



Surgimento de estados quimera em sistemas lineares por partes
Conrado Ferreira Bittencourt, Vagner dos Santos,
José Danilo Szezech Junior(Orientador), e-mail: jdanilo@gmail.com

Universidade Estadual de Ponta Grossa / Departamento de Matemática e Estatística.

1.05.00.00-6/1.05.01.00-2

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos, Acoplamento não-local, Caos.

Resumo

A partir de uma breve introdução de sistemas dinâmicos, é apresentado o estudo de uma rede com acoplamento não-local composta por mapas lineares por partes que contém comportamento caótico, a fim de analisar como se ocorre o surgimento do estado de quimera, ou seja, coexistência entre sincronização e dessincronização na mesma rede. Por fim, percebe-se que a mudança na intensidade de acoplamento dos mapas não só contribui para o surgimento, mas também para um estado quimera com evolução temporal periódica.

Introdução

Um sistema dinâmico descreve o estado de uma variável que muda com a evolução do tempo. Muitos cientistas fazem uso desta ferramenta visando fazer previsões e avanços que melhorem a qualidade de vida da sociedade.

Dentro dessa abordagem existe uma classe de sistemas dinâmicos que apresentam sensibilidade às condições iniciais, estes sistemas são chamados de caóticos [1]. Um exemplo canônico de um sistema dinâmico relativamente simples e caótico é o mapa¹ logístico, proposto pelo biólogo Robert May. Este mapa fornece uma regra matemática apresentada na equação (1) e foi utilizado para descrever a evolução de uma população, onde a população futura x_{n+1} depende da anterior x_n e para parâmetro $a = 4$ temos um mapa caótico,

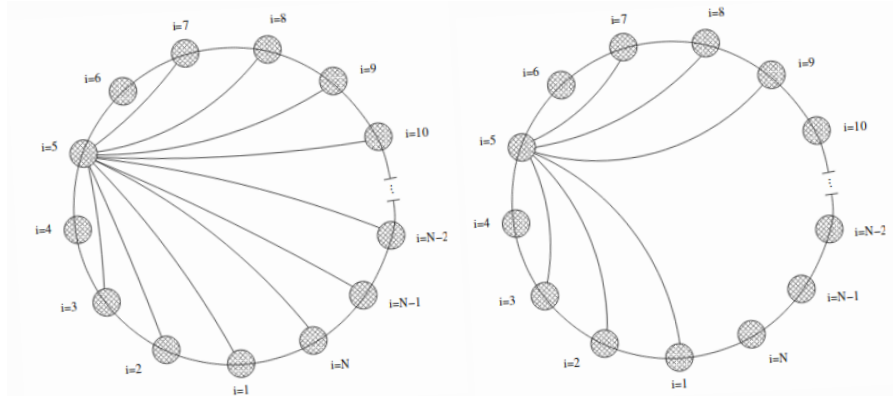
$$x_{n+1} = a x_n(1 - x_n). \quad (1)$$

A partir do conhecimento de mapas caóticos, podemos montar uma rede de mapas caóticos. Uma rede pode ser representada por um grafo, que é definido por um par (V, E) , onde V é o conjunto de vértices e E é o conjunto de arestas, como ilustrado na figura 1. Neste grafo de mapas acoplados, os vértices representam os mapas e as arestas representam as ligações entre cada mapa, que podem variar de acordo com o modelo proposto.

Em uma rede composta por sistemas caóticos, dois estados de comportamento que a rede pode resultar, rede coerente ou incoerente. Entretanto, Kuramoto e Battogtokh [2], mostraram que existe uma terceira possibilidade. Para determinadas configurações de uma rede de mapas acoplados, pode ocorrer a coexistência desses estados, tal fenômeno recebeu o nome de “*Quimera*”, em referência a fera da mitologia grega que apresenta uma aparência híbrida de muitos animais. Uma rede que apresenta um estado de quimera pode ser visualizada na figura 2.

¹ Mapa é um sistema dinâmico com tempo discreto, $t = 0, 1, 2, 3, \dots$

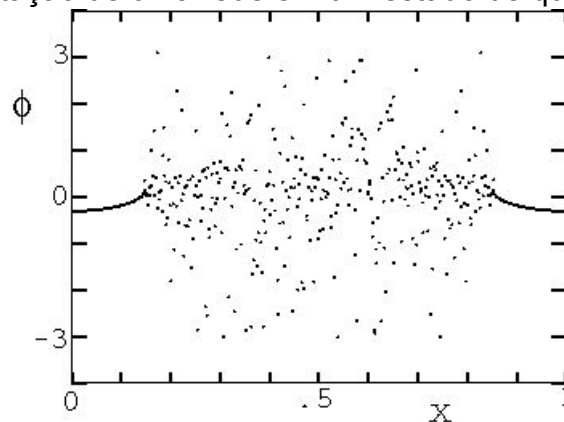
Figura 1 – Exemplo visual de redes descrita por grafos, acoplamento global à esquerda e não-local à direita.



Fonte: Adaptado da dissertação de mestrado Moisés Souza Santos [3].

É possível notar que há a coexistência de elementos sincronizados nas extremidades e dessincronizados localizados na região central da imagem. Após a descrição numérica deste estado, surgiram várias evidências experimentais que este fenômeno ocorre: em redes de osciladores químicos [4], redes de osciladores óticos [5] e em redes de osciladores mecânicos [6].

Figura 2 – Representação de uma rede em um estado de quimera espacial.



Fonte: Imagem adaptada do artigo publicado por Kuramoto e Battogtokh [3].

Material e Métodos

Neste trabalho utilizamos um acoplamento não-local, regido pela equação (2). A variável x_t^i , representa a posição x do mapa i no tempo discreto t . Os parâmetros σ , P e N , a intensidade do acoplamento ($0 \leq \sigma \leq 1$), o número de vizinhos ($0 \leq P \leq N$), tamanho da rede, respectivamente. Neste trabalho fixamos $N = 100$, $P = 24$ e variamos σ .

$$x_{t+1}^i = f(x_t^i) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [f(x_t^j) - f(x_t^i)] . \quad (2)$$

A função que descreve como vai evoluir cada mapa é exposta na equação (3), encontrado no artigo “Different types of chimera states: An interplay between spatial and dynamical chaos” [7]. Note que o domínio da função é



$D : \{x \in [-1, 1]\}$ e a imagem será utilizada na próxima iteração, portanto deve ser um subconjunto do D .

$$f(x) = \begin{cases} p_1x + (p_1/l - 1) & : x \in [-1, -1/l) \\ lx & : x \in [-1/l, 1/l) \\ p_2x - (p_2/l - 1) & : x \in [1/l, 1] \end{cases} \quad (3)$$

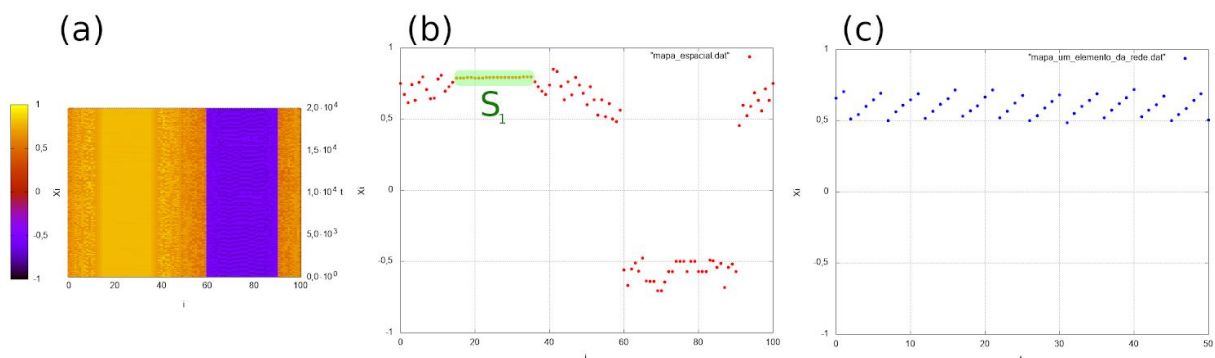
Iteramos a rede $t = 2,5 \times 10^4$ e retiramos as primeiras 5×10^3 . O resultado é ilustrado em gráficos semelhantes a um *heatmap*, o eixo horizontal representa o mapa i , o eixo vertical crescente o tempo t e as cores representam o valor de x_i do mapa i . O formato desse gráfico auxilia na visualização de como a rede evolui no espaço e tempo.

Para a execução desse trabalho utilizamos simulações numéricas. As configurações de hardware do computador utilizado são: um processador Intel® Core™ i7-4790 3.60GHz, memória RAM Kingston HyperX 8GB (ddr3) e uma placa de vídeo NVIDIA® GeForce® 7300 GS.

Resultados e Discussão

A condição inicial na qual o sistema submetido é uma função senoidal, com amplitude 0,5. O resultado é exposto na figura 3, onde a figura 3(a) é a evolução espaço temporal de todos os elementos da rede, a figura 3(b) uma organização espacial de todos os elementos em um instante de t e a figura 3(c) a evolução temporal do mapa $i = 50$.

Figura 3 – Representação da rede em um estado de quimera do tipo 2, quando $\sigma = 0,33$, $P=24$, $N=100$.



Fonte: O autor.

Podemos identificar na figura 3(a) a evolução sincronizada dos elementos próximos de $i = 25$, representada pela cor amarela vertical, e a evolução aleatória dos elementos próximos de $i = 5$ e $i = 50$, representada pela granulação, observando a figura 3(b) fica mais adequada visualização da sincronização dos mapas na região verde S_1 e demais elementos evoluindo de maneira aleatória.

Segundo D. Dudkowski, Y. Maistrenko e T. Kapitaniak, quando ocorre uma quimera espacial mas temporalmente periódica, esta quimera é chamada de 'quimera tipo 2'. Isto caracteriza a quimera apresentada na rede como uma quimera do tipo 2, pois temporalmente a evolução da rede apresenta a coexistência de



estados sincronizados e assíncronos, e individualmente, a evolução de um mapa, por exemplo $i = 50$ aparenta ser periódica como é ilustrado na figura 3(c).

Conclusão

Para os valores de σ igual 0,33, a rede exibe um regime organizado e outro desorganizado, simultaneamente, isso caracteriza um estado de quimera. Caracterizamos a quimera do tipo 2 quando identificamos o comportamento aleatório pela granulação na figura 3(c) e a sincronização por faixas verticais e além disso, olhando a dinâmica de alguns mapas é possível verificar que temporalmente a evolução individual é aparentemente periódica. Para uma informação mais precisa a respeito da periodicidade da trajetória necessária a análise do expoente de Lyapunov do mapa.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador José Danilo Szezech Jr, pela dedicação, paciência e as discussões realizadas em vários os momentos no desenvolvimento do projeto.

Ao meu co-orientador Vagner dos Santos, pelas conversas a respeito do trabalho.

Aos colegas e colaboradores da 105 group science (<https://www.105groupscience.com>), pelo acolhimento e apoio.

Agradeço a minha família e amigos, que me apoiaram no decorrer deste ofício.

Agradeço a Universidade Estadual de Ponta Grossa, por ceder o espaço para realizar as atividades acadêmicas e finalmente, agradeço ao CNPq, pela bolsa de estudos que serviu de amparo financeiro no desenvolvimento deste projeto e por fomentar a pesquisa em todo o país.

Referências

- [1] ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. Chaos. Springer New York, 1996.
- [2] KURAMOTO, Y.; BATTOGTOKH, D. Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators. **Nonlinear Phenomena in Complex Systems**, p. 380–385, 2002.
- [3] SANTOS, M.S.. **FORMAÇÃO DE ESTADOS QUIMERA EM DIFERENTES ACOPLAMENTOS**. Tese (Dissertação de mestrado em Física) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2014.
- [4] TINSLEY, M. R.; NKOMO, S.; SHOWALTER, K. Chimera and phase-cluster states in populations of coupled chemical oscillators. **Nature Physics**, v. 8, n. 9, p. 662, 2012.
- [5] HAGERSTROM, A. M. et al. Experimental observation of chimeras in coupled-map lattices. **Nature Physics**, v. 8, n. 9, p. 658, 2012.
- [6] MARTENS, E. A. et al. Chimera states in mechanical oscillator networks. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 110, n. 26, p. 10563-10567, 2013.
- [7] DUDKOWSKI, D.; MAISTRENKO, Y.; KAPITANIAK, T. Different types of chimera states: An interplay between spatial and dynamical chaos. **Physical Review E**, v. 90, n. 3, p. 032920, 2014.