y que durante el desarrollo éste va cambiando y al final se obtiene un nuevo modelo teórico local desde el cual se mira el problema original de nueva manera. Filloy argumenta que un modelo teórico local se diseña para observar las interacciones y las contraposiciones en las competencias de uso de un sistema matemático de signos. En esta investigación se requiere estudiar la iniciación temprana al pensamiento algebraico, las interacciones de los estudiantes, la transición de un pensamiento aditivo a uno multiplicativo, los diversos mediadores; contenido matemático, ambiente de aprendizaje y modelo pedagógico. Estos elementos son expresados mediante un sistema matemático de signos, por lo tanto parece importante explicar esta idea.

SISTEMAS MATEMÁTICOS DE SIGNOS

La noción de sistemas matemáticos de signos (SMS) surge de algunas consideraciones de Filloy (1997) que hace con la finalidad de normar ciertos criterios para el diseño de modelos de enseñanza.

> La matemática escolar se articula en una serie de redes conceptuales, relacionadas unas con otras y con la característica de que, con el tiempo, los estudiantes van logrando ser competentes en el uso de redes de conceptos cada vez más abstractos y generales; competencias que requieren de otras anteriormente dominadas [...], el sistema matemático de signos en el que se expresan y comunican los textos matemáticos correspondientes a tales redes conceptuales tiene una estratificación que se corresponde con los diversos usos, que van dando cuenta de acciones, operaciones y transformaciones cada vez más generales y provenientes de estratos del lenguaje (del SMS) cada vez más abstractos (Filloy, 1999).

En este libro se considera que las matemáticas se articulan mediante mapas conceptuales; son de gran interés aquellas relacionadas con la iniciación temprana al pensamiento algebraico (como: ideas de razonamiento proporcional, procesos de generalización y variación proporcional). Filloy argumenta que no se analizan los signos artificiales como tales, ni tampoco los signos que se usan (y sus significados) en abstracto, más bien la atención está en los sistemas de significación y los procesos de producción de sentido.

A continuación se describe cómo se elaboraron las componentes del modelo teórico local de la investigación, que son: procesos cognitivos, de comunicación, de enseñanza y de competencia formal.

MODELO DE LOS PROCESOS COGNITIVOS

Esta componente toma en cuenta los procesos de pensamiento que permiten describir cómo el estudiante procesa su conocimiento, las dificultades que enfrenta y las estrategias de resolución de problemas. También ayuda a describir las acciones de los sujetos observados al realizar tareas relacionadas con un contenido matemático. Mediante ese proceso, el estudiante comprende más acerca de su propio pensamiento –metacognición– y afina su percepción respecto de él mismo y de lo que va aprendiendo, el direccionamiento de la atención y sus relaciones con los procesos de comprensión, el uso de la memoria, de los procesos de análisis y síntesis lógicas y las concepciones heurísticas.

En esta componente se analizan los códigos personales que indican las acciones ya realizadas y las que se harán en el proceso de resolución de problemas; se aborda también el uso pertinente de ciertos estratos intermediarios; aquí se entiende que un usuario competente no siempre hace referencia a una gran cantidad de esquemas mentales relacionados con los problemas presentados; si bien tal usuario puede hacer un uso automático de esquemas mentales, lo importante es el progreso en su capacidad de análisis lógico-semiótico de las situaciones-problemas. Dentro de este modelo teórico se destacan dos componentes: el modelo de competencia formal y el de los procesos cognitivos, conectado éste con el modelo de comunicación, mediante una secuencia didáctica para la introducción temprana al álgebra con distintos ambientes mediadores (Logo, Excel y Lápiz y papel).

Modelo de comunicación

En esta componente se analiza el intercambio de mensajes entre sujetos de diversos grados de competencia en el uso de los SMS. Los modelos de comunicación sirven para describir reglas de competencia comunicativa, formación y decodificación de textos. Este intercambio entre sujetos ocurre en la interacción social. Aquí el lenguaje es el vehículo que interconecta y permite negociar significados matemáticos. Se toma en cuenta cómo la interacción social entre los niños beneficia el aprendizaje de los conocimientos matemáticos. Dicho beneficio se refleja en los papeles que juegan tanto el investigador mediante su propuesta de actividades, como el desempeño de los niños, fruto de una construcción de hábitos cognitivos y sociales, adquiridos en otros lugares como la escuela.

Esta componente se observa bajo la interacción social en pareja; específicamente se pretende investigar los efectos de la misma en los distintos dominios matemáticos, las dificultades que presentan en la negociación de los significados matemáticos y las habilidades que desarrollan durante el proceso.

De acuerdo con Cockcroft (1982), citado en Hoyles y Sutherland (1989), el lenguaje es una parte esencial en la formación y expresión de las ideas matemáticas, los niños han de ser estimulados a exponer sus concepciones y a justificar sus estrategias y representaciones. La discusión en el salón de clases como una metodología de trabajo permite explorar aspectos como la interacción entre niños, el contexto del conocimiento matemático, las funciones cognitivas y comunicativas como escuchar y hablar.

De acuerdo con Balachef y Laborde (1984), citado en Hoyles y Sutherland (1989), al hablar construimos significados, reconstruimos lo que decimos y las contradicciones otorgan un incremento importante al entendimiento.

En este sentido, la incorporación del lenguaje Logo o de Excel puede propiciar la discusión en el salón de clases: los niños pueden probar y cambiar sus ideas, modificar los niveles de representación desde uno más concreto hasta otro más abstracto y viceversa; se les estimula para que hagan suya la actividad, se provoca la discusión en el salón de clases, se genera la demanda sistemática de recordar y verificar lo que hacen, se reconsidera el proceso y se confrontan dificultades y concepciones. A pesar de que estamos considerando la perspectiva vigotskiana de aprendizaje, específicamente la ZDP, Vigotski nunca se dedicó a la investigación en matemática educativa, es por este motivo que consideramos importante mencionar y usar el trabajo de Bartolini Bussi que hace una interpretación de la teoría vigotskiana desde el campo de investigación de la matemática educativa.

Para estudiar la componente de los procesos de comunicación recurrimos a Bartolini Bussi (1991, 1992), citada en Bartolini Bussi (2002), que propone un modelo de discusión matemática que es usado en este estudio con la finalidad de dirigir el proceso de interacción social durante las sesiones de trabajo de la secuencia didáctica. El modelo consta de cuatro partes:

1. Presentación individual y evaluación colectiva de diferentes soluciones antes del aula.
2. Reconstrucción individual del proceso de resolución de problema (los estudiantes realizan un proceso individual de la solución, mencionan cuáles estrategias son eficaces y cuáles son abandonadas, las dificultades que tuvieron para resolver el problema y cómo las superaron).
3. Exposición colectiva del nuevo aprendizaje (una vez que el maestro ha dicho que algo nuevo se ha aprendido, pide a los estudiantes que lo den a conocer, comparando situaciones y creencias antes de cada sesión y después de la discusión).
4. Institucionalización del conocimiento.

A partir del modelo de discurso matemático generado entre parejas durante la secuencia didáctica, este tipo de análisis se incorpora a la perspectiva vigotskiana de aprendizaje, se enfoca la actividad cognitiva interactiva: el lenguaje hablado y el micro mundo Logo se convierten, así, en herramientas psicológicas que pueden cambiar la manera de entender, pensar y ver los contenidos matemáticos desarrollados en la secuencia didáctica, así como el papel que juegan los distintos lenguajes (numérico, geométrico y algebraico).

El estudio se realiza con hojas de trabajo, en las cuales se plantean problemas relacionados con los contenidos matemáticos a trabajar y se formulan preguntas que estimulan la discusión en pareja. Estas hojas tienen una doble función: estimular al niño para que pueda resolver los problemas planteados y hacerlo reflexionar acerca de las actividades, así como sobre el procedimiento y el resultado obtenido, para finalmente sintetizar su reflexión y hacerla explícita al grupo. De esta manera, el instrumento puede ayudar al investigador a entender mejor las respuestas de los estudiantes acerca de la comprensión de los contenidos matemáticos en cada actividad, así como abordar las dificultades de manera más detallada en una entrevista clínica con enseñanza.

Modelos de enseñanza

Los modelos de enseñanza señalan la pretensión inherente a los sistemas educativos, tanto en el modelo en el cual se formaron los profesores, como en aquel con el cual ellos forman a sus estudiantes. En esta componente se registra cómo los modelos de enseñanza dirigen lo que los niños aprenden, cuándo y cómo. Esta componente sirve para estudiar cómo se diseñan los modelos de enseñanza y las dificultades enfrentadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje, inherentes a la organización curricular.

En esta parte del estudio se plantea una conexión entre la epistemología y la didáctica. Se escoge una ruta para acceder al conocimiento matemático, que en este caso es una iniciación temprana al pensamiento algebraico, vía la proporcionalidad numérica y geométrica, con algunos aspectos de la variación proporcional hacia los procesos de generalización. Dicha organización implica también una serie de dificultades u obstáculos que los niños enfrentan para definir o comprender el objeto matemático en cuestión.

Se pretende desarrollar una secuencia de enseñanza que vincule, en edades tempranas, aspectos numéricos, geométricos y algebraicos, con el propósito de introducir ese contenido matemático en los últimos años de la escuela primaria, dotándolo de más significado para los niños, basados en una breve descripción de los antecedentes del razonamiento proporcional y los procesos de generalización que aparecen en el plan y programas de estudio y en los libros de texto de la educación básica. Esta parte sirvió como un elemento más para fundamentar el estudio que se realizó, al argumentar que este contenido matemático ya se explicita en los libros de texto, pero para verificar cómo son introducidos estos temas matemáticos.

Las hipótesis de trabajo es que la iniciación temprana al pensamiento algebraico puede ocurrir vía el razonamiento proporcional, pues éste ofrece una interconexión entre la aritmética y el álgebra, mediante la vinculación de aspectos numéricos y geométricos con algunos aspectos algebraicos como la idea de variable como relación funcional y como número general.

Aquí también se explicita el contrato didáctico que incorpora dicho modelo de enseñanza: se caracterizan tanto el contrato didáctico utilizado en el salón de clases de matemáticas como el propuesto en este estudio, con el objetivo de verificar de qué manera dicho contrato aporta en el proceso de resolución de problemas, así como su incidencia en la componente de los procesos cognitivos.

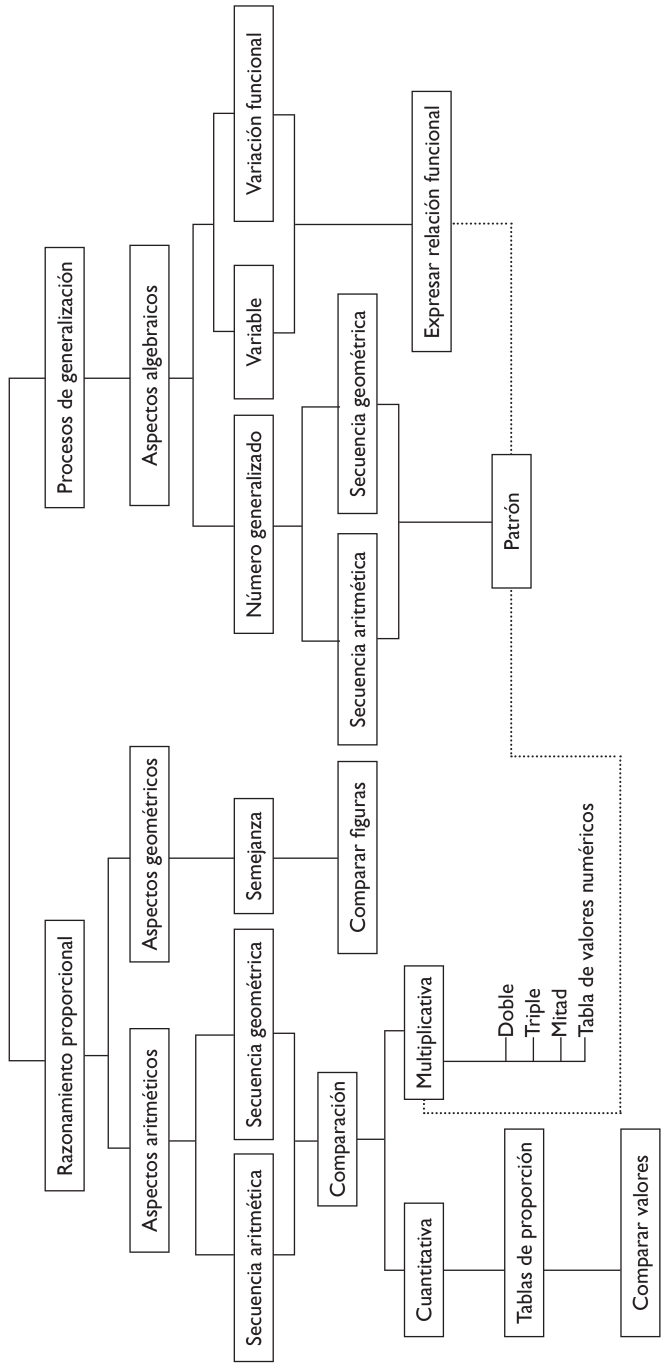
Modelo de competencia formal

Este componente aborda el propio dominio matemático de un SMS y sus aplicaciones. Simula la acción competente de un usuario ideal del SMS. En el caso más extremo, simula la descodificación, que un sujeto epistémico, hace de las situaciones observadas. Se determina esta componente a partir de la historia, al identificar saltos epistemológicos dentro del proceso histórico, para luego dar una definición formal y proponer la ampliación del análisis fenomenológico. Se estudian los conceptos matemáticos que se desarrollan en la secuencia didáctica: los dominios aritméticos, geométricos y algebraicos y sus diferentes conexiones, conforme se muestra en la figura 4.1.

De acuerdo con el mapa conceptual para la secuencia de enseñanza se toman dos rutas de acceso al álgebra: el razonamiento proporcional, que a su vez se subdivide en sus aspectos aritméticos y geométricos, y los procesos de generalización. Los aspectos aritméticos incluyen las ideas de proporción, secuencia aritmética y secuencia geométrica que se interconectan entre sí; los aspectos geométricos comprenden las ideas de semejanza, comparación cuantitativa y multiplicativa, que a su vez se interconectan a los aritméticos. Entre los algebraicos se considera la idea de variable como número general y relación funcional. Se parte del razonamiento proporcional porque es un contenido matemático del currículo de la enseñanza básica.

Lo primero es investigar los aspectos cualitativos del razonamiento proporcional, tanto aritmético como geométrico, con el fin de verificar su evolución hacia un lenguaje más formal. Para tal objetivo se puede aplicar un cuestionario inicial que involucre actividades de percepción intuitiva de la proporcionalidad y de comparación; unas y otras permitieron a los alumnos reconocer relaciones de semejanza entre figuras, en términos muy intuitivos como reducción y ampliación. Estas nociones se pueden trabajar con referencia a situaciones concretas del dibujo a escala: en una actividad la escala era dada y en otra los niños pueden descubrirla. También se puede trabajar a partir de la idea de la fotografía. Después se puede profundizar en aspectos cualitativos de la proporcionalidad (aritméticos o geométricos). Esta experiencia puede ser muy importante no sólo por lo mencionado con anterioridad, sino también permite verificar que los niños cambian de estrategias cuando son cuestionados y reflexionan acerca de aspectos que no tuvieron oportunidad de realizar.

Figura 4.1 Rutas de acceso al pensamiento algebraico



Lo primero es investigar los aspectos cualitativos en torno de los procesos de generalización con el objetivo de verificar su evolución hacia un lenguaje más formal. Para tal objetivo se pueden realizar actividades con secuencias aritméticas y geométricas, progresión geométrica y relación funcional, variable como número general, como relación funcional y número específico, entre otras actividades. Estas ideas se pueden trabajar con referencia a situaciones concretas. Esta experiencia puede ser importante no sólo por lo citado anteriormente, sino también porque permite verificar que los niños cambian de estrategias cuando son solicitados a justificar su respuesta y pueden reflexionar acerca de aspectos que no tuvieron oportunidad de hacer.

CAPÍTULO V
INTERACCIÓN SOCIAL EN EL AULA

Este capítulo trata sobre los procesos de interacción social en el aula de matemáticas con el uso de entornos tecnológicos de aprendizaje, por ejemplo Logo y Excel; éstos han sido tema de interés de diversos investigadores en diferentes áreas del conocimiento, por ejemplo, la pedagogía y especialmente la investigación en matemática educativa. Comprender cómo la interacción social puede movilizar procesos cognoscitivos que promuevan un mejor aprendizaje en los estudiantes es vital para propiciar una mejor enseñanza. El estudio de los procesos de aprendizaje y desarrollo en los estudiantes deriva de modelos de la psicología educativa, éstos han orientado una serie de propuestas curriculares en diversos países; en la actualidad existen diversos modelos que tratan sobre la interacción social como un medio que promueve el aprendizaje, en este capítulo retomaremos la perspectiva socio-histórico cultural de Vigotski.

TEORÍA SOCIOHISTÓRICO-CULTURAL

La teoría sociohistórico-cultural se origina en la mitad del siglo XX en la Unión Soviética, rompe con las teorías que entienden la actividad del sujeto como adaptación individual y biológica y propone que la actividad del sujeto está inserta en una práctica social mediada por artefactos y por condiciones histórico-culturales. En este proceso de interacción social, argumenta Vigotski, el sujeto reconstruye el mundo sociocultural y se constituyen progresivamente las funciones psicológicas superiores y la conciencia.

Desarrollo y aprendizaje

Los procesos de aprendizaje y desarrollo de los estudiantes derivan de los modelos que la psicología ha aportado para la educación. Estos modelos han orientado una serie de propuestas curriculares en diversos países. De acuerdo con la perspectiva sociohistórico-cultural. El individuo es considerado como un ser social.

La relación entre el desarrollo y el aprendizaje es visto como un proceso de apropiación de la cultura por el sujeto. El aprendizaje es entendido como un proceso de producción y reproducción del conocimiento bajo condiciones de orientación e interacción social. El desarrollo en el ser humano va a estar determinado por los procesos de aprendizaje que sean organizados como parte de la enseñanza y educación. En este sentido, el objetivo de la escuela es crear nuevas potencialidades para nuevos aprendizajes.

Zona de desarrollo próximo

La zona de desarrollo próximo (ZDP) se define como la diferencia entre lo que el sujeto puede hacer sólo y con ayuda de un sujeto más capaz, pero antes es importante diferenciar en qué plano ocurren estos procesos. Vigotski (2000) relaciona la ZDP con el aprendizaje; (para él) el concepto de zona de desarrollo próximo se relaciona con una etapa del proceso de aprendizaje en la que el alumno consigue hacer solo o en colaboración con otros alumnos más expertos lo que antes únicamente hacía con la ayuda del profesor. Desde la perspectiva vigotskiana, esto se traduce, como “hacer en colaboración”, destaca la participación creadora del niño, más aún, esta colaboración sirve para medir el nivel de desarrollo intelectual, su capacidad para diferenciar, tomar la iniciativa o simplemente empezar a hacer solo lo que antes hacía con ayuda de un compañero más capaz.

Es una etapa en la que el niño traduce a su desarrollo inmediato los nuevos conocimientos y las nuevas habilidades adquiridas durante el proceso de enseñanza y aprendizaje. En esta situación se da cuenta que hoy puede hacer cosas que antes no podía. Esto es lo que Vigotski define como zona de desarrollo inmediato y que se conoció posteriormente como zona de desarrollo proximal; pero por qué inmediato y no proximal. Por dos motivos: primero, porque el adjetivo en ruso que Vigotski refiere al sustantivo desenvolvimiento (*razvitie*, sustantivo neutro), es *blijáichee*, adjetivo neutro del grado superlativo sintético absoluto, derivado del adjetivo positivo *blizkii*, que significa próximo, luego, *blijàichee* significa el más próximo, inmediato. Segundo: la propia noción del concepto es que el desarrollo del alumno que resuelve problemas sin la mediación del profesor, se puede interpretar como desarrollo mental inmediato, de ahí el término de zona de desarrollo inmediato.

El nivel de desarrollo potencial (lo que el alumno hace con ayuda) es la realización de acciones en el plano externo, social, de comunicación (interpsicológico). La zona de desarrollo actual o medicación social ocurre en lo que denominamos zona de desarrollo actual o real (ZDA). Todas acciones en el plano interno, mental, individual (intrapsicológico).

Aspectos didácticos de la ZDP

La teoría sociohistórica-cultural de Vigotski pretende dar una explicación de las formas en las que los sujetos aprenden y cómo los procesos de interacción social no sólo influyen en los procesos de aprendizaje, sino también determinan, de acuerdo con las herramientas psicológicas que los sujetos utilizan cuando se apropian de diversos contenidos escolares. Centraremos nuestra atención en la escuela sociohistórico-cultural, en su comprensión del aprendizaje y en particular en una de las principales categorías de esta teoría, la zona de desarrollo próximo (ZDP). De acuerdo con esta perspectiva, el individuo es considerado como un ser social, cuyo proceso de desarrollo está condicionado por su entorno social e histórico.

En las palabras del propio Semiónovich Vigotski el objetivo principal de la educación es el desarrollo de las funciones psicológicas superiores (pensamiento, lenguaje), que ocurre mediante los procesos educativos en los cuales el sujeto está inmerso desde su nacimiento y se van formando por medio de la transmisión de la cultura legada por las generaciones que lo preceden. En este sentido, podemos entender el aprendizaje como un proceso de apropiación de la cultura por el sujeto. Éste, a su vez, es comprendido como un proceso de producción y reproducción del conocimiento bajo ciertas condiciones de orientación e interacción social, es decir, no es cualquier tipo de interacción social que produce conocimiento. Ésta debe tener ciertas condiciones iniciales y de desarrollo de ciertas actividades pensadas y organizadas con ciertos objetivos para que puedan producir un efecto significativo en los sujetos. A pesar de dicha organización, cada individuo hará suya esa cultura en un proceso activo, aprendiendo de forma gradual sobre los objetos, procedimientos, formas de actuar, de pensar, del contexto histórico y cultural en el que se desarrolla y de cuyo proceso dependerá su desarrollo individual.

De lo anterior se desprende la importancia que la teoría sociohistórico-cultural le otorga al medio social y a los tipos de interacciones que el sujeto realiza con los demás. Para Vigostki esto constituye la ley de la formación y del desarrollo de la psiquis humana y hace referencia a los procesos internos individuales, denominados procesos interpsicológicos, que siempre van precedidos por procesos de acciones externas, sociales. Para el referido autor, los procesos de educación y enseñanza deben estar direccionados a potenciar el desarrollo de las funciones psicológicas superiores.

Los procesos mentales superiores se presentan en la interacción social, entendida ésta como el intercambio de experiencias y conocimientos entre los miembros que participan; a partir de esto los significados y signos se adquieren y se construyen, internalizando los que ya existen en el contexto del individuo. Para Vygotsky el lenguaje es el sistema de signos más importante para el desarrollo cognitivo, porque lo libera de los vínculos contextuales inmediatos y concretos, puesto que los procesos mentales superiores dependen de la descontextualización, es decir, el lenguaje otorga flexibilidad al pensamiento conceptual y proposicional, permitiendo que los conceptos se puedan generalizar. En este sentido Vigotski (1988) menciona: "El momento más significativo en el curso del desarrollo intelectual, que da a luz las formas más puramente humanas de la inteligencia práctica y abstracta, es cuando el lenguaje y la actividad práctica, dos líneas del desarrollo completamente independientes, convergen".

En otras palabras la inteligencia práctica se refiere al uso de instrumentos y la abstracta al uso de signos y aunque ambas se desarrollan separadamente en las primeras etapas de la vida, posteriormente convergen; pudiéndose observar cuando el niño comienza a hablar mientras resuelve un problema práctico.

En resumen el desarrollo de las funciones psicológicas superiores se lleva a cabo por la incorporación y la interiorización de instrumentos y signos que se adquiere en relación con los otros. Esto es posible porque el niño vive en grupos sociales y se relaciona con otras personas de quienes puede aprender; sin embargo el aprendizaje sólo se lleva a cabo cuando los instrumentos, los signos y las normas de las personas con quienes interacciona el niño corresponden a su nivel de desarrollo previo. Vygotsky establece la relación entre aprendizaje y desarrollo, cuando afirma que no sólo es necesario establecer el nivel de desarrollo mediante tareas o actividades que el niño puede realizar por sí mismo, sino que es necesario determinar también aquello que puede hacer con ayuda de otros.

Para Vigotski el desarrollo del ser humano está determinado por los procesos de enseñanza y educación, los cuales deben llevarlo a obtener niveles mayores de desarrollo. Estos niveles, según el autor, se alcanzan a través de la zona de desarrollo próximo (ZDP), que es concebida como la distancia entre el nivel real de desarrollo determinado por la capacidad de resolver un problema y el de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz (Vygotsky, 1988). En otras palabras, la ZDP es el espacio que hay entre la zona de desarrollo real, que es lo que el niño puede hacer sin ayuda, y la zona de desarrollo potencial, que es lo que el niño puede hacer con ayuda de un compañero con mayor nivel de conocimiento; que es el objetivo principal del programa de intervención del presente trabajo.

Dentro del proceso que se lleva a cabo en la ZDP el niño tiene la posibilidad de realizar las acciones necesarias que lo lleven o poder resolver un problema de forma lógica, es decir, no sólo aprende pasos para resolver una situación en específico, sino que con la ayuda del otro va aprendiendo y razonando el por qué de esos pasos, lo cual le permite, en otro momento, resolver problemas semejantes.

Para Newman, Griffin y Cole (1998), la ZDP está determinada por el espacio de negociaciones sociales sobre los significados y, en el contexto de las escuelas, el lugar en que profesores y alumnos pueden apropiarse de las comprensiones del otro. Para estos autores la ZDP, en un contexto escolar, es lo que debe propiciar un intercambio de ideas entre alumnos y profesores que los lleve a entender y apropiarse del entendimiento de otros; es un aprendizaje conjunto en el cual el adulto debe tener en cuenta que los alumnos tienen diferentes ZDP y ZDR.

De igual forma, hay que tener presente que una de las finalidades de la ZDP es crear, es decir, ya que el niño pasó del plano inter-psicológico (mediadores externos) al plano intra-psicológico (reflexión individual) y alcanzó con esto un nivel mayor de desarrollo, la zona de desarrollo potencial se convierte en zona de desarrollo real, lo que permite que el sujeto siga desarrollándose.

La interacción social, por lo tanto, se torna indispensable ya que el niño inexperto adquiere del experto las herramientas psicológicas necesarias para poder resolver el problema, esto lo hace a través del lenguaje, y una vez que ya no necesita la ayuda del otro es que ha interiorizado dichas herramientas psicológicas. Todo esto no puede ser posible, si el niño tiene una actitud pasiva, pues requiere reflexionar sobre sus propios errores y su pensamiento, lo que lo lleva a un ajuste de la comprensión del objeto de conocimiento. Para Vigotski son dos los niveles en los que se da el desarrollo psíquico; primero en el inter-psicológico, donde el individuo se encuentra inmerso en una actividad social de comunicación interactuando con otros sujetos, cuando las acciones que realiza con los otros las produce a nivel mental, es decir individualmente, se da paso al nivel intra-psicológico (Montero, 2003).

Es importante decir que no toda interacción social que se propicie dentro del aula de clases es ZDP y genera conocimiento. Para que la ZDP funcione deben tomarse en cuenta los conocimientos previos de los niños y la actividad debe representar un reto para el alumno, pero no tanto que no pueda realizar la actividad ni con ayuda, ya que esto produciría confusión de los conocimientos ya adquiridos. Así mismo, es necesario que el compañero sepa más que el niño, pero no demasiado más porque esto provocaría que no se entendieran en el proceso de socializar el conocimiento. Con respecto a lo anterior Álvarez (1990) (citado en Montero, 2003) apunta que se tiende a dar por supuesto que toda tarea instruccional se sitúa en la ZDP del alumno, cuando lo que mayoritariamente predomina en nuestra cultura escolar es una transmisión unidireccional de destrezas o conocimientos descontextualizados que por su propia naturaleza y por el formato instruccional que se emplea en la situación de aula no puede en absoluto considerarse como objeto de enseñanza en la ZDP.

Lo anterior porque este tipo de enseñanza no permite la reflexión y participación activa del niño; el simple hecho de ponerlos a trabajar por equipos o en parejas no quiere decir que socialicen el conocimiento y de igual forma los conocimientos que se enseñan suelen carecer de sentido para el alumno, pues no encuentran su utilidad en la vida cotidiana; en este sentido para Vygotsky es esencial que el sujeto le encuentre significado a las actividades de aprendizaje fuera de la escuela, es decir, en su contexto cultural. Lo antes dicho provoca que el conocimiento que se adquiere sea duradero y generalizable, es decir, que se pueda aplicar en otros contextos y otras circunstancias. Todo lo antes expuesto es de gran relevancia para la escuela y principalmente para el maestro, en virtud de que debe conocer los procesos psicológicos mediante los cuales los niños se apropian del conocimiento para poder determinar el nivel de desarrollo de dichos procesos, así como los conocimientos previos de los alumnos para poder potenciarlos.

ESTUDIO DE LOS PROCESOS COGNITIVOS

Para analizar y comprender los procesos cognitivos que se desarrollan en interacción social desde la perspectiva de aprendizaje vigotskiana y específicamente la idea de ZDP. Vigotski propone que en cualquier dominio los niños tienen un nivel evolutivo real que puede ser evaluado individualmente y un potencial inmediato para el desarrollo de ese dominio; a esa diferencia entre esos dos niveles la denomina zona de desarrollo próximo, por lo tanto, la define como la distancia entre el nivel evolutivo real determinado por una resolución independiente del problema y un nivel de desarrollo potencial determinado por la resolución de un problema con ayuda de un adulto o de un compañero más capaz. Vigotski, citado en Bertrand (1998), discute la relación entre desarrollo y aprendizaje, afirma que el primero es la función del segundo y que existe una relación mutua entre ambos. Para explicar esta relación Vigotski comenta acerca de la idea de ZDP y afirma que es una característica especial de la interacción social y cultural. Para ello menciona la diferencia que existe, por ejemplo, en un estudiante que aprende con un profesor y con otro estudiante. El alumno aprende un comportamiento que es determinado por el contexto del aprendizaje; aprende un estilo que imita y que en cierta medida es el profesor. La imitación constituye un proceso de aprendizaje social y cultural que depende del nivel de interacción social.

De acuerdo con Tudge (1996) Semiónovich Vigotski dejó indicios de una visión teleológica del desarrollo evolutivo, al mencionar que es un proceso dentro del cual los niños se socializan en la cultura. El autor menciona que Vigotski usó la idea de instrumento de Marx, que servía para mediar la experiencia de los seres humanos en el ambiente físico, la cual ejercía un impacto en las relaciones sociales. Vigotski toma esta idea de Marx, pero la usa como instrumento psicológico para explicar desde el desarrollo de los procesos naturales hasta los procesos mentales más elevados, es decir, las funciones psicológicas superiores como el lenguaje.

En este sentido, las herramientas psicológicas se convierten en un medio para comprender los significados que tienen los signos; para Vigotski son un instrumento social y más tarde se convierten en uno de uso individual. Aquí el lenguaje ocupa un papel importantísimo. Según este autor, la acción mediada ocurre a través de la acción humana y ésta es mediada por herramientas psicológicas y por signos. La incorporación de los instrumentos que median la acción humana no se reduce a facilitar la acción sino que es gracias a la inclusión de las herramientas psicológicas en el comportamiento que ocurre el desarrollo de las estructuras mentales y éstas determinan la estructura de un nuevo acto instrumental, es decir, un nuevo aprendizaje; esta influencia en las estructuras mentales ocurre no sólo a través de las herramientas psicológicas sino también de las relaciones entre el pensamiento y el lenguaje, pues las diversas formas de lenguaje crean distintas formas de pensamiento. Aquí la mediación verbal es un aspecto fundamental para el desarrollo cognitivo.

En este proceso de mediación, el autor define niveles de inter-subjetividad de la comunicación humana y los denomina de "estados de inter-subjetividad". Primero, los interlocutores comparten una cierta cantidad de "conocimiento de base"; cualquier situación, evento u objeto tienen muchas interpretaciones posibles, pues el habla sirve para imponer una determinada interpretación y para crear una realidad social, temporalmente compartida denominada "potencial de significado". Enseguida, el sentido y las condiciones en las cuales las personas que inician el diálogo pueden exceder sus diferentes "mundos privados". Cuando los interlocutores inician un contexto comunicativo pueden tener diferentes perspectivas e interpretar sólo vagamente lo que ocurre; aquí el papel de la negociación es muy importante porque funciona como un mundo social temporalmente compartido.

De acuerdo con la perspectiva vigotskiana de aprendizaje, los contextos sociales (como en el caso de la interacción social en pareja de estudiantes exploradas en este estudio) son una buena oportunidad para el aprendizaje y el desarrollo de las habilidades cognitivas individuales. Durante la actividad y la interacción con otras personas, éstas desarrollan cambios de ideas y la información otorga un modelo de razonamiento, estrategias de pensamiento y habilidades de resolución de problemas en pareja. El resultado de esa interacción individual es la internalización del conocimiento, el significado y las habilidades para que los otros colaboren en el nuevo conocimiento y significado. Además la ZDP puede ofrecer información a los niños, quienes pueden avanzar hacia modelos adultos, pues éstos asumen un papel importante en el desarrollo cognitivo de los estudiantes.

Se usa esta perspectiva esencialmente para ver la evolución de contenidos matemáticos trabajados en este libro y principalmente cómo los menores evolucionaban de un pensamiento de tipo aditivo a uno multiplicativo para poder acceder a las primeras ideas algebraicas. Para tal propósito se puede tomar la idea de zona de desarrollo actual o real mediante la aplicación de un examen inicial, seguido de una especie de conversación informal con los alumnos a fin de indagar sobre las estrategias que los niños utilizaron para resolver los problemas planteados en el examen; a través de una secuencia didáctica se puede propiciar la ZDP. Además, se toman en cuenta, para el diseño de las actividades de la secuencia didáctica, las etapas consideradas por Ainsi, Gredler, 1992 citado en Bertrand 1998, en relación a estrategias de enseñanza:

Etapa 1: señalar los conceptos o los principios de la enseñanza
¿Cuáles son los conceptos o los principios que caracterizan el mundo del estudiante?
¿Cuáles son los conceptos o los principios que pueden facilitar la disciplina (matemática), para el estudiante y su propia manera de pensar?

Etapa 2: estructura de la actividad del aprendizaje
¿Cuáles son los niveles de comprensión necesarios para el aprendizaje?
¿Cuáles son las partes de la actividad que el profesor puede modelar?
¿Cuáles son las actividades que el profesor puede ejecutar al inicio?
¿Comúnmente los estudiantes utilizan los signos y los símbolos para regular el comportamiento?
¿Cuáles son las sugerencias y la realimentación del profesor para facilitar el aprendizaje?

Etapa 3: implementación de la actividad
¿El profesor aumenta el nivel de dificultad a medida que los estudiantes progresan?
¿Los estudiantes son capaces de tener autonomía al final de los cursos?
¿Los estudiantes se presentan de otra manera al final de los cursos?
¿Los estudiantes adquieren habilidades que pueden ser generalizables a otras situaciones?

Esta idea fue explorada en este estudio al considerar la mediación entre varios aspectos, como la secuencia de enseñanza: contenido matemático (razonamiento proporcional, variación funcional y procesos de generalización); el ambiente de aprendizaje: mediadores (Logo y actividades en lápiz y papel, materiales y la estructura de la secuencia didáctica) y modelo pedagógico (en general, la perspectiva vigotskiana de aprendizaje y específicamente la idea de zona de desarrollo próximo tratada por Tudge 1996). Estas etapas son utilizadas en este estudio en la estructura y diseño de actividades que componen la secuencia de enseñanza, en lo que respecta al nivel de dificultad de las actividades, a la selección de éstas, a la realimentación de la entrevistadora que funcionaba como profesora, a la organización de las sesiones de trabajo durante la secuencia didáctica, así como al análisis de las interacciones sociales entre niño-ambiente y entrevistadora y el análisis de los procesos cognitivos. Todas estas componentes fueron consideradas con el fin de propiciar la ZDP.

Mediante este proceso de interacción social que ocurre en todas las etapas del estudio anteriormente mencionadas, Tudge (citado en Moll 1996), la interacción social adulto-niño promueve información dentro de la ZDP del niño para que su desarrollo cognoscitivo avance hacia modelos adultos presentes en una práctica culturalmente apropiada.

Tudge señala (1996) que los niños aprenden significados, comportamientos y tecnologías adultas en un proceso de colaboración. De acuerdo con el autor los niños son socializados en una cultura donde las relaciones sociales entre las personas, el ambiente físico y el lenguaje aparecen como un instrumento psicológico para explicar la revolución evolutiva desde los procesos "naturales" hasta los procesos mentales más elevados; asegura que el lenguaje es un instrumento de poder, pues crea significados que son compartidos, es decir, significados sociales, "palabras que ya tienen significado para los miembros maduros de un grupo cultural pasan a tener, en el proceso de interacción, el mismo significado para jóvenes del grupo" (Vigotski citado en Tudge, 1996).

Esta afirmación explica muy bien cómo, con el lenguaje, específicamente en la interacción social en pareja, los niños van construyendo significados que inicialmente forman parte del mundo adulto;

y con la interacción social tales significados se comparten y terminan como parte del mundo de los niños. De acuerdo con Galperin, citado en Quintanar (2001), el lenguaje interno tiene un lugar en el interior del estudiante, pero éste también puede ser realizado en voz alta, principalmente cuando los estudiantes presentan dificultades en el pensamiento; esta salida natural del lenguaje interno al exterior Vigotski la utilizó como método de investigación y tiene gran importancia, porque muestra el origen del lenguaje interno y las relaciones naturales con el pensamiento. El lenguaje interno subentiende un lenguaje de comunicación y también todo lo que se piensa sin la ayuda del lenguaje; ideas y pensamientos ocurren mediante la comunicación verbal.

Muchas investigaciones han probado la eficacia de la interacción social en pareja para promover el desarrollo cognitivo. Sin embargo, para garantizar dicha eficacia se requiere una clasificación adecuada de las parejas, pues cuando los niveles de conocimiento entre pares son muy distintos, dicha interacción no se muestra provechosa. En sentido contrario, algunos estudios afirman que cuando las parejas no tienen el mismo nivel conceptual en un determinado contenido escolar (dichos problemas son resueltos más allá del nivel de pensamiento corriente de los niños) la retroalimentación a partir de los materiales se muestra suficiente para aumentar la comprensión del problema, más allá de los efectos de la interacción con una pareja, y favorece el desarrollo dentro de la ZDP.

Bearison, citado en Tudge (1996), sugiere observar las formas como los niños alcanzan un punto de vista común, en vez de detenerse en el proceso de conflicto. Light y Perret-Clermont (1989), citados en Tudge (1996), señalan la necesidad de llegar a un significado compartido, para ello se considera oportuno usar el modelo de interacción social propuesto por Bartolini Bussi (2002) utilizado para estudiar los significados compartidos por los niños en el estudio. Para el análisis de las componentes modelo de comunicación y de cognición se analizan los registros escritos (hojas de trabajo), cuestionarios iniciales, secuencias didácticas y cuestionarios finales para detectar en ellos formas de pensamiento. Para mejor explicitar la componente de los procesos cognitivos se hace uso del modelo de enseñanza propuesto en el estudio y del proceso de interacción social que ocurre a través de la aplicación de la secuencia de enseñanza. En este sentido, se observa no sólo qué tipo de aportación en pareja otorga dicho modelo de enseñanza, sino principalmente cómo afecta tanto los procesos cognitivos colectivos como los individuales.

CAPÍTULO VI

ACTIVIDADES EN EL CD: LÁPIZ Y PAPEL, WINLOGO Y EXCEL

La segunda parte de esta obra consiste de un CD[1] que contiene las actividades siguientes:

Figura 6.1 Contenido del CD

Nombre	Fecha modi...	Tipo	Tamaño
Excel Algebra Temprana	22/02/2012...	Carpeta de archivos	
Actividades en Excel	21/02/2012...	Adobe Acrobat 7.0...	3,125 KB
Actividades en WinLogo	21/02/2012...	Adobe Acrobat 7.0...	882 KB
Actividades lapiz y papel	22/02/2012...	Adobe Acrobat 7.0...	680 KB

En "Actividades lápiz y papel" hay ejemplos de actividades para el trabajo en el salón de clase con lápiz y papel, en forma de secuencias didácticas, las cuales pueden hacerse en más de una sesión; se incluye una descripción de los contenidos matemáticos de las actividades, como una guía para el maestro de lo que se pretende explorar en cada actividad. Las secuencias didácticas deben servir como ejemplo

[1] Algunas palabras y abreviaturas de los archivos y de sus contenidos que llevan acento no lo tienen porque los programas no los reconocen.

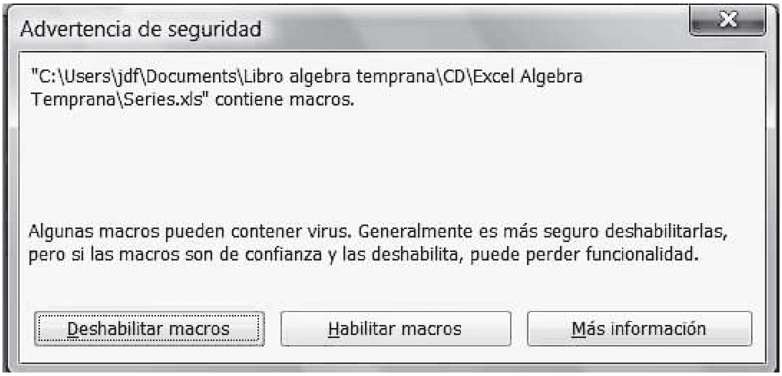
para que el maestro pueda elaborar las propias y sea capaz de adaptarlas para explorar los contenidos que desee.

En "Actividades en WinLogo" se presenta un pequeño manual para el uso de WinLogo y cinco secuencias didácticas en WinLogo. Las actividades en el ambiente WinLogo exploran diversas construcciones geométricas tales como rectángulos, triángulos y polígonos. Algunas de estas actividades motivan la introducción de la noción de ángulo y de propiedades básicas de los ángulos opuestos por el vértice, complementarios, suplementarios, etcétera, con los que se puede experimentar haciendo las veces de cantidades desconocidas. Se incluye el código de los programas principales usados en las secuencias.

El ambiente Logo ha evolucionado paradigmáticamente con el progreso de la tecnología, originalmente fue diseñado para introducir a los niños al uso de la computadora con una tortuga como personaje que obedece órdenes simples tales como avanzar, retroceder, levantar o bajar la pluma, girar e inclusive programar una secuencia de instrucciones que lleven a la tortuga a dibujar patrones o realizar cálculos complejos. En la actualidad Logo puede "dar vida" a cualquier cantidad de tortugas y además interaccionar entre sí. De hecho el avance de la programación orientada a objetos ha permitido diseñar modelos computacionales con características que asemejan mucho el comportamiento social: cooperación, cálculo distribuido (en paralelo), jerarquización, por mencionar algunos ejemplos; así Logo se ha convertido en un micromundo de multiagentes. Como ha sucedido a menudo en la historia de la tecnología, seguramente veremos en un futuro cómo estos nuevos paradigmas –computacionales– influirán en la concepción de los procesos cognitivos.

En "Actividades en Excel" describe el contenido de actividades diseñadas en Excel; éstas se refieren a sucesiones numéricas de enteros. No presupone un conocimiento de Excel, pues en las actividades en las que se requiere dar una regla, la respuesta es validada con un poco de código en Visual Basic. Por esta razón, cuando el usuario abre cualquiera de los archivos de la carpeta verá el mensaje mostrado en la figura 6.2.

Figura 6.2 Mensaje para habilitar macros



En respuesta, debe permitirse la habilitación de macros. El mismo material está disponible para su descarga gratuita en el sitio que los autores han preparado para incorporar estas prácticas y otras en el futuro *http://mat.izt.uam.mx/algebra_temprana.* Este sitio institucional ofrece la garantía de disponibilidad del material en cualquier momento que se necesite.

En los documentos incluidos en el CD se ofrecen propuestas de actividades que el profesor puede usar en el salón de clases de matemáticas sobre razonamiento proporcional y procesos de generalización. Se sugiere aplicar primero un examen corto de diagnóstico para determinar el nivel de conocimientos y razonamiento que se usarán en la secuencia didáctica, para clasificarlos en tres clases: bajo, medio y alto. El examen debe explorar contenidos básicos como aritmética, sumas y restas, multiplicación y divisiones simples; conocimiento de las figuras geométricas elementales: cuadrado, rectángulo, triángulo, así como vectorización y orientación espacial: norte-sur, izquierda-derecha.

De acuerdo con la clasificación se formarán parejas de trabajo de niveles medio-bajo, medio-alto, medio-medio, pero de ninguna manera bajo-bajo. La idea es que el alumno de nivel más alto eleve el nivel de desarrollo conceptual del alumno de nivel bajo.

Los ejemplos de secuencias didácticas se presentan en dos formatos: como actividad para aplicarlo a los alumnos y en forma resumida de los contenidos matemáticos que se exploran. El profesor puede intentar construir mapas conceptuales que revelen la evolución del pensamiento de los niños en el tema.

REFERENCIAS

LIBROS

Bartolini, M. (1998). Joint Activity in Mathematics Classrooms: a Vygotskian Analysis. (pp. 13-49). En F. Seeger, J. y Voigt y J. Waschesho (Eds), *The Culture of the Mathematics Classroom.* Analyses and Changes Cambridge University Press (pp. 13-49). Reino Unido: Cambridge University Press.

Bernardz, N, Kieran, C. y Lee, I. (1996). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching.* Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Block, D. (2006). *La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico*. Departamento de investigaciones educativas del Cinvestav. México. Tesis de doctorado.

Block, D., Mendoza, T. y Ramírez, M. (2010). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*. México: SM Ediciones.

Booth, L. (1984). *Algebra: Childrens Strategies and Errors.* Reino Unido: NFER-Nelson. Windsor.

Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización.* Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana.

Carraher, D. Schliemann, A. y Brizuela, B. (2000). Early Algebra, Early Arithmetic: Treating Operation as Functions. En M. L. Fernández (ed.), *Proceedings of the Twenty-Second Annual Meeting North American Chapter of the International Group of the Psychology of Mathematics Education.* PME-NA *XXI; Tucson, Arizona.*

Da Rocha Falcão, J. (1993). A álgebra como ferramenta de representacao e resolução de problemas. En A. D. Schliemann, D. W. Carraher, A. C. Spinillo, L. L. Meira y J. T. da Rocha Falcão (1993), *Estudos em Psicologia da Educação Matemática*. Recife, Editora Universitaria, UFPE.

Durán Ponce, R. (1999). *Reconocimiento de patrones en secuencias numéricas y de figuras, por alumnos de sexto grado de primaria.* Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa Cinvestav, IPN.

English, L. y Halford, G. (1995). *Mathematics Education: Models and Processes.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Feurzig, W. y Papert, S. *et al.,* (1969). *Programming Languages as a Conceptual Framework for teaching Mathematics. Report 1889.* Massachusetts: Cambridge.

Filloy, E. (1997). *La observación en matemática educativa. Modelos teóricos locales y sistemas de signos.* México.

Filloy, E. (1999). Modelos teóricos locales (MTL). Un marco teórico y metodológico para la observación experimental en matemática educativa. En *Aspectos teóricos del álgebra educativa.* México: Grupo Editorial Iberoamerica.

Filloy, E., y Rojano, T. (1985). Obstructions to the Acquisition of Elemental Algebraic Concepts and Teaching Strategies. En *Proceedings of the Ninth Annual Conference of the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter.* Ohio, US.

Filloy, E., y Rojano, T. (1985). Operating Unknown and Models of Teaching (A clinical Study with 12-13 Years Old with a High Proficiency in Pre-Algebra). En *Proceedings of the Sixth Annual Conference of the Psychology of Mathematics Education.* Ultrech, Holanda.

Filloy, E., y Rojano, T. (1989). *Solving Ecquations: The Transition from Arithmetic to Algebra for the Learning of Mathematics* 9 (2).

Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach.* Berlin, Heidelberg y Nueva York: Springer.

Freudenthal, H (1993). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Reidel.

Harel, I., y Papert, S. (editores) (1991). *Constructionism.* Nueva Jersey: Ablex Publishing Corporation.

Hart, K., Johnson, D., Brown, M., Dickson, L. y Clarkson, R. (1989). *Children's Mathematical Frameworks 8-13 a Study of Classroom Teaching.* Nottingham, Reino Unido: The Shell Centre.

Hoyles, C. y Sutherland, R (1985). *Ways of Learning in a Computer Based Environment: Some Findings of the Logo Maths Project.* Londres: Institute of Education University of London.

Hoyles, C. y Sutherland, R. (1989). *Logo Mathematics in the Classroom.* Londres y Nueva York: Routledge.

Inhelder, B. y Piaget, J. (1958). *The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescense.* New York: Basic Books.

Kaput, J., Blanton, M. y Moreno, L. (2008). Algebra from a Symbolization Point of View. En National Council of Teachers of Mathematics, *Algebra in the Early Grades*. Londres, Lawrence Erlbaun.

Karplus, R. y Peterson, R. (1970). *Intellectual Development Beyond Elementary School II; Ratio, a Survey. Sciense Curriculum Improvement Study.* Estados Unidos: Universidad de California.

Kieran, C. (1980). The interpretation of the Equal Sign: Symbol for a Equivalence Relation vs. An Operator Symbol. En R. Karlus (ed.) *Proceedings of the Fourth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Berkerley, California. University of California.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. En D. Grouws (editor), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* (pp. 390-419). Nueva York: MacMillan.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gower, N. (1985). *Routes to Roots of Algebra.* Gran Bretaña: The Open University Press.

Mazaza, C. (1999). *Sumar y restar. El proceso de enseñanza y aprendizaje de la suma y de la resta.* Madrid: Visor.

Noss, R. y Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings. Learning Cultures and Computers.* Deventer: Kluwer Academic Press.

Papert, S. (1981). *Desafío a la mente.* Buenos Aires: Galápago.

Papert, S. (1993). *The Children's Machine.* Nueva York: Basic Books.

Piaget, J. (1976). *The Grasp of Consciousness: Action and Concept in the Young Child* (S Wedgwood, Tarns). Cambridge, MA: Harvard Universiyt Press. (Original work published 1974).

Piaget, J. y García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia.* México: Siglo XXI.

Piaget, J. (1987). *Introducción a la epistemología genética. El pensamiento matemático*. Editorial Paidós. México.

Radford, L. (1996). The Role of Geometry and Arithmetic in the Development of Algebra: Historical Remarks from a Didactic Perspective. En N. Bernardz, C. Kieran y L. Lee (eds.) *Approaches to Algebra Perspectives for Research and Teaching.* Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Schliemann, A., Carraher, D. y Brizuela, B. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética: de las ideas de los ninõs a las actividades en el aula*. Buenos Aires: Paidós.

Tudge, J. (1996). Vigotski, a zona de desenvolvimento proximal e a colaboração entre pares: implicações para a prática em sala de aula (pp. 151-168). En *Vigotski e a educação: implicações pedagógicas da psicología sócio-histórica*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Ursini, S. (1994). "*Pupils*" *Approaches to Different Characterizations of Variable in Logo*. PhD Thesis, University of London, Institute of Education.

Usiskin, Z. (1999). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. In A. Coxford & A. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra*, *K-12, 1988 Yearbook* (pp. 189-199). *Reston* . VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Vergnaud, G. (1982). A Classification of Cognitive Tasks and Operations of Thought Involved in addition and Subtraction Problems (pp. 39-59). En T.

Carpenter, J. Moser, y T. Romberg, (1982). *Addition and Subtraction. A Cognitive Perspective*. Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. En R. Lesh, y M. Landau, (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 189-199). Nueva York: Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. En H. Hiebert, y M. Behr, (editores). *Research Agenda in Mathematics Education. Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 141-161). Nueva Jersey: Lawrence Erlbarum.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela.* México: Editorial Trillas.

Vigotski, L. (1978). *Mind in Society.* Cambrigde: Harvard University Press.

Weir, S. (1987). *Cultivating Minds: a Logo Casebook.* Nueva York: Harper y Row Publishers.

Wertsch, J. (1985). *Vygotsky and the Social Formation of Mind.* Cambrigde: Harvard University Press.

Wilensky, U. (1991). Abstract Meditations on the Concrete, and Concrete Implications for Mathematics Education. En I. Harel, y S. Papert (Eds.) *Constructionism* (pp. 193-204). Nueva Jersey: Ablex Publishing Corporation.

PERIÓDICOS Y REVISTAS

Blanton, M. y J. Kaput. (2002). Design Principles for Tasks that Support Algebraic Thinking in Elementary School Classrooms. *Proceedings of the 26 Annual Meeting Psychology of Mathematics Education, 2*, 104-112.

Carraher, D, Shliemann, A. y Brizuela, B. (2001). Operate you on Unknowns? *PME, 25 Psychology of Mathematics Education, 1*, 130-140.

Carraher, D. y Earnest, D. (2003). Guess my Rule Revisited. *PME, 27 Psychology of Mathematics Education, Honolulu, 1*, 173-180.

Carraher, D. y Schliemann, A. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. En F. Lester (editor). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: a Project of the National Council of Teachers of Mathematics, 2*, 669-705.

Cobb, P. (1994). *A summary of four case studies of mathematical learning and small-group interaction, PME Psychology of Mathematics Education, 2*, 201-208.

Czarnocha, B. (1999). El maestro constructivista como investigador. Cómo enseñar razones y proporciones a adolescentes. *Educación Matemática, 2* (2) 52-63.

Filloy, E. (1990). PME Algebra Research to working perspective. *Proceedings of the Fourteenth Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education,* PME-NA, Oaxtepec, México, *1*, 111-133.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). *Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra, for the Learning of mathematics, 9* (2) 19-25.

Herscovics, N. y L. Linchevski,(1994). A cognitive Gap Between Arithmetic and Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 59-78.

Hoyles, C. y Sutherland, R. (1989). Mathematical Abstraction as the Result of a Delicate shift of Attention. *For the Learning of Mathematics, 9.*

Hoyles, C. y Noss, R. (1987). Synthesising Mathematical Conceptions and their Formalisation through the Construction of a Logo-Based School athematics Curriculum. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology 18*, 4 581-595.

Lee, L. (2001). Early Algebra -but which Algebra? *Proceedings of the 12th ICMI Study Conferencia, Australia*, *2*, 392-399.

Leitao, da Rocha Falcao, Araújo, Lessa y Osório. (2002). Argumentation in the Context of a Didactic Sequence in Elementary Algebra, *PME, 26 Psychology of Mathematics Education,* 272.

Malara, N. (2003). Dialectics Between Theory and Practice: Theoretical Issues and Aspects of Practice from an Early Algebra Project. *PME, 27 Psychology of Mathematics* Education, Honolulu, Hawaii, *1* 33-48.

Martínez, M. (agosto 1998). El mapa cognitivo como recurso de investigación en el estudio de casos. *Educación Matemática 10* (2) 5-22.

Matz, M. (1980). Towards a computacional. Theory of Algebraic Competence. *Journal of mathematical behavior, 3*(1) 93-166.

Molyneux-Hodgson, S., Rojano, T., Sutherland, R. y Ursini, S. (1999). Mathematical Modelling: the Interaction of Culture and Practice. *Educational Studies in Mathematics, 39,* 167-183.

Moreira, M. (2002). A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. *Investigações em Ensino de Ciências, 1* (7) 7-29.

Moret, C y Labrador, M. (2006). La tecnología digital en Educación: Implicaciones en el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante. *Theoria: Ciencia, Arte y Humanidades*, Año 7, vol 15. No2, 81-89.

Noelting, G. (1980). The Development of Proportional Reasoning and the Ratio Concept, Differentation of States. *Educational Studies in Mathematics, 11,* 217-253.

Noss, R. y Hoyles, C. (1986). Constructing a Conceptual Framework for Elementary Algebra through Logo Programming. *Educational Studies in Mathematics, N, 17,* 37-54.

Papert, S. (1987). *Microworlds: Transforming Education. Artificial Intelligence and Education, 1: Learning Environments and Tutoring Systems.*

Radford, L. (1991). Ciencias de la Educación: hacia una nueva pedagogía de la matemática. *Pedagogía: Revista de la Universidad Pedagógica Nacional 7* (21) 5-10.

Radford, L. (2001). Of Course They Can! Proceedings of the 25 Conference of the International for the Psychology of Mathematics Education, *PME 25 Utrecht, Holanda, 1,* 145-148.

Rojano, T. (2003). Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias en escuelas secundarias públicas de México. *Revista Iberoamericana de Educación*, núm. 0333, 135-165.

Sackur-Grisvard, C. y Leonard, F. (1985). Intermediate Cognitive Organizations in the Process of Learning a Mathematical Concept: the Order of Positive Decimal Numbers. *Cognition and Instruction, 2*(2), 157-174.

Schliemann, A, Carraher, D, Brizuela, B, Earnest, D. (2003). Algebra in Elementary School. *PME 27 Psychology of Mathematics Education, 1,* 127-134.

Sfard, A. y Linchevski, L. (1994). The Gains and Pitfalls of Reification-the Case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26,* 191-228.

Slavit, D. (1999). The Role of Operation Sense in Transitions from Arithmetic to Algebraic Thought. *Educational Studies in Mathematics, 37,* 251-274.

Spinillo, A. y Bryant, P. (1991). Children´s Proportional Judgments: The Importance of Half". *Child Development, 62* (3), 427-440.

Sutherland, R. (1991). Some Unanswered Research Questions on the Teaching and Learning of Algebra. *For the Learning of Mathematics, 11,* 40-46.

Tabach, M, A. Arcavi y R, Hershkowitz (2008). Transitions among different symbolic generalizations by algebra beginners in a computer intensive environment. *Educational Studies Mathematics,* 69, 53-71 Springer.

Tall, D. (2001). Reflections on Early Algebra. *Proceedings of the PME 25 Psychology of Mathematics Education. Utrecht The Netherlands*, 1, 149-155.

Ursini, S. (1996). Experiencias pre-algebraicas. *Educación Matemática, 8* (2) 33-40.

Ursini, S. (1997). El lenguaje logo, los niños y las variables. *Educación Matemática, 9* (2) 30-42.

Trigueros, M. y Ursini, S. (2001). Approaching the Study of Algebra Through the Concept of Variable. *Proceedings of the 12th ICMI Australia, 2,* 598-605.

Vergnaud. G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Récherches en didactique des mathématiques, 10*(23), 133-170.

Vergnaud, G. (1996). Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica. *Perspectivas, 26* (10), 195-207.

Fuentes electrónicas

WingLogo (2012). Recuperado de *http://guindo.pntic.mec.es/~crangil/winlogo.htm*

Diferentes versiones de Logo (2012). Recuperado de *http://neoparaiso.com/logo/versiones-logo.html*

Logo (lenguaje de programación). Recuperado de *es.wikipedia.org/wiki/Logo_(lenguaje_de_programación)*

Otras fuentes

Bodanski, F. (1991). The Formation of an Algebraic Method of Problem-Solving in Primary School Children, *Psychology Abilities of Primary School Children*. In *Learning Mathematics, National Council of Teachers of Mathematics.* Reston, Virginia.

Carraher, D., Schliemann, A. y Brizuela, B. (7-10, octubre, 2000). *Early Algebra, Early Aritmétic: Treating Operations as Functions Plenary Presentation at PME-NA XXII*. Arizona, Estados Unidos.

Clarke, D. (1998). Studying in Classroom Negotiation of Meaning: Complementary Accounts Methodology. En *Qualitative Research Methods in Mathematics Education* National Council of Teachers of Mathematics.

DiSessa, A. (1997). Open toolsets: new ends and new means in learning mathematic and science with computers. *Proceedings of PME-21.* Finlandia.

Goldenberg, P. (1995). Multiple Representations: a Vehicle for Understanding (pp. 155-171). En D. Perkins *et al., Software Goes to School: Teaching for Understanding with New Technologies.*

Kaput, J. y Blanton, M. (7-10, octubre, 2000). Generalizing and Progressively Formalizing in a Third-Grade Mathematics Classroom: Conversations About and Odd Numbers. En *Plenary presentation at PME-NA XXII.* Arizona, Estados Unidos.

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. (1980). Early Adolescents' Structure of Proportional Reasoning. En R. Karplus. Proc. 4th Conferencia Internacional: *Psychology of Mathematics Education.* California, Estados Unidos.

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. (1983*). In Acquisition of Mathematics Concepts and Processes. Proportional Reasoning of Early Adolescents,* Academic Press.

Linchevski, L. (2001). Operating on the Unknowns: What does is Really Mean?, *PME 25 Psychology of Mathematics Education,* (pp. 140-144). Utrecht, Holanda.

Mac Gregor, M. y Stacey, K. (1993). *Seeing to Pattern and Writing to Rule. PME, Psychology of Mathematics Education.* Ibaraki, Japan.

NCTM (1989) *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* National Council of Teachers of Mathematics, Reston.

Reggiani, M. (1994). Generalization as a Basic for Algebraic Thinking: Observations with 11-12 Years Old Pupils (pp. 97-104). En Conference Proceeding of the XVIII PME. Lisboa, Portugal.

Sacristán, A. (2000). Investigación del aprendizaje matemático mediante micromundos computacionales, (pp. 11-17). En 1er Encuentro Interdisciplinario de Investigación Coahuila.

Schliemann, A., Carraher, D. y Brizuela, B. (2007). *Bringing out the Algebraic Character of Arithmetic: from Children's Ideas to Classroom Practice*. Lawrence Erlbaum Associates.

Tournaire, F. y Pulus, S. (1985). In Proportional Reasoning: A Review of the Literature Educational Studies in Mathematics 16 (pp. 181-204). Reidel Publishing Company.

Esta primera edición de *Rutas hacia el álgebra. Actividades en Excel y Logo* estuvo a cargo de la Subdirección de Fomento Editorial, de la Dirección de Difusión y Extensión Universitaria, de la Universidad Pedagógica Nacional y se terminó de imprimir en octubre de 2012 en xxxxxxxxxx. El tiraje fue de 500 ejemplares más sobrantes para reposición.