Eine Begründung der Pareto-80/20 Regel und Grenzwerte für die ABC-Analyse

Alfred Ultsch

Bei der wirtschaftlichen Analyse vieler Projekte wird häufig empirisch ein Teilprojekt beobachtet welches mit 20% Aufwand 80% des gesamten Nutzes bewirkt. Dies wird als Pareto-80/20 Regel bezeichnet. In dieser Arbeit wird eine Begründung dieser empirischen Regel geleistet. Die Parato-80/20 Regel kann als Optimierung der Information verstanden werden, die durch eine Aufteilung eines Problems in Teilprojekte entsteht. Es wird gezeigt, wie die Shannon Information zur wirtschaftlichen Betrachtung von Projekten angewendet werden kann. Hierzu wird das unrealisierte Potential einer Projektsituation definiert. Die Minimierung dieser Größe stellt ein allgemeines Maß zur Optimierung von Projekten dar. Geht man von einem Aufwand für die Erzeugung von Zeichen bei Informationsquelle aus, so ermöglicht der vorgestellte Ansatz eine Optimierung der übertragenen Information. Es wird gezeigt, wie dieser Ansatz zur Ableitung von Grenzwerten für die ABC Analyse verwendet werden kann. Weitere Anwendungen sind u.a. in der Clusteranalyse, dem Data Mining und in der Bioinformatik zu sehen.

1. Die Pareto-80/20 Regel

Der italienische Volkswirtschaftler Wilfredo Pareto (1848-1923) beobachtete, dass im Italien des 19. Jahrhunderts 20% der Bevölkerung 80% des Landes besaßen [Laukat 99]. In der Folge hat Pareto diesen Effekt an anderen wirtschaftlichen und natürlichen Prozessen beobachtet. Als allgemeine Regel hat er diese Beobachtung in etwa so formuliert: "in einer beliebigen Menge von Elementen, die etwas bewirken sollen, bewirkt immer eine zahlenmäßig kleine Menge von Elementen den größten Effekt" [Sombart 67].

Bei der wirtschaftlichen Analyse vieler Projekte wird häufig eine entsprechende 80/20 Situation von Nutzen und Aufwand festgestellt. Dies wird der von Pareto beobachteten Erscheinung zugeschrieben und landläufig als (Pareto-) 80/20 Regel bezeichnet [Zollondz 01]. Bei wirtschaftlichen Vorgängen wird die 80/20 Regel insbesondere im Marketing und im Qualitätsmanagement beobachtet. Hier eine Auswahl einiger solcher Beobachtungen [Aggteleky 82, Pfeifer 01]:

- 20 % der Kunden generieren 80 % des Umsatzes.
- 20% der angebotenen Produkte erbringen 80% der Umsätze.
- lediglich 20 % der Möglichkeiten für Produktionsfehler sind für 80 % des Ausschusses verantwortlich.
- in Besprechungen entstehen 80 % der Beschlüsse in 20 % der aufgewendeten Zeit.
- 20 % der Produkte bringen 80 % des Gewinns.
- 20 % der Mitarbeiter sind für 80 % der Fehltage verantwortlich.
- 80 % der Ergebnisse sollen bei strategischer Zeitplanung in 20 % der Zeit erzielbar sein.

- die besten 20% der Verkäufer sind für 80% des Gewinns einer Firma verantwortlich.
- 20% der Artikel in einem Lager machen bereits 80% des Bestandswerts aus
- 80 % der Anforderungen für Waren beziehen sich üblicherweise auf nur 20% der Waren in einem Lager.
- 80% der Kosten (Verluste) einer Firma entsteht durch 20% der Probleme.

Insbesondere auch bei vielen Aspekten von Informatik Projekten soll die 80/20 Regel gelten (aus [Arthur 92]):

20 percent of this		80 percent of this
modules	consume	resources
modules	contribute	errors
modules	consume	execution time
errors	consume	repair costs
enhancements	consume	adaptive maintenace costs
tools	experience	tool usage

Als Begründung der 80/20 Regel wird die Beobachtung, also Empirie, benannt [Pfeifer 01]. Uns ist bislang keine Theorie der 80/20 Regel bekannt. Da dieses Phänomen der 80/20 Aufteilung anscheinend sehr häufig beobachtet werden kann, stellt sich die Frage, ob hinter dieser Beobachtung ein „Naturgesetz“ steckt.

Im Folgenden wird ein Ansatz vorgestellt der die empirisch beobachtbare 80/20 Regel aus fundamentalen Prinzipien herleitet. Hierzu wird die Aufteilung eines Projektes in Teilprojekte betrachtet. Der Nutzen dieser Aufteilung wird berechnet als Information bzw. Entropie der Aufteilung eines Projektes in Teilprojekte. Eine wirtschaftliche Optimierung von Aufwand und Nutzen einer solchen Aufteilung führt zu einer Herleitung der Pareto-80/20 Regel.

Die 80/20 Regel wird auch bei der sog. ABC Analyse gebraucht. Daher folgt eine kurze Erklärung dieser Methode. Eine Anwendung der in dieser Arbeit entwickleten Theorie zur Pareto-80/20 Regel leitet hierfür Grenzwerte ab, die bislang nur empirisch bestimmt wurden.

2. ABC Analyse

Bei der Optimierung von Wirtschaftsprozessen wird neben der Pareto-80/20 Regel auch die sog. ABC Analyse angewendet [Pfeifer 01]. Ein Teil dieser Analyse wird auf die Pareto-80/20 Regel zurückgeführt. Deshalb wird die ABC Analyse auch als Pareto-Analyse bezeichnet [Zollondz 01].
Bei der ABC Analyse, werden die Teilprojekte eines Gesamtprojektes in drei Klassen A, B, und C eingeteilt. Hierzu werden alle Teilprojekte nach absteigendem Teilnutzen geordnet. Die Klasse A wird unter den Teilprojekten mit hohem Nutzen, B mit mittlerem Nutzen und C mit geringem Nutzen ausgewählt.

Klasse A: Teilprojekte mit einem relativ geringen Gesamtaufwand, die einen hohen Anteil am Gesamtnutzen erwirtschaften, d.h. die relativ wenigen Teilprojekte dieser Klasse sollen mit wenig Aufwand einen überproportionalen Nutzen erzielen

Klasse B: Teilprojekte die ein mindestens durchschnittliches Nutzen/Aufwand aufweisen, d.h. der Aufwand dieser Klasse soll in etwa direkt proportional zum Nutzen sein.

Klasse C: der Rest der Projekte, d.h. diese Teilprojekte tragen bei großem Aufwand relativ wenig zum Nutzen bei.

Vorschläge für die Wahl der Grenzen des Aufwands für Gruppe A liegen reichen von 5 – 33%. Die Vorschläge für die Wahl der Grenzen für den Aufwand in der Gruppe B liegen reichen von 15 – 33%, in der Gruppe C von 25 – 50%.

In der Praxis werden die Gruppengrenzen häufig an Hand einer graphischen Darstellung von Aufwand und Nutzen in Form der Lorenzkurve festgelegt. Hierzu wird der kumulierte Aufwand dem kumulierten Nutzen gegenübergestellt. Das nachfolgende Bild zeigt ein Beispiel einer Lorenzkurve aus [Hartung 97] Seite 54. Hierbei wird dem prozentualen Anteil der Flächen von landwirtschaftlichen Produktionsbetrieben in Südafrika der prozentuale Anteil der Betriebe gegenübergestellt.

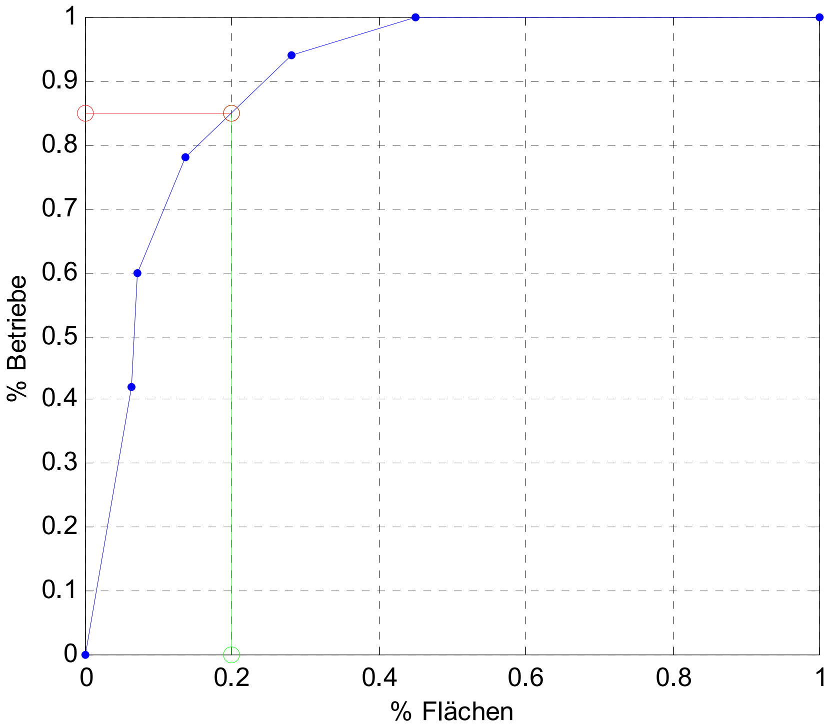


Bild 1 Lorenzkurve für den Flächenbedarf der südafrikanischen Landwirtschaft

Im Folgenden beschreiben wir eine Bestimmung von Grenzen für die ABC Analyse die sich aus der Theorie zur Pareto 80/20 Regel ergibt.

3. Grundlegende Definitionen

In diesem Kapitel werden grundlegende Definitionen eingeführt zur Beschreibung eines allgemeinen Aufwands bzw. Nutzens einer Aufteilung eines Projektes in Teilprojekte.

Ein ziemlich universeller Ansatz zur Lösung eines Problems ist der folgende: das Problem wird in n Teilprobleme (t_1,...t_n) zerleget. Die n Teilprobleme werden separat gelöst und die Teillösungen zur Gesamtlösung zusammengesetzt. Dies wird auch als das „Divide and Conquer Prinzip nach Macciavelli“ benannt [Aho et al 82]. Die Schritte zur Lösung eines Problems wird auch als **Projekt** bezeichnet.

Definition 1.1 Projektbericht

Um den Aufwand für Projekte messen zu können nehmen wir an, dass während der Durchführung eines Projekts ein Bericht über die Teilprojekte des Gesamtprojektes mitgeführt wird. Wird das Gesamtprojekt in n Teilprojekte (t_1,..., t_n) aufgeteilt, so werden n von einander unterscheidbare Zeichen (z_1,..., z_n) bestimmt, die jeweils als Kennzeichen einem Teilprojekt zugeordnet werden. Bei der Durchführung des Projektes wird in regelmäßigen Zeitintervallen protokolliert, welches

Teilprojekt gerade bearbeitet wird. Diese Protokollierung erfolgt so, dass das entsprechende Zeichen in einem Protokoll, dem Projektbericht B, festgehalten wird.
Der Aufwand der für ein Projekt aufzubringen ist, soll direkt proportional zur Anzahl von Kennzeichen im Projektbericht sein. D.h. der Gesamtaufwand A für das gesamte Projekt entspricht der Gesamtzahl $A = |B|$ an Zeichen im Projektbericht.
Sei n_i die Anzahl Kennzeichen für das Teilprojekt t_i. Dann soll $a_i = n_i/A$ direkt proportional zum Aufwand, der für t_i aufgewendet werden muss, sein.

Definition 1.2 Aufwand, Aufwandsverteilung
Für den Aufwand a_i eines Teilprojektes t_i gelten folgende Bedingungen:

(A1) $a_i >= 0$ d.h es gibt keinen negativen Aufwand.

(A2) $a_i <= 1$ d.h. der Aufwand wird immer anteilig (prozentual) des Gesamtaufwand A gemessen.

(A3) $\sum_{i=1,\dots,n}(a_i) = 1$ die Summe der Aufwendungen der Teilprojekte ergibt den Gesamtaufwand A.

Eine Menge $A_n= \{a_1,\dots,a_n\}$ die den obigen Bedingungen genügt, wird **Aufwandsverteilung** genannt.

Aufwandsverteilungen genügen den Bedingungen, die an Wahrscheinlichkeitsverteilungen gestellt werden. Der Begriff der Unabhängigkeit aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung überträgt sich somit auch auf Aufwandsverteilungen:

Definition 1.3 Unabhängigkeit
Seien a_p bzw a_q der Aufwand für zwei Teilprojekte t_p und t_q. Die Teilprojekte t_p und t_q. sind genau dann von einander **unabhängig** wenn der Aufwand $a_{p,q}$ zur Lösung des aus t_p und t_q bestehenden Gesamtprojektes das Produkt der Aufwandsverteilungen ist

$a_{p,q} = a_p * a_q$.

Definition 1.4 Gleichwertigkeit
Eine Aufwandsverteilung A_n in n Teilprojekte heißt **gleichwertig**, wenn der Aufwand für alle Teilprojekte gleich ist d h. es gilt $a_i = 1/n$, für alle i.

Der maximale Aufwand, der für n unabhängige Teilprojekte bei einer Aufwandsverteilung getrieben werden kann, entsteht wenn die Aufwandsverteilung gleichwertig ist.

Definition 1.5 Größtmöglicher Aufwand
$\mathrm{MaxAuf}(n) = \{a_1, \dots, a_n\}$ mit $a_i = 1/n$ bezeichne die Aufwandsverteilung mit größtmöglichem Gesamtaufwand in n Teilprojekte.

Definition 1.6 Nutzen
Nutzen ist ein System von Funktionen $N: A_n \to \mathbf{R}$ welche Aufwandsverteilungen den Nutzen zuordnet. Nutzenfunktionen sollen die folgenden Eigenschaften haben:

(N1) Nutzenfunktionen sind stetig

(N2) $N(a_1, \dots, a_n) >= 0$ d.h. Nutzen ist immer positiv

(N3) Wenn das gleiche Problem in n gleichwertige Teilprojekte mit Aufwandsverteilung A_n und in n+1 gleichwertige Teilprojekte mit Aufwandsverteilung A_{n+1} aufgeteilt werden kann, so soll gelten:

$N(A_n) < N(A_{n+1})$

Die Forderung N3 bedeutet, dass schwierigere Probleme einen größeren Nutzen besitzen sollen

4. Entropischer Nutzen

Mit dem Begriff Entropischer Nutzen soll der durch die Projektaufteilung in n Teilprojekte erzielte Nutzen gemessen werden.

Definition 1.7 Entropischer Nutzen
Ein Projekt A könne in n Teilprojekten gelöst werden, sei b_i aus **N** und $\Sigma_{i=1,\ldots,k}\, b_i = n$, dann ist B = $\{b_1/n, \ldots, b_k/n\}$eine beliebige Aufwandsverteilung für das Projekt A. Dann ist

MaxAuf(n) = {1/n, …, 1/n} (n-mal) ist die Aufwandsverteilung von A mit größtmöglichem Gesamtaufwand,

MaxAuf(b_i) = {1/bi, …, 1/bi} (b_i-mal) ist die Aufwandsverteilung von Teilprojekt t_i mit größtmöglichem Aufwand

Ein Nutzenfunktion N heißt entropisch, gdw.:

(N4) $N(B) = N(MaxAuf(n)) - \Sigma_{i=1,\ldots,n}(b_i/n^* N(MaxAuf(b_i))$

Die Axiome N1 bis N4 sind die Axiome der Shannon Information (Entropie) [Hoffman et al 91]. Hierbei wird $p_i = b_i/n$ zur Wahrscheinlichkeit des Auftretens des Projektkennzeichens z_i im Projektbericht. Für dem Projektbericht ist somit die Shannon Information berechenbar. Der Projektbericht wird somit zu einer Nachricht die von einer Informationsquelle mit Quellalphabet $\{z_1,\ldots, z_n\}$ ausgesendet wird. Der entropische Nutzen ist die (Shannon-)Information bzw die Entropie dieser Nachricht.
Da für den entropischen Nutzen die Axiome der Shannon'schen Informationstheorie gelten, lassen sich die bekannten Eigenschaften der Information auf den entropischen Nutzen anwenden. Nach Shannon/Aczél lässt sich somit folgendes zeigen [Jungnickel 95],[van Lint 99] :
Eine Nutzenfunktion N ist genau dann entropisch, wenn

$$N(a_1, \ldots, a_n) = - \Sigma_{i=1,\ldots n}(a_i \cdot \log_c(a_i)) \text{ und } a \cdot \log_c(a) = 0 \text{ für } a = 0$$

wobei c >1 die Basis des Logarithmus ist.

5. Eigenschaften des entropischen Nutzens

Das folgende Bild zeigt die Werte des entropischen Nutzens für c = 2 :

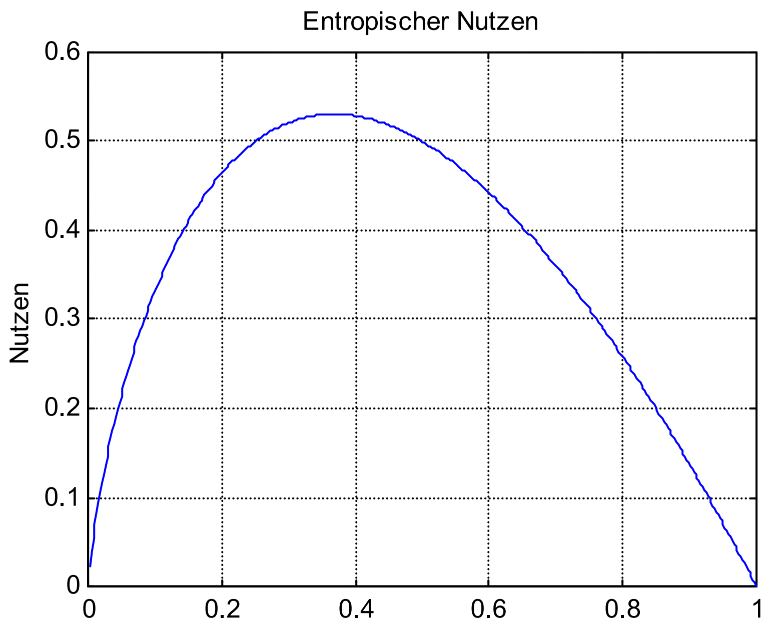


Bild 2 Entropischer Nutzen N = -a· ld(a)

Wie man aus dem Bild ersehen kann, wächst der entropische Nutzen zunächst mit dem Aufwand. Im Grenzfall a = 0, wenn also kein Aufwand getrieben wird, ist auch der Nutzen gleich Null. Ab einem gewissen Aufwand (siehe unten) wird jedoch kein weiterer Nutzen generiert, im Gegenteil der Nutzen sinkt bei weiter steigendem Aufwand. Im Grenzfall a = 100% wird der Nutzen wieder Null.

Mit dem entropischen Nutzen wird der durch die Projektaufteilung in n Teilprojekte erzielte Nutzen gemessen. Wird ein Projekt in ein einziges Teilprojekt aufgeteilt, dann ist natürlich der entropische Nutzen dieser Aufteilung gleich Null.

6. Maximaler Teilnutzen

Definition 2.1 Teilnutzen

$n_i = N(a_i) = - a_i \cdot \log_c(a_i)$ wird als Teilnutzen des Projektes t_i bezeichnet.

Somit ist

$N(a_i) = n_i = - lc \cdot a_i \cdot \ln(a_i)$.

Der entropische Nutzen besitzt ein Maximum.

Satz 1

N(1/e) ist maximal.

Beweis:

$N'(t_i) = -lc - lc \cdot \ln(a_i)$.

$N'(a_i) = 0 \Leftrightarrow -lc - lc \cdot \ln(a_i) = 0 \Leftrightarrow -lc \cdot \ln(a_i) = lc \Leftrightarrow \ln(a_i) = -1 \Leftrightarrow a_i = 1/e$.

Der maximale Teilnutzen eines Teilprojektes wird also bei einem anteiligen Aufwand von 1/e d.h. bei ungefähr 37% des Gesamtaufwands erzielt.

Der Wert des **maximalen Teilnutzens** ist demnach:

$n_{max} = N(1/e) =- lc \cdot 1/e \cdot \ln(1/e) = - lc \cdot 1/e \cdot -1 = lc/e$

Der Aufwand für Teilprojekte wird in Prozent des Gesamtaufwands gemessen Es liegt daher nahe den Wertebereich des entropischen Nutzens so zu normieren, dass das Maximum, also der größtmögliche Teilnutzen, 100% beträgt.

Für alle Logarithmen $\log_c(x)$ zu Basen c >1 gilt: es gibt eine Konstante lc mit $\log_c(x) = lc * \ln(x)$. Dabei bezeichnet ln den natürlichen Logarithmus zur Basis e. Die Basis des Logarithmus für den entropischen Nutzen kann somit entsprechend gewählt werden.

Definition 2.2 Normierter Nutzen

Ein Nutzen n heißt normiert, wenn der maximale Teilnutzen = 100% ist.

Satz 2

Sei a ein Aufwand,

$n(a) = - e \cdot a \cdot \ln(a)$

n(a) ist ein normierter entropischer Nutzen

Beweis:

$n(1/e) = - e \cdot 1/e \cdot \ln(1/e) = - e \cdot 1/e \cdot -1 = 1$

Im Folgenden bezeichne n(a) immer den normierten entropischen Nutzen.

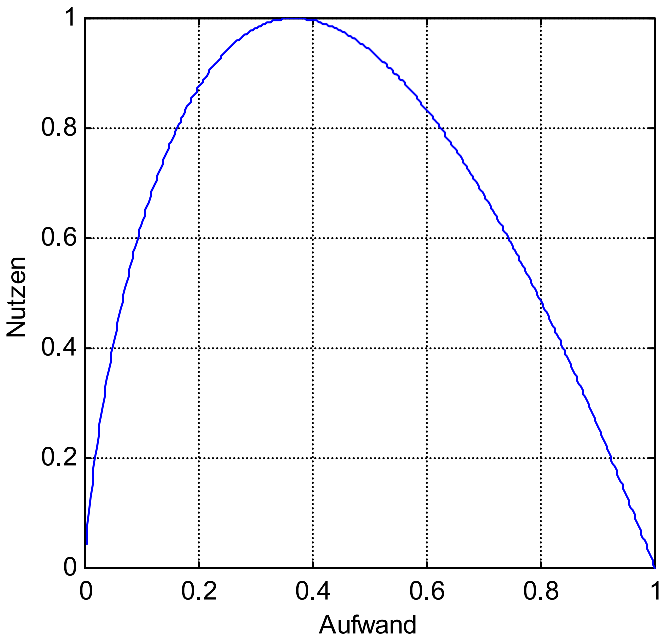


Bild 3 Graph des normierten entropischen Nutzens.

Die Normierung des entropischen Nutzens bedeutet eine Anpassung des Maßstabes in dem Aufwand und Nutzen gemessen werden. Beide werden bei der normierten entropischen Nutzenfunktion in Prozent des Gesamtaufwandes bzw. in Prozent des maximal möglichen Nutzens gemessen.

7. Unrealisiertes Potential

Bei einer wirtschaftlichen Betrachtungsweise für die Durchführung von Projekten wird immer nach einem maximalen Nutzen bei möglichst geringem Aufwand gesucht. Mit der o.g. Definition des entropischen Nutzens lässt sich eine Optimierung eines Teilprojektes durchführen.

Definition 3.1 Situation

Sei n der Nutzen eines Teilprojektes mit Aufwand a. Das Tupel S = (a,n) nennen wir eine Situation des Teilprojektes. a(S) = a, ist n(S) =n.

Die Effizienz e eines Projektes ist das Verhältnis von Nutzen zu Aufwand.

Definition 3.2 Effizienz

Sei S = (a,n) die Situation eines Projektes, a>0, dann ist e(S) = n/a die Effizienz dieses Projektes.

Eine optimale Situation liegt für ein Projekt sicherlich dann vor, wenn sowohl Nutzen wie auch Effizienz des Projektes größtmöglich sind. D.h. der Aufwand sollte so klein wie möglich, der Nutzen so groß wie möglich sein. Die theoretisch beste Situation O für ein Projekt wäre Aufwand a=0 und Nutzen n = 100% d.h. O = (0,1). Diese Situation ist in der Praxis unerreichbar da für das Erzielen eines konkreten Nutzens immer ein Aufwand a>0 getrieben werden muss. O ist jedoch bestens geeignet als Ausgangspunkt für die Bestimmung einer optimalen Situation für eine gegebene Nutzenfunktion.

Definition 3.3 Unrealisiertes Potential

Sei S = (a,n) die Situation eines Projektes, n(S) sei normiert. Die Funktion U:[0,1],[0,1] -> $\mathbf{R}^+$ mit

U(S) = $\sqrt{(O-S)^2} = \sqrt{(a-0)^2+(1-n)^2} = \sqrt{a^2+(1-n)^2}$

ist das unrealisierte Potential einer Situation.

Als unrealisiertes Potential einer Situation wird also der Abstand von der theoretisch besten Situation O mit 0% Aufwand und 100% Nutzen zu einer konkreten Situation S angesehen.

Eine geometrische Veranschaulichung des unrealisierten Potentials liefert das folgende Bild:

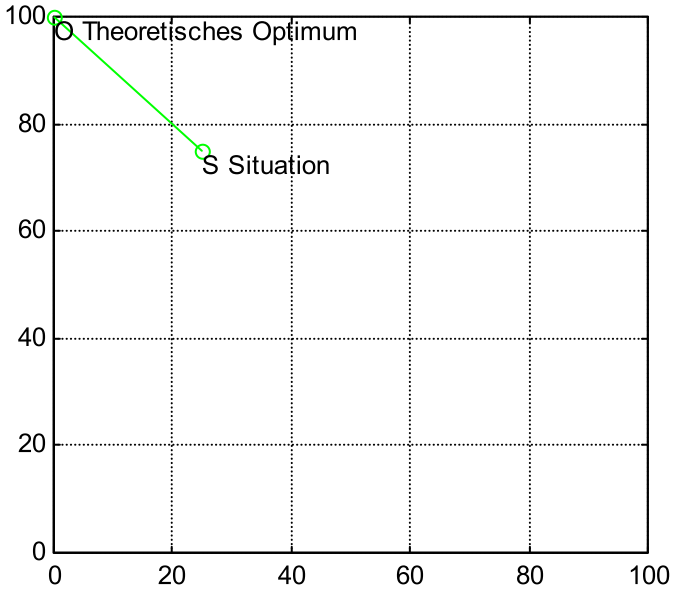


Bild 4 Unrealisiertes Potential als Abstand OS

8. Eigenschaften des unrealisierten Potentials

In diesem Kapitel soll gezeigt werden, dass die Minimierung des unrealisierten Potentials eine Optimierung der Projektsituation bedeutet. Bei dieser Minimierung wird in der Regel der Aufwand kleiner, der Nutzen größer und die Effizienz einer Situation verbessert. Die Beweise zu den sätzen finden sich im Anhang.

Satz 3

Das unrealisierte Potential U(S) hat die folgenden Eigenschaften:

(1) U(S) ist invariant gegenüber Translation und Rotation des Koordinatensystems in dem Aufwand und Nutzen gemessen werden.

(2) $0 \leq$ U(S) $\leq \sqrt{2}$

Wenn das unrealisierte Potential gleich Null ist, dann ist die optimal möglichste Situation O erreicht.

Satz 4

U(S) =0 ⇔ S = O.

Beweis: U(S) =0 ⇔ 0 = $\sqrt{(O-S)^2}$ ⇔ 0 = (O-S) ⇔ S = O.

Definition 4.1 Equipotente Situationen zu gegebenem u
Die Menge der Situationen mit gleichem unrealisierten Potential u ist die Menge der equipotenten Situationen: Equi(u) = {S| U(S) = u}.

Die equipotenten Situationen besitzen also alle das gleiche unrealisierte Potential u. Die folgenden Definitionen und Sätze zeigen, dass damit eine untere Grenze des Nutzen bzw. eine obere Grenze des Aufwands feststeht.

Definition 4.2 Maximaler Aufwand bzw. minimaler Nutzen zu gegebenem u
Definiere

$$a\_max(u) = \max(\{a(S), S \in Equi(u)\}),$$
$$n\_min(u) = \min(\{n(S), S \in Equi(u)\})$$

Der maximal maximal mögliche Aufwand bei vorgegebenem u ist somit a_max(u). Der minimal mögliche Nutzen n_min(u)

Satz 5
Für eine beliebige Situation S gilt

$$a(S) \leq a\_max(u) = u$$
$$n(S) \geq n\_min(u) = 1 - u$$

Der Aufwand einer Situation bei gegebenen unrealisiertem Potential u kann nicht größer sein als u Weiterhin ist der Nutzen bei gegebenem unrealisierten Potential u mindestens so groß wie 100% - u.

Satz 6
Sei $S \in Equi(u)$, u >0 eine Situation. Dann gilt

$$n(S) = 1 - \sqrt{u^2 - a(S)^2}$$

Bleibt der Aufwand einer Situation a(S) gleich, so wird mit kleiner werdendem u somit der Nutzen n(S) der Nutzen einer Situation größer.

Neben Aufwand und Nutzen kann auch noch die Effizienz betrachtet werden. Herzu wird zunächst die Situation mit minimaler Effizienz bei gleichem unrealisiertem Potential u definiert.

Definition 4.3 Minimale Effizienz des unrealisierten Potentials
Definiere $ME(u) = (a_{em}, n_{em}) = \{S| \ S \in Equi(u), e(S) \leq e(S') \text{ für alle } S' \in Equi(u)\}$ die Situation mit minimaler Effizienz zu gegebenen unrealisiertem Potential u.
Weiter ist e_min(u) = e(ME(u)) die minimale Effizienz des unrealisierten Potentials u.

ME(u) ist die Situation, welche die kleinste Effizienz der equipotenten Situationen für ein gegebenes unrealisiertes Potential besitzt. Diese geringste Effizienz wird mit e_min(u) bezeichnet. Aufwand Nutzen und geringste Effizienz dieser Situation können aus u berechnet werden.

Satz 7
Für $ME(u) = (a_{em}, n_{em})$, e_min(u) = e(ME(u)) gilt

$$a_{em} = u\sqrt{1-u^2}$$

$$n_{em} = 1 - u^2 \qquad \text{und}$$

$$e\_min(u) = \frac{1}{u} \sqrt{1-u^2} .$$

Damit kann eine Aussage über die minimale Effizienz bei kleiner werdendem u ausgesagt werden. Hierzu betrachten wir zwei Situationen S und P, wobei S ein kleineres unrealisiertes Potential besitzt

Satz 8
Seien $S = (a_s,n_s)$, $P = (a_p,n_p)$ Situationen, $u_s = U(S)$, $u_p = U(P)$,
$ME(u_s) = (a_{em}, n_{em})$, $ME(u_s) = (a_{em}', n_{em}')$
Wenn $u_s < u_p$ gilt
(A) $e\_min(u_s) > e\_min(u_p)$
(B) $a_{em} < a_{em}'$ und
$n_{em} > n_{em}'$
(C) aus $a_s = a_p$ folgt sowohl $n_s > n_p$ als auch $e(S) > e(P)$
(D) aus $n_s = n_p$ folgt sowohl $a_s < a_p$ als auch $e(S) > e(P)$

Verkleinert man also das unrealisierte Potential, wird somit die minimale Effizienz equipotenter Situationen größer. Zugleich wird der Aufwand der Situation mit minimaler Effizienz kleiner und ihr Nutzen größer.

Bei festem Aufwand´wird weiterhin der Nutzen und auch die Effizienz größer, wenn das unrealisierte Potential einer Situation verkleinert wird. Ist der Nutzen einer Situation gegeben, wird bei einer Verkleinerung des unrealisierten Potentials der Aufwand kleiner und somit die Effizienz der Situation gesteigert.

Wenn die Effizienz gesteigert werden soll lässt sich zu jeder vorgegebenen Effizienz ein u finden, so dass alle zugehörigen Situationen mit höchstens diesem unrealisierten Potential eine größere Effizienz besitzen. Dies zeigt der folgende Satz:

Satz 9

Seien $e(S)$, $e(S')$ Effizienzen der Situation S bzw. S'. Wenn $U(S') < (1+e^2)^{-\frac{1}{2}}$ gilt $e(S')> e(S)$.

Die Minimierung der unrealisierten Potentials u stellt nach den obigen Sätzen also eine wirtschaftliche Optimierung für Projektsituationen dar. In der Regel werden bei dieser Minimierung der Aufwand geringer, der Nutzen und die Effizienz größer. Diese Eigenschaften gelten unabhängig von der gewählten Nutzenfunktion. Insbesondere gelten sie aber auch für den entropischen Nutzen

9. Die Pareto 80/20 Regel

Die eingangs gestellte Frage, warum sich viele Projekte in Teilprojekte mit ca. 20% Aufwand und ca. 80% Nutzen aufteilen lassen kann jetzt mittels des unrealiserten Potentials und des entropischen Nutzens wie folgt beantwortet werden: misst man den Nutzen der Aufteilung eines Projektes als Information welche durch die Aufteilung gewonnen wird so gelangt man zum entropischen Nutzen. Wird dieser Nutzen so normiert, dass der maximale Nutzen eines Teilprojektes 100% beträgt, dann benutzt man für Aufwand und Nutzen die gleiche Skalierung 0% bis 100%.

In diesem Koordinatensystem kann das unrealisierte Potential gemessen werden. Für die normierte entropische Nutzenfunktion ergibt sich als unrealisiertes Potential einer Situation S = (a,n)

$$U(S) = \sqrt{a^2 + \left(1 + \frac{1}{e} \cdot a \cdot \ln(a)\right)^2}$$

Der Graph dieser Funktion sieht wie folgt aus:

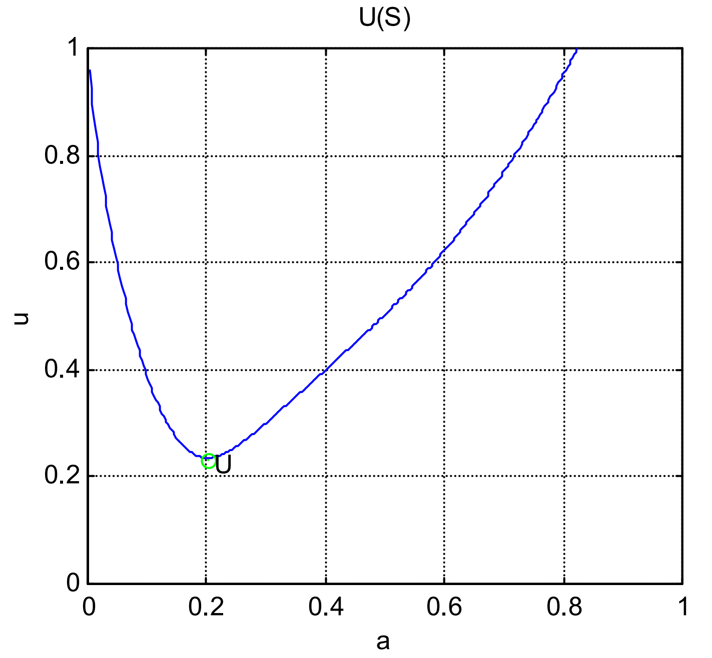


Bild 5 Unrealisiertes Potential als Funktion des Aufwands

Das Minimum des unrealisierten Potentials U(S) liegt bei der Situation U mit a_u = 20.13%. Wie das folgende Bild zeigt, liegt der zugehörige Nutzen bei und n_u = 87.77%.

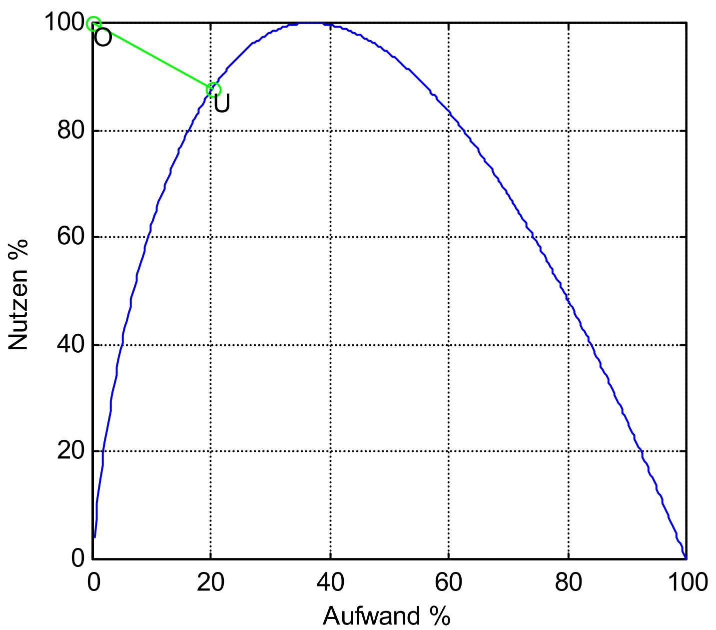


Bild 6 Die Situation mit optimal realisiertem Potential

Die Situation U $\cong$ (20%, 88%) ist eine Situation, die für eine sehr allgemeine Nutzenfunktion, die entropische Nutzenfunktion, optimal ist. Aus den Überlegungen des letzten Kapitels folgt, dass bei dieser Situation die Effizienz am größten ist im Vergleich zu jeder anderen Situation mit einem Aufwand größer als Null. Weiterhin ist der Nutzen maximal bei einem optimalem Aufwand.

Die theoretische Ableitung der Pareto-80/20 Regel ergibt einen etwas höheren Nutzen (88%) anstelle von 80%. Interessanterweise wird dies bei dem zufällig herausgegriffenen Beispiel der südafrikanischen Landwirtschaftsbetriebe aus [Hartung 97] beobachtet. Vergleiche hierzu Bild 1.

Die Situation U kann als konsistent mit der 80/20 Regel angesehen werden.

Die Optimierung des Informationsgehaltes bei einer Aufteilung eines Gesamtprojektes in verschiedene Teilprojekte kann somit eine Begründung der empirischen Feststellungen der Pareto 80/20 Regel leisten.

10. Die Bestimmung von theoretischen Grenzen für die ABC Analyse

In diesem Kapitel beschreiben wir eine Bestimmung von Grenzen für die ABC Analyse die sich aus dem oben entwickelten Ansatz für Aufwand und Nutzen ergibt.

Zur Bestimmung von Grenzwerten für den Aufwand bei der ABC Analyse gehen wir von einer Aufteilung eines Gesamtprojektes in drei Teilprojekte t_A, t_B und t_C aus. Die Anforderungen an die Klasse A bedeuten, dass das Teilprojekt A einen maximalen Nutzen bei minimalem Aufwand besitzen soll. D.h. die Situation U mit maximalem entropischen Nutzen ist der beste Kandidat für das Teilprojekt A. aus den obigen Ausführungen ergibt sich somit als Grenze für den Aufwand von t_A der Wert $a_A = 20\%$.

Für das Teilprojekt t_B kämen die folgenden Situationen in Frage:

(1) diejenige Situation S, bei der der Teilnutzen $n_B = 100\%$ ist also $a_B = 1/e = 37\%$

(2) diejenige Situation S, bei der das Verhältnis $n_B / a_B = e_B \geq 1$ ist.

Für den entropischen Nutzen gilt für das Verhältnis Nutzen/Aufwand also die Effizienz:

$$e = n(a)/a = \frac{-ea\ln(a)}{a} = -e\ln(a)$$

Aus der Forderung (2) ergibt sich im Grenzfall $e_B = 1$:

(3) $e_B = -e\ln(a_B) = 1 \Leftrightarrow a_B = 1/e = 37\%$

Dies ist identisch mit dem maximalen Teilnutzen eines Teilprojekts. Also sind die beiden Anforderungen (1) und (2) für den entropischen Nutzen identisch. Der optimale Teilaufwand für t_B liegt somit bei 37%. Für das Teilprojekt t_C verbleibt somit der restliche Aufwand 100% -(22%+ 37%) = 43%.

Diese ABC Aufteilung kann als entropische ABC Analyse bezeichnet werden. Die Aufwandsverteilung einer entropischen ABC Analyse ist also (20%, 37%, 43%). Die anteiligen Teilnutzen der ABC Projekte sind 32 %, 37%, 36%.

Die Ergebnisse der entropischen ABC Analyse passen ebenfalls gut zum Vorschlag mancher Autoren, durch Drittelung des Nutzens eine ABC Gruppeneinteilung zu finden.

Für die entropische A,B,C Analyse ergeben sich die folgenden Bedeutungen der ABC Klassen:

Teilprojekt A: sowohl Aufwand als auch Nutzen werden optimiert in dem Sinne, dass der Aufwand minimiert und zugleich der Nutzen maximiert wird. Als optimales Teilprojekt t_A empfiehlt sich das Projekt U mit minimalem unrealisertem Potential.

Teilprojekt B: die Effizienz des Teilprojekts t_B soll (mindestens) 100% betragen und zugleich ist die Effizienz dieses Teilprojekts mindestens 100%

Teilprojekt C: restliche Teilprojekte.

11. Anwendungen

Bei der praktischen Anwendung der Parato 80/20 Regel bzw. der ABC Analyse werden in vielen Fällen die Nutzenfunktionen aus der Anwendung heraus definiert sein. Ist die Nutzenfunktion jedoch nicht explizit gegeben, kann auf den entropischen Nutzen zurückgegriffen werden. Hierbei ist an z.B. an die folgenden Fragestellungen zu denken:

- welches ist die ideale Zahl von Faktoren bei einer Hauptkomponentenanalyse
- was ist die ideale Zahl von Clustern bei einer Clusteranalyse
- was ist die Bedeutung von genetischen Codes
- u.a.m.

Als eine Anwendung sei beispielhaft die Clusteranalyse herausgegriffen. Bei der Clusteranalyse sind in der Regel hochdimensionale Datensätze gegeben. D.h. ein Datensatz besteht aus n Werten in n Variablen. Auf diesen Datensätzen ist ein Abstandsmaß d definiert. Die Aufgabe einer Clusteranalyse besteht nun darin herauszufinden, ob es in d solcher Datensätze Cluster gibt. Ein Cluster ist ein Bereich des n dimensionalen Raumes in den die Datensätze dicht gedrängt (eng beieinander) liegen. Abgegrenzt werden diese Cluster durch bereiche, in denen die Daten weniger eng beieinander liegen. Sind die Cluster klar von einander abgegrenzt, beispielsweise durch Hyperebenen trennbar ist die Clusteranalyse relativ einfach lösbar. Schwierig wird die Clusteranalyse durch „Brücken" aus wenigere dichten Datenbereichen zwischen dichten Clustern. Hier kann eine Dichtedefinition im Lichte der o.g. entropischen ABC Analyse weiterhelfen [Ultsch 2001]

12. Diskussion

In dieser Arbeit wird die Frage aufgeworfen, ob es für die häufig beobachtete Pareto-80/20 Regel eine Gesetzmäßigkeit gibt. Hierzu wird die Aufteilung eines Projektes zur Lösung eines Problems in Teilprojekte untersucht. Es wird angenommen, dass diese Aufteilung während der Durchführung eines Projektes in Form eines abstrakten Projektberichtes dokumentiert wird. Dabei wird jedem Teilprojekt ein eindeutiges Zeichen zugeordnet. Der für ein Teilprojekt nötige Aufwand soll sich in der Anzahl der Zeichen des jeweiligen Teilprojektes im Projektbericht niederschlagen. Die Häufigkeit mit der die Kennzeichen eines Teilprojektes im Projektbericht auftauchen wird somit als proportional mit dem im Teilprojekt nötigen Aufwand angesehen.

Die Axiome der Shannon Information (Entropie) (N1) bis (N4) sind plausible Bedingungen für eine abstrakte Nutzenfunktion. Der entropische Nutzen (= Informationsgehalt des Projektberichts) kann somit als ein Nutzen der Aufteilung des Projekts in Teilprojekte angesehen werden.

Die Pareto-80/20 Regel ergibt sich, wenn der Aufwand für ein Teilprojekt minimiert, zugleich jedoch der entropische Nutzen maximiert werden soll.

Der hier vorgestellte Ansatz lässt sich auch für die Informations- und Codierungstheorie deuten. Bei der klassischen Definition der Shannon Information geht man von einer Zeichenquelle aus, die mit gewissen Wahrscheinlichkeiten Zeichen aussendet. Die Anforderung an die Zeichen sind dabei, dass von einander unterscheidbar sind und aus einem endlichen Zeichenvorrat stammen.

Der in dieser Arbeit verfolgte Ansatz geht davon aus, dass die Erzeugung eines Zeichens mit einem für alle Zeichen einheitlichen Aufwand verbunden ist. Als eine Bedingung zur Optimierung der Informationsübertragung kann somit die Minimierung der Zeichenanzahl bei gleichzeitiger Maximierung der übertragenen Information angesehen werden. Eine optimale Sendewahrscheinlichkeit p_u = 20% kann hierfür gefunden werden.

Die Berechnung der in diesem Sinne optimalen Situation U führt zu einem Aufwand von 20% und einem zugehörigen Nutzen von 88%. Eine Aufteilung eines Projektes in ein Teilprojekt mit 20% Aufwand erzeugt somit einen optimalen Nutzen.

Für die Informationstheorie kann daraus gefolgert werden, dass bei der Sendewahrscheinlichkeit p_u 88% der relativen Informationsmenge übertragen werden kann. Die ist als optimal anzusehen, wenn die Aussendung von Zeichen mit Kosten verbunden ist.

Diese Werte 20% für den Aufwand und 88% für den Nutzen können als konsistent mit der offenbar allenthalben anzutreffenden Pareto 80/20 Regel angesehen werden. Als eine mögliche theoretische Begründung der Pareto 80/20 Regel ergibt sich somit eine wirtschaftliche Optimierung der Information, die durch die Aufteilung in Teilprojekte (-probleme) erzeugt wird.

Über diesen Ansatz ist auch eine Verbindung der Shannon Information auch mit dem physikalischen Entropiebegriff nach Boltzmann möglich [Boltzmann 00]. Die Entropie bei physikalischen Systemen kann dabei als die Wahrscheinlichkeit einer zufälligen Lösung eines Problems aufgefasst werden.

Als eine Anwendung wurde in dieser Arbeit die Ableitung von theoretischen Grenzwerten für eine ABC Analyse gezeigt. Die Anwendung der Shannon Information als eine Nutzenfunktion ist in sicherlich in solchen Situationen gerechtfertigt in denen keine andere Nutzenfunktion aus der Anwendung heraus existiert. Weiterhin kann der entropische Nutzen angewendet werden, wenn das Hauptaugenmerk der Problemlösung auf die Übertragung von Information gerichtet ist. Dies kann einerseits für das Marketing gelten. Andererseits kann aber auch für die genetische Information dieser Ansatz von Nutzen sein. Die entropische ABC Analyse ist beispielsweise konsistent mit der Frage, warum es genau 3 verschiedene Zeichen im genetischen Code gibt.

Bei der Analyse von Datenmengen wie z.B. beim Data Mining oder dem Knowledge Discovery kann der Aufwand definiert werden als die Distanz, die zwischen Datenpunkten zurückzulegen ist. Als Nutzen kann somit die Anzahl der innerhalb einer Distanz liegenden Datenpunkte angesehen werden. Dies führt zu einer Deutung der entropischen ABC Analyse als eine form von Clusterung. Datenpunkte die in der A Menge liegen können als mit Sicherheit zum Cluster gehörig angesehen werden. Für die B Menge ist eine Zugehörigkeit nur mehr möglich und für die C Menge gänzlich ausgeschlossen.

Die Minimierung des unrealisierten Potentials u stellt für beliebige Projektsituationen eine wirtschaftliche Optimierung dar. Auch wenn andere Nutzenfunktionen als der entropische Nutzen für ein Projekt zutreffen kann hierüber eine optimale Situation, und damit auch Grenzwerte für die ABC Analyse bestimmt werden.

13. Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird die Generierung und Übertragung von Information aus wirtschaftlicher Sicht betrachtet. Die Generierung von Information wird als mit Aufwand verbunden angesehen. Die Information einer Nachricht wird als ein elementarer Nutzen betrachtet. Die Definition des unrealisierten Potentials einer Aufwands-/Nutzensituation erlaubt eine zielgerichtete Optimierung von Aufwand, Nutzen und Effizienz. Die Optimierung des unrealisierten Potentials führt zu einer optimalen Situation, die als konsistent mit der empirisch beobachteten Pareto-80/20 Regel angesehen werden kann. Somit ergibt sich aus diesem Ansatz eine theoretische Begründung der Pareto-80/20 Regel. Die empirische Beobachtung der Situation dass mit 20% des Aufwand oft 80% des Nutzens eines Projektes erwirtschaftet werden kann wird im Lichte dieser Arbeit als die Optimierung des Informationsgehaltes der Aufteilung in Teilaufgaben angesehen. Es konnte gezeigt werden, dass mit diesem Ansatz auch theoretische Grenzen für eine ABC Analyse abgeleitet werden können. . Mit diesem Ansatz kann auch ein Zusammenhang zwischen physikalischem Entropiebegriff und Shannon Information hergestellt werden. Weitere Anwendungen insbesondere im Data Mining, Clustering und in der Bioinformatik sind offensichtlich.

14. Anerkennung

Die Grundlagen dieser Arbeit wurden im Zeitraum Februar bis August 2001 erforscht. Ich danke Prof. Dr. Walter Seifritz, Prof Dr. Bruno Fritsch und Prof. Dr. Dirk Van den Poel für ihre Hinweise und die Durchsicht der ersten Fassungen vom August und September 2001.

15. Literatur

[Aggteleky 82] Aggteleky, B.:Fabrikplanung Bd. 2: Betriebsanalyse und Feasability-Studie, Carl-Hanser Verlag, München, 1982

[Aho et al 82] Aho, A.V., ,Hopcroft, J.E., Ullman, J.: Data Structures and Algorithms, Addison Wesley, ISBN: 0201000237,1982

[Arthur 92] Arthur L.J.: Rapid Evolutionary Development - Requirements, Prototyping & Software Creation, John Wiley & Sons,ISBN: 0471536334,1992

[Boltzmann 00] Boltzmann,L.:Entropie und Wahrscheinlichkeit, Harri Deutsch, Ffm, ISBN: 3817132867, 2000.

[Hartung 97] Hartung, J.: Statistik, Oldenburg Verlag, München, 1997.

[Heise/Quattrocchi 95] Heise, W., Quattrocchi, P.: Informations und Codierungstheorie, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, ISBN 3-540-57477-8 1995.

[Hoffman et al 91] Hoffman, D. G.; Leonard, D. A; Lindner, C. C.; Phelps, K. T.; Rodger, C. A.; Wall, J. R: „Coding Theory – The Essentials“ , Marcel Dekker, . ISBN 0-8247-8611-4, 1991

[Jungnickel 95] Jungnickel, D.:"Codierungstheorie“, Spektrum Akademischer Verlag, ISBN 3-86025-432-4, 1995.

[Laukat 99] Laukat, A.: Vilfredo Pareto: Trattato di Sociologia Generale, in “Friedhof der Eliten”, Die Zeit 36, 1999.

[Pfeifer 01] Pfeifer, T.: Qualitätsmanagement. Strategien, Methoden, Techniken, Hanser Fachbuch, ISBN: 3446215158, 2001.

[Sombart 67] Sombart, W.: Die drei Nationalökonomien. Geschichte und System der Lehre von der Wirtschaft, Zeller Verlag, ISBN: 3428014278, 1967

[van Lint 99] van Lint, J. H.;”Introduction to Coding Theory”, Springer, ISBN 3-540-64133-5, 1999.

[Zollondz 01] Zollondz , H.D.: Lexikon Qualitätsmanagement, Oldenburg Verlag, München, ISBN: 3486243160, 2001

16. Anhang

Satz 4

Das unrealisierte Potential U(S) hat die folgenden Eigenschaften:

(1) U(S) ist invariant gegenüber Translation und Rotation des Koordinatensystems in dem Aufwand und Nutzen gemessen werden.

(2) $0 \leq U(S) \leq \sqrt{2}$

Beweis: (1) U(S) ist der Euklidsche Abstand OS, und damit invariant gegenüber Translation und Rotation des Koordinatensystems in dem Aufwand und Nutzen gemessen werden.
(2) Aufwand und normierter Nutzen können minimal 0, maximal =1 werden. In letzterem Fall wird U(S) zur Diagonale im Einheitsquadrat.

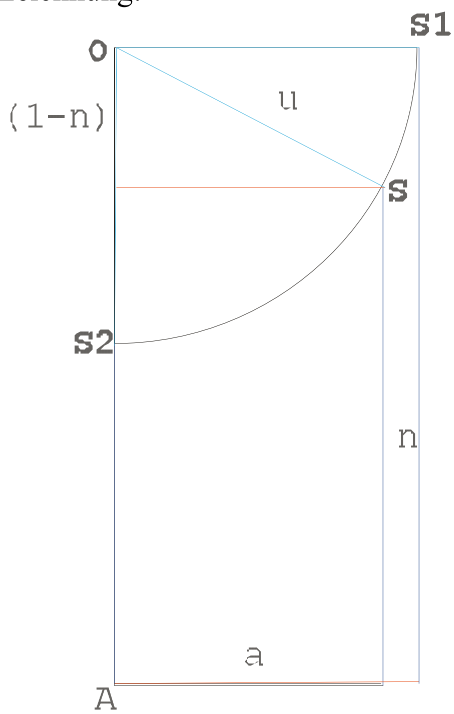
Satz 5

Für eine beliebige Situation S gilt

$$a(S) \leq a\_max(u) = u$$

$$n(S) \geq n\_min(u) = 1 - u$$

Beweis: Betrachte die folgende Zeichnung:



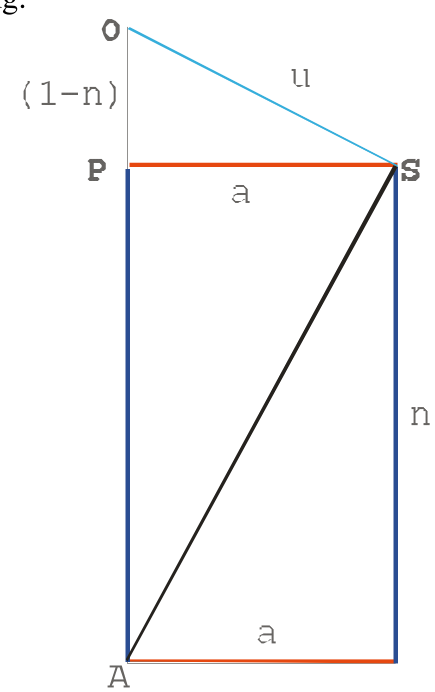
Alle Situationen mit U(S) = u liegen auf einem Kreis um O mit Radius u. Die Situation mit maximalem Aufwand a ist somit S1. Hierbei wird a =u. S2 ist die Situation mit minimalem Nutzen. Da durch die Normierung die Strecke AO = 1 ist, gilt n = 1-u.

Satz 6

Sei $S \in$ Equi(u), u >0 eine Situation. Dann gilt

$$n(S) = 1 - \sqrt{u^2 - a(S)^2}$$

Beweis: Sei a = a(S), n = n(S),
Betrachte die folgende Zeichnung:



Im Dreieck OPS gilt nach Pythagoras:

$a^2 + (1\text{-}n)^2 = u^2 \Leftrightarrow a^2 + 1\text{-}2n + n^2 = u^2 \Leftrightarrow n^2\text{-}2n + a^2 + 1 = u^2 \Leftrightarrow n^2\text{-}2n + a^2 - u^2 + 1 = 0$

Die Losung dieser quadratischen Gleichung liefert:

$$n_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(a^2 - u^2 + 1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4(1 - (a^2 - u^2 + 1)}}{2} = 1 \pm \sqrt{(1 - (a^2 - u^2 + 1)}$$

$$n_{1,2} = 1 \pm \sqrt{(1 - a^2 + u^2 - 1)} = 1 \pm \sqrt{(u^2 - a^2)}$$

Nach dem letzen Satz ist a $\leq$ u damit ist $\sqrt{u^2 - a^2} \geq 0$. Da n $\leq$ 1 folgt n = 1 - $\sqrt{u^2 - a^2}$ q.e.d.

Satz 7

Für ME(u) = (a_{em}, n_{em}), e_min(u) = e(ME(u)) gilt

$$a_{em} = u\sqrt{1-u^2}$$

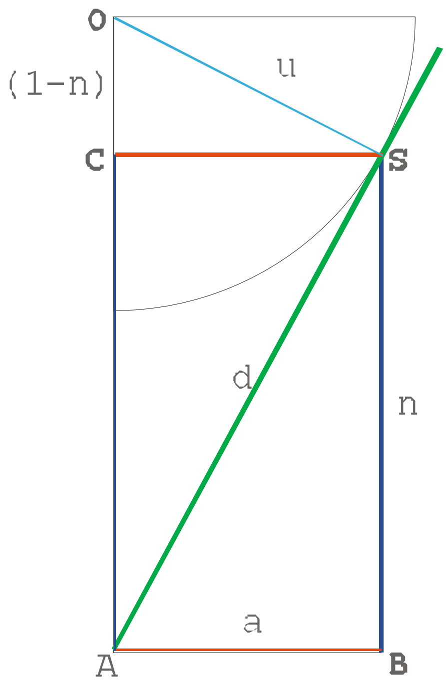
$$n_{em} = 1 - u^2 \quad \text{und}$$

$$e\_min(u) = \frac{1}{u}\sqrt{1-u^2} \text{ .}$$

Beweis:

Die Effizienz einer Situation ist gleichbedeutend mit der Steigung der geraden durch den Ursprung und S. Wenn die Effizienz einer Situation S zu gegebenem u minimal ist, dann ist die Strecke <u>(0,0)S</u> Tangente an den Kreis durch O = (0,1) mit Radius u.

Betrachte die folgende Zeichnung:



Im Dreieck ASO gilt: $1 = u^2 + d^2$

Daraus ergibt sich (I) $d = \sqrt{1-u^2}$

Im Dreieck CSO gilt: (II) $a^2 + (1-n)^2 = u^2$

Im Dreieck ABS gilt: $a^2 + n^2 = d^2$

unter Verwendung von (I): (III) $a^2 + n^2 = 1 - u^2$

$$\begin{aligned}
\text{(II)} - \text{(III)} \quad & (1-n)^2 - n^2 = u^2 - (1 - u^2) \\
& 1-2n + n^2 - n^2 = u^2 - 1 + u^2 \\
& 1-2n = 2u^2 - 1 \\
& -2n = 2u^2 - 2 \\
\text{(IV)} \quad & n = 1 - u^2 = n_{em}
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{llll}
\text{(IV) in (II)} & a^2 + (1-(1 - u^2))^2 & & = u^2 \\
& a^2 + (1 - 1 + u^2)^2 & & = u^2 \\
& a^2 + \quad (u^2)^2 & & = u^2 \\
& a^2 + \quad u^4 & & = u^2 \\
& & a^2 & = u^2 - \quad u^4 = u^2 (1 - u^2) \\
& & a & = u \sqrt{1-u^2} \quad = a_{em}
\end{array}
$$

Die minimale Effizienz des unrealisierten Potentials u ergibt sich somit zu

$$e\_min(u) = n_{em} / a_{em} = \frac{1-u^2}{u\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{u} \sqrt{1-u^2} \quad \text{qed.}$$

Satz 8

Seien $S = (a_s, n_s)$, $P = (a_p, n_p)$ Situationen, $u_s = U(S)$, $u_p = U(P)$,
$ME(u_s) = (a_{em}, n_{em})$, $ME(u_s) = (a_{em}', n_{em}')$
Wenn $u_s < u_p$ gilt

(A) $e\_min(u_s) > e\_min(u_p)$
(B) $a_{em} < a_{em}'$ und
$n_{em} > n_{em}'$
(C) aus $a_s = a_p$ folgt sowohl $n_s > n_p$ als auch $e(S) > e(P)$
(D) aus $n_s = n_p$ folgt sowohl $a_s < a_p$ als auch $e(S) > e(P)$

Beweis:
Sei $U(S) = u_s$, $U(P) = u_p$

$a_s = a_p = a$: Nach dem letzten Satz gilt $n_s = 1 - \sqrt{u_s^2 - a^2}$ weiter ist nach Voraussetzung ist $u_s, < u_p$ damit ist damit $\sqrt{u_s^2 - a^2}2 < \sqrt{u_p^2 - a^2}$ somit

$$n_s = 1 - \sqrt{u_s^2 - a^2} > 1 - \sqrt{u_p^2 - a^2} = n_p$$

$n_s = n_p = n$: $n = 1 - \sqrt{u_s^2 - a_s^2} = 1 - \sqrt{u_p^2 - a_p^2} \Leftrightarrow$

$$u_s^2 - a_s^2 = u_p^2 - a_p^2 \Leftrightarrow u_s^2 - u_p^2 = a_s^2 - a_p^2$$

da $u_s, < u_p$ ist $u_s^2 - u_p^2 < 0$ und somit $a_s^2 - a_p^2 < 0$ und damit $a_s < a_p$.

Satz 9

Seien e(S), e(S') Effizienzen der Situation S bzw. S'. Wenn U(S') < $(1+e^2)^{-\frac{1}{2}}$ gilt e(S')> e(S).
Beweis:
Nach Satz 7 gilt für die Situation minimaler Effizienz zu einem unrealisierten Potential u

$$e\_min(u) = \frac{1}{u}\sqrt{1-u^2} = e_m$$

$$\sqrt{1-u^2} = e_m\, u$$

$$1-u^2 = e_m^2\, u^2$$

$$-u^2-e_m^2\, u^2 = -1$$

$$(1+e_m^2)\, u^2 = 1$$

$$u^2 = \frac{1}{1+e_m^2}$$

$$u = (1+e_m^2)^{-\frac{1}{2}}$$