El problema de la curva braquistócrona. Contexto histórico, la solución de Johann Bernoulli y una deducción analítica de la ecuación.

César Efrén Valladares Rocha

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas. Universidad Autónoma de Nuevo León

correo: cesarefrenvr@hotmail.com

El reto de Bernoulli a los matemáticos

En junio de 1696, Johann Bernoulli publica un nuevo problema: *"Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur"* en la revista *Acta Eruditorum Lipsiae*, que decía lo siguiente: *"Dados dos puntos A y B en un plano vertical, determínese una trayectoria AMB al cuerpo M que se desplaza, tal que el cuerpo llegue al punto B, cayendo por su propia gravedad desde el punto A en el menor tiempo".*

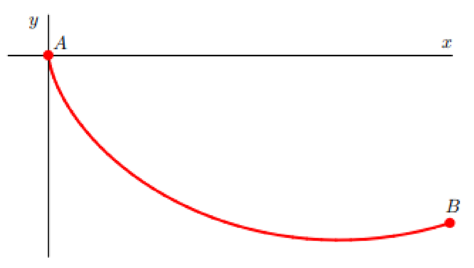

Figura 1: Representación del problema de Bernoulli.

A continuación, Bernoulli añade que la trayectoria, al contrario de lo que se podría llegar a pensar, no es una línea recta, y que en caso de que nadie halle la solución, él mismo revelará la trayectoria a finales de ese mismo año.
Pasaron 6 meses en los que no se recibió una solución satisfactoria, hasta que Leibniz le replica no sólo asegurando que ya tiene la solución al problema, sino también solicitando que extendiera el tiempo de enviar las soluciones hasta la pascua, y que el problema fuera republicado en Francia e Italia.
Se especula que este desafío era dirigido específicamente a Newton, recordando que meses antes en ese mismo año, Bernoulli había expresado su apoyo a Leibniz en la disputa que existía entre él y Newton respecto a la atribución del descubrimiento del cálculo infinitesimal.
Tanto Bernoulli como Leibniz interpretaron este tiempo de "silencio" de junio a diciembre como una demostración de que el problema había derrotado a Newton. Como ambos conocían ya la solución al problema (cada uno de manera independiente y con sus propios métodos), pretendían ahora, demostrar su superioridad respecto a Newton públicamente.

En una carta que data de 1697, Newton escribe a Charles Montague, el entonces presidente de la Royal Society, que había recibido dos problemas propuestos por un gran matemático. Newton añade en esta misma carta a Montague la solución a ambos problemas. El primer problema era el de la curva braquistócrona, y el segundo fue uno completamente diferente que Bernoulli agregó luego de que se le solicitara relanzar el problema a más países del continente europeo. Esta carta, incluida en su obra *Collected Papers*, parece haber sido escrita anónimamente pues no aparece ningún tipo de firma.

Cuatro meses después, en mayo, un fragmento de un paper publicado originalmente en Inglaterra, en la edición de enero de *Philosophical Transactions* es publicado en el *Acta Eruditorum Lipsiae*. El contenido de este paper eran las soluciones a los dos problemas de Bernoulli. Dichas soluciones, que fueron también presentadas de manera anónima, eran las de Newton. Este hecho parece comprobar que la carta de Newton a Montague era, en efecto, anónima.

Así pues, además de la solución de Leibniz, Bernoulli recibió otras dos, una del marqués de l'Hopital en Francia (quien anteriormente había sido alumno él), y otra anónima de Inglaterra. Bernoulli supo inmediatamente quién era el autor detrás de ese paper que denotaba autoridad y una asombrosa habilidad en matemáticas -*"Reconozco al león por su garra"*-, deduciendo que se trataba de Isaac Newton.
En la edición de mayo del *Acta Eruditorum Lipsiae*, también es publicado el paper *"Solutio Problematum Fraternorum"*, escrito por Jacob Bernoulli, hermano mayor de Johann.
Leibniz presentó todas las soluciones recibidas en un paper dentro su revista, y escribió: *"Newton hubiera podido resolver este problema, si tan sólo se lo hubiera propuesto."*

La solución de Johann Bernoulli

Para una mejor comprensión de cómo llegó Bernoulli a la solución de este problema, recordemos dos principios importantes de la óptica.

Principio de Fermat. Postulado en 1662 y que dicta lo siguiente: "Si un rayo de luz viaja de un punto A a un punto B, lo hará recorriendo la trayectoria más rápida posible."

Ley de Snell. La curvatura que sigue la luz al pasar de un medio a otro con diferente índice de refracción obedece esta ley:

$$\frac{sen\theta_1}{v_1}=\frac{sen\theta_2}{v_2}=cte \tag{1}$$

Ahora, en el problema de la braquistócrona se tiene que encontrar la trayectoria que describiría una partícula descendiendo. Por conservación de la energía, nos es posible hallar una relación entre la posición en la que se encuentra y la velocidad a la que se desplaza. Entonces se puede afirmar que en cada punto de la curva, su pérdida en la energía potencial será igual a su energía cinética

$$mgy=\frac{1}{2}mv^2$$

Despejando para la velocidad tenemos:

$$v=\sqrt{2gy} \tag{2}$$

Bernoulli sabía que la trayectoria de la partícula debía implicar una optimización de tiempo, y fue así como él recordó que la luz, presenta esta optimización. Él imaginó un rayo de luz sometido a un campo gravitacional uniforme, y el rayo debía de estar cambiando su trayectoria constantemente. Una forma de lograr esto es suponiendo que dicho rayo está atravesando una cantidad infinita de capas infinitamente delgadas con diferentes índices de refracción.

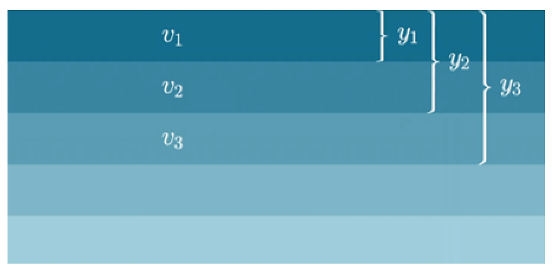

Figura 2: Velocidad diferente en cada capa.

La velocidad en cada capa sería además proporcional a la profundidad a la que se encontrara.

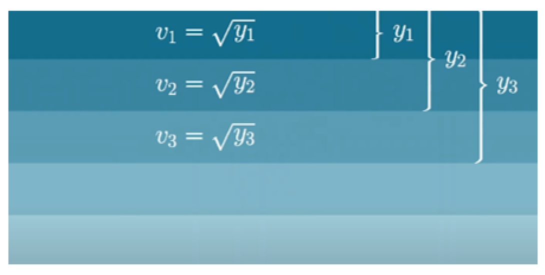

Figura 3: Velocidad dependiente de la raíz cuadrada de la profundidad.

Sustituyendo la expresión para la velocidad dependiente de la profundidad (1) en la Ley de Snell (2), obtenemos que en cualquier punto de la trayectoria:

$$\frac{sen\theta}{\sqrt{y}}=cte \tag{3}$$

Al llegar a esta ecuación, ¡Bernoulli inmediatamente la reconoce como la ecuación diferencial de una cicloide!

El cálculo de variaciones

El cálculo de variaciones es un problema matemático consistente en buscar extremos relativos de funcionales continuos definidos sobre algún espacio funcional.

Un problema del cálculo de variaciones es el de hallar la curva que minimiza la distancia entre dos puntos.

Para este problema se desea encontrar una trayectoria particular denotada por $y(x)$ tal que la integral de línea I de la función $f(y,y',x)$ entre x_1 y x_2:

$$I=\int_{x_1}^{x_2} f(y,y',x)\ dx$$

tenga un valor estacionario relativo a las trayectorias que difieren de la correcta función $y(x)$.

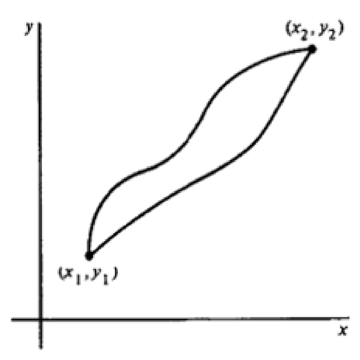

Figura 4: Posibles trayectorias para la función $y(x)$

Como I debe tener un valor estacionario para la trayectoria correcta con relación a cualquier trayectoria vecina, la variación debe ser cero con relación a algún conjunto particular de trayectorias vecinas, denotadas por un parámetro ε. Tal conjunto de trayectorias estaría denotado por $y(x,\varepsilon)$, con $y(x,0)$ representando la trayectoria correcta.

Podemos entonces expresar a I como una función de ε:

$$I(\varepsilon)=\int_{x_1}^{x_2} f(y(x,\varepsilon),y'(x,\varepsilon),x)\ dx$$

Para encontrar estos extremos relativos es necesario aplicar una condición al funcional tal que:

$$\left(\frac{dI}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}=0$$

donde ε es un parámetro que genera un cambio sobre el funcional.

La anterior condición nos lleva a la sigiuiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \tag{4}$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación de Euler-Lagrange.

Solución a la braquistócrona mediante el cálculo de variaciones

El objetivo de nuestro problema es hallar una trayectoria, que denotaremos por $y(x)$, tal que minimice el tiempo. Como se busca minimizar, viéndolo desde el punto de vista del cálculo de variaciones, estamos buscando la función estacionaria para T tal que se minimice:

$$T=\int_{x_1}^{x_2} dt \tag{5}$$

donde T es el funcional y dt es el diferencial de tiempo.

Podemos definir $dt=\frac{dS}{v(x,y)}$; donde dS es el segmento de arco de la curva que describe la partícula y v una función de la velocidad dependiente de su posición (x,y). De manera que la ecuación (4) queda:

$$T=\int_{x_1}^{x_2}\frac{dS}{v(x,y)} \tag{6}$$

Tenemos que para un diferencial de arco:

$$dS=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\sqrt{1+(y')^2}dx \tag{7}$$

Encontrando una función para la velocidad a partir de la conservación de la energía en cualquier punto:

$$E_M=K+U$$
$$\Rightarrow mgh=\frac{1}{2}mv^2+mgy$$

Despejando para la velocidad:

$$v=\sqrt{2g(h-y} \tag{8}$$

Sustituyendo en la ecuación (5):

$$T=\int_{x_1}^{x_2} dt=\int_{x_1}^{x_2}\frac{dS}{v(x,y)}=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2g(h-y}}\,dx \tag{9}$$

Como buscamos la función que hace a T estacionaria, aplicaríamos la ecuación de Euler-Lagrange. El problema es que esta ecuación solo es aplicable cuando F depende explícitamente de las tres variables (x,y,y'). Como esta no es la situación, debemos utilizar un caso particular que se deriva de la ecuación de Euler-Lagrange, conocido como la identidad de Beltrami:

$$F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}=C \tag{10}$$

Una vez aplicada esta ecuación a F, llegamos a la siguiente integral para el valor de x:

$$x=\int\frac{\sqrt{h-y}}{\sqrt{C-(h-y)}}\,dy \tag{11}$$

Realizando los cambios de variables y sustituciones pertinentes, llegaremos a las siguientes ecuaciones para los valores de x y de y:

$$x=-\frac{C}{2}\,(2\theta-sen2\theta)+K$$
$$y=h-\frac{C}{2}\,(1-cos2\theta)$$

donde K es una constante de integración.

Aplicando la condición inicial, es decir, cuando $y=h, x=0$, obtenemos que el parámetro θ debe ser igual a 0. Por lo tanto:

$$x=-\frac{C}{2}\,(2\theta-sen2\theta)$$
$$y=h-\frac{C}{2}\,(1-cos2\theta)$$

Finalmente, se realiza $R=-\frac{C}{2}$ y $\alpha=2\theta$:

$$\begin{aligned}x&=R\ (\alpha-sen\alpha)\\ y&=h+R\ (1-cos\alpha)\end{aligned} \tag{12}$$

Obteniendo así, la ecuación paramétrica de la cicloide con radio R.

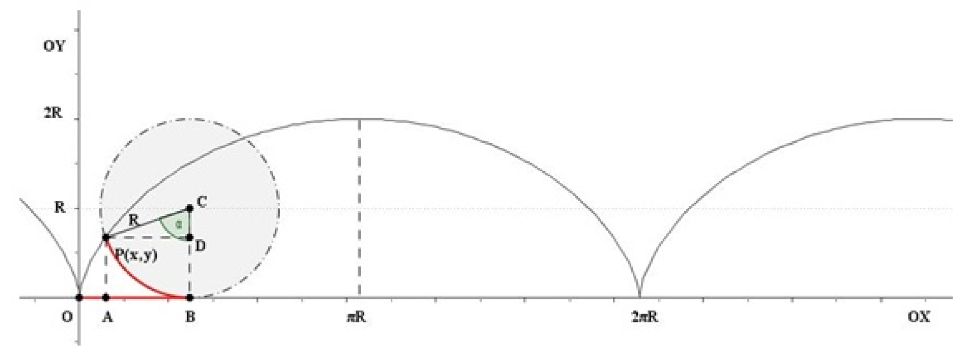

Figura 5: Gráfica de la cicloide.

Conclusión

El problema de Johann Bernoulli fue un parteaguas en la rama de las matemáticas, pues fue el que sentó las bases para que los matemáticos de la época empezaran a trabajar en el cálculo variacional. Actualmente los métodos del cálculo variacional se utilizan para resolver diversos problemas; desde optimización, hasta saber cómo evoluciona la mecánica de un sistema calculando el lagrangiano. Es aquí donde resulta sorprendente que un problema que fue inicialmente lanzado como un reto, o como un intento de humillar a un rival, terminó convirtiéndose en un trabajo de gran trascendencia.

Referencias

[1] M. de Icaza, "Galileo, Bernoulli, Leibniz and Newton around the brachistochrone problem", *Revista Mexicana de Física*, no. 3, pp. 460-461, agosto 1993.

[2] D. Shafer, "The Brachistochrone: Historical Gateway to the Calculus of Variations", *MATerials MATematics*, vol. 2007, no. 5, pp. 1-11, mayo 2007.

[3] S. Argáez-Mendoza, A. Olivia, "El principio de Fermat, la braquistócrona y ¿la curvatura de la luz?", *Ingeniería – Revista Académica de la Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Yucatán*, vol. 15, no. 1, noviembre 2011.

[4] H. Goldstein, J. Safko, C. Poole, *Classical Mechanics*. 3era. edición. E.E.U.U: Addison Wesley, 2011, pp. 36-38.

[5] O. Morales, R. Yáñez, "Problema de la curva braquistócrona". Facultad de Ingeniería, DIMEI-UNAM, 2018.

LXIII Congreso Nacional de Física. A 7 de octubre de 2020.