ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

Издается с 2001 года

Выходит 4 раза в год

Свидетельство о регистрации
СМИ: ПИ № ФС77-47855
ISSN 2226-8383

Том XX

Выпуск 3 (71)

Тула
2019

Учредитель: ФГБОУ ВО «ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Каталог «Пресса России»
Подписной индекс 10642

Адрес редакции: 300026,

г. Тула, пр. Ленина, 125, каб. 310
Тел: +79156812638, 8(4872)374051

E-mail: cheb@tsput.ru

MathSciNet, URL: http://www.chebsbornik.ru

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др.
Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируются и/или реферируются: Scopus, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ «Математика», «Mathematical Reviews», РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Журнал выходит под эгидой Министерства науки и высшей школы Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического государственного университета, Тульского государственного университета.

[1]Полные сведения см. стр. 558, 562.

От редакции

По решению программного комитета и редакционной коллегии данный выпуск Чебышевского сборника содержит избранные труды

XVII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященной 100-летию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко.
Россия, Тула, 23 – 28 сентября 2019 г.

Сборник открывается серией статей о жизни и научной деятельности этих выдающихся специалистов по теории чисел.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 20 Выпуск 3

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 3.

УДК 51(092) DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-7-21

Наум Ильич Фельдман и теория трансцендентных чисел (к 100-летию со дня рождения)

Ю. В. Нестеренко (г. Москва)

Нестеренко Юрий Валентинович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой теории чисел механико-математического факультета, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова.
e-mail: nester@mi.ras.ru

Аннотация

Статья содержит краткий очерк о научном творчестве Наума Ильича Фельдмана.

Ключевые слова: Наум Ильич Фельдман.

Библиография: 27 наименований.

Для цитирования:
Ю. В. Нестеренко Наум Ильич Фельдман и теория трансцендентных чисел (к 100-летию со дня рождения) // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 3, с. 7–21.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 3.

UDC 51(092) DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-7-21

Naum Il'ich Feldman and the theory of transcendental numbers (to the centenary of the birth)

Yu. V. Nesterenko (Moscow)

Nesterenko Yury Valentinovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member of RAS, head of number theory's chair of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: nester@mi.ras.ru

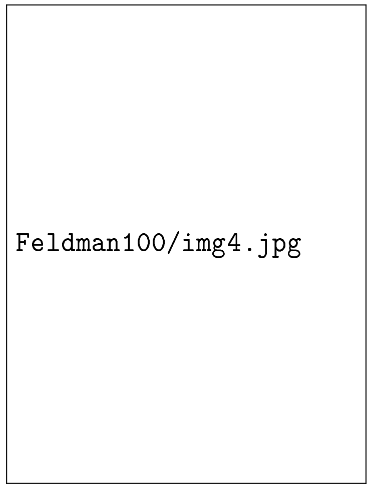
Abstract

The article contains a brief essay on the scientific work of Naum Il'ich Feldman.

Keywords: Naum Il'ich Feldman.

Bibliography: 27 titles.

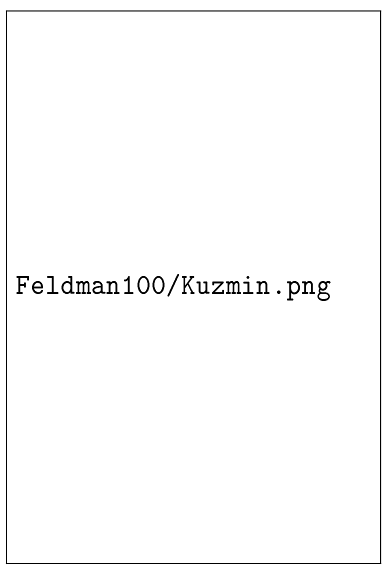
For citation:
Yu. V. Nesterenko, 2019, "Naum Il'ich Feldman and the theory of transcendental numbers (to the centenary of the birth)", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 7–21.



Наум Ильич Фельдман (26.11.1918–20.04.1994).

Наум Ильич Фельдман, замечательный учёный-математик, специалист в области теории диофантовых приближений и теории трансцендентных чисел, родился 26 ноября 1918г. в г. Мелитополе. В 1936г. он окончил среднюю школу и поступил учиться на математико-механический факультет Ленинградского университета, который окончил в 1941г. накануне войны.

Его научным руководителем в годы учёбы в Университтте был



Родион Осиевич Кузьмин (9.11.1891–24.03.1949).

Родион Осиевич Кузьмин (1891—1949) — российский и советский математик, доктор физико-математических наук (1935), член-корреспондент АН СССР (1946). Р. О. Кузьмин окончил физико-математический факультет Петроградского университета в 1916 году и был оставлен на кафедре для подготовки к профессорскому званию.

С августа 1918 по 1921 год он преподавал в Томском технологическом институте, в 1921 году стал профессором кафедры математики и заместителем декана физико-математического факультета Пермского университета. Одновременно с 1921 года был деканом технического факультета Пермского университета. С 1922 года он профессор Петроградского политехнического института.

В 1930-е годы совместно с Н. М. Гюнтером издал «Сборник задач по высшей математике» в трёх томах, который был переведён на немецкий язык и выдержал более десяти изданий. Отметим также выпущенную в 1933г. монографию Р. О. Кузьмина о Бесселевых функциях — первую книгу на русском языке по этой тематике. Основные научные труды Р. О. Кузьмина относятся к теории чисел и математическому анализу.

Статистика Гаусса — Кузьмина. В работе 1928 г. [1] Р. О. Кузьмин даёт решение одной задачи о непрерывных дробях, поставленной ещё Гауссом, именно:

определить вероятность того, что при разложении в обыкновенную непрерывную дробь наудачу взятого числа между 0 и 1, n-е полное частное будет иметь дробную часть, заключённую между 0 и данным $s\,(0 < s < 1)$.

Р. О. Кузьмин получает для указанной вероятности при большом n приближённую формулу.

Пусть x —случайная величина, равномерно распределённая на интервале (0, 1) и пусть $\cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cdots}}$ представление числа x в виде цепной дроби. Требуется оценить выражение

$$\Delta_n(s) = \mathbb{P}\left\{ \cfrac{1}{k_{n+1} + \cfrac{1}{k_{n+2} + \cdots}} \le s \right\} - \log_2(1+s)\ .$$

Гаусс доказал, что $\Delta_n(s)$ стремится к нулю при n стремящемся к бесконечности. Р. О. Кузьмин установил, что

$$|\Delta_n(s)| \le C \cdot e^{-\alpha\sqrt{n}}\ ,$$

где C и α — некоторые положительные постоянные. В 1929 году Поль Леви предложил иной метод решения этой задачи и доказал более сильную оценку $C \cdot 0,7^n$ [3]. Константа в оценке П. Леви была улучшена Сюсом до 0,4 [4] и, наконец в 1974г. Вирзинг доказал неравенство с константой 0,30366... [5].

7-я проблема Гильберта. В 1930 году Р. О. Кузьмин установил [2], что если a является алгебраическим числом, а b — вещественной квадратичной иррациональностью, то число a^b трансцендентно. Например, отсюда следует, что число

$$2^{\sqrt{2}} = 2,6651441426902251886502972498731\ldots$$

трансцендентно.

В 1900г. Д. Гильберт поставил проблему о трансцендентности алгебраических степеней алгебраических чисел (7-я проблема Гильберта). В частности, он предложил доказать трансцендентность двух чисел $e^{\pi} = (-1)^{-i}$, а также $2^{\sqrt{2}}$ (см. [6, 7]).

Трансцендентность первого из них доказал в 1929г. А. О. Гельфонд [8], см. ниже. Трансцендентность второго числа была установлена Р. О. Кузьминым в 1930г..

Он в основном пользовался методом А. О. Гельфонда, но внёс в него существенные упрощения. Например, Р. О. Кузьмин полностью отказался от использования интегралов.

В 1934г. 7-я проблема Гильберта была полностью решена А. О. Гельфондом [9] и несколько позже, но в том же году Т. Шнейдером [10]. Доказательства Гельфонда и Шнейдера были различны и оба сыграли важную роль в дальнейшем развитии теории трансцендентных чисел.

Военные годы. В июне 1941 года Н. И. Фельдман был направлен на курсы артиллерийских техников при Артиллерийской академии, а в октябре 1941 года в составе 2-го артиллерийского противотанкового полка прибыл в район Серпухова. Зимой 1941–1942 года Н. И. Фельдман участвовал в боях под Москвой. Вот история из тех времён, как-то рассказанная мне Наумом Ильичём.

Прибыв в действующую армию с группой таких же, как и он необстрелянных молодых солдат, он получил первое задание очистить от смазки новое орудие, только что доставленное в военную часть и подготовить его к стрельбе. Орудие было новым, с таким ни он, ни его напарник на курсах не встречались. Приказано — сделано. Орудие было разобрано, лишняя смазка снята. При сборке обнаружилась конструктивная особенность нового изделия — некоторая деталь могла быть вставлена в соответствующее ей место двумя способами. Молодые люди не задумываясь вставили её, как получилось, и при первом же выстреле пушка разорвалась. Оба участника этой диверсии были арестованы за вредительство. Учёная карьера Наума Ильича могла бы закончиться не начавшись, обстановка под Москвой в октябре 1941 была очень сложной. Но их командир, войдя в положение, как-то сумел замять это происшествие.

В 1942–1943 годах в составе 1280-го армейского зенитно-артиллерийского полка Н. И. Фельдман сражался в районе Сухиничей и под Курском. В 1944 году участвовал в освобождении Минска и других городов Белоруссии, воевал в Восточной Пруссии, участвовал в штурме Кенигсберга, а 3–4 мая 1945 г. — во взятии военного порта Пиллау. Н. И. Фельдман был награжден орденами «Отечественной войны 2-й степени» и «Красной Звезды» и многими медалями; в том числе — медалями «За боевые заслуги», «За победу над Германией», «За оборону Москвы», «За взятие Кенигсберга».

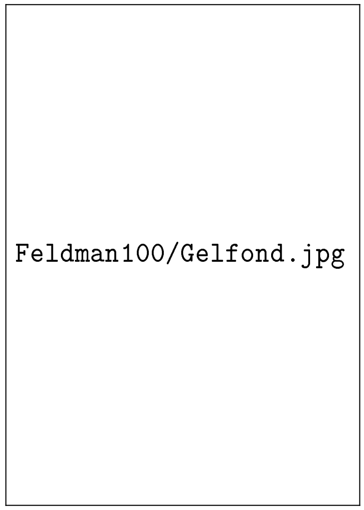
На фотографии военного времени

Feldman100/NIRI2.jpg

изображены Наум Ильич и его сестра Рахиль Ильинична. Впоследствии она защитила докторскую диссертацию по химии, вместе с коллегой опубликовала учебное пособие по коллоидной химии. К сожалению она рано ушла из жизни.

В 1946 г. после демобилизации Наум Ильич поступил на учебу в аспирантуру механико-математического факультета Московского университета, которую закончил успешно и в 1949г. защитил кандидатскую диссертацию. Его научным руководителем в аспирантуре был

Александр Осипович Гельфонд, 24.10.1906-07.11.1968, — выдающийся учёный-математик, специалист в области теории чисел и анализа, член-корреспондент АН СССР.



Гельфонд родился 24 октября 1906г. в городе Санкт–Петербурге. По окончании школы он поступил в МВТУ им. Баумана, но затем, решив стать математиком, в 1924г. перевёлся в Московский Университет. В 1927г. он начал учиться в аспирантуре под руководством В. В. Степанова и А. Я. Хинчина. В 1930г. он защитил кандидатскую диссертацию, а с 1931 года начал преподавать как профессор МГУ. В 1934г. он решил 7-ю проблему Гильберта в общем случае, а в 1935г. без защиты ему была присвоена учёная степень доктора физико-математических наук. В 1939г. он был избран членом-корреспондентом Академии Наук СССР.

Скажем несколько слов о доказательстве специального случая 7-й проблемы Гильберта, а именно о трансцендентности числа e^{π}, Гельфонд тогда был ещё аспирантом.

В 1893г. Эрмит доказал одно важное тождество [11]. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ различные комплексные числа и $n_1, \ldots, n_m$ — неотрицательные целые числа. Тогда

$$R(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{z\zeta} d\zeta}{(\zeta - \alpha_1)^{n_1+1} \cdots (\zeta - \alpha_m)^{n_m+1}} = \sum_{k=1}^{m} P_k(z) e^{\alpha_k z}. \tag{1}$$

Здесь C окружность, содержащая внутри все точки $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, и для любого целого $k, 0 \leq k \leq m$, коэффициенты $P_k(z)$ — многочлены от z степени n_k. Правая часть этого тождества есть просто сумма вычетов подинтегральной функции в точках $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

Гельфонд пришёл к этому тождеству, отправляясь от интерполяционных рядов. В виде таких интегралов представляются остатки интерполяционного ряда.

Выберем в тождестве Эрмита $n_k = 0$, и пусть $\alpha_k = u + iv \in \mathbb{Z}[i]$ будет совокупность всех гауссовых чисел, лежащих в круге с центром в точке $\zeta = 0$ и радиусом N. Здесь N большое натуральное число и m, конечно, зависит от N. Из равенств $e^{\pi\alpha_k} = (e^{\pi})^u(-1)^v$ следует, что $R(\pi) \in \mathbb{Q}(i)[e^{\pi}, e^{-\pi}]$.

С помощью интерполяционного ряда Гельфонд доказывает, что существует бесконечная последовательность чисел N, для которых $R(\pi)$ отлично от нуля. С другой стороны интегральное представление для $R(\pi)$ в силу большого количества плотно расположенных точек α_k показывает, что эти числа быстро убывают с ростом N. Предположение об алгебраичности числа e^{π} и отличие этого числа от нуля, позволяют с помощью теоремы Лиувилля доказать для него оценки снизу. Обе оценки сверху и снизу противоречат друг другу. Это доказывает трансцендентность e^{π}.

Кузьмин в 1930г. также рассмотрел случай $n_k = 0$, но вместо поля гауссовых чисел использовал действительное квадратичное поле $L = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $d > 0$, и целые числа этого поля

$\alpha_k \in \mathbb{Z}_L = \mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}$, где $\omega = \sqrt{d}$ или $\omega = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$. Тогда $R(\ln a) \in L[a^\omega, a^{-\omega}]$. Вместо интерполяционного ряда применялись интерполяционные многочлены. Для оценки сверху $R(\ln a)$ вместо интеграла использовалось представление разности функции и её интерполяционного многочлена с помощью производной интерполируемой функции. Отличие $R(\ln \alpha)$ от нуля также следует из явного вида представления указанной разности. Оценка снизу как и у Гельфонда проводится с помощью теоремы Лиувилля в предположении алгебраичности a^ω. Получающееся в результате противоречие доказывает трансцендентность числа $a^{\sqrt{d}}$. Оба доказательства и Гельфонда, и Кузьмина очень хорошо описаны в книге Н. И. Фельдмана "Седьмая проблема Гильберта" [21].

В 1931г. К. Малер [12] с помощью тождества Эрмита доказал ряд количественных результатов.

1) Количественная версия теоремы Линдемана–Вейерштрасса.

2) Оценка меры трансцендентности числа e: для каждого многочлена $A(x) \in \mathbb{Z}[x]$ с условиями $A \neq 0$, $\deg A \le d$, $H(A) \le H$ выполняется неравенство

$$|A(e)| \ge H^{-d-\frac{cd^2\log(d+1)}{\log\log H}}, \quad . \tag{2}$$

Чтобы получить этот результат нужно в тождестве Эрмита взять $n_1 = \ldots = n_m = n$ и $\alpha_k = k-1$. Тогда $R(1) = P(e), \deg P \le m-1$. Если предположить, что значение $A(e)$ очень мало, то сравнение $P(e)$ и $A(e)$ при помощи некоторого усовершенствования теоремы Лиувилля позволяет получить оценку (2).

3) Оценка меры трансцендентности числа π: для каждого многочлена $A(x) \in \mathbb{Z}[x]$ с условиями $A \neq 0$, $\deg A \le d$, $H(A) \le H$ выполняется неравенство

$$|A(\pi)| \ge H^{-c^d},$$

где $c > 0$ абсолютная постоянная и H превосходит некоторую границу, зависящую от d. Доказательство основано на тождестве Эрмита с параметрами $n_1 = \ldots = n_m = n$, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} = \{-d, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, d\}$. Тогда $R(2\pi i) = P(\pi)$, где $\deg P \le n$.

Неэффективные конструкции. Нетрудно проверить, например, вычисляя интеграл в левой части тождества Эрмита, как вычет в бесконечности, что

$$R(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{z\zeta}d\zeta}{(\zeta-\alpha_1)^{n_1+1}\cdots(\zeta-\alpha_m)^{n_m+1}} = \frac{1}{N!}z^N + \ldots,$$

где

$$N = -1 + \sum_{k=1}^{m}(n_k+1).$$

Последнее равенство означает, что тождество Эрмита даёт приближение Эрмита-Паде для функций $e^{\alpha_k z}$.

В 1929г. К. Зигель [13], исследуя арифметические свойства значений так называемых E-функций, обнаружил, что если выбирать многочлены $P_k(z)$ так, чтобы линейная функциональная форма в правой части тождества Эрмита имела не максимальный возможный порядок нуля в точке $z = 0$, но несколько меньший, то можно получить, подставляя вместо z какие-нибудь числа, линейные формы от значений экспоненциальной функции с коэффициентами, существенно меньшими, чем даёт тождество Эрмита, но числовые линейные формы всё ещё достаточно малыми для доказательства трансцендентности или оценки меры трансцендентности изучаемых чисел.

Для такой конструкции Зигель предложил использовать одну лемму Туэ, уточняющую теорему Лиувилля о приближении алгебраических чисел рациональными, и необходимую Туэ для исследования диофантовых уравнений. Эта лемма получила с тех пор название леммы Зигеля.

Спустя пять лет она была использована А. О. Гельфондом и Т. Шнейдером для решения 7-й проблемы Гильберта в общем случае. Точная формулировка этой проблемы такова:

Если a и b алгебраические числа, a отлично от 0 и 1, а b иррационально, то степень a^b есть трансцендентное число.

Гельфонд и Шнейдер заменили тождество Эрмита своими конструкциями, основанными на лемме Зигеля.

Конструкция Гельфонда. Допустим, что три алгебраических числа $\alpha_1, \alpha_2, \delta \notin \mathbb{Q}$ связаны соотношением $\delta = \frac{\log \alpha_2}{\log \alpha_1}$. В силу равенства $\alpha_1^\delta = \alpha_2$ заключаем, что для доказательства 7-й проблемы Гильберта достаточно получить противоречие с существованием указанных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \delta$. Вместо функции $R(z)$ из тождества Эрмита Гельфонд, подбирая коэффициенты некоторого многочлена $P \neq 0$ с помощью леммы Зигеля, строит функцию

$$f(z) = P(\alpha_1^z, \alpha_2^z),\ P \in \mathbb{Z}[x, y], \quad \deg_x P < q, \deg_y P < q,$$

имеющую нули высокого порядка на некотором множестве целых точек, а именно

$$f^{(s)}(t) = 0, \quad 0 \le t < t_0, \quad 0 \le s < s_0.$$

где t_0, s_0 некоторые величины, зависящие от q. Далее сталкивая между собой верхние и нижние оценки для производных функции $f(z)$ в целых точках, подобно тому, как это делалось при решении частных случаев 7-й проблемы, Гельфонду удаётся доказать, что $f^{(s)}(0) = 0$ при любом s из промежутка $0 \le s \le q^2-1$. Непосредственное вычисление производных показывает, что это невозможно.

Конструкция Шнейдера. Пусть $\alpha, \beta, \gamma,$ — алгебраические числа, γ иррационально и $\beta = \alpha^\gamma$. Для того, чтобы прийти к противоречию в этих условиях Шнейдер строит многочлен P с целыми алгебраическими коэффициентами из поля, порождённого над $\mathbb{Q}$ числами α, β, γ и вспомогательную функцию

$$f(z) = P(z, \alpha^z), \quad \deg_x P < 2k^3, \deg_y P < k,$$

где k достаточно большое целое число, удовлетворяющую условиям

$$f(a + b\gamma) = 0, \quad 1 \le a, b \le k^2.$$

Коэффициенты многочлена P подбираются с помощью леммы Зигеля. Затем Шнейдер доказывает, что существуют не очень большие целые числа a_1, b_1 с условиями

$$1 \le a_1 \le 3k^2 + k, 1 \le b_1 \le 3k^2, \quad f(a_1 + b_1\gamma) \neq 0,$$

Оценивая сверху и снизу число $f(a_1 + b_1\gamma)$, Шнейдер приходит к противоречию.

По окончании аспирантуры до 1954 года Н. И. Фельдман работал заведующим кафедрой Уфимского нефтяного института, а с 1954 по 1961 год доцентом Московского геологоразведочного института.

Feldman100/Feldman.jpg

В сентябре 1961 г. он перешел работать на механико-математический факультет Московского университета. Основными направлениями его научной деятельности были теория диофантовых приближений, теория трансцендентных чисел и диофантовы уравнения. Он опубликовал 70 статей и две монографии [21, 22], которые широко известны специалистам во многих странах.

Мы остановимся здесь на двух направлениях научной деятельности Н. И. Фельдмана в теории трансцендентных чисел, развивавших метод, с помощью которого А. О. Гельфонд решил седьмую проблему Гильберта.

Первые работы Н. И. Фельдмана (1949–1951), выполненные под руководством А. О. Гельфонда, посвящены оценкам снизу абсолютных величин $|P(\omega)|$ в зависимости от степени многочлена $degP$ и его высоты $H(P)$ — максимума модулей коэффициентов многочлена $P \in \mathbb{Z}[x]$. Иногда вместо высоты многочлена удобно было использовать его длину $L(P)$ — сумму модулей коэффициентов. Задача об оценке снизу абсолютной величины многочлена эквивалентна оценке снизу расстояния $|\omega - \xi|$ в зависимости от степени и высоты алгебраического числа ξ. Подчеркнём, что именно в работах Н. И. Фельдмана впервые были получены оценки, зависящие от двух параметров $\deg P$ и $H(P)$ при их независимом изменении. Оценки предшествующих исследований явно зависели лишь от $H(P)$.

Кроме того в его работах оценки были существенно улучшены в зависимости от степени многочлена. Это легко увидеть сравнив результаты Н. И. Фельдмана и приведённые выше результаты К. Малера. Эта линия в научном творчестве Н. И. Фельдмана прошла через всю его жизнь. Он опубликовал 20 работ посвященных оценкам меры трансцендентности различных чисел.

В кандидатской диссертации Н. И. Фельдмана были получены оценки мер трансцендентности для следующих чисел

- логарифмов алгебраических чисел,
- алгебраических точек эллиптической функции Вейерштраса с алгебраическкими инвариантами,
- для числа π и периодов эллиптической функции Вейерштрасса.

Н. И. Фельдман неоднократно возвращался к полученным ранее результатам и пытался усовершенствовать их доказательства, улучшить оценки. Так, он опубликовал несколько работ об оценке меры трансцендентности числа π, считая эту задачу своеобразным полигоном, на котором удобно шлифовать различные технические приемы.

Приведём три результата Н. И. Фельдмана с оценками меры трансцендентности числа π. Пусть ξ — алгебраическое число, $n = \deg \xi$, $H = H(\xi)$, $K = \mathbb{Q}(\xi)$, $N = n + \frac{\log(H+1)}{\log\log(H+2)}$.

В 1949г. [14] Н. И. Фельдман доказал, что

$$|\pi - \xi| > e^{-c_1 n(1+n\log n+\log H)\log(2+n\log n+\log H))}.$$

Здесь c_1 — положительная абсолютная постоянная. В доказательстве строится вспомогательная функция

$$f(z) = P(z, e^z), \quad P \in \mathbb{Z}_K[x, y], \quad \deg_x P < q_0, \quad \deg_y P < q.$$

Укажем явно в зависимости от n и N присутствующие в последнем неравенстве параметры q_0, q, а также параметры x_0 и s_0, присутствующие ниже

$$q_0 = [\lambda^3 n \ln N], \quad q = [\lambda^2 N \ln N], \quad x_0 = [\lambda \ln N], \quad s_0 = [\lambda^3 N \ln N]$$

Здесь λ достаточно большая положительная постоянная. Коэффициенты многочлена $P(x, y)$ выбираются с помощью варианта леммы Зигеля так, чтобы выполнялись условия

$$|f^{(s)}(\pi i x)| < e^{-\frac{1}{2}\lambda^7 nN\ln^2 N}, \quad 0 \le x \le x_0,\, 0 \le s \le s_0.$$

В дальнейшем за счёт верхних и нижних оценок для производных $f^{(s)}(\pi i x)$ и теоремы Лиувилля удаётся распространить эти неравенства на большее множество точек при $0 \le x \le 2^p x_0$. Распространение малости производных происходит за счёт индукции по параметру p для всех $p \le \ln_2(3\lambda^2)$. Столь большое множество точек, в которых функция $f(z)$ принимает очень маленькие значения, приводит к противоречию.

В 1960г. предыдущий результат был усилен. Н. И. Фельдман доказал [19], что

$$|\pi - \xi| > e^{-\gamma n(n\log n+\log L)(1+\log n)}, \qquad L = L(\xi)$$

Оказалось, что вместо производных функции $f(z)$ лучше рассматривать их комбинации, а именно

$$f_s(z) = e^{(s-1)z} D(D+1)\cdots(D+s-1)f(z), \qquad D = \frac{d}{dz}.$$

В этом случае коэффициенты уравнений для леммы Зигеля имеют большой общий множитель. Сокращая на него, можно уменьшить величины коэффициентов многочленов $P_k(z)$ и тем улучшить окончательный результат.

Наконец, в 1985г. [20] при всех достаточно больших d была доказана оценка

$$|A(\pi)| > e^{-389d(d\log d+\log L)(1+\log d)}, L = L(A),\, A \in \mathbb{Z}[x],\, A \ne 0.$$

Наилучшая в настоящее время оценка меры трансцендентности числа π доказана в 1999г. Ю. А. Алексенцевым [23]. Ему удалось при тех же, что и у Фельдмана условиях уменьшить константу 389 до 21,5.

Второе направление исследований Н. И. Фельдмана связано с эффективными оценками снизу модулей линейных форм

$$L = \beta_0 + \beta_1 \ln \alpha_1 + \cdots + \beta_m \ln \alpha_m,$$

где α_j, β_j — алгебраические числа, в зависимости от высот и степеней этих алгебраических чисел и других параметров, а также приложениям подобных оценок. В случае $m = 1$ мы фактически имеем здесь оценки меры трансцендентности числа $\ln \alpha_1$, а при $m = 2$ и $\beta_0 = 0$ оценку меры трансцендентности отношения логарифмов алгебраических чисел. Оценки в последнем случае были получены в ряде работ А. О. Гельфонда.

В 1966г. [24] А. Бейкеру удалось получить первые эффективные оценки линейных форм от логарифмов для произвольного $m \ge 1$ и применить их для эффективизации решения ряда теоретико-числовых задач. Впоследствии в ряде работ самого А. Бейкера и других математиков эти оценки уточнялись, выяснялась их зависимость от различных параметров, важных в тех или иных приложениях. Многочисленные работы были посвящены и приложениям указанных оценок.

Активную роль в этой деятельности принял и Н. И. Фельдман. Ему, в частности, первому удалось доказать в 1968 г. [25] оценку линейной формы, степенную в зависимости от высоты H коэффициентов β_j линейной формы.

Метод, который использовал А.Бейкер для доказательства своих оценок для линейных форм от логарифмов алгебраических чисел, использовал функции от многих комплексных переменных. Н. И. Фельдман предложил использовать для этого наборы функций от одной переменной. Таким образом прогресс, достигнутый Бейкером, может рассматриваться, как переход от экстраполяции нулей или малых значений одной функции к аналогичной процедуре для совокупностей функций. Для простоты мы будем рассматривать сейчас случай $m = 2$, $\beta_0 = 0$. Справедливы равенства

$$f(z) = \sum_{k,\ell} C_{k,\ell}\alpha^{kz}\beta^{\ell z},$$

$$f^{(s)}(z) = \sum_{s_1+s_2=s} \frac{s!}{s_1!s_2!}(\ln\alpha)^{s_1}(\ln\beta)^{s_2}\Phi_{s_1,s_2}(z),$$

где

$$\Phi_{s_1,s_2}(z) = \sum_{k,\ell} C_{k,\ell}k^{s_1}\ell^{s_2}\alpha^{kz}\beta^{\ell z}$$

$$\Phi^{(t)}_{s_1,s_2}(z) = \sum_{t_1+t_2=t} \frac{t!}{t_1!t_2!}(\ln\alpha)^{t_1}(\ln\beta)^{t_2}\Phi_{s_1+t_1,s_2+t_2}(z).$$

Правая часть равенства для производной $f^{(s)}(z)$ содержит трансцендентные числа $\ln\alpha, \ln\beta$. Работая с совокупностями функций $\Phi^{(t)}_{s_1,s_2}(z)$ эти трансцендентные множители удаётся опускать.

Пользуясь оценками линейных форм от логарифмов алгебраических чисел, Н. И. Фельдман доказал эффективное степенное понижение показателя в теореме Лиувилля о приближении алгебраических чисел рациональными [26].

Пусть α - алгебраическое число степени $n = \deg\alpha \geq 3$. Для любых чисел $p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$, выполняется неравенство

$$|\alpha - \frac{p}{q}| > Cq^{-n+c},$$

. где $c = c(\alpha) > 0$ и $C = C(\alpha) > 0$ эффективно вычислимые постоянные.

Ещё один результат Н. И. Фельдмана — эффективное степенное понижение в оценках величины решений диофантовых уравнений Туэ.

Пусть $(X, Y) \in \mathbb{Z}^2$ *решение уравнения Туэ*

$$f(x, y) = M, \quad f(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y], \quad M \in \mathbb{Z}, \quad M \neq 0,$$

где $f(x, y)$ *неприводимая форма степени* $n \geq 3$. *Тогда*

$$|X|, |Y| \leq C|M|^c, \qquad c = c(f) > 0, \quad C = C(f) > 0.$$

Постоянные c, C *в приведённой выше оценке решений эффективно вычислимы.*

Отметим некоторые проблемы, связанные с линейной и алгебраической независимостью логарифмов алгебраических чисел. В 1966г. А. Бейкер доказал, что *если* $a_1, \ldots, a_n$ *ненулевые алгебраические числа такие, что* $\ln a_1, \ldots, \ln a_n$ *линейно независимы над полем рациональных чисел, то числа* $1, \ln a_1, \ldots, \ln a_n$ *линейно независимы над полем всех алгебраических чисел.*

Следующее предположение есть частный случай известной проблемы Шенуэлла об алгебраической независимости значений показательной функции.

Проблема 1. *Если* $a_1, \ldots, a_n$ *ненулевые алгебраические числа такие, что* $\ln a_1, \ldots, \ln a_n$ *линейно независимы над полем рациональных чисел, то* $\ln a_1, \ldots, \ln a_n$ *алгебраически независимы над полем всех алгебраических чисел.*

Более простое, чем проблема 1 утверждение было сформулировано Т. Шнейдером.

Проблема 2 (Шнейдер, 1957). *Пусть* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *ненулевые алгебраические числа. Если*

$$\log\alpha\log\gamma = \log\beta\log\delta,$$

то $\ln\alpha, \ln\beta, \ln\gamma, \ln\delta$ *линейно зависимы над полем* $\mathbb{Q}$ [27].

И последнее утверждение было сформулировано Н. И. Фельдманом в его книге о 7-й проблеме Гильберта [21], но всё ещё не доказано.

Проблема 3 (Фельдман, 1982). *Пусть* α, β *ненулевые алгебраические числа. Если*

$$\ln\alpha = \ln^2\beta,$$

то $\alpha = \beta = 1$.

Н. И. Фельдман очень ценил приводимую ниже цитату из пьесы Н. В. Гоголя "Ревизор" и всякий раз вспоминал её, когда в математической среде возникали приоритетные споры. Он называл такие истории "Кто первый сказал "Э" и считал, что свою состоятельность математик должен доказывать новыми результатами.

Николай Гоголь, «Ревизор».
Действующие лица: Пётр Иванович Бобчинский и Пётр Иванович Добчинский (Городские помещики)

П. И. Бобчинский: *Как сказал он мне это, а меня так вот свыше и вразумило. «Э!» – говорю я Петру Ивановичу. . .*

П. И. Добчинский: *Нет, Петр Иванович, это я сказал: «Э!».*

П. И. Бобчинский: *Сначала вы сказали, а потом и я сказал. «Э!»* - **сказали мы** *с Петром Ивановичем.*

Н. И. Фельдман придумал множество технических усовершенствований доказательств и новых приемов, вошедших в настоящее время в обиход и зачастую используемых без ссылок на его работы.

Так, им впервые было доказано наилучшее в настоящее время неравенство типа теоремы Лиувилля для оценки снизу модуля многочлена от нескольких переменных в алгебраической точке, введены многочлены, названные впоследствии многочленами Фельдмана, позволившие исключить лишние факториальные множители в производных вспомогательной функции и тем самым существенно усилить известные оценки, получены точные оценки целых коэффициентов в представлении производных степени эллиптической функции Вейерштрасса в виде многочлена от самой функции и ее первых двух производных.

Он нашел эффективную конструкцию приближений Эрмита-Паде для совокупностей некоторых обобщенных гипергеометрических функций, вариант изложения метода Бейкера оценки линейных форм от логарифмов алгебраических чисел с использованием только функций от одной комплексной переменной и многое другое. Н. И. Фельдман искусно работал с разнообразными функциональными определителями.

Явное вычисление таких определителей заменяло ему общие теоремы о числе нулей вспомогательных функций и зачастую способствовало улучшению оценок. Он любил в шутку повторять, что теория трансцендентных чисел — наполовину теория определителей.

Н. И. Фельдман был выдающимся педагогом. Он любил все формы педагогической деятельности и отдавал ей много сил и времени. Читал общие и специальные курсы по математике, руководил специальными семинарами по теории чисел, являлся руководителем студентов, выполняющих курсовые и дипломные работы, руководил аспирантами. Из его учеников 6 защитили кандидатские диссертации, двое из них стали докторами физико-математических наук.

Feldman100/seminar.jpg

Заседание научного семинара кафедры теории чисел мехмата МГУ.

В первом ряду сидят С. Трубников и А. Б. Шидловский, во втором ряду — В. А. Горелов, Н. И. Фельдман, А. И. Галочкин, в третьем ряду В. Г. Чирский, В. А. Быковский, В. К. Николаев и Ю. В. Нестеренко.

Наум Ильич отличался высокой порядочностью, принципиальностью, добротой и благожелательностью в общении с друзьями, коллегами и учениками. Он пользовался большим уважением среди студентов, аспирантов, коллег по кафедре и факультету, многих математиков.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kuzmin, R. O. On a problem of Gauss // Dokl. Akad. Nauk SSSR, (1928). 375–380.

2. Р. О. Кузьмин Об одном новом классе трансцендентных чисел // Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение физико-математических наук, 1930, выпуск 6, 585–597.

3. P. Levy, Bull. Soc. Math. France, v. 57, 178 (1929).

4. P. Szusz Acta Mathematica (Acad. Sci. Hung.), v. 12, 447 (1961). 4

5. Wirsing, E. On the theorem of Gauss–Kusmin–Lévy and a Frobenius-type theorem for function spaces // Acta Arithmetica. (1974) 24 (5): 507–528.

6. Hilbert D. Gesammelte Abhandlungen, Bd. III, 1935, 290-329.

7. Проблемы Гильберта, под ред. П. С. Александрова, М., Наука, 1969.

8. Gel'fond A.O. Sur les nombres transcendantes. C.R. Acad. Sci., Paris, Ser. A 189, (1929) 1224-1228.

9. Gelfond A. O. Sur le septiéme probléme de Hilbert // Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение математических и естественных наук, 1934, no. 4, 623–634.

10. Schneider Th. (1934): Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen. J. Reine Angew. Math. 172, 65-69 and 70-74.

11. Hermite Ch., (1917), Oeuvres. Gauthier-Villar, Paris, Vol.3, p. 146-149.

12. Mahler K. (1932): Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. J. Reine Angew. Math. 166, 118-136 and 137-150.

13. Siegel C.L. Uber einige Anwendungen Diophantischer Approximationen // Abh. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. (1929/1930), No. 1, 1-70.

14. Н. И. Фельдман. Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел // ДАН 66 (1949), 565—567.

15. Н. И. Фельдман. О мере трансцендентности логарифмов алгебраических чисел и эллиптических констант // УМН 4, вып. 1 (29) (1949), 190.

16. Н. И. Фельдман. О совместных приближениях нескольких логарифмов алгебраических чисел алгебраическими числами // ДАН 75 (1950), 777—778.

17. Н. И. Фельдман. Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел. I. Аппроксимация логарифмов алгебраических чисел // Изв. АН СССР. Сер. матем., 15:1 (1951), 53–74.

18. Н. И. Фельдман. Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел. II. Аппроксимация некоторых чисел, связанных с функцией Вейерштрасса $\wp(z)$, Изв. АН СССР. Сер. матем., 15:2 (1951), 153–176.

19. Н. И. Фельдман. О мере трансцендентности числа π // Изв. АН СССР. Сер. матем., 24:3 (1960), 357–368.

20. Фельдман Н. И. Постоянная в оценке меры трансцендентности числа π // в сб. Диофантовы приближения. ч.1, иэд-во МГУ, 1985.

21. Н. И. Фельдман Седьмая проблема Гильберта. — М.: Издательство МГУ, 1982. — 312 с.

22. Фельдман Н. И. Приближение алгебраических чисел. — М.: Издательство МГУ, 1981. — 202 с.

23. Алексенцев Ю. М. О мере приближения числа π алгебраическими числами // Матем. заметки, т. 66 (1999). вып. 4. с. 483—493.

24. A. Baker, Transcendental Number Theory , Cambridge University Press, 1975.

25. Н. И. Фельдман. Улучшение оценки линейной формы от логарифмов алгебраических чисел // Матем. сб., 77(119):3 (1968), 423–436.

26. Н. И. Фельдман. Эффективное степенное усиление теоремы Лиувилля // Изв. АН СССР. Сер. матем., 35:5 (1971), 973–990.

27. Schneider Th. (1957): Einfuhrung in die transzendenten Zahlen. Springer, Berlin.

REFERENCES

1. Kuzmin, R. O. (1928). "On a problem of Gauss" . Dokl. Akad. Nauk SSSR: 375–380.

2. Kuzmin, R., 1930, "Sur une nouvelle classe de nombres transcendants." (Russian) JFM 56.0898.03 Bull. Ac. Sc. Leningrad (7) 3, 585-597.

3. P. Levy, 1929, Bull. Soc. Math. France, v. 57, 178.

4. P. Szusz, (1961), Acta Mathematica (Acad. Sci. Hung.), v. 12, 447. 4

5. Wirsing, E., (1974), "On the theorem of Gauss–Kusmin–Lévy and a Frobenius-type theorem for function spaces" . Acta Arithmetica. 24 (5): 507–528.

6. Hilbert D., 1935, "Gesammelte Abhandlungen" , Bd. III, 290-329.

7. Problems of Hilbert, edited by P. S. Alexandrov, M., Science, 1969.

8. Gel'fond A.O. (1929b): Sur les nombres transcendantes. C.R. Acad. Sci., Paris, Ser. A 189, 1224-1228.

9. Gelfond, A., 1934, "On the seventh Hilbert problem. (Sur le septiéme probléme de Hilbert.)" (French) Zbl 0010.39302 Bull. Acad. Sci. URSS, VII. Ser. , No. 4, 623-630 (1934).

10. Schneider Th. (1934): Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen. J. Reine Angew. Math. 172, 65-69 and 70-74.

11. Hermite Ch. (1917): Oeuvres. Gauthier-Villar, Paris, Vol.3, p. 146-149.

12. Mahler K. (1932)"Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus." J. Reine Angew. Math. 166, 118-136 and 137-150.

13. Siegel C.L. (1929/1930): Uber einige Anwendungen Diophantischer Approximationen. Abh. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl., No. 1, 1-70.

14. Fel'dman, N. I., 1949, "Approximation of some transcendental numbers" , DAN 66, 565-567.

15. Fel'dman, N. I., 1949, "On the transcendence measure of logarithms of algebraic numbers and elliptic constants" UMN, 4, is. 1(29), 190.

16. Fel'dman, N. I., 1950, "On joint approximations of several logarithms of algebraic numbers by algebraic numbers" DAN 75, 777—778.

17. Fel'dman, N. I., 1951, "The approximation of certain transcendental numbers. I. Approximation of logarithms of algebraic numbers" (Russian) Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 15, 53–74.

18. Fel'dman, N. I., 1951, "The approximation of certain transcendental numbers. II. The approximation of certain numbers connected with the Weierstrass function $\wp(z)$" , (Russian) Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 15, 153–176.

19. Fel'dman, N. I., 1960, "The measure of transcendency of the number π" (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 24, 357–368.

20. Fel'dman, N. I., 1985, "Constant in the evaluation of the transcendence measure of the number π" , in sat. Diophantine approximations. part 1, MSU publishing house.

21. N. I. Fel'dman, 1982, "The seventh Hilbert problem." — Moscow: Publishing house of Moscow state University, — 312 p.

22. Fel'dman N. I., 1981, "Approximation of algebraic numbers." — Moscow: Publishing house of Moscow state University, — 202 p.

23. Yu. M. Alexencev, 1999, "On the measure of approximation of π by algebraic numbers", Math. Notes, 66:4, 395–403.

24. A. Baker, 1975 "Transcendental Number Theory", Cambridge University Press.

25. N. I. Fel'dman, (1968), "Improved estimate for a linear form of the logarithms of algebraic numbers", Math. USSR-Sb., 6:3, 393–406.

26. N. I. Fel'dman, (1971), "An effective refinement of the exponent in Liouville's theorem", Math. USSR-Izv., 5:5, 985–1002.

27. Schneider Th. (1957): Einfuhrung in die transzendenten Zahlen. Springer, Berlin.

Получено 25.10.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 51(092) DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-22-26

О научном творчестве Аскольда Ивановича Виноградова

В. А. Быковский

Быковский Виктор Алексеевич — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заместитель директора Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИПМ ДВО РАН) по научной работе, директор Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН (г. Хабаровск).
e-mail: vab@iam.khv.ru

Аннотация

Статья содержит краткий очерк о научном творчестве Аскольда Ивановича Виноградова.

Ключевые слова: Аскольд Иванович Виноградов.

Библиография: 4 наименования.

Для цитирования:
В. А. Быковский. О научном творчестве Аскольда Ивановича Виноградова // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 3, с. 22–26.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 3.

UDC 51(092) DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-22-26

About scientific creativity of Askold Ivanovich Vinogradov

V. A. Bykovskii

Bykovsky Victor Alekseevich — doctor of physico-mathematical Sciences, correspondent member of RAS, Deputy Director of the Federal state institution of science, Institute of applied mathematics of the far Eastern branch of the Russian Academy of Sciences (IPM RAS) on scientific work, Director of the Khabarovsk branch of the IPM DVO RAS (Khabarovsk).
e-mail: vab@iam.khv.ru

Abstract

The article contains a brief essay on the scientific work of Askold Ivanovich Vinogradov.

Keywords: Askold Ivanovich Vinogradov.

Bibliography: 4 titles.

For citation:
V. A. Bykovskii, 2019, "About scientific creativity of Askold Ivanovich Vinogradov" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 22–26.

А. И. Виноградов родился в 1929 году и умер 31 декабря 2005 г. У него сложилась непростая жизненная судьба. Но он всегда оставался жизнерадостным и целеустремленным человеком.

Bykovskii/img_2842.png

Аскольд Иванович Виноградов

В молодости получил морское офицерское звание и начал службу на Балфлоте.

Bykovskii/AsIvVin.png

Bykovskii/img_2847.png

На Балфлоте

Но уже при учебе в военном училище он заинтересовался самостоятельно теорией чисел. Это было замечено. Усилиями И. М. Виноградова и Ю. В. Линника ему удалось демобилизоваться и поступить в аспирантуру МИАН к И. М. Виноградову, а через год он перешел в ЛОМИ к Ю. В. Линнику.

Первая работа А. И. Виноградова была опубликована в 1956 году в Докладах Академии Наук [1]. В ней были получены новые результаты о количестве натуральных чисел с малыми простыми делителями, которые нашли интересные приложения. В частности, уже в 1957 году в Успехах математических наук вышла совместная с Ю. В. Линником замечательная работа

“Оценка суммы числа делителей в коротком отрезке арифметической прогрессии” [2], которая легла в основу дисперсионного метода Линника.

Но самую большую отечественную и международную известность ему принесла работа “О плотностной гипотезе для L-рядов Дирихле” (Известия РАН, 29(1965), 903-934) [3]. В ней А. И. Виноградов доказал плотностную гипотезу о нулях L-рядов Дирихле в среднем по всем модулям. Одновременно другим методом этот результат был доказан Энрико Бомбьери. Он вошел в классику теории чисел под названием “теорема Бомбьери – Виноградова” и ее следствие выгравировано на плите над могилой А. И. Виноградова.

Можно отметить удивительную плодотворность А. И. Виноградова в самых разных направлениях теории чисел. Мы не будем рассказывать о них, потому что интересующийся читатель может найти любые его работы в интернете [4].

Одно из любимых увлечений А. И. Виноградова было связано с уфологией. На мой вопрос, почему его это интересует, он ответил: если гуманоиды присутствуют на Земле, то у них необычайно продвинутая наука, в том числе математика. И поэтому они могут объяснить решения многих проблем, включая гипотезу Римана.

У А. И. Виноградова был достаточно узкий круг друзей, в который нелегко было попасть. Он был спортивным, в частности, неплохо владел самбо, каждый день совершал многочасовые прогулки. Очень любил балет и много читал. Особенно ему нравилась мемуарная литература.

Bykovskii/CCI05022019.png

В кругу семьи и друзей

Когда создавался Институт прикладной математики на Дальнем Востоке в конце восьмидесятых годов, А. И. Виноградов переехал на работу в Хабаровск и принял активное участие в его создании. После развала СССР он вернулся в ЛОМИ, где продолжал вести активную научную работу плоть до самой смерти.

Аскольд Иванович вел обширную переписку с друзьями, коллегами по науке и отвечал каждому, кто к нему обращался. Писал письма быстро и много. Автор этих строк успевал отвечать ему одним на его десять.

Bykovskii/PHOTO-2019-01-30-12-30-27.jpg

Аскольд Иванович Виноградов

А. И. Виноградов внес огромный вклад в теорию чисел и как человек навсегда останется в памяти друзей, коллег и учеников.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов А. И. “0б одной «почти бинарной» задаче”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 20:6 (1956), 713–750.

2. Виноградов А. И., Линник Ю. В. “Оценка суммы числа делителей в коротком отрезке арифметической прогрессии”, УМН, 12:4(76) (1957), 277–280.

3. Виноградов А. И. “О плотностной гипотезе для L-рядов Дирихле”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 29:4 (1965), 903–934.

4. http://www.mathnet.ru/php/person.phtml?option_lang=rus&personid=21757

REFERENCES

1. Vinogradov, A. I. On an "almost binary” problem. (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 20 (1956), 713–750.

2. Vinogradov, A. I.; Linnik, Yu. V. Estimate of the sum of the number of divisors in a short segment of an arithmetic progression. (Russian) Uspehi Mat. Nauk (N.S.) 12 1957 no. 4(76), 277–280.

3. Vinogradov, A. I. The density hypothesis for Dirichet L-series. (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 29, 1965, 903–934.

4. http://www.mathnet.ru/php/person.phtml?option_lang=rus&personid=21757

Получено 25.10.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 511 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-27-42

Александр Васильевич Малышев и его исследования в теории чисел

У. М. Пачев, Е. В. Подсыпанин

Пачев Урусби Мухамедович — доктор физико-математических наук, профессор, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова (г. Нальчик).
e-mail: urusbi@rambler.ru
Подсыпанин Евгений Владимирович — кандидат физико-математических наук, доцент, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (г. Санкт-Петербург).
e-mail: podsypanin@mail.ru

Аннотация

Статья посвящена жизни и научно-педагогической деятельности известного математика, доктора физико-математических наук, профессора Александра Васильевича Малышева (1928–1993) в связи с 90-летием со дня его рождения. В ней сначала приводятся краткие биографические сведения из жизни А. В. Малышева. Основная часть нашей работы посвящена достижениям А. В. Малышева в теории чисел и его научно-педагогической и редакционно-издательской деятельности.

Ключевые слова: Александр Васильевич Малышев, теория чисел, квадратичная форма, дискретный эргодический метод, геометрия чисел.

Библиография: 29 названий.

Для цитирования:
У. М. Пачев, Е. В. Подсыпанин. Александр Васильевич Малышев и его исследования в теории чисел // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 3, с. 27–42.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 3.

UDC 511 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-27-42

Alexander Vasilievich Malyshev and his research in number theory

U. M. Pachev, E. V. Podsypanin

Pachev Urusbi Mukhamedovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Kabardino-Balkar state University named after H. M. Berbekov (Nalchik).
e-mail: urusbi@rambler.ru
Podsypanin Yevgeny Vladimirovich — candidate of physical and mathematical Sciences, associate Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg).
e-mail: podsypanin@mail.ru

Abstract

The article is devoted to the life and scientific and pedagogical activity of the famous mathematician, doctor of physical and mathematical sciences, professor Alexander Vasilevich Malyshev (1928–1993) in connection with the 90th anniversary of his birth. It first provides brief biographical information from his life. The main part of our work is devoted to the achievements of A. V. Malyshev in number theory and scientific-pedagogical and editorial-publishing activities.

Keywords: Alexander Vasilevich Malyshev, number theory, quadratic forms, discrete ergodic method, geometry of numbers.

Bibliography: 29 titles.

For citation:
U. M. Pachev, E. V. Podsypanin, 2019, "Alexander Vasilievich Malyshev and his research in number theory", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 27–42.

Pachev/Malyshev.png

А. В. Малышев 17.11.1928–10.05.1993

Наша работа посвящена научно-педагогической деятельности Александра Васильевича Малышева — известного специалиста по теории чисел в связи с 90-летию со для его рождения. А. В. Малышев родился 17 ноября 1928 г. в Ленинграде. Его отец, Василий Георгиевич, был инженером связи, работал доцентом в Академии связи и в Ленинградском электротехническом институте им. Бонч-Бруевича, что и предопределило в некотором смысле выбор будущей профессии Александра. В 1946 г. он поступил на математико-механический факультет Ленинградского государственного университета, был прилежным, целеустремленным студентом и в 1951 г. с отличием его окончил. Еще в студенческие годы, несмотря на тяжелое после-военное время А. В. Малышев начал вести математические исследования. Его дипломная работа «К теореме Минковского—Главка [1] о лучевом теле» по геометрии чисел, опубликованная в журнале «Успехи математических наук» в 1952 г., была выполнена им под руководством выдающегося математика, профессора Б. А. Венкова, которого Александр Васильевич считал своим первым научным руководителем. В этой работе А. В. Малышев приводит новое доказательство теоремы Минковского—Главки о лучевом теле, справедливое без предположения прежнего условия ограниченности лучевых тел, что свидетельствует о глубоком владении им еще в студенческие годы геометрией чисел. Хотя у Александра Васильевича и не было совместных публикаций с Б. А. Венковым, но тем не менее он активно пропагандировал его научные идеи по арифметике кватернионов на спецсеминарах по теории чисел, проводимых тогда в ЛГУ (и ещё свидетельство тому — издание А. В. Малышевым совместно с Б. Ф. Скубенко «Избранных трудов» Б. А. Венкова). Сразу после окончания ЛГУ Александр Васильевич был принят в штат Ленинградского отделения Математического института АН СССР (ныне ПОМИ РАН), в котором проработал всю свою жизнь.

В 1954 г. А. В. Малышев защитил кандидатскую диссертацию «О целых точках на эллипсоидах», а в 1961-м — докторскую на тему «О представлении целых чисел положительными квадратичными формами». Научным руководителем Александра Васильевича по кандидатской диссертации был выдающийся всемирно известный математик Юрий Владимирович Линник. Позднее Александр Васильевич весьма плодотворно сотрудничал с академиком Ю. В. Линником, которого считал своим вторым учителем.

Активные исследования Александра Васильевича в области теории чисел, о которых речь пойдет далее, удачно сочетались с его многогранной педагогической и научно-организационной деятельностью.

В течение многих лет он читал лекции, вел спецкурсы и спецсеминары по теории чисел на математико-механическом факультете ЛГУ как для студентов, так и для аспирантов. Свои спецкурсы Александр Васильевич сопровождал постановками интересных нерешённых задач, причём они как правило образовывали единый цикл взаимосвязанных между собой задач, а в комментариях к ним он указывал возможные подходы к их решению.

Помимо этого А. В. Малышев руководил в течение многих лет научным семинаром по теории чисел в ЛОМИ (ныне ПОМИ), на котором прошли апробацию многие кандидатские и докторские диссертации по теории чисел. На этом семинаре с докладами выступали такие известные математики, как Делоне Б. Н. (Москва), Чудаков Н. Г. (Саратов), Кузнецов Н. В. (Хабаровск), Берник В. И. (Минск), Голубева Е. П. (Ленинград), Подсыпанин Е. В. (Ленинград), Чирский В. Г. (Москва), Петерс М. (Германия) и многие другие специалисты по теории чисел. Заседания семинара проходили при активном участии Александра Васильевича в обсуждениях докладываемых результатов и он щедро давал рекомендации по проведению дальнейших исследований. Все это безусловно, способствовало дальнейшему развитию теории чисел не только в самом Ленинграде, но и в других городах бывшего Советского Союза.

У Александра Васильевича было более 20 аспирантов, почти все из них в установленные сроки защитили диссертации. При этом на начальном этапе руководства он внимательно изучал научные интересы своих учеников, в результате чего выбор наиболее актуальных и перспективных направлений исследования оказывался удачным.

Самое серьезное внимание Александр Васильевич уделял и руководству дипломными работами студентов, уже видя в них начинающих исследователей. По его мнению, самые хорошие студенты это те, которые заранее обращаются по вопросу дипломной работы, а чтобы это происходило, надо суметь заинтересовать их нерешенными вопросами и он советовал учитывать это своим коллегам по педагогической работе. В результате дипломные работы его учеников всегда имели очень высокий уровень и в большинстве случаев являлись основой для печатной работы или для будущей кандидатской диссертации.

Много внимания уделял Александр Васильевич и научно-организационной и редакционно-издательской работе. Как авторитетный ученый А. В. Малышев являлся членом ученых советов ЛОМИ, ЛГУ, специализированных советов по защите кандидатских и докторских диссертаций и охотно выступал оппонентом множества таких диссертаций. Он принимал активное участие в организации и проведении IV Всесоюзного математического съезда в 1961 г. и Международного конгресса математиков в Москве в 1966 г. Большое значение придавал Александр Васильевич и редакционной работе. Он был одним из инициаторов издания «Записок научных семинаров ЛОМИ» и редактором первого тома этой серии, вышедшего в 1966 г. А. В. Малышев редактировал издание и перевод более чем 30 книг по актуальным проблемам теории чисел, в том числе избранных трудов своих учителей Б. А. Венкова и Ю. В. Линника. Ко всему этому следует еще добавить, что Александр Васильевич являлся непревзойденным мастером по составлению биографических очерков, посвящённых выдающимся математикам.

Александр Васильевич Малышев, как это видно из его публикаций, интересовался многими вопросами теории чисел. В совершенстве владея проблематикой всей современной теории чисел, в собственно научной деятельности А. В. Малышев уделил основное внимание теории квадратичных форм и геометрии чисел. Мы будем рассматривать его исследования, относящиеся к указанным разделам теории чисел.

В теории квадратичных форм А. В. Малышева привлекала прежде всего задача о целочисленных представлениях целых чисел квадратичными формами, т. е. исследование решений диофантовых уравнений вида

$$Q(x_1,\ \ldots,\ x_n) = m,$$

где Q — целочисленная квадратичная форма от n переменных, m — целое число.

Для полноты изложения обратимся к истокам теория квадратичных форм. Арифметика квадратичных форм берёт своё начало с утверждения французского математика 17 века П. Ферма о том, что каждое простое число вида $4k+1$ представимо суммой двух квадратов целых чисел. Оно было доказано Эйлером в 1749 году и об этом он сообщает Гольдбаху. В дальнейшем были даже получены формулы для оснований этих квадратов.

Следующий шаг в теории квадратичных форм был сделан Лагранжем, доказавшим, что каждое натуральное число представимо суммой четырёх квадратов целых чисел; он же ввёл важное понятие приведённой бинарной квадратичной формы. Дальнейшее развитие теории квадратичных форм связано с Гауссом, который ввёл некоторые новые важные понятия.

Особое место занимают в теории квадратичных форм и формулы Дирихле для числа классов целочисленных бинарных квадратичных форм заданного определителя.

В арифметической теории квадратичных форм большое внимание уделяется также и тематике точных формул для числа представлений квадратичными формами специальных видов. Это направление, связанное с тематикой точных формул для числа представлений квадратичными формами, раньше было представлено в Тбилисской школе теории чисел (Вальфиш А. З., Ломадзе Г. А.) и в Узбекистане (Коган Л. А. и его ученики).

Вернемся теперь к той общей задаче, отмеченной выше, и которой А. В. Малышев посвятил бóльшую часть своих исследований. Основной интерес к этой задаче представляет проблема существования представлений целого числа m квадратичной формой Q и их распределение по классам вычетов по заданному модулю и по областям на соответствующей поверхности второго порядка при $m \to \infty$.

В такой постановке в основном можно рассматривать только проблему отыскания асимптотической, а не точной формулы для числа рассматриваемых представлений формой Q. Сложность этой задачи сильно зависит как от числа переменных n, так и от того является ли квадратичная форма Q положительной или неопределённой.

Так, для $n \geqslant 5$ асимптотические формулы при $m \to \infty$ для числа представлений удавалось получить круговым методом Харди—Литтлвуда.

Существенно улучшив технику применения этих методов к рассматриваемой задаче, А. В. Малышеву удалось впервые получить асимптотическую формулу с остаточным членом для числа представлений $(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ целого числа m положительной целочисленной квадратичной формой f от $n \geqslant 4$ переменных и сравнимых с $(b_1,\ldots,b_n)$ по данному модулю g. Полученный результат А. В. Малышев приводит в гл. III своей монографии [2]. Если обозначим через $R_{g;\,b_1,\ldots,b_n}(f,\ m)$ количество представлений $(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ числа m положительной квадратичной формой f и сравнимых с $(b_1,\ldots,b_n)$ по модулю g, то асимптотическая формула А. В. Малышева имеет вид

$$R_{g;\,b_1,\ldots,b_n}(f,\ m) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{d^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} m^{\frac{n}{2}-1} H_{g;\,b_1,\ldots,b_n}(f,\ m) + O\Big(d^{\frac{n}{4}+\frac{3}{2}} \cdot g^{\frac{3}{2}n+2} \cdot m^{\frac{n}{4}-\frac{1}{4}+\varepsilon}\Big),$$

где Γ — гамма функция; $H_{g;\,b_1,\ldots,b_n}(f,\ m)$ — особый ряд рассматриваемой задачи; d — определитель квадратичной формы f.

$$H_{g;\ b_1,\ \ldots,\ b_n}(f,\ m)=\sum_{q=1}^{\infty}\left\{\sum_{h\pmod q}{}' q^{-n}\,S_{g;\ b_1,\ \ldots,\ b_n}(h\,f;\ g)\,e^{-2\pi i\frac{mh}{q}}\right\},$$

— особый ряд данной задачи,

$$S_{g;\ b_1,\ \ldots,\ b_n}(h\,f;\ g)=\frac{1}{g^n}\sum_{x_1,\ \ldots,\ x_n=0}^{q=1}e^{2\pi i\frac{h\,f(gx_1+b_1,\ \ldots,\ gx_n+b_n)}{q}}$$

— неоднородная кратная гауссова сумма по модулю q.

Для особого ряда Харди—Литтлвуда справедливы оценки

$$m^{-\varepsilon}\ll H_{g;\ b_1,\ \ldots,\ b_n}(f,\ m)\ll m^{\varepsilon}.$$

Этот асимптотический результат при $g=1$, как один из важных, приводится в обзоре [3]. Кроме того, он также используется известным американским математиком П. Сарнаком в гл. 3 монографии [4]. Ещё один подход к изучению распределения целых точек на поверхности второго порядка развивал А. В. Малышев [5] через рассмотрение понятия взвешенного числа целых точек на таких поверхностях. Исследования в этом направлении в дальнейшем проводились Б. З. Мороз [6] и Р. А. Доховым совместно У. М. Пачевым [7].

Но больше всего внимание А. В. Малышева привлекал оставшийся наиболее сложный случай $n=3$, т. е. задача о представлении целых чисел тернарными квадратичными формами. При этом отметим, что бóльшая часть работ А. В. Малышева посвящена именно этому случаю, к которому неприменимы были существовавшие тогда аналитические методы. Но здесь следует еще отметить, что основополагающие исследования в этом направлении были проведены выдающимся математиком Ю. В. Линником — известным своими работами по аналитической теории чисел, теории вероятностей и математической статистики. Именно под руководством Ю. В. Линника была подготовлена кандидатская диссертация А. В. Малышева «О целых точках на эллипсоидах», посвященная применению эргодических концепций к вопросу к вопросу распределения целых точек по областям на эллипсойдах и защищённая в 1954 г.

Ю. В. Линнику [8] принадлежит оригинальный аналитико-алгебраический метод в теории тернарных квадратичных форм, использующий некоммутативную арифметику кватернионов и матриц, названный А. В. Малышевым при его дальнейшем развитии дискретным эргодическим методом (далее ДЭМ).

При построении своего метода Ю. В. Линник исходил из замечательных исследований В. А. Венкова по теории поворотов целых гамильтоновых кватернионов с нулевой скалярной частью [9].

Кратко поясним смысл теории поворотов В. А. Венкова кватернионов без скалярной части.

Пусть m — целое число с условиями: $m>3$, $m\equiv 1;\ 2\pmod 4$ или $m\equiv 3\pmod 8$. Уравнение сферы

$$x^2+y^2+z^2=m$$

можно записать в целых кватернионах $L=x\,i+y\,j+z\,k$ нормы m, $x,\ y,\ z\in\mathbb{Z}$, т. е. $\mathrm{N}(L)=m$, и значит, уравнение сферы можно заменить уравнением

$$L^2=-m.$$

в кватернионах L без скалярной части.

Примитивным решениям уравнения сферы отвечают примитивные векторы L. Распределение таких точек на сфере можно изучать, пользуясь поворотами сферы, переводящими целую примитивную точку в такую же точку на сфере. Б. А. Венков изучал связь между различными примитивными решениями кватернионного уравнения, сопоставляя паре L и L' таких решений совокупность целых кватернионов ρ с условием

$$\rho\, L\, \rho^{-1} = L'.$$

Для примитивных векторов L и L' нормы m найдутся целые примитивные кватернионы A, C и целое число b, что выполняются равенства

$$b + L = A\, C, \quad b + L' = C\, A,$$

и

$$C\, L\, C^{-1} = L', \quad \overline{A}\, L\, \overline{A}^{-1} = L'.$$

Упорядоченную пару $(L,\ L')$ принято называть поворотом от L к L'.

Повороту $(L,\ L')$ сопоставляется положительная бинарная квадратичная форма дискриминанта $-m$ следующим равенством

$$(a,\ b,\ c) = a\, x^2 + 2\, b\, x\, y + c\, y^2 = \mathrm{N}\left(\overline{A}\, x + C\, y\right),$$

так что

$$a = \mathrm{N}\,(A), \quad c = \mathrm{N}\,(C), \quad b = \mathrm{Sc}\,(A\, C); \quad b^2 - a\, c = -m.$$

(в доказательство равенства $b^2 - a\, c = -m$ используется, что $L^2 = -m$).

При этом принято говорить, что форма $(a,\ b,\ c)$ управляет поворотом $(L,\ L')$. Совокупность таких форм при заданной паре $(L,\ L')$ образует класс бинарных квадратичных форм дискриминанта $-m$.

С помощью своей теории поворотов кватернионов Б. А. Венкову удалось дать новое доказательство глубокой теоремы Гаусса о числе представление целых чисел суммой трёх квадратов. Из записанных выше равенств,относящихся к теории поворотов кватернионов, получаем, что если L — целый вектор, то L' также есть вектор одной и той же нормы. Если в этих равенствах $AC \neq CA$, то $L \neq L'$, т. е. из решения L получается еще другое решение L' рассматриваемого уравнения $L^2 = -m$ (в этом и состоит смысл теории поворотов кватернионов, построенной Б. А. Венковым).

Ю. В. Линник использовал теорию поворотов иначе, строя с помощью неё потоки целых точек на сфере. Фиксируя простое число $q \geqslant 3$, он рассматривает числа $m > 0$ с условием символ Лежандра $\left(\frac{-m}{q}\right) = 1$. Итерируя процесс поворотов, дающий новые точки на сфере, Ю. В. Линник строит потоки целых точек заданной длины s на сфере $x^2 + y^2 + y^2 = m$ заданного радиуса $\sqrt{m}$. Построение потоков осуществляется поворотами вида $L' = Q^{-1}\, L\, Q$, где $\mathrm{N}\,(Q) = q$. При этом учитывается сравнение $l^2 + m \equiv 0 \pmod{q^s}$ и аналог основной теоремы арифметики для кольца целых кватернионов. Для любого вектора L нормы m в силу указанного сравнения можно записать равенство $l + L = B \cdot V$, где $B = Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_s$, $\mathrm{N}\,(Q_i) = q$; $Q_1,\ \ldots,\ Q_s,\ B,\ V$ — целые кватернионы. Тогда с помощью этих соотношений можно построить цепочку целых примитивных векторов нормы m:

$$L_1 \to L^{(1)} \to \ldots \to L^{(s-1)}$$

длины s, причём s выбирается порядка $\log m$ или $\gg\ \log m$, где $L^{(k)} = Q_k^{-1}\, L^{k-1}\, Q_k$, $k = 1,\ \ldots,\ s$.

Для удобства записи введём обратимую операцию T, действующую на множестве всех примитивных векторов согласно равенствам

$$L' = T\, L, \quad T\, L = Q^{-1}\, L\, Q.$$

Тогда получаем поток примитивных векторов нормы m:

$$L_1 \to T\,L_1 \to T^2\,L_1 \to \ldots \to T^{s-1}\,L_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$L_n \to T\,L_n \to T^2\,L_n \to \ldots \to T^{s-1}\,L_n,$$

где $n = r(m)$ есть число всех примитивных векторов нормы m.

С учётом этого потока вопросы асимптотического распределения целых примитивных векторов L, по классам вычетов по заданному модулю и по областям на поверхности сферы можно заменить вопросами эргодичности так построенного потока. Это значит, что все цепочки данного потока можно разделить на две категории (такая трактовка ДЭМ принадлежит А. В. Малышеву):

а) «плохие» цепочки, которых мало и их количество оценивается как $o(r(m))$;

б) «хорошие» цепочки, обладающие тем свойством, что доля элементов L_i цепочки, принадлежащих данному классу вычетов и данной сферической площадке асимптотически равна их доле при асимптотически равномерном распределении векторов L сферы.

При этом вопросы эргодичности потока изучаются с помощью операторов $B = Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_s$, которые создают этот поток, а задача об операторах B сводится к вопросу о представлении целых чисел кватернарными квадратичными формами, исследуемому круговым методом. Точки, лежащие на хороших цепочках данного потока дают изучаемое количество целых точек на сфере.

Доказательство эргодичности так построенного потока проводится по следующей схеме:

1° Предполагая «неэргодичность» построенного потока $\chi_s(m,\ q,\ l)$ из всех $r(m)$ цепочек этого потока выделяем $> \alpha\, r(m)$ $(0 < \alpha < 1)$ таких цепочек, что в соответствующих им «операторах» $B = Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_s$ число появлений среди $Q_1,\ \ldots,\ Q_s$ данного примитивного кватерниона Q нормы q «ненормально мало» (в рассматриваемой задаче: $< (1-\beta)\frac{s}{\sigma_0(q)}$, где $\sigma_0(q)$ — число примитивных примарных кватернионов нормы q); здесь $\beta > 0$ не зависит от m.

2° Тогда сравнительно просто с помощью теории цепей Маркова получается, что число различных кватернионов B в выделенных цепочках

$$\ll (q^s)^{1-\gamma}, \tag{1}$$

где $\gamma > 0$ не зависит от m.

3° Но доказывается, что при

$$s = \left[\frac{\log m}{2\,\log q}\right] \tag{2}$$

и $\alpha > 0$ в любых $> \alpha\, r(m)$ кватернионных равенствах $l + L = B\,V$ число различных кватернионов B будет

$$\gg m^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \tag{3}$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Это утверждение и его различные модификации называют ключевой леммой ДЭМ. Последние две оценки при $m \to \infty$ противоречат друг другу, что и доказывает эргодичность потока $\chi_s(m,\ q,\ l)$.

4° В предположении (2) оценки (1) и (3) противоречат друг другу при $m \to \infty$, что и доказывает эргодичность потока.

5° Из эргодичности потока $\chi_s(m,\ q,\ l)$ выводится соответствующая равномерная распределённость по модулю g (и геометрически по поверхности сферы).

Следующим этапом применения ДЭМ к исходной рассматриваемой задаче является вывод из эргодического поведения целых точек свойства их перемешивания.

Пусть A — множество примитивных точек заданной области $\Omega \in$ Сф$_3(m)$. Пусть M_0 — какое-либо множество проекций точек из A на единичную сферу Сф$_3(1)$. Обозначим через $T^l\, M_0$ множество, куда перетекают эти точки после l-кратного преобразования T; $\#M_0$ — число точек в M_0; $l = 0,\ 1,\ \ldots,\ s \geqslant c_1 \ln m$ и $\#M_0 > \varepsilon_0 H_0(m)$; $\#\left\{T^l\, M_0 \cap \Lambda_0\right\}$ — число точек множества $T^l\, M_0$, лежащих в множестве $\Lambda_0 \in$ Сф$_3(1)$. Тогда для всех индексов l, за возможным исключением $s \cdot o(1)$ таких индексов имеем

$$\#\left\{T^l\, M_0 \cap \Lambda_0\right\} = \frac{6}{\pi}\, \omega(\Lambda_0) \cdot |M_0| \cdot \{1 + \varkappa(q,\ \Lambda_0,\ \varepsilon_0,\ m)\}\,.$$

(это соотношение и есть теорема о перемешивании целых точек по областям на сфере радиуса $\sqrt{m}$).

Если в теореме перемешивания взять $M_0 = A$ (множество всех примитивных точек из Ω), то для всех l имеем $T^l\, A = A$, т. е. множество A инвариантно относительно преобразования T^l, то для числа примитивных точек $H(\Lambda_m)$ в замкнутой области Λ_m сферы Сф$_3(m)$ асимптотическую при $m \to \infty$ формулу

$$H(\Lambda_m) = \frac{\omega(\Lambda_0)}{4\,\pi} H_0(m) \left\{1 + \varkappa\Big(\Lambda_m^{(0)},\ q,\ m\Big)\right\},$$

где $\Lambda_m^{(0)}$ — проекция области Λ_m сферы Сф$_3(m)$ на единичную сферу Сф$_3(1)$, $H_0(m)$ — полное число примитивных точек на сфере Сф$_3(m)$.

После этих отступлений, связанных с ДЭМ, вернёмся к исследованиям А. В. Малышева по применениям ДЭМ к тернарным квадратичным формам. Эти исследования были начаты А. В. Малышевым статьях [10, 11] в которых даны некоторые обобщения результата Ю. В. Линника и уточнены оценки, истинные по порядку для величины $t(f,\ m)$, равной числу представлений числа m формой f. А. В. Малышев весьма активно продолжал развивать эргодические подходы Ю. В. Линника к задаче представления чисел тернарными квадратичными формами. Так в статье [12] он впервые получил асимптотическую формулу для величины $t(f,\ m)$, где формы f инвариантов $[\Omega,\ 1]$ принадлежат роду инвариантов $G_{[\Omega,\ 1]}$ с характерами $\left(\frac{-f}{p}\right) = 1$ для всех простых делителей p числа Ω, до этого имелись только двусторонние оценки, истинные по порядку. Для полноты изложения приведем асимптотический результат А. В. Малышева, относящийся к вопросу представления чисел тернаными квадратичными формами.

Теорема (А. В. Малышев). Пусть $f(x,\ y,\ z)$ — положительная тернарная форма нечётных инвариантов $[\Omega,\ 1]$, принадлежащих роду G с характерами: $\left(\frac{f}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$ для всех простых p/r.

Пусть m — целое число, простое с r. Обозначим через $t(f,\ m)$ количество примитивных представлений числа m формой f. Тогда

$$t(f,\ m) \sim \begin{cases} \dfrac{24}{r\Big(1+\frac{1}{p_1}\Big)\cdot\ldots\cdot r\Big(1+\frac{1}{p_k}\Big)}\, h(-m), & \text{если } m \equiv 1,\ 2 \pmod 4, \\ \dfrac{16}{r\Big(1+\frac{1}{p_1}\Big)\cdot\ldots\cdot r\Big(1+\frac{1}{p_k}\Big)}\, h(-m), & \text{если } m \equiv 3 \pmod 4, \end{cases}$$

$t(f,\ m) = 0$, если $m \equiv 0 \pmod 4; \equiv 7 \pmod 8$, где $h(-m)$ — количество классов положительных собственно примитивных бинарных квадратичных форм определителя m; $p_1,\ \ldots,\ p_k$ — все простые делители числа r.

В доказательстве используется основная теорема арифметики кватернионов в сочетании с оригинальными рассуждениями А. В. Малышева, связанными с матрицами размера $t(m) \times s$, составленными из сомножителей $R_{\alpha,\ s}$ разложения $l + L_\alpha = R_{\alpha 1} \cdots R_{\alpha s}$ $(\alpha = 1,\ \ldots\ t(m))$.

Результат этой работы Ю. В. Линник называл асимптотическим законом А. В. Малышева и применял его в некоторых своих работах.

Цикл работ, опубликованных А. В. Малышевым в период с 1952 г. по 1954 г., составил его кандидатскую диссертацию «О целых точках на эллипсоидах», в защищённую в 1954 г.

Для дальнейшего применения ДЭМ к вопросу о представлении чисел положительными тернарными квадратичными формами более общего вида А. В. Малышеву пришлось существенно развить теорию делимости в порядках обобщенных кватернионов. Полученные при этом точные по порядку оценки и асимптотические формулы для числа представлений и тернарной квадратичной формой нечётных взаимно простых инвариантов $[\Omega,\ \Delta]$ вместе с результатом для положительных квадратичных форм от $n \geqslant 4$ переменных составили основу докторской диссертации А. В. Малышева «О представлении целых чисел положительными квадратичными формами», защищённой в 1961 г. в Ленинградском университете.

Основные результаты А. В. Малышева по арифметической теории квадратичных форм, полученные им до 1962 г. изложены в его замечательной монографии [2], имеющей более 30 цитирований. В ней кроме квадратичных форм содержатся также и другие полезные для специалистов разделы теории чисел: суммы Гаусса, суммы Клостермана, арифметика эрмитионов (обобщённых кватернионов), играющие вспомогательную роль при применениях ДЭМ. Следует также отметить, что А. В. Малышеву впервые удалось дать общее правило составления таблицы умножения базисных единиц алгебры обобщённых кватернионов соответствующей произвольной тернарной квадратичной форме.

Таблицу умножения базисных кватернионных единиц алгебры обобщённых кватернионов U_f соответствующей тернарной квадратичной форме f А. В. Малышев строил следующим образом (мы дадим её в более упрощённой форме). Пусть

$$f = f(x_1,\ x_2,\ x_3) = \sum_{i,\ j=1}^{3} \alpha_{ij}\, x_i\, x_j, \quad \alpha_{ij} \text{ — тернарная квадратичная форма,}$$

и

$$\overline{f} = \overline{f}(x_1,\ x_2,\ x_3) = \sum_{i,\ j=1}^{3} \overline{\alpha}_{ij}\, x_i\, x_j$$

— форма, алгебраически взаимная форме f. Тогда умножения базисных кватернионных единиц $i_1,\ i_1,\ i_3$ задаётся следующими соотношениями

$$i_1^2 = -\overline{\alpha}_{11}, \quad i_2^2 = -\overline{\alpha}_{22}, \quad i_3^2 = -\overline{\alpha}_{33},$$

$$i_1\, i_2 = -\overline{\alpha}_{12} + \alpha_{31}\, i_1 + \alpha_{32}\, i_2 + \alpha_{33}\, i_3,$$

$$i_2\, i_3 = -\overline{\alpha}_{23} + \alpha_{11}\, i_1 + \alpha_{12}\, i_2 + \alpha_{13}\, i_3,$$

$$i_3\, i_1 = -\overline{\alpha}_{31} + \alpha_{21}\, i_1 + \alpha_{22}\, i_2 + \alpha_{23}\, i_3,$$

при этом,

$$i_s\, i_t = \overline{i_t\, i_s}, \quad s \neq t.$$

Итогом совместных исследований Ю. В. Линника и А. В. Малышева по приложениям арифметики кватернионов явилась большая обзорная статья по ДЭМ [13], состоящая из четырёх глав, из которых гл. I и III написаны А. В. Малышевым.

В процессе работы над обзором А. В. Малышеву удалось внести в ДЭМ два существенных усовершенствования.

Во-первых, ключевая лемма ДЭМ доведена до неулучшаемой оценки снизу, т. е. число различных кватернионов B в равенствах $l+L=BV$ будет $\gg m^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$, что уже позволяло получить асимптотическую формулу для числа представлений числа m тернарной квадратичной формой.

Во-вторых, им было замечено, что при рассмотрении задачи о представлении чисел m «удобными» тернарными квадратичными формами и суммой квадратов из данного класса вычетов можно обойтись без специального изучения интерпретации представлений $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ кватернионным равенством $l+L=QU$, а связать число $r(f,\ m)$ примитивных представлений чисел m формой f с числом $r(m;\ g,\ b_1,\ b_2,\ b_3)$ примитивных представлений числа m суммой трёх квадратов, принадлежащих данному классу вычетов $(b_1,\ b_2,\ b_3)\pmod g$, а последнюю величину — с $r(m,\ Q)$-числом примитивных векторов L нормы m с условием $Q\setminus(l+L)$ при подходяще подобранном кватернионе Q.

Эти усовершенствования, связанные с ДЭМ, А. В. Малышев включил в гл. 6 своей монографии [2].

С уверенностью можно утверждать, что Александр Васильевич внёс большой вклад в развитие дискретного эргодического метода: им впервые построены алгебра и арифметика эрмитионов (обобщённых кватернионов), исследованы положительные квадратичные формы, принадлежащие многоклассным родам и разработана ясная методика получения асимптотических формул. Отметим также, что немецкий специалист по квадратичным формам М. Петерс именует ДЭМ методом Линника—Малышева.

После написания монографии по представлениям чисел положительными квадратичными формами А. В. Малышев переключается и на неопределенные квадратичные формы. Но следует отметить, что первые исследования по применению ДЭМ к неопределённым тернарным формам были проведены Ю. В. Линником [8] в случае $m>0$ и его учеником Б. Ф. Скубенко [14] в случае $m<0$, рассмотревшими вопрос о представлении чисел m простейшей неопределённой формой $xz-y^2$, которые доказали, что при $|m|\to\infty$ целые точки равномерно распределены по областям на поверхности гиперболоида $xz-y^2=m$ в смысле гиперболической метрики Лобачевского. В случае $m<0$ (однополостного гиперболоида) возникли трудности из наличия периодов неопределённых бинарных квадратичных форм, которые были преодолены Б. Ф. Скубенко своей теоремой о циклах [14].

В дальнейшем Александр Васильевич развивал ДЭМ в основном со своими учениками, при этом он внимательно следил за самостоятельно выполняемыми ими работами для публикации. В этом случае он просил учеников держать его в курсе проводимых исследований, помогая им в подготовке статей и публикаций. Наиболее продвинутые результаты для положительных тернарных квадратичных форм были получены А. В. Малышевым совместно со своим учеником Ю. Г. Тетериным [15], который позднее весьма успешно самостоятельно развивал ДЭМ, построив законченную теорию поворотов целых векторов на эллипсоидах и гиперболоидах. Кроме того, им получено обобщение на алгебраические числовые поля результатов Ю. В. Линника, А. В. Малышева и М. Петерса о представлении чисел положительными тернарными квадратичными формами. Из всех учеников А. В. Малышева он по уровню проводимых исследований был наиболее близок к защите докторской диссертации, но по неизвестным причинам он не занимался этим вопросом. Исследование же с помощью ДЭМ представлений целых чисел неопределенными тернарными квадратичными формами существенно различается в зависимости от того является ли соответствующая поверхность однополостным или двуполостным гиперболоидом. В случае двуполостного гиперболоида основные результаты относящиеся к теории поворотов вектор-матриц были получены Александром Васильевичем совместно с У. М. Пачевым [16]; позднее У. М. Пачев [17] продолжил эти исследования самостоятельно, решив задачу, поставленную А. В. Малышевым для случая изотропных гиперболоидов, включающего в себя как частные случаи всех ранее рассмотренных видов двуполостных и однополостных гиперболоидов.

А. В. Малышев много внимания уделял и отдельным проблемам, непосредственно связанными с ДЭМ. Одной из главных проблем в применениях ДЭМ является получение остаточных членов в асимптотических формулах для числа представлений целых чисел тернарными квадратичными формами, т. е. для числа целых точек на поверхностях второго порядка. Действуя ДЭМ можно определить, что остаточный член имеет порядок, равный главному члену, деленному на $(\log m)^{\alpha}$, где α — положительная константа, причём одним из недостатков этого метода в применениях к тернарным квадратичным формам являлось использование вспомогательного простого числа q, для которого $\left(\frac{-m}{q}\right) = 1$, привнесённого самим методом при построении потоков целых точек в эргодических теоремах. В связи с этим Александр Васильевич провёл важные исследования, устанавливающие связь рассматриваемого вопроса с гипотезами о нулях L-рядов Дирихле, изложенные в статьях [18, 19]. Исследования А. В. Малышева в этом направлении позволяют устранить указанный недостаток и получить улучшенные формулировки асимптотических результатов с остаточными членами для представления чисел положительными тернарными квадратичными формами.

Наряду с этим А. В. Малышев в ряде работ совершенствовал доказательство ключевой леммы ДЭМ в разных её вариантах. Так в совместной статье с Б. М. Широковым [20] было дано новое доказательство ключевой леммы в случае гиперболоидов, обходя при этом использование теоремы Б. Ф. Скубенко о циклах.

Отдельное исследование, обобщающее результаты Б. Ф. Скубенко в случае однополостного гиперболоида, проведено А. В. Малышевым со своим аспирантом Нгуен Нгор Гоем [21]. В развитии ДЭМ принимали участие и другие ученики А. В. Малышева. В частности, совместно с Александром Васильевичем и самостоятельные публикации в этом направлении имела Н. Н. Белова [22], а Е. В. Подсыпанин [23] получил ряд новых результатов о распределении целых точек на поверхностях второго порядка, необходимых для применения ДЭМ в случае неопределенных тернарных форм. Ввиду того, что аппарат арифметики обобщенных кватернионов является вспомогательным средством для ДЭМ, то Александр Васильевич уделял много внимания и развитию теории делимости в порядках обобщенных кватернионов. Исследования в этой области Александр Васильевич вел главным образом со своим учеником М. Н. Кубенским, который получил ряд интересных результатов по теории поворотов в простых центральных алгебрах, при этом их совместная работа была опубликована в [24].

Напомним, что свой первый шаг в математическую науку А. В. Малышев сделал публикацией статьи по геометрии чисел и, не возвращаясь долгое время к этому разделу теории чисел, им в дальнейшем публиковались статьи по тернарным квадратичным формам. Видимо это было связано с тем, что в то время было мало книг по геометрии чисел и как отдельное направление она сформировалась значительно позднее остальных разделов теории чисел. Геометрия чисел берет свое начало с основополагающей монографии Г. Минковского, подготовленной им в 1896 г., и в основном она была посвящена приложениям его теоремы о выпуклом теле к некоторым вопросам теории чисел.

Положение несколько изменилось в лучшую сторону с выходом в 1965 г. книги Дж. Касселса «Введение в геометрию чисел» под редакцией А. В. Малышева. Уже в том же году А. В. Малышев обращает внимание своего ученика Кухарева В. Г. на одну задачу из геометрии чисел по отысканию критического определителя выпуклой двумерной области $D_p\colon |x|^p + |y|^p \leqslant 1$, где $p \geqslant 0$ — вещественное число (гипотеза Минковского о критическом определителе).

Поясним это понятие следующим образом. Пусть в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы множество M и решетка Λ определителя $d(\Lambda)$. Решетка Λ называется допустимой для множества M, если множество M не содержит точек из Λ, отличных от начала координат. Тогда, точная нижняя грань

$$\Delta(M) = \inf_{\Lambda - M\text{-допустимым}} d(\Lambda)$$

множества определителей $d(\Lambda)$ всех M-допустимых решеток Λ называется критическим определителем множества M.

Сформулируем теперь гипотезу Минковского о критическом определителе в следующем аналитическом виде.

Пусть τ_p — вещественный корень уравнения

$$\tau_p^p + 1 = 2\ (1 - \tau_p)^p\,, \quad 0 < \tau_p < 1.$$

Тогда ищется абсолютный минимум функции

$$\Delta_p(\tau,\ \sigma) = (\tau + \sigma)\ (1 + \tau^p)^{-\frac{1}{p}}\ (1 + \sigma^p)^{-\frac{1}{p}}$$

при условии, что

$$\left[(1 + \tau^p)^{-\frac{1}{p}}\ (1 + \sigma^p)^{-\frac{1}{p}}\right]^p + \left[\tau\ (1 + \sigma^p)^{-\frac{1}{p}} + \sigma\ (1 + \tau^p)^{-\frac{1}{p}}\right]^p = 1,$$

при этом $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_p$, $1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_p$, где

$$\sigma_p = (2^p - 1)^{\frac{1}{p}}\,.$$

Тогда, согласно гипотезе Минковского

$$\Delta(D_p) = \min\left(\Delta_p^{(0)},\ \Delta_p^{(1)}\right),$$

(гипотеза Минковского о критическом определителе), где

$$\Delta_p^{(0)} = \Delta_p(0,\ \sigma_p), \quad \Delta_p^{(1)} = \Delta_p(\tau_p,\ 1), \qquad p \geqslant 1.$$

Справедливость гипотезы Минковского была доказана Кухаревым В. Г. [25] для отдельных изолированных значения $p \in \{1,3;\ 1,4;\ 1,5;\ 1,6;\ 1,7;\ 2,2;\ 2,3;\ 3;\ 4;\ 5\}$. В дальнейшем А. В. Малышев, для полного доказательства гипотезы Минковского, разработал вычислительную методику для оценок частных производных $\frac{\partial\Delta(\sigma,\ p)}{\partial\sigma}$ и $\frac{\partial^2\Delta(\sigma,\ p)}{\partial\sigma^2}$ с применением ЭВМ, позволяющую всё более сужать область значений параметра p, для которых гипотеза оставалась недоказанной. В результате, в серии совместных исследований А. В. Малышева с А. В. Воронецким [26] (случай $p > 6$); Гришмановской К. И., Пачевым У. М., Фидаровой А. Ч. [27] (случай $5 < p < 6$) и наконец с Н. М. Глазуновым и А. С. Головановым [28] полностью доказана гипотеза Минковского, чем и гордился А. В. Малышев.

А. В. Малышев развивал и другие подходы в аналитической теории квадратичных форм и в первую очередь — теорию модулярных форм. Его интересовала задача об оценке коэффициентов Фурье модулярных форм в связи с их приложением к представлению чисел тернарными квадратичными формами. Так в его статье [29] дается уточнение и упрощение доказательства результата Салье по оценке коэффициентов Фурье параболических модулярных форм. Из учеников А. В. Малышева развитием теории модулярных форм и ее применением к квадратичным формам занимался в первую очередь А. Б. Воронецкий, вокруг которого в Ижевске сложилась целая научная группа, в которую входили В. В. Головизин и А. Мерзляков, получивших под руководством А. В. Малышева ряд новых результатов для гильбертовых модулярных форм. Не оставил без внимания А. В. Малышев и тематику «точных» формул для числа представлении чисел квадратичными формами, которой также занимались многие его ученики; в частности, интересные результаты были получены его ученицей Е. А. Кашиной.

Александр Васильевич был одним из ведущих научных сотрудников Ленинградского отделения математического института им. В. А. Стеклова. Научный семинар по теории чисел в ЛОМИ под его руководством пользовался большим успехом среди его участников и способствовал дальнейшему развитию теории чисел не только у нас, но и за рубежом. Считаем, что его исследования представляют большой интерес для специалистов по арифметической теории квадратичных форм и геометрии чисел.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малышев А. В. К теореме Минковского—Главка о лучевом теле // УМН, 1952. Т. 7, № 2. С. 168–171.

2. Малышев А. В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Труды МИАН, Т. 65, 1962. С. 1–212.

3. Сарнак П. Модулярные формы и их приложения. М. 1998. 133 с.

4. Манин Ю. И., Панчишкин А. В. Введение в теорию чисел. Итоги науки и техники. Сер. Фундаментальные направления. Т. 49, М. 1990, 348 с.

5. Малышев А. В. О взвешенном числе целых точек, лежащих на поверхности второго порядка // Зап. Научн. семин. ЛОМИ, 1966. Т. 1. С. 6–83.

6. Мороз Б. З. Распределение целых точек на многомерных гиперболоидах и конусах // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1966. Т. 1. С. 84–113.

7. Дохов Р. А., Пачев У. М. О взвешенном числе целых точек на некоторых многомерных гиперболоидах // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 3 (55). С. 220–246.

8. Линник Ю. В. Эргодические свойства алгебраических полей. Л. : Изд-во Ленингр. ун-та. 1967. 208 с.

9. Венков Б. А. Избранные труды. Ленинград: Наука. 1981. 448 с.

10. Малышев А. В. О представлении больших чисел положительными тернарными квадратичными формами // Докл. АН СССР. 1952, т. 87, № 2, С. 175–178.

11. Малышев А. В. О представлении чисел положительными тернарными квадратичными формами // Докл. АН СССР, 1953, т. 89, С. 405–406.

12. Малышев А. В. Асимптотический закон для представления чисел некоторыми положительными тернарными квадратичными формами // Докл. АН СССР, т. 93, № 5, 1953. С. 771–774.

13. Линник Ю. В., Малышев А. В. Приложения арифметики кватернионов к теории тернарных квадратичных форм и к разложению чисел на кубы // УМН, 1953, Т. 8, вып. 5, С. 3–71.

14. Скубенко Б. Ф. Асимптотическое распределение целых точек на однополостном гиперболоиде и эргодические теоремы // Изв. АН СССР. Сер. мат., 1962, т. 26, № 5. С. 721–752.

15. Тетерин Ю. Г. Асимптотическая формула для числа представлений вполне положительными тернарными квадратичными формами. // Изв. АН СССР. 1985. Сер. матем. Т. 49. № 2. С. 393–426.

16. Малышев А. В., Пачев У. М. Об арифметике матриц второго порядка // Зап.научн. семин. ЛОМИ. 1980. Т. 93. С. 41–86.

17. Пачев У. М. Представление целых чисел изотропными тернарными квадратичными формами // Изв. РАН. 2006. Сер. матем. Т. 70. № 3. С. 167–184.

18. Малышев А. В. О связи теории распределения нулей L-рядов с арифметикой тернарных квадратичных форм // Докл. АН СССР, т. 122, № 3, 1958. С. 343–345.

19. Малышев А. В. К теории тернарных квадратичных форм. О связи с гипотезой Римана // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат. мех, астрон. 1960, № 7, вып. 2. С. 70–84.

20. Малышев А. В., Широков Б. М. Новое доказательство ключевой леммы дискретного эргодического метода для вектор-матриц второго порядка // Вестн. Ленингр. Ун-та. Сер. мат., мех., астрон., вып. 2. 1991. С. 34–40.

21. Малышев А. В., Нгуен Нгор Гой. О распределении целых точек на некоторых однополостных гиперболоидах // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1983. Т. 121. С. 83–93.

22. Белова Н. Н., Малышев А. В. Эргодические свойства целых точек на эллипсоидах рода $G_{[\Omega,\ 1]}$ // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1981. Т. 106. С. 17–51.

23. Подсыпанин Е. В. Распределение целых точек на детерминантной поверхности // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1980, Т. 93. С. 30–40.

24. Кубенский М. Н., Малышев А. В. Теория поворотов в простых центральных алгебрах // Acta arithm/ 53, № 5. 1990. С. 477–498.

25. Кухарев В. Г. О критическом определителе области $|x|^p + |y|^p < 1$ // Докл. АН СССР. Т. 169. № 6. С. 1273–1275.

26. Малышев А. В., Воронецкий А.В. Доказательство гипотезы Минковского о критическом определителе области $|x|^p + |y|^p < 1$ для $p \geqslant 6$ // Acta arithmetica. vol. 27. 1975. С. 447–458.

27. Гришмановская К. И., Малышев А. В., Пачев У. М., Фидарова А. Ч. Доказательство гипотезы Минковского о критическом определителе области $|x|^p + |y|^p < 1$ в случае $5 < p < 6$ // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1977. Т. 67. С. 95–107.

28. Глазунов Н. М., Голованов А. С., Малышев А. В. Доказательство гипотезы Минковского о критическом определителе области $|x|^p + |y|^p < 1$ // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1986. Т. 151. С. 40–53.

29. Малышев А. В. О коэффициентах Фурье модулярных форм // Зап. научн. семинаров ЛОМИ. Т. 1. 1966. С. 140–163.

REFERENCES

1. Malyshev A. V. 1952, « To the Minkowski- Hlawka theorem on a ray body» , Russian Math. Surveus : 7. № 2, pp. 168–171.

2. Malyshev A. V. 1962, « On representation number by positiv quadratic forms», Tr. Math. Inst. Steklova, vol. 65, pp. 1–212.

3. Sarnak P. 1998, «Some applications of modular forms / M. 133 p.

4. Manin Yu. I., Panchishkin A. V. 1990, «Introduction to number theory». Itogi nauki I techniki. Vol. 49. M. 348 p.

5. Malyshev A. V. 1966, «On the weighted number of integer points on a quadric», Zap. Nauchn. Sem. LOMI. Vol. 1, pp. 6–83 (Russian).

6. Moroz B. Z. 1966. «Distribution of integer points of multidimensional hyperboloids and cones». Zap. Nauchn. Sem. LOMI, vol. 1, pp. 84–113.

7. Dokhov R. A., Pachev U. M. 2015. «On the weighted number of integer points on some multidimensional hyperboloids». Chebyshevskii Sb., vol. 16, no 3 (55), pp. 220–226 (Russian).

8. Linnik Yu. V. 1967. «Ergodic properties of algebraic fields / Leningrad university. 208 p.

9. Venkov B. A. 1981. «Isbrannie Trudy. Leningrad: Nauka. 448 p.

10. Malyshev A. V. 1952. “On the representation large number by positive ternary quadratic forms”. Dokl. AN SSSR. Vol. 87, № 2. pp. 175–178.

11. Malyshev A. V. 1953. “On the representation number by positive ternary quadratic forms”. Dokl. AN SSSR. Vol. 89. pp. 405–406.

12. Malyshev A. V. 1953. ”Asimptotic law for representation by positive ternary quadratic forms”. Dokl. AN SSSR. Vol. 93, № 5. pp. 771–774.

13. Linnik Yu. V., Malyshev A. V. 1953. ”An application of the arithmetic of quaternions to the theory of ternary quadratic forms and to the decomposition of numbers into cubes”. Uspehi math. Nauk. Vol. 8. pp. 3–71.

14. Skubenko B. F. 1962, “Asymptotic distribution of integer points on a one-sheeted hyperboloid and ergodic theorem”. Vol. 26, № 5. pp. 721–752.

15. Teterin Yu. G. 1985. ”Asymptotic formula for the number of representations by completely positive ternary quadratic forms”. Izv. AN SSSR. Ser. Math. vol. 49, № 2. pp. 393–426.

16. Malyshev A. V., Pachev U. M. 1980, “On the arithmetic of matrices of order 2”. Zap. nauchn. Seminarov LOMI. Vol. 93. pp. 41–86 (Russian).

17. Pachev U. M. 2006, “Representation of integer numbers by isotropic ternary quadratic forms”. Izv. RAN. Ser. math. vol. 70. № . pp. 167–184.

18. Malyshev A. V. 1958, ”On the connection of the theory of the distribution of zeros of L – series with the arithmetic of ternary quadratic forms”. Dokl. AN SSSR, vol. 122. № 3. pp. 343–345.

19. Malyshev A. V. 1960, ”On the theory of ternary quadratic forms. On the connection with the Riemann hypothesis”. Vestn. Leningr. University. № 7. pp. 70–84.

20. Malyshev A. V., Shirokov B. M. New proof of the key lemma for second–order vector matrices // Vestn. Leningra. University. Series math. mech. astron., issue 2. 1991. pp. 34–40.

21. Malyshev A. V., Nguên ngoc Khôi. 1983,”On the distribution of integer points on some one-sheeted hyperboloids”. Zap. Nauchn. Seminarov LOMI. vol. 121. pp. 83–93.

22. Belova N. N., Malyshev A. V. 1981, ”Ergodic properties of integer points on the ellipsoids of genus $G_{[\Omega,\,1]}$”. Zap. Nauchn. Seminarov LOMI. vol. 106. pp. 17–51.

23. Podsypanin E. V. 1980, "Distribution of integer points on the determinant surface". Zap. Nauchn. Seminarov LOMI. vol. 93. pp. 30–40.

24. Kubensky M. N., Malyshev A. V. 1990, "The theory of rotations in simple central algebras". Acta arithm. 53. no. 5, pp. 477–498.

25. Kuharev V. G. On critical determinant of region $|x|^p + |y|^p < 1$ // Dokl. AN SSSR. vol. 169. no. 6. pp. 1273–1275.

26. Malyshev A. V., Voronetsky A. V. Proof of Minkowski's conjuncture concerning the critical determinant of the region $|x|^p + |y|^p < 1$ for $p \geqslant 6$ // Acta arithmetica. vol. 27. 1975. pp. 447–458.

27. Grishmanovskaya K. I., Malyshev A. V., Pachev U. M., Fidarova A. Ch. 1977. Proof of the Minkowski conjecture om the critical determinant of domain $|x|^p + |y|^p < 1$ in the case $5 < p < 6$ // Zap. Nauchn. Seminarov LOMI. Vol. 67. pp. 95–107.

28. Glasunov N. M., Golovanov A. S., Malyshev A. V. 1986. Proof of the Minkowski conjuncture of the critical determinant of a domain $|x|^p + |y|^p < 1$ // Zap. Nauchn. Seminarov LOMI. Vol. 151. pp. 40–53.

29. Malyshev A. V. 1966. On the Fourier coefficients of modular forms // Zap. Nauchn. Seminarov LOMI. Vol. 1. pp. 140–163.

Получено 15.10.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

Malyshev/Foto.jpg

А. В. Малышев вместе с женой Клавдией Ивановной и Анной Вальфиш в Карелии в 1973г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 511 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-3-43-73

Основные понятия и теоремы геометрии чисел[1]

А. В. Малышев

Александр Васильевич Малышев — доктор физико-математических наук, профессор (1928–1993).

Аннотация

Этот краткий обзор[1] содержит описание важнейших понятий геометрии чисел и ее главные предложения. Сюда не включена геометрия квадратичных форм — интересный, но специальный раздел теории чисел (и геометрии), стоящий на стыке геометрии чисел и теории квадратичных форм.

Ключевые слова: арифметический минимум, звездное тело, лучевая функция, покрытие, решетка, упаковки.

Библиография: 49 названий.

Для цитирования:
А. В. Малышев. Основные понятия и теоремы геометрии чисел // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 3, с. 43–73.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 3.

UDC 511 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-3-43-73

The main notions and theoremes of the geometry of numbers[2]

A. V. Malyshev

Aleksandr Vasilyevich Malyshev — doctor of physical and mathematical Sciences, professor (1928–1993).

[1]Эта статья была подготовлена мной к печати и опубликована в 1997 году в сборнике статей «Труды Петрозаводского государственного университета», серия математика, выпуск 4. Но этот сборник мало популярен у теоретико-числовиков и такая публикация обзора А. В. Малышева по геометрии чисел подобна выставлению картины Ван Гога в заброшенном доме, подлежащем сносу, ибо этот обзор чрезвычайно богат материалом и, что немаловажно, написан очень хорошим языком, что в математических текстах встречается не часто. Публикация его в широко известном и весьма почитаемом теоретико-числовым сообществом журнале «Чебышеский сборник» отдает должное автору и восстанавливает справедливость. Б. М. Широков (Петрозаводск).

[2]This article was prepared by me for the press and published in 1997 in the collection of articles «Proceedings of Petrozavodsk state University», mathematics series, issue 4. But this collection is not very popular among number theorists and such a publication of A. V. Malyshev's review of the geometry of numbers is similar to the exhibition of a van Gogh painting in an abandoned house to be demolished, because this review is extremely rich in material and, importantly, written in very good language, which is not often found in mathematical texts. The publication of it in the well-known and highly respected journal theoretical and numerical community «Chebyshesky collection» pays tribute to the author and restores justice. B. M. Shirokov (Petrozavodsk).

Abstract

This brief review contents the description of most important concept of geometry or numbers and its main application. It is not included the geometry of quadratic forms — interesting but the special part of a number theory (and a geometry of numbers) standing on joining point of the geometry of numbers and the quadratic forms theory.

Keywords: arithmetical minimum, star body, radial function, covering, lattice, packing.

Bibliography: 49 titles.

For citation:
A. V. Malyshev, 2019, "The main notiones and theoremes of the geometry of numbers *Chebyshevskii sbornik,* vol. 20, no. 3, pp. 43–73.

Оглавление

1. Введение

В широком понимании геометрия чисел — приложение геометрических методов к теоретико-числовым проблемам. Но это слишком широкое, слишком неопределенное понимание предмета геометрии чисел. Как исторически сложившаяся дисциплина геометрия чисел имеет дело, в первую очередь, с задачей об арифметическом минимуме $m(F)$ некоторой вещественной функции

$$F = F(x) = F(x_1, x_2, \dots x_n)$$

от n переменных. Под $m(F)$ понимается величина

$$m(F) = \inf |F(x)|,$$

где точная нижняя граница берется по всем целым точкам $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$, удовлетворяющим некоторым дополнительным условиям (например, условию $x \neq 0$, однородный арифметический минимум). Знание $m(F)$ позволяет нам судить об условиях существования решений диофантова неравенства

$$|F(x)| < c,$$

а к этому вопросу сводятся многие задачи теории чисел.

Геометрия чисел — как раздел теории чисел — сформировалась с выходом (1896 г.) основополагающей монографии Минковского [38][3].

По существу, монография посвящена ныне всем известной теореме Минковского о выпуклом теле и ее многочисленным приложениям.

Основная идея геометрии чисел (принадлежащая Минковскому) заключается в следующем[4]. Для оценки однородного арифметического минимума $m(F)$ важно знать соответствующую постоянную Эрмита $\gamma(F)$ — ***наибольший нормированный арифметический минимум фукции*** F. Но для вычисления постоянной Эрмита или для ее оценок возможна следующая геометрическая процедура. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(F) \subset \mathbb{R}^n$ — множество вещественных точек ξ с условием

$$|F(\xi)| < 1.$$

Рассматривая $\mathfrak{M}$ совместно с различными точечными решетками, сопоставляем множеству $\mathfrak{M}$ некоторую вещественную постоянную — критический определитель $\Delta(\mathfrak{M})$ множества $\mathfrak{M}$. Если F — лучевая функция (т. е. если $\mathfrak{M}_F$ — звездное тело), то $\gamma(F)$ выражается через $\Delta(\mathfrak{M})$ (и обратно). Если же, сверх того, F — выпуклая симметрическая функция, то $\Delta(\mathfrak{M})$ (а следовательно, и $\gamma(F)$) выражается через плотность $\theta(\mathfrak{M})$ ***плотнейшей решетчатой упаковки*** множества $\mathfrak{M}$ и задача вычисления или оценки $\gamma(F)$ и $\Delta(\mathfrak{M}_F)$ сводится к задаче вычисления или оценки $\theta(\mathfrak{M})$. В частности, теорема Минковского о выпуклом теле равносильна геометрически очевидному утверждению: плотность упаковки не превышает 1.

Число книг по геометрии чисел невелико. Помимо упомянутой монографии [38] Минковский опубликовал (1907 г.) книгу [40]. Все работы Минковского по геометрии чисел (и монографии, и статьи) переведены на английский язык и собраны в книге [31]. Современной учебной монографией по геометрии чисел является книга Касселса [8][5]. В 1969 г. вышла в свет большая монография Леккеркеркера [36], претендующая[6] на полный отчет об исследованиях по

[3] Первоначально на титульном листе этой монографии было обозначено “Выпуск первый”. Второго выпуска, к сожалению, не последовало. Второе издание (1910 г.) было дополнено еще одним параграфом. Имеются более поздние перепечатки издания 1910 г.

[4] Разъяснение понятий и утверждений этого абзаца см. ниже, параграфы 2–6.

[5] К сожалению, книга Касселса, на мой взгляд, несколько рыхла композиционно (еще больше это относится к монографии [36]). Для первого чтения можно рекомендовать обзор Главки [33] (или наш обзор) и стр. 9–27, 31–39, 87–111, 134–205, 216–283, 300–312, 369–401 книги Касселса [8].

[6] Эти претензии не вполне обоснованы (по крайней мере, в отношении библиографии, особенно статей на русском языке).

геометрии чисел вплоть до 1965 года (и, в частности, на полноту библиографии). Специальным вопросам геометрии чисел (упаковкам и покрытиям) посвящены книги Роджерса [16] и Фейеша Тота [22]. См. также монографии по диофантовым приближениям Коксма [35] и Касселса [7], содержащие разделы, посвященные геометрии чисел. Некоторые проблемы геометрии чисел рассмотрены в книге [30]. Хорошим дополнением к монографиям по геометрии чисел является энциклопедическая статья Келлера [34]. Среди многочисленных журнальных обзоров по геометрии чисел выделяется блестяще написанный обзор Главки [33]. Последний обзор по геометрии чисел, содержащий отчет о сравнительно новых исследованиях, принадлежит Груберу [29]. Библиография статей по геометрии чисел содержит свыше 2000 названий, пополняясь ежегодно несколькими десятками статей.

Наш обзор можно разбить на три части:

1. § 2–4 посвящены некоторым понятиям геометрии, имеющим важные приложения в дальнейшем, но, строго говоря, не принадлежащим к собственно геометрии чисел.

2. § 5–12 относятся к *однородной задаче*, занимающей в геометрии чисел центральное место.

3. В § 13 дан краткий обзор исследований по *неоднородной задаче* геометрии чисел; в § 14 формулируется проблема Маркова—Делоне, включающая в себя как однородную, так и неоднородную задачи геометрии чисел.

2. Лучевые функции. Звездные и выпуклые тела

Вещественная функция $F = F(x) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданная на $\mathbb{R}^n$, называется *лучевой*, если

1. $F(x) \geqslant 0$;

2. $F(x)$ непрерывна;

3. $F(x)$ однородна: для любого вещественного числа $\lambda > 0$ имеет место равенство

$$F(\lambda x) = \lambda F(x).$$

Лучевым функциям можно привести во взаимно однозначное соответствие звездные тела. Открытое множество $\mathfrak{C}$ мы называем *звездным телом* с центром в точке $O \in \mathbb{R}^n$, если для любой точки $x \in \mathfrak{C}$ отрезок $[0, x] \subset \mathfrak{C}$; в частности, $O \in \mathfrak{C}$. Открытое множество $\mathfrak{K}$ мы называем *выпуклым телом*, если для любых $x, y \in \mathfrak{K}$ отрезок $[x, y] \subset \mathfrak{K}$. Выпуклое тело $\mathfrak{K}$ является звездным телом, причем центром можно считать любую точку тела $\mathfrak{K}$. Соответствие между лучевыми функциями и звездными телами описывается следующими простыми утверждениями:

1. Если $F(x)$ — лучевая функция, то

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_F = \{x \mid F(x) < 1\} \tag{1}$$

— звездное тело. Обратно, если $\mathfrak{C}$— звездное тело с центром в начале координат, то найдется единственная лучевая функция F, для которой неравенство (1) определяет тело $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_F$.

2. Звездное тело $\mathfrak{C}$ ограничено тогда и только тогда, когда соответствующая лучевая функция $F(x)$ **положительна**:
$\forall x \neq 0 \quad F(x) > 0.$

3. Звездное тело $\mathfrak{C}$ выпукло тогда и только тогда, когда соответствующая лучевая функция $F(x)$ **выпукла**: для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$
$$F(x+y) \leqslant F(x) + F(y) \tag{2}$$

Можно доказать, что звездное тело (и в частности, выпуклое тело) измеримо по Жордану.

3. Точечные решетки

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$ линейно независимы. Множество
$$\begin{gathered}\Lambda = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 + \ldots + \mathbb{Z}e_n = \\ \{a \mid a = g_1e_1 + g_2e_2 + \ldots + g_ne_n,\ g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{Z}\},\end{gathered} \tag{3}$$
где $g_1, g_2, \ldots, g_n$ независимо друг от друга пробегают все целые числа, называется *решеткой* (точнее, n-мерной решеткой) *с базисом* $e_1, e_2, \ldots, e_n$. На решетку Λ можно смотреть как на свободную абелеву группу с конечным числом образующих. Данной решетке Λ отвечает бесконечное множество базисов; их общий вид: $(e_1, e_2, \ldots, e_n)U$, где U пробегает все целые матрицы определителя ± 1. Однако величина
$$d(\Lambda) = |\det(e_1, e_2, \ldots, e_n)| > 0, \tag{4}$$
объем параллелепипеда, построенного на векторах базиса, не зависит от выбора базиса; $d(\Lambda)$ называется *определителем решетки* Λ.

n-мерную точечную решетку можно охарактеризовать как существенно n-мерное дискретное точечное множество в $\mathbb{R}^n$, являющееся группой относительно сложения точек (векторов) в $\mathbb{R}^n$.

4. Расположения. Упаковки и покрытия

Пусть $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное множество, Λ — решетка в $\mathbb{R}^n$. Семейство множеств
$$\{\mathfrak{R}, \Lambda\} = \{\mathfrak{R} + a \mid a \in \Lambda\}, \tag{5}$$
где a пробегает все точки решетки Λ, называется *расположением* множества $\mathfrak{R}$ по решетке Λ. Расположение $\{\mathfrak{R}, \Lambda\}$ называется *упаковкой* множества $\mathfrak{R}$ по решетке Λ, если множества $\mathfrak{R} + a$, входящие в семейство $\{\mathfrak{R}, \Lambda\}$, попарно не пересекаются:
$$(a_1, a_2 \in \Lambda,\ a_1 \neq a_2) \Rightarrow (\mathfrak{R} + a_1) \cap (\mathfrak{R} + a_2) = \emptyset.$$
Расположение $\{\mathfrak{R}, \Lambda\}$ называется *покрытием* множества $\mathfrak{R}$ по решетке Λ, если замыкания множеств $\mathfrak{R} + a$, входящих в семейство $\{\mathfrak{R}, \Lambda\}$, в совокупности покрывают все пространство:
$$\bigcup_{a \in \Lambda} (\overline{\mathfrak{R}} + a) = \mathbb{R}^n.$$
Расположение $\{\mathfrak{R}, \Lambda\}$, являющееся одновременно и упаковкой, и покрытием, называется *разбиением* пространства $\mathbb{R}^n$ множествами $\mathfrak{R} + a,\ a \in \Lambda$.

Пусть $\mathfrak{R}$— ограниченное, измеримое по Лебегу множество с мерой $V(\mathfrak{R})$. Ясно, что все множества расположения $\{\mathfrak{R}, \Lambda\}$ измеримы и что $V(\mathfrak{R} + a) = V(\mathfrak{R})$. Рассмотрим шар
$$\mathfrak{C}_X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < X\}$$

радиуса $X \to +\infty$ с центром в начале O. Пусть

$$\mathfrak{R} + a_1, \mathfrak{R} + a_2, \ldots, \mathfrak{R} + a_s, \qquad s = s(X),$$

— все те множества $\{\mathfrak{R}, \Lambda\}$, которые лежат в $\mathfrak{C}_X$. Доказывается, что существует предел

$$\rho(\mathfrak{R}, \Lambda) = \lim_{X \to +\infty} \frac{\sum_{i=1}^{s(X)} V(\mathfrak{R} + a_i)}{V(\mathfrak{C}_X)} = \lim_{X \to +\infty} V(\mathfrak{R}) \frac{s(X)}{v_n X^n},$$

где

$$v_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} = V(\mathfrak{C}_1)$$

— объем единичного шара $|x| < 1$. Величину $\rho(\mathfrak{R}, \Lambda)$ называют *плотностью* расположения $\{\mathfrak{R}, \Lambda\}$ множества $\mathfrak{R}$ по решетке Λ. Грубо говоря, это — "доля" пространства (с учетом перекрытий), занимаемого множествами $\mathfrak{R} + a, a \in \Lambda$. Можно доказать, что

$$\rho(\mathfrak{R}, \Lambda) = \frac{V(\mathbb{R})}{d(\Lambda)}. \tag{6}$$

Ясно, что если $\{\mathfrak{R}, \Lambda\}$ — упаковка, то

$$\rho(\mathfrak{R}, \Lambda) \leqslant 1, \tag{7}$$

так что в силу (6)

$$V(\mathfrak{R}) \leqslant d(\Lambda). \tag{8}$$

Если $\{\mathfrak{R}, \Lambda\}$ — покрытие, то

$$\rho(\mathfrak{R}, \Lambda) \geqslant 1, \quad V(\mathfrak{R}) \geqslant d(\Lambda). \tag{9}$$

Если $\{\mathfrak{R}, \Lambda\}$ — разбиение, то

$$\rho(\mathfrak{R}, \Lambda) = 1, \quad V(\mathfrak{R}) = d(\Lambda). \tag{10}$$

Пусть $\mathfrak{R}$— ограниченное, измеримое по Лебегу множество. Тогда для каждой решетки имеет смысл величина $\rho(\mathfrak{R}, \Lambda)$. Рассмотрим точную верхнюю границу

$$\theta(\mathfrak{R}) = \sup_{\Lambda} \rho(\mathfrak{R}, \Lambda) = \frac{V(\mathfrak{R})}{\inf_{\Lambda} d(\Lambda)}, \tag{11}$$

причем точные границы вычисляются по всем решеткам, для которых $\{\mathfrak{R}, \Lambda\}$ — упаковка. Будем называть $\theta(\mathfrak{R})$ *решетчатым упаковочным коэффициентом* (*плотностью плотнейшей решетчатой упаковки*) множества $\mathfrak{R}$. Заметим, что точная верхняя граница (11) может не достигаться. В силу (7)

$$\theta(\mathfrak{R}) \leqslant 1. \tag{12}$$

Точно так же точную нижнюю границу

$$\tau(\mathfrak{R}) = \inf_{\Lambda} \rho(\mathfrak{R}, \Lambda) = \frac{V(\mathfrak{R})}{\sup_{\Lambda} d(\Lambda)} \tag{13}$$

плотностей $\rho(\mathfrak{R}, \Lambda)$, взятую по всем решетчатым покрытиям, будем называть *решетчатым коэффициентом покрытия (плотностью экономичнейшего решетчатого покрытия)* множеством $\mathfrak{R}$, хотя точная нижняя граница (13) может и не достигаться. В силу (9)

$$\tau(\mathfrak{R}) \geqslant 1. \tag{14}$$

Рассматриваются (и это иногда полезно для задач геометрии чисел) и общие, не обязательно решетчатые, расположения. Пусть T — множество точек пространства $\mathbb{R}^n$ (как правило, это дискретное множество, более или менее равномерно распределенное по пространству $\mathbb{R}^n$). *Расположением* $\{\mathfrak{R}, T\}$ множества $\mathfrak{R}$ по T называем семейство множеств

$$\{\mathfrak{R}, T\} = \{\mathfrak{R} + a \mid a \in T\}. \tag{15}$$

Если множества $\mathfrak{R} + a$ семейства (15) попарно не пересекаются, то мы говорим об *упаковке* $\mathfrak{R}$ по T. Если $\cup_{a\in T}(\overline{\mathfrak{R}} + a) = \mathbb{R}^n$, то говорим о *покрытии* $\mathfrak{R}$ по T.

Пусть $\mathfrak{R}$— ограниченное, измеримое по Лебегу множество с мерой $V(\mathfrak{R})$. В общем случае расположения $\{\mathfrak{R}, T\}$ вопрос о существовании плотности $\rho(\mathfrak{R}, T)$ расположения становится нетривиальным. Определяется: *нижняя плотность*

$$\rho^-(\mathfrak{R}, T) = \limsup_{X\to\infty} \frac{\sum_{(\mathfrak{R}+a_i)\subset\mathfrak{C}_X} V(\mathfrak{R} + a_i)}{V(\mathfrak{C}_X)}$$

и *верхняя плотность*

$$\rho^+(\mathfrak{R}, T) = \liminf_{X\to\infty} \frac{\sum_{(\mathfrak{R}+a_i)\cap\mathfrak{C}_X\neq\emptyset} V(\mathfrak{R} + a_i)}{V(\mathfrak{C}_X)}.$$

Если $\rho^+(\mathfrak{R}, T) = \rho^-(\mathfrak{R}, T) = \rho(\mathfrak{R}, T)$, то $\rho(\mathfrak{R}, T)$ называем *плотностью* расположения $\{\mathfrak{R}, T\}$.

Подобно решетчатым упаковкам и покрытиям определяем:

$$\theta^*(\mathfrak{R}) = \sup_T \rho^+(\mathfrak{R}, T),$$

— *упаковочный коэффициент* $\mathfrak{R}$, где точная верхняя граница берется по всем упаковкам $\{\mathfrak{R}, T\}$;

$$\tau^*(\mathfrak{R}) = \inf_T \rho^-(\mathfrak{R}, T),$$

— *коэффициент покрытия* $\mathfrak{R}$, где точная нижняя граница берется по всем покрытиям $\{\mathfrak{R}, T\}$. Ясно, что для любого ограниченного измеримого множества $\mathfrak{R}$

$$\theta(\mathfrak{R}) \leqslant \theta^*(\mathfrak{R}) \leqslant 1 \leqslant \tau^*(\mathfrak{R}) \leqslant \tau(\mathfrak{R}). \tag{16}$$

Вопрос о совпадении $\theta(\mathfrak{R})$ и $\theta^*(\mathfrak{R})$ (а также $\tau(\mathfrak{R})$ и $\tau^*(\mathfrak{R})$) является очень сложным, даже для простейшего частного случая n-мерного шара $\mathfrak{R} = \mathfrak{C}_n = \{x \mid |x| < 1\}$. Предполагается, что для некоторого $n_0 \geqslant 3$:

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{T}(\mathfrak{C}_n) &= \mathbb{T}^*(\mathfrak{C}_n), \quad \text{если } n \leqslant n_0; \\ \mathbb{T}(\mathfrak{C}_n) &< \mathbb{T}^*(\mathfrak{C}_n), \quad \text{если } n > n_0. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Это доказано лишь для $n = 2$. Уже случай $n = 3$ не исследован до конца (ср. Фейеш Тот [22, гл.7, § 2]).

О нерешетчатых упаковках и покрытиях см.: Роджерс [16].

5. Арифметический минимум лучевой функции. Критический определитель и критические решетки множества

Рассмотрения § 2–4 являются лишь введением в геометрию чисел. Собственно геометрия чисел начинается при совместном рассмотрении точечных решеток и множеств (или лучевых функций), а также связанных с ними решетчатых упаковок и покрытий. И здесь возникают важнейшие понятия геометрии чисел [7] — понятия критического определителя и критических решеток данного множества $\mathfrak{M} \subset \mathbb{R}^n$.

Говорим, что точечная решетка $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ является *допустимой* для множества $\mathfrak{M} \subset \mathbb{R}^n$ или $\mathfrak{M}$-*допустимой*, если множество $\mathfrak{M}$ не содержит точек решетки Λ, кроме, быть может, начала координат, т. е. если

$$\mathfrak{M} \cap \Lambda \subset \{0\}.$$

Множество $\mathfrak{M}$, имеющее хотя бы одну допустимую решетку, называется множеством *конечного типа*; в противном случае $\mathfrak{M}$ называется множеством *бесконечного типа.* Ясно, что всякое ограниченное множество является множеством конечного типа.

Пусть $\mathfrak{M}$— множество конечного типа. Точная нижняя граница

$$\Delta(\mathfrak{M}) = \inf_{\Lambda - \mathfrak{M}\text{-допустима}} d(\Lambda)$$

определителей $d(\Lambda)$ всех $\mathfrak{M}$-допустимых решеток Λ называется *критическим определителем* множества $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{M}$ — множество бесконечного типа, то дополнительно определяем:

$$\Delta(\mathfrak{M}) = +\infty.$$

Всякая $\mathfrak{M}$-допустимая решетка Λ, для которой

$$d(\Lambda) = \Delta(\mathfrak{M}),$$

называется *критической решеткой* множества $\mathfrak{M}$. Ясно, что множество бесконечного типа не имеет критических решеток. Множество $\mathfrak{M}$ конечного типа также может не иметь критических решеток, или иметь их конечное число или иметь их бесконечное множество (и счетной, и континуальной мощности). Условия существования критических решеток могут быть выведены из предложений Малера о компактности решеток. В частности, для нужд геометрии чисел вполне достаточно следующего утверждения:

всякое звездное тело $\mathbb{S}$ конечного типа с центром в начале O имеет хотя бы одну критическую решетку.

Подробности см.: Касселс [8, гл. 5, § 3–5]; Леккеркеркер [36, § 17].

Важность понятий критического определителя и критических решеток определяется их связью с понятием однородного арифметического минимума. Пусть $F = F(x)$ — лучевая функция, заданная на $\mathbb{R}^n$, $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ — точечная решетка (например, решетка $\mathbb{Z}^n$ целых точек). Точная нижняя граница[8]

$$m(F, \Lambda) = \inf_{a \in \Lambda,\, a \neq 0} F(a) \tag{18}$$

значений $F(a)$ функции F в точках a решетки Λ, отличных от начала O, называется *минимумом* (точнее, *однородным арифметическим минимумом*) функции F в решетке Λ. Точная нижняя граница (18) может не достигаться. Легко доказать (Касселс [8, стр. 154]), что (18) заведомо достигается для положительных лучевых функций F, т. е. для ограниченных звездных тел (1).

Для оценки $m(F, \Lambda)$ сверху важно уметь вычислять или оценивать *постоянную Эрмита*

$$\gamma(F) = \sup_{\Lambda} \frac{m(F, \Lambda)}{\{d(\Lambda)\}^{\frac{1}{n}}} \tag{19}$$

[7] Точнее говоря, понятия, относящиеся к однородной задаче — основному разделу геометрии чисел; однородной задаче посвящены § 5–12 нашего обзора.

[8] Некоторые авторы (см. Касселс [8]) обозначают $m(F, \Lambda)$ через $F(\Lambda)$.

лучевой функции F; точная верхняя граница берется по всем n-мерным точечным решеткам Λ; $\gamma(F)$ достигается на некоторой решетке Λ_0 (где $m(F,\Lambda)$, вообще говоря, может не достигаться). Из определения $\gamma(F)$ сразу следует, что

$$m(F,\Lambda) \leqslant \gamma(F)\{d(\Lambda)\}^{\frac{1}{n}}, \tag{20}$$

причем по любому $\varepsilon > 0$ можно подобрать такую решетку $\Lambda^{(0)} = \Lambda^{(0)}_{\varepsilon}$, что

$$m(F,\Lambda^{(0)}) > \{\gamma(F) - \varepsilon\}\{d(\Lambda)\}^{\frac{1}{n}},$$

иными словами, при данной решетке Λ (скажем, решетке целых точек $\mathbb{Z}^n$) неравенство типа (20) неулучшаемо, если вместе с F рассматривать и все лучевые функции, получающиеся из F невырожденной вещественной линейной однородной подстановкой переменных.

Связь постоянной Эрмита с понятием критического определителя устанавливается следующим просто доказываемым предложением[9].

Теорема 1. *Пусть $F(x)$ — лучевая функция. Тогда*

$$\gamma(F) = \{\Delta(\mathfrak{C}_F)\}^{-\frac{1}{n}}, \tag{21}$$

где $\mathfrak{C}_F$ — звездное тело, определяемое неравенством (1).

Если звездное тело $\mathfrak{C}_F$ имеет конечный тип, то

$$0 < \Delta(\mathfrak{C}_F) < +\infty,$$

ибо в этом случае существует критическая решетка (см. выше), так что из (21) выводим:

$$0 < \gamma(F) < +\infty. \tag{22}$$

Если $\mathfrak{C}_F$ — звездное тело бесконечного типа, $\Delta(\mathfrak{C}_F) = +\infty$, то (21) означает, что $\gamma(F) = 0$ и из (20) следует, что для любой решетки Λ

$$m(F,\Lambda) = 0,$$

так что для любого $\varepsilon > 0$ найдется точка $a \in \Lambda,\ a \neq 0$ с условием

$$F(a) < \varepsilon. \tag{23}$$

Поэтому определение типа данного звездного тела $\mathfrak{C}_F$ является принципиально важной (и сложной) задачей. В частности, определение типа $\mathfrak{C}_F$ для

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sqrt{\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm \ldots \pm x_n^2}, \qquad n \geqslant 5,$$

где под знаком корня стоит неопределенная форма (не все знаки одинаковы), привело бы к решению известной проблемы Дэвенпорта—Хейльброна (см. Леккеркеркер [36, стр. 347]).

На $\gamma(F)$ можно смотреть как на абсолютный максимум функции

$$\mu(\Lambda) = \mu(F,\Lambda) = \frac{m(F,\Lambda)}{\{d(\Lambda)\}^{\frac{1}{n}}}$$

[9]Если не оговорено противное, доказательства приводимых предложений можно найти в книге Касселса [8].

на множестве Z_n всех решеток $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$. Но на Z_n разными (эквивалентными) путями можно определить понятие близости решеток, превратив Z_n в топологическое (и даже метрическое) пространство. Тогда, наряду с абсолютным максимумом $\gamma(F)$ функции $\mu(\Lambda) = \mu(F, \Lambda)$, естественно рассматривать и локальные максимумы $\gamma^{(i)}(F)$. Решетки, отвечающие локальным максимумам функции $\mu(\Lambda)$ на Z_n, будем называть *экстремальными* (или *предельными*). Несколько обще, экстремальные решетки для данного множества $\mathfrak{M}$ можно определять как точки локального условного минимума функции $d(\Lambda)$ на Z_n, предполагая, что решетка Λ допустима для $\mathfrak{M}$. Критические решетки множества $\mathfrak{M}$ находятся среди экстремальных. Помимо $\gamma(F)$ (или $\Delta(\mathfrak{M})$) рассматривается набор локальных постоянных Эрмита $\{\gamma^{(i)}(F)\}$ функции F (или набор экстремальных определителей $\{\Delta^{(i)}(\mathfrak{M})\}$ множества $\mathfrak{M}$).

6. Теоремы Блихфельдта и Минковского. Теорема Минковского о системе линейных однородных форм. Параллелоэдры

Связь между критическим определителем и плотностью решетчатой упаковки устанавливается следующим предложением, принадлежащим, по существу, Минковскому, но называемому теоремой Блихфельдта (или теоремой Биркгофа—Блихфельдта).

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{R}$— произвольное множество в $\mathbb{R}^n$, $D\,\mathfrak{R}$ — соответствующее ему разностное множество:*

$$D\,\mathfrak{R} = \{\xi - \eta \mid \xi, \eta \in \mathfrak{R}\}.$$

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ — решетка. Для того, чтобы расположение $\{\mathfrak{R}, \Lambda\}$ было упаковкой, необходимо и достаточно, чтобы решетка Λ была $D\,\mathfrak{R}$-допустимой.

Используя (11), отсюда сразу получаем:

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{R}$ — ограниченное, измеримое по Лебегу множество. Тогда*

$$\theta(\mathfrak{R}) = \frac{V(\mathfrak{R})}{\Delta(D\,\mathfrak{R})}. \tag{24}$$

Если для заданного множества $\mathfrak{M}$ можно найти *первообразное* ограниченное множество $\mathfrak{R}$ с условием

$$\mathfrak{M} = D\,\mathfrak{R}, \tag{25}$$

то (24) можно переписать так:

$$\Delta(\mathfrak{M}) = \frac{V(\mathfrak{R})}{\theta(\mathfrak{R})}. \tag{26}$$

К сожалению, представление (25) имеется далеко не всегда (в частности, потому, что разностное множество симметрично относительно начала). Если его нет, то ищут ограниченное измеримое множество $\mathfrak{R}$ с условием

$$D\,\mathfrak{R} \subset \mathfrak{M}. \tag{27}$$

Тогда $\Delta(D\,\mathfrak{R}) \leqslant \Delta(\mathfrak{M})$, а из (24) выводим:

$$\Delta(\mathfrak{M}) \geqslant \frac{V(\mathfrak{R})}{\theta(\mathfrak{R})}. \tag{28}$$

Так как имеет место тривиальное неравенство (12), то отсюда вытекает следующее предложение, позволяющее оценивать снизу критический определитель заданного множества.

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное заданное множество, $\mathfrak{N}$ — измеримое по Лебегу (не обязательно ограниченное) множество меры $V(\mathfrak{N})$ с условием (27). Тогда*

$$\Delta(\mathfrak{M}) \geqslant V(\mathfrak{N}). \tag{29}$$

Есть важный класс множеств, когда проблема отыскания оптимального $\mathfrak{N}$ легко и исчерпывающе решается. Это симметрическое относительно O выпуклое тело $\mathfrak{K}$. Для него

$$\mathfrak{N} = \frac{1}{2}\mathfrak{K}, \quad V(\mathfrak{N}) = \frac{1}{2^n}V(\mathfrak{K}), \quad D\,\mathfrak{N} = \mathfrak{K}, \quad \theta(\mathfrak{N}) = \theta(\mathfrak{K}),$$

нет множества $\mathfrak{N}$, удовлетворяющего (27) и имеющего объем, больший, чем множество $\dfrac{1}{2}\,\mathfrak{K}$. Для $\mathfrak{M} = \mathfrak{K}$, $\mathfrak{N} = \dfrac{1}{2}\,\mathfrak{K}$ формула (26) превращается в следующее важнейшее предложение.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{K}$ — выпуклое, симметричное относительно начала O тело объемом $V(\mathfrak{K})$. Тогда*

$$\Delta(\mathfrak{K}) = \frac{V(\mathfrak{K})}{2^n\,\theta(\mathfrak{K})}. \tag{30}$$

В частности,

$$\Delta(\mathfrak{K}) \geqslant 2^{-n}V(\mathfrak{K}). \tag{31}$$

Неравенство (31), являющееся одной из формулировок теоремы Минковского о выпуклом теле, есть прямое следствие формулы (30) и неравенства (12). На неравенство (31) можно смотреть так же, как на частный случай неравенства (29) при $\mathfrak{M} = \mathfrak{K}$, $\mathfrak{N} = \frac{1}{2}\,\mathfrak{K}$.

Неравенство Минковского (31) дает оценку снизу критического определителя $\Delta(\mathfrak{K})$ выпуклого, симметричного относительно O тела $\mathfrak{K}$. Эта оценка, вообще говоря, неулучшаема. Например, для параллелепипеда

$$\mathfrak{Q} = \{\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n \mid |\xi_1| < 1, |\xi_2| < 1, \ldots, |\xi_n| < 1\},$$

где $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис решетки Λ, неравенство (31) превращается в равенство, ибо Λ — решетка, допустимая для $\mathfrak{Q}$,

$$\Delta(\mathfrak{Q}) = d(\Lambda), \quad V(\mathfrak{Q}) = 2^n|\det(e_1, e_2, \ldots, e_n)| = 2^n d(\Lambda).$$

В силу (30) для того, чтобы неравенство (31) превратилось в равенство, необходимо и достаточно, чтобы $\theta(\mathfrak{K}) = 1$. Выпуклое тело R с условием

$$\theta(R) = 1 \tag{32}$$

называется *параллелоэдром*. Для того, чтобы выпуклое тело R было параллелоэдром, необходимо и достаточно (см. § 4), чтобы нашлась такая решетка Λ, что расположение $\{R, \Lambda\}$ являлось бы разбиением пространства $\mathfrak{R}^n$. Параллелоэдры играют важную роль в геометрии чисел и в математической кристаллографии. Их исследование далеко не завершено. Доказано, что R — симметричный многогранник с числом граней не больше $2(2^n - 1)$. Типы параллелоэдров описаны лишь для $n \leqslant 4$ (для $n = 2$ — два типа, для $n = 3$ — пять типов (Е. С. Федоров), для $n = 4$ — 51 тип (В. Н. Делоне)). Важнейший частный случай параллелоэдров — области Дирихле—Вороного. Пусть Λ — решетка, множество

$$\mathfrak{D}_\Lambda = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi| \leqslant |\xi - a| \quad \forall a \in \Lambda\} \tag{33}$$

называется *областью Дирихле—Вороного*[10] решетки Λ. Г. Ф. Вороной построил алгоритм отыскания типов областей $\mathfrak{D}_\Lambda$ для каждого данного n. Другие варианты такого алгоритма принадлежат Е. П. Барановскому и С. С. Рышкову [17]. Эти авторы нашли все *общие* типы для $n = 5$ (их оказалось 221). Для завершения, в известном смысле, теории параллелоэдров было бы желательно доказать труднейшую гипотезу Вороного:

Всякий параллелоэдр есть аффинный образ некоторой области Дирихле — Вороного.

Эта гипотеза доказана Г. Ф. Вороным для так называемых *примитивных* параллелоэдров R, таких, что в разбиении $\{R, \Lambda\}$ в каждой вершине сходится ровно $n+1$ ребро (параллелоэдры *общего положения*). Некоторое обобщение этого результата принадлежит Щ. Л. Житомирскому. Подробности теории параллелоэдров, в частности, теории областей Дирихле—Вороного см.: В. Н. Делоне [4,5], С. С. Рышков, Е. П. Барановский [17] и цитированную там литературу.

В силу (21) неравенство (31) дает оценку сверху постоянной Эрмита $\gamma(F)$ выпуклой симметричной лучевой функции $F(x)$, а с ней и оценку сверху арифметического минимума $m(F, \Lambda)$. На этом основаны все приложения теоремы Минковского о выпуклом теле. Например, применяя (20), (21) и (31) к решетке $\Lambda = \mathbb{Z}^n$ целых точек и лучевой функции

$$F(x) = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\frac{1}{\beta_i}\left|\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j\right|\right\},$$

приходим к следующей важной теореме Минковского о системе линейных однородных форм.

Теорема 4. *Пусть* $\beta_i > 0,\ \alpha_{ij} \in \mathbb{R},\ |\det(\alpha_{ij})| = \Delta > 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$. *Пусть*

$$\beta_1\beta_2\cdots\beta_n > \Delta. \tag{34}$$

Тогда найдутся такие целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *не равные одновременно нулю, что*

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j\right| < \beta_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{35}$$

Формулы (21) и (30) показывают, что для выпуклой симметричной функции $F(x)$ следующие три проблемы эквивалентны[11]:

1. проблема арифметических минимумов, точнее, задача отыскания $\gamma(F)$;
2. проблема нахождения критического определителя $\Delta(\mathfrak{K}_F)$ тела $\mathfrak{K}_F$, определенного неравенством (1);
3. проблема плотнейших решетчатых упаковок тела $\mathfrak{K}$, точнее, задача отыскания $\theta(\mathfrak{K}_F)$; при этом

$$\gamma(F) = \{\Delta(\mathfrak{K}_F)\}^{\frac{-1}{n}} = 2\left\{\frac{\theta(\mathfrak{K}_F)}{V(\mathfrak{K}_F)}\right\}^{\frac{1}{n}}. \tag{36}$$

Частично (см. выше, (21) и (26)) такое сведение проблемы арифметических минимумов возможно и для общих лучевых функций.

В заключение заметим, что теоремы Минковского и Блихфельдта имеют многочисленные переформулировки, обобщения и уточнения (см. Касселс [8], Леккеркеркер [36]).

[10] Под областью Дирихле — Вороного иногда понимают открытое множество — внутренность множества (33). Область $\mathfrak{D}_\Lambda$ можно сопоставлять не решетке, а положительно определенной форме f (отвечающей Λ): $\mathfrak{D}_f = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid f(\xi) \leqslant f(\xi - a), \quad \forall a \in \mathbb{Z}^n\}$.

[11] Эта эквивалентность окажется еще более глубокой, если мы будем рассматривать локальные экстремумы $\gamma^{(i)}(F), \Delta^{(i)}(\mathfrak{K}_F), \theta^{(i)}(\mathfrak{K}_F)$ и отвечающие им экстремальные решетки $\Lambda^{(\gamma_i)}, \Lambda^{(\Delta_i)}, \Lambda^{(\theta_i)}$. Между этими решетками имеется полное соответствие (с точностью до гомотетии). Для соответствующих величин $\gamma^{(i)}(F), \Delta^{(i)}(\mathfrak{K}_F), \theta^{(i)}(\mathfrak{K}_F)$ имеет место формула типа (36).

7. О методе Блихфельдта

Для оценки критического определителя $\Delta(\mathfrak{M})$ данного множества $\mathfrak{M}$ можно воспользоваться неравенством Минковского (31). Для этого надо вписать в $\mathfrak{M}$ выпуклое, симметричное относительно O тело $\mathfrak{K}$ возможно большего объема $V(\mathfrak{K})$. Тогда из $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{M}$ и из (31) выводим:

$$\Delta(\mathfrak{M}) \geqslant \Delta(\mathfrak{K}) \geqslant 2^{-n} V(\mathfrak{K}). \tag{37}$$

Однако этот метод оценки не всегда эффективен, особенно для множеств $\mathfrak{M}$, не являющихся выпуклыми.

Имеется ряд методов для оценки или вычисления $\Delta(\mathfrak{M})$ (см. Леккеркеркер [36, гл. 5]). Наиболее известным из них, общим и перспективным является метод Блихфельдта.

Метод Блихфельдта является сочетанием двух идей. Во-первых, для невыпуклых множеств $\mathfrak{M}$ при оптимальном выборе множества $\mathfrak{N}$ (оно должно удовлетворять условию (27) и иметь возможно большую меру $V(\mathfrak{N})$) неравенство (29) дает, как правило, более сильную оценку, чем (37). Проблема отыскания по заданному $\mathfrak{M}$ такого множества $\mathfrak{N}$ непроста. Она до сих пор дискутируется в литературе. Последняя по времени публикация принадлежит Спону [47]. В ней рассматривается вопрос оптимального выбора $\mathfrak{N}$ при данном $\mathfrak{M}$. Мы отсылаем читателя к этой статье и цитированной там литературе.

Во-первых, как для выпуклых, так и для невыпуклых множеств весьма плодотворной оказалась следующая идея. Вместо упаковок или покрытий (последние — для неоднородной задачи, см. § 13; решетчатых или нерешетчатых) множества $\mathfrak{M}$ рассматриваем расположения гомотетически расширенных множеств $t\,\mathfrak{M}$, приписывая им переменную плотность. Иначе говоря, рассматриваются не множества (или их характеристические функции), а финитные распределения $\varphi(x)$, связанные с этими множествами. При этом используется не сама теорема Блихфельдта, а ее обобщение на распределения $\varphi(x)$ (см.: Касселс [8, стр. 99, теорема 4]). Подробности о методе Блихфельдта (и литературу) см.: Леккеркеркер [36, § 33]).

Одним из вариантов реализации метода Блихфельдта является следующее предложение (Леккеркеркер [36, стр. 263, теорема 3]).

Пусть $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{T}$ — звездные тела с лучевыми функциями f и g соответственно:

$$\mathfrak{S} = \{x \mid f(x) < 1\}, \qquad \mathfrak{T} = \{x \mid g(x) < 1\},$$

причем $\mathfrak{T}$ ограничено (т. е. g — положительная лучевая функция). Рассмотрим финитную неотрицательную функцию $\delta(\rho)$:

$$\delta(\rho) \geqslant 0, \quad \rho \in \mathbb{R}, \quad \rho \geqslant 0, \quad \delta(\rho) = 0 \quad \text{при} \quad \rho > \rho_0.$$

Пусть для некоторых вещественных параметров α, β, $\gamma > 0$ при любом конечном наборе точек $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ из

$$f(x_k - x_l) \geqslant \beta \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, m,\ k \neq l) \tag{38}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$ следует

$$\sum_{k=1}^{m} \delta\left([g(x - x_k)]^\alpha\right) \leqslant \gamma. \tag{39}$$

Тогда

$$\Delta(\mathfrak{S}) \geqslant \beta^{-n} (\gamma^{-1} I) V(\mathfrak{T}), \tag{40}$$

где

$$I = \int_0^\infty \delta(\rho)\, d(\rho^{\frac{n}{\alpha}}) = \frac{n}{\alpha} \int_0^{\rho_0} \rho^{\frac{n}{\alpha} - 1} \delta(\rho)\, d\rho.$$

Возникает вопрос об *оптимизации* метода Блихфельдта, в частности, о выборе по $\mathfrak{T}$ звездного тела $\mathfrak{T}$, функции $\delta(\rho)$ и параметров $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ с условиями (39) с тем, чтобы оценка (40) была наилучшей.

8. Классические задачи геометрии чисел

Описанные ниже диофантовы проблемы занимают центральное место в геометрии чисел (по крайней мере, в части однородных проблем). Они являются пробным камнем для сравнения возможностей и силы различных методов геометрии чисел.

К этим проблемам применима (и применялась — см. Минковский [38]) теорема Минковского о выпуклом теле — неравенства (31), (37) с учетом равенства (21). Получающиеся при этом оценки (см. ниже) в дальнейшем были заметно усилены с помощью других методов, в первую очередь, метода Блихфельдта. Бегло опишем результаты, полученные к настоящему времени, отсылая за подробностями и доказательствами к гл. 6 монографии Леккеркеркера [36] (см. также: Роджерс [16], Касселс [8]).

1^0. **Проблема одновременных диофантовых приближений**.

Пусть $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ — вещественные числа. Ищем возможно близкие к ним рациональные числа $\dfrac{p_h}{q}$ $(h = 1, 2, \dots, n)$, $q > 0$, $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{Z}$. Теорема 4 Минковского о системе линейных однородных форм сразу же приводит к следующему утверждению:

Для любых вещественных чисел $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ найдутся такие целые числа $q \geqslant Q$, $p_1, p_2, \dots, p_n$, где Q сколь угодно велико, что

$$\left|\theta_i - \frac{p_i}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^{1+\frac{1}{n}}}, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{41}$$

Уже Минковский [38], применяя вместо теоремы 4 неравенство (37) с подходяще подобранным выпуклым телом $\mathfrak{K}$, смог в (41) заменить 1 в числителе справа на $n/(n+1)$. Проблему одновременных диофантовых приближений можно сформулировать следующим образом:

Для данного n найти $c_n = \inf c$, где точная нижняя граница берется по всем вещественным числам c, для которых система неравенств

$$\left|\theta_i - \frac{p_i}{q}\right| \leqslant \frac{c}{q^{1+\frac{1}{n}}}, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \tag{42}$$

разрешима в целых числах $q \geqslant Q$, $p_1, p_2, \dots, p_n$, при любых $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ и Q (и затем выяснить, будет ли (42) разрешимо при $c = c_n$).

Эта проблема решена лишь при $n = 1$. Тогда $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$; описаны θ_1, для которых (42) превращается в равенство при $n = 1$; установлено явление изоляции (ср. ниже, § 12); исследован спектр $\{c\}$. См. обзор А. В. Малышева [10]. При $n \geqslant 2$ для c_n известны только оценки. Лучшие результаты для произвольных n получены Споном [47]. См. также: Леккеркеркер [36, § 45].

2^0. **Проблема однородного арифметического минимума $m(\Phi_{r,s}^{(p)})$ формы**

$$\Phi_{r,s}^{(p)} = |L_1|^p + |L_2|^p + \dots + |L_n|^p.$$

Здесь $p > 0$ — вещественный параметр; $L_k = L_k(x) = L_k(x_1, \dots, x_n)$, $k = 1, 2, \dots, r$, — вещественные линейные формы, $L_{r+l+s}(x) = \overline{L}_{r+l}(x)$ — комплексно сопряженные линейные формы, $l = 1, 2, \ldots, s$, $r + 2s = n$, $\det(L_1, L_2, \ldots, L_n) = \Delta \neq 0$;

$$\begin{aligned} \Phi_{r,s}^{(p)} &= \Phi_{r,s}^{(p)}(x) = \sum_{i=1}^{n} |L_i(x)|^p, \\ m(\Phi_{r,s}^{(p)}) &= \inf_{x\in\mathbb{Z}^n,\, x\neq 0} \Phi_{r,s}^{(p)}(x) = \min_{x\in\mathbb{Z}^n,\, x\neq 0} \Phi_{r,s}^{(p)}(x). \end{aligned} \tag{43}$$

Пусть $p \geqslant 1$. Тогда

$$\mathfrak{S}_{r,s}^{(p)} = \{x \mid \Phi_{r,s}^{(p)}(x) < 1\}$$

— симметричное выпуклое тело. Применение к нему теоремы 3 Минковского позволяет утверждать, что найдется такой целый вектор $x \neq 0$, что

$$\sum_{i=1}^{n} |L_i(x)|^p \leqslant (c_{r,s}^{(p)} |\Delta|)^{\frac{p}{n}}, \tag{44}$$

где

$$c_{r,s}^{(p)} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^s \frac{2^{2s/p}\Gamma(1+\frac{n}{p})}{\{\Gamma(1+\frac{1}{p})\}^r \{\Gamma(1+\frac{2}{p})\}^s}. \tag{45}$$

С помощью теоремы 3 можно оценить $m(\Phi_{r,s}^{(p)})$ и при $0 < p < 1$.

Эти оценки (при разных $p > 0$) уточнялись различными авторами, использовавшими варианты метода Блихфельдта. Последние и самые сильные результаты: Главка [32], Ранкин [42]. См. также: Леккеркеркер [36, § 40] и цитированную там литературу.

В частном случае $n = r = 2$ мы имеем дело с *гипотезой Минковского* о критическом определителе области $|x|^p + |y|^p < 1$, $p > 1$ (см.: А. В. Малышев [11] и цитированную там литературу) и ее обобщениями на $0 < p < 1$ (см.: Леккеркеркер [36, § 40, п. 4]).

2а. **Проблема Эрмита арифметических минимумов положительных квадратичных форм** (проблема плотнейших решетчатых упаковок единичных шаров).

Это частный случай проблемы 2^0 при $p = 2$, $n = r$, $s = 0$. Речь идет об оценках $m(f) = m(\Phi_{n,0}^{(2)})$ однородного арифметического минимума положительной квадратичной формы $f = f(x)$ определителя $d(f) \neq 0$ и постоянной Эрмита

$$\gamma_n = \sup_{f\in R} \frac{m(f)}{\sqrt[n]{d(f)}} = \{\gamma(F_n)\}^2, \tag{46}$$

где точная верхняя граница берется по множеству R всех положительно определенных квадратичных форм f.

Точные значения γ_n (и соответствующие им “оптимальные” или “критические” формы) известны лишь для $n \leqslant 8$ (см.: Блихфельдт [26], Н. М. Ветчинкин [3]). Прямое приложение неравенства Минковского (31) (частный случай оценки (44)) приводит к оценке

$$\gamma_n \leqslant \frac{4}{\pi} \left\{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)\right\}^{\frac{2}{n}}. \tag{47}$$

Блихфельдт (1914 г.) усилил эту оценку до

$$\gamma_n \leqslant \frac{2}{\pi} \left\{\Gamma\left(2+\frac{n}{2}\right)\right\}^{\frac{2}{n}}. \tag{48}$$

Оценка (48) также улучшалась (использовался метод Блихфельдта). См.: Роджерс [16] и цитированную там литературу. Асимптотически (при $n \to \infty$) результаты такие же, что и (48), а (47) асимптотически вдвое больше:

$$\frac{2}{\pi} \left\{\Gamma(2+\frac{n}{2})\right\}^{\frac{2}{n}} \sim \frac{1}{\pi e^n}. \tag{48a}$$

Лучшая оценка сейчас принадлежит В. И. Левенштейну [9][12]. Предполагается, что при $n \to \infty$

$$\gamma_n \sim \frac{1}{2\pi e^n}. \tag{49}$$

Оценка снизу для γ_n (см. § 10, теорема Главки) отвечает этой асимптотике. Дело за оценкой сверху, принципиально лучшей, чем (48) (и лучшей, чем оценка Кобатянского и В. И. Левенштейна).

Проблема Эрмита теперь трактуется существенно шире. Наряду с абсолютным экстремумом γ_n и соответствующими ему оптимальными формами, рассматриваются локальные экстремумы функции $\mu(f) = m(f)(d(f))^{-1/n}$ на множестве R положительных квадратичных форм и соответствующие им *экстремальные* (или *предельные*) формы, а также их обобщение — *совершенные* формы. Имеются в виду исследования А. Н. Коркина—Е. И. Золотарева, Г. Ф. Вороного и других авторов (см.: В. Н. Делоне [5], Е. П. Барановский [18] и цитированную там обширную литературу, в значительной степени относящуюся к геометрии квадратичных форм).

3^0. **Проблема однородного арифметического минимума $m(\Pi_{r,s})$ произведения $\Pi_{r,s} = \prod_{i=1}^n |L_i|$ линейных однородных форм.**

Обозначения см. в п. 2^0. Имеется в виду

$$m(\Pi_{r,s}) = \inf_{x\in\mathbb{Z}^n,\, x\neq 0} \Pi_{r,s}(x) = \inf_{x\in\mathbb{Z}^n,\, x\neq 0} \prod_{i=1}^n |L_i(x)|.$$

По неравенству между средними арифметическим и геометрическим для любого $p > 0$

$$\prod_{i=1}^n |L_i| = \left\{ \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n |L_i|^p} \right\}^{n/p} \leqslant \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |L_i|^p \right\}^{n/p},$$

и проблема 3^0 сводится к проблеме 2^0. Применяя оценку (44) при $p = 1$, получаем, что в обозначениях п. 2^0 *найдутся такие целые числа* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *что*

$$\prod_{i=1}^n |L_i| = \prod_{i=1}^n |L_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leqslant \left(\frac{4}{\pi}\right)^s \frac{n!}{n^n} |\Delta|. \tag{50}$$

Эта оценка улучшалась разными авторами, использовавшими метод Блихфельдта. Лучший результат (при $n = r$) принадлежит Роджерсу [43]. Для $n = 2$ и $n = 3$ известны неулучшаемые результаты; установлено явление изоляции (см. ниже, § 12, Суинертон-Дайер [48], Леккеркеркер [36, § 41]). Для $n = r = 4$ оценка, лучшая общей оценки [43], получена Норцием [41], а для $n = r = 5$ — Годуином [28].

Проблема 3^0 перспективна для дальнейших исследований. В частности, можно поставить задачу перенесения оценок (41), (42) и (48) на случай существования комплексно сопряженных полей ($s > 0, n = r + 2s$).

Минковский [38] вывел из (50) следующую оценку для дискриминанта $D = D(K)$ алгебраического числового поля $K = K/\mathbb{Q}, [K : \mathbb{Q}] = n,\ r+2s = n;\ K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(r)}$ — вещественные поля, $K^{(r+s+j)} = \overline{K^{(r+j)}},\ j = 1, 2, \ldots, s,$ — комплексно сопряженные поля:

$$|D| \geqslant \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2s} \frac{n^{2n}}{(n!)^2}. \tag{51}$$

Эта оценка показывает, что $|D| > 1$ при $n > 1$, так что всегда (кроме $K = \mathbb{Q}$) существуют критические простые числа поля. Такое простое решение знаменитой проблемы сразу же утвердило геометрию чисел в гражданских правах как полноценный раздел теории чисел.

[12] Еще более сильная содержится в работе Кобатянского и Левенштейна. Эта оценка асимптотически лучше (48a), но хуже (49).

9. Последовательные минимумы лучевой функции в решетке. Неравенство Роджерса—Шаботи. Проблема аномалии.// Вторая теорема Минковского о выпуклом теле

Пусть $F = F(x)$ — лучевая функция, определяющая в $\mathfrak{R}^n$ неравенством (1) звездное тело $\mathfrak{C}_F$. Пусть Λ — решетка в $\mathfrak{R}^n$. Фиксируем индекс $k,\ 1 \leqslant k \leqslant n$.

Назовем *k-м последовательным минимумом* $m_k = m_k(F, \Lambda)$ функции F в решетке Λ точную нижнюю границу чисел $t \in \mathbb{R}$, для которых множество

$$t\mathfrak{C}_F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) < t\}$$

содержит не менее k линейно независимых точек решетки Λ.

Ясно, что

$$m_1(F, \Lambda) = m(F, \Lambda) = \inf_{a \in \Lambda,\, a \neq 0} F(a) \tag{52}$$

и что

$$0 \leqslant m_1(F, \Lambda) \leqslant m_2(F, \Lambda) \leqslant \ldots \leqslant m_n(F, \Lambda) < +\infty. \tag{53}$$

Из определения $m(F, \Lambda) = m_1(F, \Lambda)$ легко выводится неравенство

$$\{m(F, \Lambda)\}^n \Delta(\mathfrak{C}_F) \leqslant d(\Lambda),$$

т. е.

$$\frac{\{m_1(F, \Lambda)\}^n \Delta(\mathfrak{C}_F)}{d(\Lambda)} \leqslant 1. \tag{54}$$

Гораздо труднее оценить величину

$$\delta(F, \Lambda) = \frac{\Delta(\mathfrak{C}_F) \prod_{i=1}^n m_i(F, \Lambda)}{d(\Lambda)}. \tag{55}$$

Для этого надо уметь вычислять или оценивать сверху *аномалию*

$$\alpha(F) = \sup_{\Lambda} \delta(F, \Lambda) \tag{56}$$

лучевой функции F (или звездного тела $\mathfrak{C}_F$). Здесь точная верхняя граница берется по всем n-мерным точечным решеткам. В силу (53) и теоремы 1

$$\alpha(F) \geqslant 1. \tag{57}$$

Глубокая оценка $\alpha(F)$ сверху принадлежит Роджерсу и Шаботи (доказательство см. Касселс [8, стр. 256]):

Теорема 5. *Пусть $F = F(x)$ — лучевая функция в $\mathfrak{R}^n$, $\alpha(F)$ — ее аномалия. Тогда*

$$\alpha(F) \leqslant 2^{(n-1)/2}. \tag{58}$$

Иначе говоря, для любой решетки имеет место неравенство

$$\Delta(\mathfrak{C}_F) \prod_{i=1}^n m_i(F, \Lambda) \leqslant 2^{(n-1)/2} d(\Lambda), \tag{59}$$

здесь $\mathfrak{C}_F$ — звездное тело (1).

Этот результат не может быть улучшен в том смысле, что для любого n можно построить пример лучевой функции F, аномалия которой сколь угодно близка к $2^{(n-1)/2}$. Конструкция примера весьма не проста (см.: Касселс [8, стр. 257–261] и цитированную там литературу).

Очень важным для общей геометрии чисел представляется доказательство (или опровержение) следующего предположения.

Гипотеза об аномалии выпуклого тела. *Пусть F — симметричная выпуклая лучевая функция. Тогда*

$$\alpha(F) = 1. \tag{60}$$

Гипотеза (60) доказана для $n = 2$ (Шаботи) и $n = 3$ (Вудс), а также для частных случаев функции F (тела $\mathfrak{C}_F$): шара $\mathfrak{C}_F$, $F(x) = |x|$ (Минковский) и параллелоэдра $\mathfrak{C}_F$. См.: Вудс [49] и цитированную там литературу, Леккеркеркер [36, § 18].

Гипотетическое неравенство (60) (с определением (56),(55)) и *первая* теорема Минковского — неравенство (31) — сразу же влекут за собой следующую *вторую* теорему Минковского о выпуклом теле.

Теорема 6. *Пусть F — симметричная выпуклая лучевая функция в $\mathfrak{R}^n$, $\mathfrak{K}_F$ — выпуклое тело, определенное неравенством (1), $V(\mathfrak{K}_F) < +\infty$, $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ — точечная решетка. Тогда*

$$V(\mathfrak{K}_F)\prod_{i=1}^{n} m_i(F,\Lambda) \leqslant 2^n d(\Lambda). \tag{61}$$

Поскольку гипотеза (60) не доказана, неравенство (61) приходится доказывать другим, гораздо более сложным и менее прозрачным путем. Известно уже несколько доказательств (Минковский, Дэвенпорт и другие авторы). Одно из доказательств см.: Касселс [8, стр. 261–268]. (См.: также Даничич [27] и цитированную там литературу). Неравенство (61) уточняет неравенство (31), ибо (31) равносильно неравенству

$$V(\mathfrak{K}_F)\{m_1(F,\Lambda)\}^n \leqslant 2^n d(\Lambda).$$

Неравенство (61) имеет важные приложения к теории неоднородных минимумов, в частности, к «теоремам переноса» (см. ниже, § 13).

Понятие последовательных минимумов и основные результаты этого параграфа обобщаются со звездных тел на произвольные множества (см.: Главка [33]).

10. Теоремы о среднем в пространстве решеток. Теорема Главки и ее уточнения. Проблема Рейнхальдта

Следующее предложение, принадлежащее Главке, позволяет оценить критический определитель сверху.

Теорема 7. *Для любого измеримого по Лебегу множества $\mathfrak{M}$ меры $V(\mathfrak{M})$*

$$\Delta(\mathfrak{M}) \leqslant V(\mathfrak{M}). \tag{62}$$

При этом, если $\mathfrak{M}$ — симметричное относительно O звездное тело, то

$$\Delta(\mathfrak{M}) \leqslant \{2\zeta(n)\}^{-1} V(\mathfrak{M}). \tag{63}$$

Все доказательства теоремы Главки (и ее уточнения) включают в себя то или иное усреднение некоторой функции, заданной на пространстве решеток. Наиболее естественным представляется вывод (62) из следующей (интересной самой по себе) теоремы Зигеля.

Теорема 8. *Пусть $f(x)$ — интегрируемая по Лебегу функция, заданная на $\mathfrak{R}^n$, μ — инвариантная мера на пространстве решеток $\mathfrak{F}$ данного определителя $d(\Lambda) = d$, $d > 0$. Тогда*

$$\frac{1}{\mu(\mathfrak{F})} \int\limits_{\mathfrak{F}} \sum_{a\in\Lambda,\, a\neq 0} f(a)\, d\mu(\Lambda) = \frac{1}{d} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx. \tag{64}$$

Доказательство теоремы 8 можно найти в статье Макбета и Роджерса [37]. Оценка (62) прямо следует из формулы (64), если в качестве $f(x)$ взять характеристическую функцию множества $\mathfrak{M}$. Тогда формула (64) превращается в формулу

$$\frac{1}{\mu(\mathfrak{F})} \int\limits_{\mathfrak{F}} r(\mathfrak{M}, \Lambda)\, d\mu(\Lambda) = \frac{V(\mathfrak{M})}{d}, \quad r(\mathfrak{M}, \Lambda) = \sum_{a\in\Lambda\cap\mathfrak{M},\, a\neq 0} 1,$$

и найдется решетка $\widetilde{\Lambda}$, $d(\widetilde{\Lambda}) = d$, для которой

$$r(\mathfrak{M}, \widetilde{\Lambda}) \leqslant \frac{1}{d} V(\mathfrak{M}).$$

В частности, если $d > V(\mathfrak{M})$, то $r(\mathfrak{M}, \widetilde{\Lambda}) = 0$ и решетка $\widetilde{\Lambda}$ определителя d является $\mathfrak{M}$-допустимой. Отсюда — неравенство (62).

В противоположность оценке снизу Минковского (31) оценка Главки (62) может быть улучшена. То же касается оценки (63). Лучшие в настоящее время (но далеко не окончательные) оценки сверху критического определителя $\Delta(\mathfrak{M})$ измеримого множества $\mathfrak{M} \subset \mathbb{R}^n$ меры $V(\mathfrak{M})$ принадлежат Роджерсу [44] и Шмидту [45,46]:

$$\Delta(\mathfrak{M}) \leqslant \frac{15}{16} V(\mathfrak{M}), \quad \text{если } n = 2, \tag{65}$$

$$\Delta(\mathfrak{M}) \leqslant \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\Big)\Big(1 + \frac{1}{3^{n-1}}\Big) V(\mathfrak{M}), \quad \text{если } n > 2, \tag{66}$$

$$\Delta(\mathfrak{M}) \leqslant \frac{V(\mathfrak{M})}{n \log\sqrt{2} - c_1}, \quad \text{если } n > c_2, \tag{67}$$

здесь c_1 и c_2 — некоторые вычислимые постоянные. Для получения такого рода оценок, в основном, варьируются две идеи: 1) специальный выбор (Шмидт) функции $f(x)$; 2) рассмотрение моментов (Роджерс) функции $f(x)$:

$$\sum_{a\in\Lambda,\, a\neq 0} f(a)$$

и получение для них формул типа (64).

Отыскание неулучшаемых оценок типа (62)–(63) является важной и очень сложной задачей геометрии чисел. Точнее, ее можно сформулировать следующим образом. Пусть $\mathbb{T} = \{\mathfrak{T}\}$ — некоторый класс измеримых множеств $\mathfrak{T}$ эвклидова пространства $\mathfrak{R}^n$ (например, класс всех измеримых множеств; класс всех звездных множеств; класс $\mathbb{K}\,{}^{(s)}_{n}$ всех симметричных относительно O выпуклых множеств данного числа измерений n и т. д.) Пусть

$$q(\mathbb{T}) = \inf_{\mathfrak{T}\in\mathbb{T}} Q(\mathfrak{T}), \qquad Q(\mathfrak{T}) = \frac{V(\mathfrak{T})}{\Delta(\mathfrak{T})}.$$

Найти $q(\mathbb{T})$ для данного класса $\mathbb{T}$ — значит найти оценку

$$\Delta(\mathfrak{T}) \leqslant \frac{1}{q(\mathbb{T})} V(\mathfrak{T}), \tag{68}$$

неулучшаемую в классе $\mathbb{T}$ множества $\mathfrak{T}$.

Однако точное значение $q(\mathbb{T})$ неизвестно даже для простейших классов множеств. Например, оно неизвестно даже для класса $\mathbb{K}_2^{(s)}$ двумерных выпуклых симметричных относительно O областей. В этом случае известна *гипотеза Рейнхардта*:

$$q(\mathbb{K}_2^{(s)}) = Q(\mathfrak{W}) = 3,6096,$$

где $\mathfrak{W}$ — некоторая специальная область, "сглаженный восьмиугольник". Эта гипотеза пока не доказана. Лучший результат (П. П. Таммела [21]; там же — литература по проблеме):

$$q(\mathbb{K}_2^{(s)}) \geqslant 3,570624.$$

См.: Касселс [8, гл. 6]; Роджерс [16]; Леккеркеркер [36, § 19, § 22, п. 2.]

11. Об отыскании критических (и экстремальных) решеток ограниченного звездного тела

Итак, мы умеем оценивать критический определитель $\Delta(\mathfrak{M})$ снизу (§ 6–7) и сверху (§ 10). Например, если $\mathfrak{K} \subset \mathbb{R}^n$ — симметричное относительно O выпуклое тело, то

$$2^{-n}V(\mathfrak{K}) \leqslant \Delta(\mathfrak{K}) \leqslant \{2\zeta(n)\}^{-1}V(\mathfrak{K}).$$

Подобные (но более сложные) оценки известны и для более общих тел $\mathfrak{M}$. Однако подчас бывает важно знать и точное значение $\Delta(\mathfrak{M})$ для заданного множества $\mathfrak{M}$ (скажем, для нормального тела данного алгебраического числового поля).

Если $\mathfrak{C}$ — заданное ограниченное звездное тело, то, в принципе, существует алгоритм, позволяющий свести задачу отыскания всех критических (и даже всех экстремальных) решеток тела $\mathfrak{C}$ к конечному числу задач на экстремум некоторой функции нескольких переменных при некоторых ограничениях. Действительно, по положительной лучевой функции $F(x)$ можно указать (см.: Касселс [8, стр. 185–186]) такую постоянную G, что

$$\Delta = \inf |\det(b_1, b_2, \ldots, b_n)|, \tag{69}$$

где точная нижняя граница берется по всем линейно независимым векторам $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ с дополнительными условиями

$$F(g_1b_1 + g_2b_2 + \ldots + g_nb_n) \geqslant 1, \quad |g_i| \leqslant G, \quad (g_1, g_2, \ldots, g_n) \neq 0; \tag{70}$$

здесь $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ пробегает все целые векторы с указанными условиями. Решетки $\Lambda = \Lambda[b_1, b_2, \ldots, b_n]$, на которых эта точная нижняя граница достигается, будут критическими (и эта процедура даст нам все критические решетки). Зная какую-либо критическую решетку Λ тела $\mathfrak{C}$, мы тотчас найдем $\Delta(\mathfrak{C})$.

Заметим, что для геометрии чисел важны реально осуществимые алгоритмы (возможно, при использовании электронных вычислительных машин). Обычно же набор условий (70) слишком велик, чтобы экстремальная задача (69) была разрешима. Условия (70) могут быть существенно упрощены для выпуклых лучевых функций $F(x)$. Здесь возникают понятия пустого октаэдра (обобщенного октаэдра) решетки и заградительного ряда решетки (см.: Минковский [39]). В случае $n \leqslant 4$ (и даже $n = 5$) дальнейшая разработка приводит к уже реально осуществимым алгоритмам. См.: Касселс [8, стр. 199–202]; Леккеркеркер [36, § 31–32]. См. также: [24,25].

12. Явления изоляции арифметических минимумов. Спектры минимумов

Было бы очень интересно выделить те классы неограниченных звездных тел $\mathfrak{C}$ (или хотя бы некоторые из них), для которых возможно сведение задачи об отыскании $\Delta(\mathfrak{C})$ к задаче (69)–(70). То, что это не всегда возможно, показывает *явление изоляции* арифметических минимумов (или, что то же, явление изоляции допустимых решеток), крайне интересное само по себе.

Пусть F — фиксированная лучевая функция. Рассмотрим величину

$$\mu(\Lambda) = \mu(F, \Lambda) = \frac{m(F, \Lambda)}{\{d(\Lambda)\}^{1/n}},$$

заданную на множестве (пространстве) $\mathcal{L}$ всех решеток Λ. Множество возможных значений $\mu(F)$,

$$\mathcal{M}(F) = \{\mu(F, \Lambda) | \Lambda \in \mathcal{L}\},$$

назовем *спектром Маркова* лучевой функции F. Ясно, что

$$\mathcal{M}(F) \subset [0, \gamma(F)]. \tag{71}$$

Говорим, что для лучевой функции F имеет место *явление изоляции*, если множество $\mathcal{M}(F)$ имеет хотя бы одну изолированную точку[13].

Легко доказывается, что если F — положительная лучевая функция (иначе говоря, если $\mathfrak{C}_F$ — ограниченное звездное тело), то $\mu(F, \Lambda)$ — непрерывная функция Λ и

$$\mathcal{M}(F) = (0, \gamma(F)]. \tag{72}$$

Поэтому явление изоляции возможно лишь в случае неограниченных звездных тел $\mathfrak{C}_F$. Было бы крайне интересно найти условия, налагаемые на F, при которых оно возникает (или его заведомо нет). Это, по-видимому, очень трудная задача. Конечно, еще сложнее проблема точного и полного описания $\mathcal{M}(F)$ для данного F.

Наконец, важно уметь описывать для данного $\mu \in \mathcal{M}(F)$ все решетки Λ с условием

$$\mu(F, \Lambda) = \mu.$$

Явлению изоляции (и сходному явлению изоляции неоднородных минимумов — см. § 13) посвящено большое число работ. Все они носят частный характер (см., например, гл. X монографии Касселса [8]; см. также: Леккеркеркер [36, § 43]). Наиболее исследованным (и то далеко не до конца) является простейший случай нетривиального характера

$$n = 2; \quad F_0(x) = |x_1 x_2|^{\frac{1}{2}}.$$

То, что здесь происходит явление изоляции, впервые заметили Коркин и Золотарев (и это был вообще первый пример изоляции минимумов). А. А. Марков доказал, что часть спектра $\mathcal{M}(F_0)$, лежащая правее $\sqrt[4]{\frac{4}{9}}$, дискретна

$$\mathcal{M}(F_0) \bigcap \left\{\mu(F_0, \Lambda) > \sqrt[4]{\frac{4}{9}}\right\} = \left\{\sqrt[4]{\frac{4}{9}}, \sqrt[4]{\frac{1}{2}}, \sqrt[4]{\frac{100}{221}}, \ldots\right\} =$$

[13] Точнее, 1) для F имеет место явление изоляции, если $\gamma(F)$ — изолированная точка. Общее: 2) для F имеет место явление изоляции, если $\overline{\mathcal{M}(F)} \neq [0, \gamma(F)]$. Можно говорить и о локальной изоляции $\mu(F, \Lambda)$ в точке Λ, с точностью до линейных изоморфизмов F.

$$= \left\{ m_k = \sqrt[4]{\frac{1}{\dfrac{4}{9} - \dfrac{1}{Q_k^2}}} \;\middle|\; k = 1, 2, \ldots \right\}, \tag{73}$$

где Q_k — возрастающая последовательность целых положительных чисел, обладающая тем свойством, что найдутся целые числа R_k и S_k с условием

$$Q_k^2 + R_k^2 + S_k^2 = 3Q_kR_kS_k.$$

За каждой точкой m_k спектра (73) стоит единственная (с точностью до гиперболических поворотов — автоморфизмов F_0) решетка Λ_k, $d(\Lambda_k) = 1$, с условием $m(F_0, \Lambda_k) = m_k$. Известно также (Холл), что левее некоторого числа $\mu_0 = \mu_0(F_0)$ спектр $\mathcal{M}(F_0)$ сплошной:

$$\mathcal{M}(F_0) \bigcap \{\mu(F_0, \Lambda) \leqslant \mu_0\} = [0, \mu_0]. \tag{74}$$

Найдено (Г. А. Фрейман) наибольшее значение μ_0 с условием (74) — *начало луча Холла*. Исследовалось и множество

$$\mathcal{M}(F_0) \bigcap \left[\mu_0, \sqrt[4]{\frac{4}{9}}\right].$$

См. обзор литературы А. В. Малышева [10].

Явление изоляции изучалось и для других F, в частности, для $\sqrt{|f(x, y, z)|}$, где f — вещественная неопределенная тернарная квадратичная форма (см.: Б. А. Венков [2]). См. также: Леккеркеркер [36, § 43].

Можно описать явление изоляции в терминах допустимых решеток данного множества (см. [33, стр. 50]). Это приводит к обобщению — со звездных тел на произвольные множества.

13. О неоднородных задачах геометрии чисел

В § 5–12 мы описали классическую часть геометрии чисел, посвященную исследованию однородных минимумов. Большую роль в теории чисел играют и неоднородные диофантовы задачи. Однако геометрия неоднородных диофантовых задач не столь разработана. Возможно даже, что здесь нет полной аналогии с однородной задачей и что методы геометрии чисел здесь хотя и безусловно приложимы, не столь плодотворны и не столь адекватны, как в случае задачи об однородном минимуме. Дадим беглый обзор этого раздела геометрии чисел.

Пусть $F = F(x)$ — лучевая функция на $\mathfrak{R}^n$ (можно рассматривать и более общие функции F); $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ — решетка определителя $d(\Lambda)$. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$; говорим, что $x \equiv x_0 \pmod{\Lambda}$, если $x - x_0 \in \Lambda$. Рассмотрим величины

$$l(x_0) = l(x_0; F, \Lambda) = \inf_{x \equiv x_0 \pmod{\Lambda}} F(x),$$

$$l = l(F, \Lambda) = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} l(x_0; F, \Lambda).$$

Точная верхняя граница берется по всем вещественным точкам (или по всем точкам фундаментального параллелепипеда решетки Λ). Величина $l(F, \Lambda)$ называется *неоднородным минимумом* функции F в решетке Λ. Этот “минимум” может и не достигаться.

Пусть $\mathfrak{C}_F$ — звездное тело, определенное неравенством (1). Тогда $l(F, \Lambda)$ есть точная нижняя граница вещественных чисел $c > 0$, для которых расположение $\{c\mathfrak{C}_F, \Lambda\}$ является покрытием:

$$\bigcup_{a \in \Lambda} (c\mathfrak{C}_F + a) = \mathfrak{R}^n.$$

Пусть $F = F(x)$ — заданная лучевая функция. Рассмотрим величины (аналоги постоянной Эрмита):

$$\sigma(F) = \inf_{\Lambda} \frac{l(F,\Lambda)}{\{d(\Lambda)\}^{1/n}}, \quad \Sigma(F) = \sup_{\Lambda} \frac{l(F,\Lambda)}{\{d(\Lambda)\}^{1/n}}.$$

Точная нижняя и верхняя границы берутся по всем решеткам $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$. Конечно, прямым аналогом $\gamma(F)$ является именно $\Sigma(F)$. Однако величина $\Sigma(F)$ обычно тривиальна в силу легко доказываемой теоремы Макбета (см.: Касселс [8, стр. 369–370]).

Теорема 9. *Пусть $F = F(x)$ — лучевая функция. Если множество $\mathfrak{C}_F$, определяемое (1), имеет конечный объем, то*

$$\Sigma(F) = +\infty. \tag{75}$$

С величиной $\Sigma(F)$ в одном частном случае F связана знаменитая

Неоднородная гипотеза Минковского. *Пусть*

$$F_n(x) = |x_1 x_2 \cdots x_n|^{1/n}.$$

Тогда

$$\Sigma(F_n) = \frac{1}{2}. \tag{76}$$

Этой гипотезе и ее аналогам посвящена добрая половина работ по неоднородной задаче геометрии чисел (см.: Касселс [8, стр. 390–401]; Леккеркеркер [36, гл. 7]). Неравенство

$$\Sigma(F_n) \geqslant \frac{1}{2} \tag{77}$$

тривиально. Доказано (Н. Г. Чеботарев), что

$$\Sigma(F_n) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{78}$$

Неравенство (78) уточнялось Морделлом, Девенпортом, Б. Ф. Скубенко и другими авторами. Историю вопроса, библиографию и самые сильные в настоящее время оценки $\Sigma(F_n)$ сверху см.: Х. Х. Мухсинов [13,14].

Для $n \leqslant 5$ неоднородная гипотеза Минковского доказана полностью (см.: Б. Ф. Скубенко [19], Бамба и Вудс [23]).

Возможен и другой подход к этой гипотезе. Говорим, что невырожденная вещественная квадратная матрица A есть *$DOTU$-матрица*, если найдутся такие вещественные диагональная D, ортогональная O, треугольная T матрицы и целая унимодулярная матрица U, что

$$A = DOTU. \tag{79}$$

Если верно (79), то для такой матрицы $A = (L_1, L_2, \ldots, L_n)$ неоднородная гипотеза Минковского почти тривиальна: для любых $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ найдется $x \in \mathbb{Z}^n$ с условием

$$\prod_{i=1}^{n} |L_i(x) + \beta_i| \leqslant \frac{|\Delta|}{2^n}, \qquad \Delta = \det A. \tag{80}$$

Доказано (Б. Ф. Скубенко [20]), что для каждого $n \geqslant 2880$ найдутся невырожденные вещественные матрицы, не являющиеся $DOTU$-матрицами. С другой стороны (Х. Н. Нарзулаев [15]) доказано, что для $n \leqslant 3$ всякая невырожденная квадратная вещественная матрица порядка n есть $DOTU$-матрица (это дает новое доказательство неоднородной гипотезы Минковского для $n = 2$ и $n = 3$).

Итак, на этом пути, как показывает цитированный результат Б. Ф. Скубенко, полного доказательства неоднородной гипотезы Минковского получить нельзя (хотя ее и можно доказать таким образом для каких-то малых n). Здесь возникает интересная сама по себе *DOTU*-проблема.

Найти такое целое число n_0, что [14]

а) если $n < n_0$, то всякая вещественная невырожденная матрица порядка n есть DOTU-матрица;

б) если $n \geqslant n_0$, то найдутся вещественные невырожденные матрицы порядка n, не являющиеся DOTU-матрицами.

Доказано (см. выше), что

$$3 < n_0 \leqslant 2880. \tag{81}$$

Первый шаг в исследованиях по этой проблеме — изучение случая $n = 4$ (здесь, по-видимому, все матрицы являются *DOTU*-матрицами). Важно также уменьшить верхнюю границу (81).

В общем случае величина $\sigma(F)$ представляется более содержательной, чем $\Sigma(F)$. Она тесно связана со значением плотности $\tau(\mathfrak{C}_F)$ экономнейшего решетчатого покрытия телом $\mathfrak{C}_F$, $\mathfrak{C}_F = \{x|F(x) < 1\}$ (см. § 4). Здесь приходится предполагать, что $\mathfrak{C}_F$ ограничено; от этого, по-видимому, можно избавиться, соответствующим образом обобщая определение $\rho(\mathfrak{C}_F, \Lambda)$. Из определений $\sigma(F)$ и $\Sigma(F)$ довольно прямо выводится следующая

Теорема 10. *Пусть F — положительная* [15] *лучевая функция. Тогда*

$$\sigma(F) = \left\{\frac{\tau(\mathfrak{C}_F)}{V(\mathfrak{C}_F)}\right\}^{1/n}. \tag{82}$$

Из (82) и (14) выводим:

$$\sigma(F) \geqslant \{V(\mathfrak{C}_F)\}^{1/n}. \tag{83}$$

Неравенство (83) справедливо и без предположения ограниченности $\mathfrak{C}_F$.

Итак, задача о $\sigma(F)$ равносильна задаче о плотности $\tau(\mathfrak{C}_F)$ экономнейшего решетчатого покрытия телом $\mathfrak{C}_F$. Наибольшее число работ здесь посвящено случаю, когда $\mathfrak{C}_F$ — шар. См.: Роджерс [16], Е. П. Барановский [1], С. С. Рышков, Е. П. Барановский [17].

Важный раздел неоднородной проблематики геометрии чисел составляют так называемые *теоремы переноса*. Под теоремами переноса для данной лучевой функции F мы понимаем неравенства, связывающие неоднородный минимум $l(F, \Lambda)$ с последовательными однородными минимумами $m_i(F, \Lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (или с минимумами взаимной функции F^* относительно взаимной решетки Λ^* и т. д.). Простейшим примером теоремы переноса является следующее предложение:

Пусть F — симметричная выпуклая положительная лучевая функция; тогда для любой решетки Λ

$$\frac{1}{2} m_k(F, \Lambda) \leqslant l(F, \Lambda) \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k(F, \Lambda). \tag{84}$$

Некоторые подробности (в том числе доказательство (84)) см. в книге Касселса [8, стр. 380–390]. См. также: Леккеркеркер [36, § 13].

[14] Можно доказать, что если при n_0 есть не *DOTU*-матрицы, то то же верно и для $n_0 + 1$.

[15] От предположения положительности F (т. е. ограниченности $\mathfrak{C}_F$), по-видимому, можно избавиться.

14. Об общей задаче геометрии чисел

В заключение сформулируем общую задачу геометрии чисел (см. Б. Н. Делоне [6]), включающую в себя "однородную" и "неоднородную" задачи как частные случаи. Пусть $\mathfrak{M} \subset \mathbb{R}^n$ — множество, а $\Lambda + x_0 \subset \mathbb{R}^n$ — сдвинутая решетка определителя $d(\Lambda + x_0) = d(\Lambda)$. Пусть $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathfrak{M}, \Lambda + x_0)$ — некоторое условие (предикат), которому удовлетворяет или не удовлетворяет пара $(\mathfrak{M}, \Lambda + x_0)$ (например,

1. $\mathcal{P}$ есть свойство: $x_0 = 0,\ \mathfrak{M} \cap (\Lambda + x_0) \subset 0$;

2. $\mathcal{P}$ есть свойство: $\mathfrak{M} \cap (\Lambda + x_0) = \emptyset$

и т. д.). Говорим, что решетка $\Lambda + x_0$ является *$\mathcal{P}$-допустимой* для множества $\mathfrak{M}$(или $[\mathcal{P}, \mathfrak{M}]$-допустимой), если верно $\mathcal{P}(\mathfrak{M}, \Lambda + x_0)$. $[\mathcal{P}, \mathfrak{M}]$-допустимая решетка $\widetilde{\Lambda} + \widetilde{x}_0$ определителя $d(\widetilde{\Lambda})$ называется *$\mathcal{P}$-экстремальной* для множества $\mathfrak{M}$ (или $[\mathcal{P}, \mathfrak{M}]$-экстремальной), если существует такая окрестность решетки $\widetilde{\Lambda} + \widetilde{x}_0$ в пространстве $\{\Lambda + x_0\}$ неоднородных решеток, что если $\Lambda + x_0$ принадлежит этой окрестности и является $[\mathcal{P}, \mathfrak{M}]$-допустимой, то

$$d(\Lambda + x_0) \geqslant d(\widetilde{\Lambda} + \widetilde{x}_0).$$

Задача Маркова—Делоне ($\mathcal{P}$-задача геометрии чисел). *Найти все $\mathcal{P}$-экстремальные решетки данного множества $\mathfrak{M}$.*

Эта задача, включающая в себя все рассматривавшиеся в литературе задачи геометрии чисел, в общем виде не исследовалась. Пока не ясно, насколько плодотворным может быть такое общее исследование.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барановский Е. П. *Упаковки, покрытия, разбиения и некоторые другие расположения в пространствах постоянной кривизны*// ИН. Алгебра. Топология. Геометрия. 1967. М., 1969. С. 189–225.

2. Венков Б. А. *Об экстремальной проблеме Маркова для неопределенных тройничных форм*// Изв. АН СССР. Серия матем. 1945. Т. 9. № 6. С. 429–494. То же// Избр. труды. Л. 1981. С. 201–263.

3. Ветчинкин Н. М. *Единственность классов положительных квадратичных форм, на которых достигаются значения постоянных Эрмита при* $6 \leqslant n \leqslant 8$// Труды МИАН. 1980. Т. 152. С. 34–86.

4. Делоне Б. Н. *Геометрия положительных квадратичных форм.1–2*// УМН. 1937. Вып. 3. С. 16–62; 1938. Вып. 4. С. 102–164.

5. Делоне Б. Н. *Петербургская школа теории чисел.* М.;Л., 1947. 422 с.

6. Делоне Б. Н. *О работе А. А. Маркова "О бинарных квадратичных формах положительного определителя"*// УМН. 1948. Т. 3. Вып. 5(27). С. 3–5.

7. Касселс Дж. В. С. *Введение в теорию диофантовых приближений.* М., 1961. 213 с.

8. Касселс Дж. В. С. *Введение в геометрию чисел.* М., 1965. 421 с.

9. Левенштейн В. И. *О максимальной плотности заполнения n-мерного евклидова пространства равными шарами*// Матем. заметки. 1975. Т. 18. № 2. С. 301–311.

10. Малышев А. В. *Спектры Маркова и Лагранжа (обзор литературы)*// Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1977. Т. 67. С. 5–38.

11. Малышев А. В. *О применении ЭВМ к доказательству одной гипотезы Минковского из геометрии чисел*// Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1977. Т. 71. С. 163–180; 1979. Т. 82. С. 29–32.

12. Марков А. А. *О бинарных квадратичных формах положительного определителя*// СПб, 1880; УМН. 1943. Т. 3. Вып. 5 (27). С. 7–51.

13. Мухсинов Х. Х. *Уточнение оценок арифметического минимума произведения неоднородных линейных форм для больших размерностей*// Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1981. Т. 106. С. 82–103.

14. Мухсинов Х. Х. *К неоднородной гипотезе Минковского (письмо в редакцию)*// Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1983. Т. 121. С. 195–196.

15. Нарзулаев Х. Н. *О представлении унимодулярной матрицы в виде DOTU для $n = 3$*// Матем. заметки. 1975. Т. 18. № 2. С. 213–221.

16. Роджерс К. *Укладки и покрытия.* М., 1968. 134 с.

17. Рышков С. С., Барановский Е. П. *С-типы n-мерных решеток и пятимерные примитивные параллелоэдры (с приложением к теории покрытий)*// Труды МИАН. Т. 137. М., 1976. 131 с.

18. Рышков С. С., Барановский Е. П. *Классические методы теории решетчатых упаковок*// УМН. 1979. Т. 34. Вып. 4(208). С. 3–63.

19. Скубенко Б. Ф. *Доказательство гипотезы Минковского о произведении n линейных однородных форм от n переменных для $n \leqslant 5$*// Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1981. Т. 106. С. 134–136.

20. Скубенко Б. Ф. *Существуют квадратные вещественные матрицы любого порядка $n \geqslant 2880$, не являющиеся DOTU-матрицами*// Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1981. Т. 106. С. 134–136.

21. Таммела П. *Оценка критического определителя двумерной выпуклой симметричной области*// Изв. вузов. Математика. 1970. № 12(103). С. 103–107.

22. Фейеш Тот Л. *Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве.* М., 1958. 363 с.

23. Bambah R. P., Woods A. C. *Minkowski's conjecture for $n = 5$; a theorem of Skubenko* // J. Number Theory. 1980. V. 12. P. 27–48.

24. Bantegnie R. *Sur l'indice de certains reseaux de $\mathbb{R}^4$ permis pour octaédre*// Canad. J. Math. 1965. V. 17. P. 725–730.

25. Bantegnie R. *"Problème des Oktaédres" en dimension 5*// Acta Arithm. 1968. V. 14. No 2. P. 185–202.

26. Blichfeldt N. F. *The minimum values of positive quadratic forms in six, seven and eight variables*// Math. Z. 1934–35. V. 39. No 1. P. 1–15.

27. Danicic I. *An elementary proof of Minkowski's second inequality*// J. Austral. Math. Soc. 1969. V. 10. No 1–2. P. 177-181.

28. Godwin N. J. *On the product of five homogeneous linear forms*// J. London Math. Soc. 1950. V. 25. No 4(100). P. 331–339.

29. Gruber P. M. *Geometry of Numbers*// Contributions to geometry (proc. Geom. Symp. Siegen. 1978). Basel. 1979. P. 186–225.

30. Hammer J. *Unsolved problems concerning lattice points.* London a. o. 1977. VI. 101 p.

31. Hancock H. *Development of the Minkowski geometry of numbers.* New York, 1939. XXI. 839 p.

32. Hlawka E. *Über Potenzsummen von Linearformen.I–II*// Sitzungsber. Acad. Wiss. Wien. math.nat. Kl. 11a. 1945. Bd. 154. No 1. S. 50–58; 1947. Bd. 156. No 5–6. S. 247–254.

33. Hlawka E. *Grundbegriffe der Geometrie der Zahlen*// Jber. Deutsc. Math.-Verein. 1954. Bd. 57. S. 37–55.

34. Keller O. H. *Geometrie der Zahlen (Ensycl. math.Wiss. Bd.1,2. No 27).* Leipzig, 1954. 84 s.

35. Koksma J. F. *Diofantische Approximationen.* Berlin. 1936. VIII. 157 s.

36. Lekkerkerker C. G. *Geometry of numbers.* Groningen; Amsterdam. 1969. VIII. 510 p.

37. Macbeath A. M., Rogers C. A. *Siegel's mean value Theorem in the geometry of numbers*// Proc. Cambridge Philos. Soc. 1958. V. 54. P. 139–151.

38. Minkowski H. *Geometry der Zahlen.* Leipzig; Berlin. 1910. VIII. 256 p.

39. Minkowski H. *Dichteste gitterformicge Lagerung kongruenter Korper*// Nach. Koning. Ges. Wiss. Göttingen. 1904. S. 311–355; Ges. Abh. Bd. 2. Leipzig; Berlin. 1911. S. 3–42.

40. Minkowski H. *Diophantsche Approximationen.* Leipzig; Berlin. 1907. VIII. 235 s.

41. Nordzij P. *Über das Product von vier reellen, homogenen, linearen Formen*// Monatsh. Math. 1967. Bd. 71. No 5. S. 436–445.

42. Rankin R. A. *On sums of powers of linear forms.I–II–III*// Ann. of Math.(2). 1949. V. 50. No 3. P. 691–704; Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. 1948. V. 51. P. 846–853; Indag. math. 1948. V. 10. P. 274–281.

43. Rodgers C. A. *The product of n real homogeneous linear forms*// Acta Mathem. 1950. V. 82. No 1–2. P. 185–208.

44. Rodgers C. A. *Lattice coverings of space: the Minkowski - Hlawka theorem*// Proc. London math. soc. (3). 1958. V. 8. P. 447–465.

45. Schmidt W. M. *Eine Verscharfung des Satzes von Minkowski - Hlawka*// Monatsh. Math. Bd. 60. S. 110–113.

46. Schmidt W. M. *On the Minkowski - Hlawka Theorem*// Illinois J. Math. 1963. V. 7. P. 18–23; corr.: P. 714.

47. Spohn W. G. *Blichfeld's theorem and simultaneous doiphantine approximations*// Amer. J. Math. 1968. V. 90. P. 885–894.

48. Swinnerton-Dayer H. P. F. *Applications of computers to the geometry of numbers*// Comput. Algebra and Number Theory 3 (SIAM - AMS Proc. V. 4). Providence (R. I.). 1971. P. 55–62.

49. Woods A. C. *The anomaly of convex bodies*// Proc. Cambridge Philos. Soc. 1956. V. 52. P. 406–423.

REFERENCES

1. Baranovskii E. P., 1967, "Packings, coverings, partitions and some other dispositions in the spaces of fixed curvature IN. Algebra. Topology. Geometry. M. pp. 189–225.

2. Venkov B. A., 1945, "On Markov extremal problem for undeterminate ternary forms Izv. AN SSSR. Math., vol. 9, no 6. pp.429–494.

3. Vetchinkin N. M., 1980, "Uniquness of the classes of positiv quadratic forms, on which it is achieved the values of the Ermit constances for $6 \leqslant n \leqslant 8$ Trudy MIAN, vol. 152. pp. 34–86.

4. Delone B. N., 1937, 1938, "The geometry of the positive quadratic forms UMN, iss. 3, pp. 16–62; iss 4. pp. 102–164.

5. Delone B. N., 1947, The Petersburg school of the numbers theory M–P, 422 p.

6. Delone B. N., 1948, "On A/ A. Markov state «On the binar quadratic forms with the positive determinate» UMN, vol. 3, iss. 5(27). pp. 3–5.

7. Cassels J. W. S., 1961, "Introduction to the Diophantine approximation theory M., 213 p.

8. Cassels J. W. S., 1965, "An Introduction to the geometry of numbers M.: Mir, 421 p.

9. Levenshtane V. I., 1975, "On the maximal density of completing of the Euclidean space by equal balls vol. 18, no 2. pp. 301–311.

10. Malyshev A. V., 1977, "The spectrums of Markov and Lagrange (the literature review) Zap. nauch. seminars LOMI, vol. 67, pp. 5–38.

11. Malyshev A. V., 1977, 1979, "On an application of a computer to the proof of the Minkovskii conjecture in the geometry of numbers Zap. naych. sem. LOMI, vol. 71. pp. 163–180; vol. 82. pp. 29–32.

12. Markov A. A., 1943, "On the binary qudratic forms with the positive discriminant SPb, 1880; UMN, vol. 3. iss. 5 (27), pp. 7–51.

13. Muhsinov H. H., 1981, "The sharpening of the estimates of the arithmetical minimum of the not uniform linear forms production for the big dimensions Zap. nauch. sem. LOMI, vol. 106, pp. 82–103.

14. Muhsinov H. H., 1983, "On the Minkovskii not uniform conjecture (the letter to the editorship) Zap. naych. sem. LOMI, vol. 121. pp. 195–196.

15. Narzulaev H. N., 1975, On the representation of the unimodular matrix in the form of $DOTU$ for $n = 3$ Math. zametki, vol. 18, no 2. pp. 213–221.

16. Rodjers K., 1968, "The packing and the covering M., 1968. 134 p.

17. Ryzskov S. S., Baranovskii E. P., 1976, "C-types of the n-dimensional lattices and the 5-dimensional primitive paralleloidres (with the application to the covering theory Trudy MIAN, vol. 137. M., 131 p.

18. Ryzskov S. S., Baranovskii E. P., 1979, "The classical method of the lattice packings theory UMN, vol. 34, iss. 4(208). pp. 3–63.

19. Skubenko B. F., 1981, "The proof of the Minkovskii conjecture about the production of n linear uniform forms from n arguments for $n \leqslant 5$ Zap. nauch. sem. LOMI, vol. 106, pp. 134–136.

20. Skubenko B. F., 1981, "There are the square real matrix of any degree $n \geqslant 2880$, which are not $DOTU$-matrix Zap. nauch. sem. LOMI, vol. 106, pp. 134–136.

21. tammela P., 1970, The estimate of the critical determinant of the 2-dimension convex symmetric region Izv. Vuzov, Math., no 12(103), pp. 103 – 107.

22. Feyesh TOT L., 1958, "The disposition on a plane, on a sphere and in a space M., 363 p.

23. Bambah R. P., Woods A. C., 1980, "Minkowski's conjecture for $n = 5$; a theorem of Skubenko J. Number Theory, vol. 12, pp. 27–48.

24. Bantegnie R., 1965, "Sur l'indice de certains reseaux de $\mathbb{R}^4$ permis pour octaédre Canad. J. Math., vol. 17, pp. 725–730.

25. Bantegnie R., 1968, «<Problème des Oktaédres» en dimension 5 Acta Arithm., vol. 14, no 2, pp. 185–202.

26. Blichfeldt N. F., 1934 – 1935, "The minimum values of positive quadratic forms in six, seven and eight variables Math. Z., vol. 39, no 1, pp. 1–15.

27. Danicic I., 1969, "An elementary proof of Minkowski's second inequality J. Austral. Math. Soc., vol. 10, no 1–2, pp. 177-181.

28. Godwin N. J., 1950, "On the product of five homogeneous linear forms J. London Math. Soc., vol. 25, no 4(100), pp. 331–339.

29. Gruber P. M., 1979, "Geometry of Numbers Contributions to geometry, (proc. Geom. Symp. Siegen., 1978), Basel, pp. 186–225.

30. Hammer J., 1977, "Unsolved problems concerning lattice points London a. o., vol. VI, 101 p.

31. Hancock H., 1939, "Development of the Minkowski geometry of numbers New York, XXI. 839 p.

32. Hlawka E., 1945, 1947, "Uber Potenzsummen von Linearformen.I–II"Sitzungsber Acad. Wiss. Wien. math. nat. Kl. 11a, bd. 154, no 1, pp. 50–58; bd. 156, no 5–6, pp. 247–254.

33. Hlawka E., 1954, "Grundbegriffe der Geometrie der Zahlen Jber. Deutsc. Math.-Verein., bd. 57, pp. 37–55.

34. Keller O. H., 1954, "Geometrie der Zahlen (Ensycl. math.Wiss. Bd.1,2. No 27) Leipzig, 84 p.

35. Koksma J. F., 1936, "Diofantische Approximationen Berlin, VIII, 157 p.

36. Lekkerkerker C. G., 1969, "Geometry of numbers Groningen; Amsterdam, VIII, 510 p.

37. Macbeath A. M., Rogers C. A., 1958, "Siegel's mean value Theorem in the geometry of numbers Proc. Cambridge Philos. Soc., vol. 54, pp. 139–151.

38. Minkowski H., 1910, "Geometry der Zahlen Leipzig — Berlin, VIII, 256 p.

39. Minkowski H., 1904, 1911, "Dichteste gitterformicge Lagerung kongruenter Korper Nach. Koning. Ges. Wiss. Göttingen, pp. 311–355; Ges. Abh., vol. 2, Leipzig — Berlin, pp. 3–42.

40. Minkowski H., 1907, "Diophantsche Approximationen Leipzig — Berlin, VIII, 235 p.

41. Nordzij P., 1967, "Über das Product von vier reellen, homogenen, linearen Formen Monatsh. Math., vol. 71, no 5, pp. 436–445.

42. Rankin R. A., 1949, 1948, 1948, "On sums of powers of linear forms.I–II–III Ann. of Math.(2), vol. 50, no 3, pp. 691–704; Proc. Kon. Ned. Akad. Wet., vol. 51, pp. 846–853; Indag. math., vol. 10, pp. 274–281.

43. Rodgers C. A., 1950, "The product of n real homogeneous linear forms Acta Mathem., vol. 82. no 1–2. pp. 185–208.

44. Rodgers C. A., 1958, "Lattice coverings of space: the Minkowski - Hlawka theorem Proc. London math. soc. (3), vol. 8, pp. 447–465.

45. Schmidt W. M., "Eine Verscharfung des Satzes von Minkowski - Hlawka Monatsh. Math., vol. 60, pp. 110–113.

46. Schmidt W. M., 1963, "On the Minkowski - Hlawka Theorem Illinois J. Math., vol. 7. pp. 18–23; corr.: P. 714.

47. Spohn W. G., 1968, "Blichfeld's theorem and simultaneous doiphantine approximations Amer. J. Math., vol. 90, pp. 885–894.

48. Swinnerton-Dayer H. P. F., 1971, "Applications of computers to the geometry of numbers Comput. Algebra and Number Theory 3 (SIAM - AMS Proc. V. 4), Providence (R. I.), pp. 55–62.

49. Woods A. C., 1956, "The anomaly of convex bodies Proc. Cambridge Philos. Soc., vol. 52, pp. 406–423.

Получено 15.10.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 51(092) DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-74-77

Несколько слов о Борисе Фадеевиче Скубенко

Б. З. Мороз (г. Москва)

Мороз Борис Зеликович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры дискретной математики Московского Физико-Технического Института, Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Россия; Universität Bonn, Германия.
e-mail: moroz@pdmi.ras.ru

Аннотация

Статья содержит личные воспоминания автора о Борисе Фадеевиче Скубенко.

Ключевые слова: Борис Фадеевич Скубенко.

Библиография: 6 наименований.

Для цитирования:
Б. З. Мороз Несколько слов о Борисе Фадеевиче Скубенко // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 3, с. 74–77.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 3.

UDC 51(092) DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-74-77

A few words about Boris Fadeevich Skubenko

B. Z. Moroz (Moscow)

Moroz Boris Zelikovich — Doctor of physico-mathematical sciences, St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Russia; Universität Bonn, Germany.
e-mail: moroz@pdmi.ras.ru

Abstract

The article contains personal reminiscences of the author about Boris Fadeevich Skubenko.

Keywords: Boris Fadeevich Skubenko.

Bibliography: 6 titles.

For citation:
B. Z. Moroz, 2019, "A few words about Boris Fadeevich Skubenko" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 74–77.

Moroz/Skubenko.jpg

Борис Фадеевич Скубенко (8.02.1929–5.07.1993)

Там хорошо, и лишних нет, и страх не властен

над годами,

и все давно уже друг другом прощены.

Булат Окуджава

Вся научная деятельность яркого представителя Петербургской школы теории чисел Б. Ф. Скубенко была неразрывно связана с математическим институтом ЛОМИ (:= Ленинградское отделение Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР), расположенном в центре Санкт-Петербурга на углу Невского проспекта и набережной р. Фонтанки. Борис Фадеевич был постоянным автором "Записок научных семинаров ЛОМИ (ПОМИ)" , и сборник [1] был посвящён его памяти. При написании этих заметок я воспользовался своим воспоминаниями и некрологом [2] из сборника [1].

В начале 1953 г. Борис Фадеевич приехал в Ленинград; к этому времени он приобрёл квалификацию шофёра высшего класса и в течение некоторого времени работал шофёром секретаря райкома партии (по тем временам неплохая работа). По его воспоминаниям, во время службы в армии Борис Фадеевич много думал о математике, пытаясь, в частности, доказать теорему Ферма и найти беспроигрышный алгорифм игры в шахматы. Хотя решить эти задачи ему, разумеется, не удалось, Борис Фадеевич поступил на заочное отделение матмеха ЛГУ и получил первый разряд и несколько кандидатских баллов по шахматам (в 1960-ые годы он был безусловно сильнейшим шахматистом ЛОМИ).

В 1958 г. Борис Фадеевич окончил матмех (:= математико-механический факультет) ЛГУ, защитив дипломную работу на тему: "Закон распределения простых чисел в мнимых квадратичных полях" , и поступил в аспирантуру ЛОМИ. Его научным руководителем в годы аспирантуры был Юрий Владимирович Линник. В ноябре 1961 года Б. Ф. Скубенко был зачислен в штат ЛОМИ в качестве младшего научного сотрудника лаборатории алгебраических методов; в те годы заведовал этой лабораторией Дмитрий Константинович Фаддеев. В начале 1962 г. Борис Фадеевич успешно защитил на заседаниии Учёного совета матмеха ЛГУ кандидатскую диссертацию "Асимптотическое распределение целых точек на однополостном гиперболоиде и эргодические теоремы" . В этой работе Борис Фадеевич доказал свою знаменитую "теорему о циклах" , показав, что количества приведённых неопределённых бинарных квадратичных форм фиксированного дискриминанта, принадлежащих разным классам, не могут сильно отличаться друг от друга (ср. [3]).

В 1969 г. Борис Фадеевич вернулся к этой теме, получив в совместной работе с А. С. Пеном [5] в некотором смысле не улучшаемую оценку длины периода разложения квадратичной иррациональности растущего дискриминанта в цепную дробь (ср. [6]).

Во время работы над диссертацией Борис Фадеевич исправил одну ошибку в работе Ю. В. Линника о распределении целых точек на двуполостном гиперболоиде, заслужив комплимент нашего учителя: "Не зря Вас в ЛОМИ взяли". Полученные в диссертации Б. Ф. Скубенко результаты включены в монографию [4] и явились важной составляющей научной программы, предложенной Ю. В. Линником ещё в 1956 г. . К этой программе относятся также результаты Бориса Фадеевича о распределении целочисленных $n \times n$ матриц на детерминантной поверхности (частный случай $n = 3$ рассмотрен в совместных работах Ю. В. Линника и Б. Ф. Скубенко и изложен в гл. VIII монографии [4]).

В середине 1960-ых годов Борис Фадеевич заинтересовался геометрией чисел, и ему удалось получить замечательный результат: в 1972 г. он доказал известную гипотезу Минковского о минимуме произведения n линейных форм при $n = 5$. До работ Бориса Фадеевича гипотеза Минковского была доказана для $n = 2$ (Минковский), $n = 3$ (Ремак, 1923-1924) и $n = 4$ (Дайсон, 1948). Для доказательства этой гипотезы Борис Фадеевич разработал новый "метод паруса" , позволивший ему доказать гипотезу Минковского сразу для всех $n \leq 5$. Гипотеза Минковского для $n = 6$ была доказана только в 2004 г.; к настоящему времени опубликованы доказательства этой гипотезы для $n = 7$ и для $n = 8$. По результатам своих исследований, посвящённых гипотезе Минковского, в апреле 1974 г. Б. Ф. Скубенко защищает в Москве на заседаннии Учёного совета Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР докторскую диссертацию "Доказательство гипотезы Минковского о произведении линейных неоднородных форм от n переменных для $n \leq 5$".

В начале 1976 г. Борис Фадеевич избирается на должность старшего научного сотрудника, а в 1986 г. назначается на должность ведущего научного сотрудника лаборатории алгебраических методов ЛОМИ.

За цикл работ по неоднородным и однородным задачам геометрии чисел, опубликованных Б. Ф. Скубенко в 1972-1981 гг., Президиум Академии Наук СССР присудил ему премию имени А. А. Маркова за 1986 г.

С 1967 г. по 1984 г. Борис Фадеевич регулярно выезжал в г. Самарканд, где, в Самаркандском государственном университете, читал спецкурсы и вёл семинар по геометрии чисел. За это время участниками семинара, под его руководством, было подготовлено несколько кандидатских диссертаций и опубликовано большое число работ по теории чисел.

Борис Фадеевич мыслил не формально, и понимать его, как и читать его работы, было нелегко. Его самобытный талант высоко ценили наши учителя знаменитые ленинградские математики Дмитрий Константинович Фаддеев и Юрий Владимирович Линник.

К сожалению, в анонсированном в последних работах Б. Ф. Скубенко доказательстве гипотезы Дж. Литлвуда из теории диофантовых приближений был найден пробел; насколько мне известно, эта гипотеза не доказана до сих пор.

Я познакомился с Борисом Фадеевичем на учебном семинаре Ю. В. Линника осенью 1961 г., будучи студентом пятого курса матмеха. На этом семинаре он сделал серию докладов по теории пучков. В течение восьми лет (1962-1970 гг.) Борис Фадеевич был моим старшим коллегой в ЛОМИ и в течение двух лет (1962/63 и 1963/64 учебные годы) фактически действовал как промежуточный научный руководитель (за эти два года я написал кандидатскую диссертацию на предложенную Ю. В. Линником тему). Последний раз я видел Бориса Фадеевича в начале 1970-ых годов (уехав по неосторожности из Ленинграда осенью 1974 г., я смог вернуться в город, в котором родился и вырос, только через двадцать два года).

Я многим обязан моим старшим коллегам и наставникам Б. Ф. Скубенко, А. В. Малышеву и А. И. Виноградову, 90-летию которых посвящается этот выпуск Чебышевского сборника.

Светлая им память!

Считаю своим приятным долгом поблагодарить Николая Михайловича Добровольского и его коллег в Тульском государственном педагогическом университете им. Л. Н. Толстого за организацию конференции в честь известных ленинградских математиков А. И. Виноградова, А. В. Малышева, Б. Ф. Скубенко и Н. И. Фельдмана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Записки научных семинаров ПОМИ, Том 212, 1994 г.

2. А.Н. Андрианов, А.И. Виноградов, Е.П. Голубева, Г.В. Кузьмина, А.П. Осколков, О.М. Фоменко. Борис Фадеевич Скубенко. Очерк жизни и творчества // Записки научных семинаров ПОМИ, 1994. Т. 212. С. 5–9.

3. Е. П. Голубева, О. М. Фоменко. Борис Фадеевич Скубенко. Первая работа // Записки научных семинаров ПОМИ, 2000. Т. 263. С. 5–6.

4. Линник Ю. В. Эргодические свойства алгебраических полей. — Издательство Ленинградского университета, Л., 1967.

5. А. С. Пен, Б. Ф. Скубенко. Оценка сверху периода квадратичной иррациональности // Математические заметки. 1969. Т. 5, № 4, С. 423–482.

6. Е. В. Подсыпанин. О длине периода квадратичной иррациональности // Записки научных семинаров ПОМИ. 1979. Т. 82. С. 95–99.

REFERENCES

1. "Zapiski Seminarov POMI (in Russian), v. 212 (1994)" .

2. A. N. Andrianov, A. I. Vinogradov, E. P. Golubeva, G. V. Kuz'mina, A. P. Oskolkov, O. M. Fomenko, “Boris F. Skubenko. An essay on his life and scientific work”, J. Math. Sci., 83:6 (1997), 689–693

3. E. P. Golubeva, O. M. Fomenko, “Boris Fadeevich Skubenko. His first work”, J. Math. Sci. (New York), 110:6 (2002), 3031

4. Linnik Yu. V. Ergodic properties of algebraic fields. — Publishing house of Leningrad University, Leningrad, 1967.

5. A. S. Pen, B. F. Skubenko, “Estimation from above of the period of a quadratic irrationality”, Math. Notes, 5:4 (1969), 247–250

6. E. V. Podsypanin, “Length of the period of a quadratic irrational”, J. Soviet Math., 18:6 (1982), 919–923.

Получено 13.10.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 517.925.52 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-3-78-91

К проблеме устойчивости периодического решения в условиях бифуркации Хопфа

В. В. Абрамов, Е. Ю. Лискина, С. С. Мамонов

Абрамов Владимир Викторович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин, Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина (г. Рязань).
e-mail: v.abramov@365.rsu.edu.ru

Лискина Екатерина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин, Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина (г. Рязань).
e-mail: e.liskina@365.rsu.edu.ru

Мамонов Сергей Станиславович — доктор физико-математических наук, доцент, профессор, заведующий кафедрой математики и методики преподавания математических дисциплин, Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина (г. Рязань).
e-mail: s.mamonov@365.rsu.edu.ru

Аннотация

Данная работа посвящена проблеме устойчивости малого периодического решения нормальной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При исследовании устойчивости периодического решения автономной системы естественно анализировать локальную динамику пересечений возмущенных траекторий с ортогональными сечениями соответствующего цикла. Путем введения специальной системы координат, в которой одна из осей направлена по касательной к траектории периодического решения, задача об орбитальной устойчивости периодического решения сводится к задаче об устойчивости по Ляпунову нулевого решения вспомогательной системы с периодической по t правой частью. Для вспомогательной системы, размерность которой на единицу меньше размерности исходной системы, в линейном приближении вопрос об устойчивости нулевого решения сводится к оценке мультипликаторов матрицы монодромии. Таким образом, по теореме Андронова — Витта реализуется классический подход к исследованию орбитальной устойчивости периодического решения. При этом имеет место некритический случай орбитальной устойчивости. Такой подход традиционно используется и в условиях бифуркации типа Хопфа для систем с параметром. В данной работе для автономной системы с параметром получены условия бифуркации малого решения, период которого близок к периоду решений соответствующей линейной однородной системы. Сформулировано определение свойства орбитальной устойчивости по параметру, согласно которому возмущенные правые полутраектории сколь угодно близки к исследуемому циклу не только за счет малости возмущений начальных значений, но и за счет малости параметра. При этом использована идея ослабления требований определения устойчивости ляпуновского типа, предложенная М.М. Хапаевым. Свойство орбитальной устойчивости по параметру может иметь место и при наличии орбитальной неустойчивости исследуемого цикла в классическом смысле. Для исследования орбитальной устойчивости малого периодического решения по параметру использовано нелинейное приближение упомянутой выше вспомогательной системы возмущенных движений.

Ключевые слова: качественная теория, автономная система дифференциальных уравнений, периодическое решение, орбитальная устойчивость, малый параметр, устойчивость по параметру, оператор монодромии.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
В. В. Абрамов, Е. Ю. Лискина, С. С. Мамонов. К проблеме устойчивости периодического решения в условиях бифуркации Хопфа // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 3, с. 78–91.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 3.

UDC 517.925.52 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-3-78-91

On the problem of periodic solution's stability under Hopf bifurcation

V. V. Abramov, E. Ju. Liskina, S. S. Mamonov

Abramov Vladimir Viktorovich — candidate of physical and mathematical Sciences, associate Professor of the Department of mathematics and methods of teaching mathematical disciplines, Ryazan state University named after S. A. Yesenin (Ryazan).
e-mail: v.abramov@365.rsu.edu.ru
Liskina Ekaterina Yuryevna — candidate of physical and mathematical Sciences, associate Professor of the Department of mathematics and methods of teaching mathematical disciplines, Ryazan state University named after S. A. Yesenin (Ryazan).
e-mail: e.liskina@365.rsu.edu.ru
Mamonov Sergey Stanislavovich — doctor of physical and mathematical Sciences, associate Professor, Professor, head of the Department of mathematics and methods of teaching mathematical disciplines, Ryazan state University named after S. A. Yesenin (Ryazan).
e-mail: s.mamonov@365.rsu.edu.ru

Abstract

This work is devoted to the problem of stability of a small periodic solution of a normal Autonomous system of ordinary differential equations. It is natural to analyze the local dynamics of intersections of perturbed trajectories with orthogonal sections of the corresponding cycle when studying the stability of the periodic solution of an Autonomous system. The problem of orbital stability of the periodic solution is reduced to the problem of Lyapunov stability of the zero solution of an auxiliary system with a periodic t right-hand side by introducing a special coordinate system in which one of the axes is directed tangentially to the trajectory of the periodic solution. For an auxiliary system whose dimension is one less than the dimension of the original system, in a linear approximation, the question of the stability of the zero solution is reduced to an estimate of the multipliers of the monodromy matrix. Thus, according to the Andronov — Witt theorem, the classical approach to the study of the orbital stability of the periodic solution is realized. There is a non-critical case of orbital stability. This approach is traditionally used in Hopf-type bifurcation for systems with a parameter. In this paper, for an autonomous system with a parameter, the bifurcation conditions of a small solution whose period is close to the solution period of the corresponding linear homogeneous system are obtained. The determination of the orbital stability property by the parameter is formulated. According to this condition, the perturbed right half-vectors are arbitrarily close to the studied cycle not only due to the smallness of the initial values perturbations, but also due to the smallness of the parameter. In this case, the idea of weakening the requirements for determining the stability of the Lyapunov type, proposed by M. M. Khapaev, is used. The property of orbital stability with respect to the parameter can also take place in the presence of orbital instability of the studied cycle in the classical sense. A nonlinear approximation of the above-mentioned auxiliary system of perturbed motions is used to study the orbital stability of a small periodic solution with respect to the parameter.

Keywords: qualitative theory, autonomous system of differential equations, periodic solution, orbital stability, small parameter, parameter stability, monodromy operator.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
V. V. Abramov, E. Ju. Liskina, S. S. Mamonov, 2019, "On the problem of periodic solution's stability under Hopf bifurcation", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 78–91.

1. Введение

При исследовании устойчивости периодического решения автономной системы дифференциальных уравнений естественно возникает вопрос о близости к соответствующему циклу возмущенных траекторий. Чтобы обнаружить свойство орбитальной асимптотической устойчивости периодического решения традиционно рассматривается соответствующая система в вариациях, для которой устанавливаются оценки мультипликаторов и применяется теорема Андронова — Витта. Такой же подход характерен и для бифуркации типа Хопфа в системах с малым параметром. При таком подходе имеют место некритические случаи орбитальной устойчивости, так как используются свойства линейного приближения системы возмущенных движений [1, 2, 3, 4, 5, 6].

В данной работе определим новое свойство орбитальной устойчивости. Исследование этого свойства проведем по нелинейному приближению системы возмущенных движений.

Покажем целесообразность ослабления требований определения орбитальной устойчивости для систем с параметром. Рассмотрим уравнение для траекторий на полярной плоскости

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho(\mu-\rho)(3\mu-\rho),$$

в котором $\mu \geq 0$ — малый параметр. При $\mu > 0$ это уравнение имеет два орбитально асимптотически устойчивых цикла $\rho = \mu$, $\rho = 3\mu$, которые ограничивают область отталкивания неустойчивого цикла $\rho = 2\mu$. Эту ситуацию можно расценивать иначе — цикл $\rho = 2\mu$ имеет "кольцевую"область устойчивости, то есть возмущенные траектории остаются в сколь угодно малой окрестности цикла $\rho = 2\mu$ не только за счет малости возмущений начальных значений, но также и за счет малости параметра μ. При этом с практической точки зрения цикл $\rho = 2\mu$ может рассматриваться в качестве устойчивой орбиты. Для формального описания свойства устойчивости малого цикла в случаях такого рода используем идею "устойчивости по параметру" [7].

При наличии у нулевого решения свойства устойчивости по параметру возмущенные движения сколь угодно близки к нулевому решению, если достаточно малы начальные значения возмущенных решений и параметр изучаемой системы дифференциальных уравнений. При этом нулевое решение может быть неустойчиво по Ляпунову. Свойство устойчивости по параметру исследовалось на основе комбинации метода функций Ляпунова и метода усреднения (основные результаты представлены в монографии [7]), а также на основе оценки нелинейного приближения оператора монодромии для систем с периодической по независимой переменной правой частью [8].

Рассмотрим систему уравнений вида

$$\dot{y} = Ay + f(y,\mu), \tag{1}$$

в которой $y \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ — малый параметр, функция $f(y,\mu)$ достаточно гладко зависит от своих переменных в окрестности точки $(0_{n+1}, 0_m)$,

$$f\left(0_{n+1}, \mu\right) \equiv 0_{n+1}, \quad f'_y\left(0_{n+1}, 0_m\right) \equiv 0_{(n+1)(n+1)}.$$

Здесь и далее 0_m — m-мерный вектор, 0_{ml} — $m \times l$-матрица. Будем предполагать, что линейное приближение $\dot{y} = Ay$, соответствующее системе (1), при $\mu = 0_m$ имеет по крайней мере одно ω_0-периодическое решение.

Определение 1. *Будем говорить, что ω-периодическое решение $y(t,\alpha,\mu)$, $y(0,\alpha,\mu) = \alpha$ системы* (1) *является малым, если для величин α, μ, ω существует совместная параметризация вида*

$$\begin{gathered} a = a(\alpha) = \alpha(a_0 + \bar{a}(\alpha)), a_0 \neq 0_{n+1}, \lim_{\alpha \to 0} \bar{a}(\alpha) = 0_{n+1}; \\ \mu = \mu(\alpha) = \alpha(\mu_0 + \bar{\mu}(\alpha)), \mu_0 \neq 0_m, \lim_{\alpha \to 0} \bar{\mu}(\alpha) = 0_m; \\ \omega = \omega(\alpha), \lim_{\alpha \to 0} \omega(\alpha) = \omega_0. \end{gathered} \tag{2}$$

Ясно, что в условиях определения 1 для системы (1) имеет место бифуркация периодического решения от нулевого.

Решение, удовлетворяющее определению 1, далее будем называть решением вида (2).

Рассмотрим траекторию $T = \left\{y \in \mathbb{R}^{n+1} : y = y(t,a,\mu), t \in [0,\omega]\right\}$ малого периодического решения вида (2) и ее ε-окрестность $U(T,\varepsilon)$.

Для исследования устойчивости решения вида (2) системы (1) введем α в качестве малого параметра в правую часть системы (1). Поэтому целесообразно сформулировать следующее определение.

Определение 2. *Малое ω-периодическое решение вида* (2) *системы* (1) *орбитально α-устойчиво, если для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое значение $\delta > 0$, что при всех величинах a_1, α, удовлетворяющих условиям $a_1 \in U(T,\varepsilon)$, $\alpha < \delta$, и при всех $t > 0$ имеет место включение $y(t,a_1,\mu(\alpha)) \in U(T,\varepsilon)$.*

Заметим, что малое орбитально устойчивое решение обладает свойством устойчивости по определению 2. Однако свойство орбитальной α-устойчивости может иметь место и для орбитально неустойчивого решения.

Задача. Для системы (1) найти условия бифуркации ω-периодического решения вида (2), устойчивого по определению 2.

2. Условия бифуркации периодического решения

Для определения зависимости периода решения от начального значения и от параметра выполним в системе (1) замену независимой переменной $t = (1+\lambda)\tau$, где λ — малый параметр [9]. Получим систему вида

$$\frac{dv}{d\tau} = Av + \lambda Av + (1+\lambda) f(v,\mu). \tag{3}$$

Допустим, $y(t,a,\mu)$ — ω-периодическое решение системы (1), то есть

$$\dot{y}(t,a,\mu) \equiv g(y(t,a,\mu),\mu)$$

при $t \in [0,\omega]$. Умножив тождество на $\dfrac{d\tau}{d\tau}$, имеем

$$\frac{dy((1+\lambda)\tau,a,\mu)}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} \equiv \frac{dy((1+\lambda)\tau,a,\mu)}{d\tau} \cdot \frac{1}{1+\lambda} \equiv g(y((1+\lambda)\tau,a,\mu),\mu),$$

при $\tau \in \left[0, \dfrac{\omega}{1+\lambda}\right]$, где $g(y,\mu) = Ay + f(y,\mu)$. Следовательно, $\dfrac{\omega}{1+\lambda}$-периодическая функция $v(\tau, a, \lambda, \mu) = y((1+\lambda)\tau, a, \mu)$ является решением системы (3). Так как проведенные вычисления можно обратить, то в силу автономности систем (1) и (3) справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Система* (1) *имеет решение* $y(t,a,\mu)$ *с периодом* $\omega = (1+\lambda)\omega_0$ *тогда и только тогда, когда система* (3) *имеет* ω_0*-периодическое решение* $v(\tau,a,\lambda,\mu)$, $v(0,a,\lambda,\mu) = a$.

Чтобы установить условия существования периодического решения системы (3) применим результаты работ [10, 11]. Пусть $X(\tau) = \exp(\tau A)$. Решение системы (3) удовлетворяет интегральному уравнению

$$v(\tau,a,\lambda,\mu) = X(\tau)a + \lambda X(\tau)\int\limits_0^\tau X(-s)Av(s,a,\lambda,\mu)ds + (1+\lambda)X(\tau)\int\limits_0^\tau X(-s)f(v(s,a,\lambda,\mu),\mu)ds.$$

Так как матрицы $X(\tau)$, $X(-\tau)$, A коммутируют, то $X(\tau)\int\limits_0^\tau X(-s)AX(s)ds = \tau X(\tau)A$. Учитывая локальную гладкость $f(y,\mu)$, оператор монодромии (оператор сдвига на период по траекториям) системы (3) можно представить в виде

$$v(\omega_0,a,\lambda,\mu) = Xa + q(a,\lambda,\mu) + \psi(a,\lambda,\mu), \tag{4}$$

в котором $X = X(\omega_0)$ — матрица монодромии, $q(a,\lambda,\mu) = \omega_0\lambda XAa + p(a,\mu)$ — первое нелинейное однородное приближение оператора монодромии. Векторная форма $p(a,\mu)$ порядка $k > 1$ и функция $\psi(a,\lambda,\mu)$ удовлетворяют условиям:

$$p(a,\mu) + \tilde{p}(a,\mu) = X\int\limits_0^{\omega_0} X(-s)f(X(-s)a,\mu)ds,$$

$$p(\alpha a, \alpha\mu) = \alpha^k p(a,\mu), \quad \lim_{\alpha\to 0}\alpha^{-k}\left\|\tilde{p}(\alpha a,\alpha\mu)\right\| \equiv 0,$$

$$\psi(a,\lambda,\mu) = \lambda X\int\limits_0^{\omega_0} X(-s)Av(s,a,\lambda,\mu)ds + (1+\lambda)X\int\limits_0^{\omega_0} X(-s)f(v(s,a,\lambda,\mu),\mu)ds - q(a,\lambda,\mu),$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\alpha^{-k}\left\|\psi(\alpha a,\alpha^{k-1}\lambda,\alpha\mu)\right\| \equiv 0,$$

Из условия (4) следует, что $v(\tau,a,\lambda,\mu)$ — ω_0-периодическое решение системы (3) тогда и только тогда, когда величины a, λ, μ удовлетворяют бифуркационному уравнению

$$\left[X - E_{n+1}\right]a + q(a,\lambda,\mu) + \psi(a,\lambda,\mu) = 0_{n+1}. \tag{5}$$

Здесь и далее E_s — $s\times s$-матрица.

Так как по условию система $\dot{y} = Ay$ имеет ω_0-периодическое решение, то справедливо равенство

$$\det\left(X - E_{n+1}\right) = 0. \tag{6}$$

Допустим, $r = \dim\left\{\ker\left[X - E_{n+1}\right]\right\}$ при условии (6). Для линейной системы $\left[X - E_{n+1}\right]a = 0_{n+1}$ вычислим фундаментальную $(n+1)\times r$-матрицу решений K. Выполним подстановку $a = Kh$, в которой $h \in \mathbb{R}^r$ — произвольный вектор. Тогда уравнение (5) примет вид

$$q(Kh,\lambda,\mu) + \psi(Kh,\lambda,\mu) = 0_{n+1}. \tag{7}$$

Допустим, $r + m \geq n$ и существуют значения $a_0 = Kh_0 \neq 0_{n+1}$, $\lambda_0, \mu_0 \neq 0_m$, удовлетворяющие условиям

$$q(a_0, \lambda_0, \mu_0) = 0_{n+1}, \tag{8}$$

$$\text{rang}Q = n + 1, \tag{9}$$

в которых

$$Q = \frac{\partial q(Kh_0, \lambda_0, \mu_0)}{\partial(h, \lambda, \mu)} = [[\omega_0 \lambda_0 XA + p\prime_a(a_0, \mu_0)]\, K \quad \omega_0 XAa_0 \quad p\prime_\mu(a_0, \mu_0)] -$$

$(n + 1) \times (r + m + 1)$-матрица.

В работе [11] доказано, что условия (6) и (8) необходимы для бифуркации малого периодического решения системы (3).

Теорема 1. *Если выполняются условия* (6), (8), (9), *то система* (1) *имеет малое решение вида* (2) *с периодом* $\omega = (1 + \lambda)\omega_0$, $\lambda = \alpha^{k-1}(\lambda_0 + \bar{\lambda}(\alpha))$, $\lim\limits_{\alpha \to 0} \bar{\lambda}(\alpha) = 0$.

Доказательство. Подставим в уравнение (7) величины $h = \alpha(h_0 + \bar{h})$, $\lambda = \alpha^{k-1}(\lambda_0 + \bar{\lambda})$, $\mu = \alpha(\mu_0 + \bar{\mu})$, $\alpha > 0$. Обозначим $u = \text{colon}(\bar{h}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ По условию (8) уравнение (7) преобразуется к виду $\alpha^k Qu + \varphi(\alpha, u) = 0_{n+1}$. С учетом равенства (9) выберем разложение $Qu = Q_1 u_1 + Q_2 u_2$, в котором Q_1 — $(n+1) \times (n+1)$-матрица, составленная из линейно независимых столбцов матрицы Q, матрица Q_2 составлена из остальных столбцов матрицы Q, векторы u_1, u_2 составлены из компонент вектора u с номерами, соответствующими номерам указанных столбцов,

$$\varphi(\alpha, u) = \psi(Kh, \lambda, \mu) - \alpha^k q(K(h_0 + \bar{h}), \lambda_0 + \bar{\lambda}, \mu_0 + \bar{\mu}).$$

Допустим, $u_2 = 0_{n+1-r-m}$. Разделим преобразованное уравнение на α^k. Так как

$$\lim_{\alpha \to 0} \alpha^{-k} \left\| \psi(\alpha a, \alpha^{k-1}\lambda, \alpha\mu) \right\| \equiv 0,$$

то в силу условия (8) функцию $\bar{\varphi}(\alpha, u_1) = \alpha^{-k}\varphi(\alpha, u)$ при $\alpha \to 0$ можно доопределить: $\bar{\varphi}(0, 0_{n+1}) = 0_{n+1}$, $\bar{\varphi}\prime_{u_1}(0, 0_{n+1}) = 0_{(n+1)(n+1)}$. Итак, уравнение (7) преобразовано в уравнение, связывающее вектор u_1 с параметром α,

$$F(\alpha, u_1) = Q_1 u_1 + \bar{\varphi}(\alpha, u_1) = 0_{n+1}. \tag{10}$$

Так как выполняются условия $F(0, 0_{n+1}) = 0_{n+1}$, $\bar{F}\prime_{u_1}(0, 0_{n+1}) = \det Q_1 \neq 0$, то уравнение (10) определяет неявную функцию $u_1(\alpha)$ при $\alpha \in [0, \Delta)$, где Δ — некоторое достаточно малое число, $\lim\limits_{\alpha \to 0} u_1(\alpha) = 0_{n+1}$. Перейдем к исходным переменным и получим величины $h = h(\alpha) = \alpha^{k+1}(\lambda_0 + \bar{h}(\alpha))$, $\lambda = \lambda(\alpha) = \alpha(h_0 + \bar{\lambda}(\alpha))$, $\mu = \mu(\alpha) = \alpha(\mu_0 + \bar{\mu}(\alpha))$, которые удовлетворяют уравнению (7) при $\alpha \in [0, \Delta)$. При этом величины $a = a(\alpha) = Kh(\alpha)$, $\lambda = \lambda(\alpha)$, $\mu = \mu(\alpha)$ удовлетворяют уравнению (5) при $\alpha \in [0, \Delta)$, то есть определяют малое ω_0-периодическое решение $\bar{v} = \bar{v}(\tau, \alpha) = v(\tau, a(\alpha), \lambda(\alpha), \mu(\alpha))$ системы (3). Тогда в силу леммы 1 система (1) имеет решение вида (2) с периодом $\omega = (1 + \lambda(\alpha))\omega_0$. Теорема 1 доказана.

3. Построение специальной системы координат в окрестности траектории малого периодического решения

В силу леммы 1 траектория периодического решения вида (2) и траектория соответствующего решения $\bar{v} = \bar{v}(\tau, \alpha)$ системы (3) совпадают, отличаясь лишь способом параметризации. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Решение вида* (2) *системы* (1) *орбитально α-устойчиво тогда и только тогда, когда соответствующее малое ω_0-периодическое решение $\bar{v} = \bar{v}(\tau, \alpha)$ системы* (3) *орбитально α-устойчиво.*

Для исследования малого периодического решения в условиях теоремы 1 на устойчивость по определению 2 выполним в окрестности траектории этого решения преобразование переменных [12].

Зададим подвижную ортогональную плоскость π_τ к траектории периодического решения $\bar{v}$ системы (3) как множество векторов v, удовлетворяющих условию

$$\pi_\tau \quad : \quad (v - \bar{v})^T \bar{v}_1 = 0, \tag{11}$$

в котором $\bar{v}_1 = \dfrac{d\bar{v}_1}{d\tau}$ — направляющий вектор к траектории решения $\bar{v}$ в данный момент.

В систему (3) введем параметр α, который по теореме 1 согласует начальное значение малого периодического решения с параметрами системы, выбрав $\lambda = \lambda(\alpha)$, $\mu = \mu(\alpha)$, и получим систему

$$\frac{dv}{d\tau} = \tilde{f}(v, \alpha) = Av + \lambda(\alpha)Av + (1 + \lambda(\alpha))f(v, \mu(\alpha)). \tag{12}$$

Рассмотрим в начальный момент плоскость π_0. В малой окрестности начального значения периодического решения $\bar{v} = \bar{v}(\tau, \alpha)$ системы (3) произвольно выберем начальное значение $a = v(0, a, \lambda(\alpha), \varepsilon(\alpha))$ возмущенного решения $v(\tau, a, \lambda(\alpha), \varepsilon(\alpha))$. Допустим, $\theta = \theta(\tau, a)$ — момент первого пересечения траектории возмущенного решения с плоскостью π_τ. Тогда

$$z = z(\tau, a, \alpha) = v(\theta, a, \alpha) - \bar{v}(\theta, a, \alpha) \in \pi_\tau.$$

При этом $z^T \bar{v}_1 = 0$ по условию (11).

Составим систему дифференциальных уравнений для переменной z. С этой целью вычислим

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{dv}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\tau} - \bar{v}_1. \tag{13}$$

В силу равенства (11) справедливо соотношение

$$\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^T \bar{v}_1 = z^T \bar{v}_2, \tag{14}$$

в котором $\bar{v}_2 = \dfrac{\bar{v}_1}{d\tau}$. Учтем, что функция $v(\theta, a, \alpha) = z(\tau, a, \alpha) + \bar{v}(\tau, \alpha)$ удовлетворяет системе (12), то есть

$$\frac{dv(\theta, a, \alpha)}{d\theta} \equiv \tilde{f}(z(\tau, a, \alpha) + \bar{v}(\tau, \alpha), \alpha).$$

Поэтому скалярно умножив равенство (13) на $\bar{v}_1$, в силу равенства (14) получим соотношение

$$\left(\tilde{f}(z + \bar{v}, \alpha)\right)^T \bar{v}_1 \frac{d\theta}{d\tau} - \bar{v}_1^2 + z^T \bar{v}_2 = 0, \tag{15}$$

где $\bar{v}_1^2 = (\bar{v}_1)^T \bar{v}_1$. Итак, с помощью равенств (13) и (15) получим систему уравнений

$$\frac{dz}{d\tau} = \tilde{\tilde{f}}(z, \alpha) = w(z, \alpha)\tilde{f}(z + \bar{v}, \alpha) - \bar{v}_1, \tag{16}$$

в которой $w(z, \alpha) = \dfrac{\bar{v}_1^2 - z^T \bar{v}_2}{\left(\tilde{f}(z + \bar{v}, \alpha)\right)^T \bar{v}_1}$. Так как ω_0-периодическое решение $\bar{v} = \bar{v}(\tau, \alpha)$ системы (3) при малых $\alpha > 0$ имеет вид

$$\bar{v} = \alpha(X(\tau)a_0 + \eta(\tau, \alpha)),$$

$$\eta(\tau,\alpha)=\alpha^{-1}X(\tau)\int\limits_0^\tau X(-s)(\lambda(\alpha)A\bar v+(1+\lambda(\alpha))f(\bar v,\mu(\alpha)))ds,\quad \lim_{\alpha\to 0}\|\eta(\tau,\alpha)\|\equiv 0,$$

то справедливо равенство

$$w(z,\alpha)=\frac{\dfrac{\bar v_1^2}{\alpha}-z^T\left(A^2X(\tau)a_0+\dfrac{d^2\eta(\tau,\alpha)}{d\tau^2}\right)}{(Az+f(z,\alpha))^T\left(AX(\tau)a_0+\dfrac{d\eta(\tau,\alpha)}{d\tau}\right)}.$$

Чтобы определить локальную структуру правой части системы (16) в окрестности нулевого решения, введем систему координат на плоскости π_τ .

Допустим, в системе (1) при $\mu=0_m$ матрица линейного приближения имеет блочно-диагональную форму

$$A=\operatorname{diag}(A_1,A_2),\tag{17}$$

где A_2 — $l\times l$-матрица в жордановой нормальной форме, имеющая только нулевые или чисто мнимые $\pm i\beta$ собственные значения, для которых выполняется условие $\dfrac{\beta}{2\pi/\omega_0}\in\mathbb{N}$, $l\le r$, причем $A_2^T=-A_2$, $\exp(\omega_0A_2)=E_l$, A_2^2 — диагональная матрица. В силу равенства (17) по условиям теоремы 1 направление бифуркации периодического решения в фазовом пространстве определяется вектором вида $a_0=(0,\dots,0,c^{n+1})$, $c^{n+1}\in\mathbb{R}^l$. Без ограничения общности рассуждений будем предполагать, что $\left\|c^{n+1}\right\|_2=1$ (здесь и далее $\|*\|_2$ — евклидова норма).

Для траектории периодического решения $\bar v=\bar v(\tau,\alpha)$ выберем нормированный направляющий вектор касательной

$$b_{n+1}(\tau,\alpha)=\frac{\dfrac{d\bar v}{d\tau}}{\left\|\dfrac{d\bar v}{d\tau}\right\|_2}=\bar b_{n+1}(\tau)+\lambda_{n+1}(\tau,\alpha),$$

в котором

$$\bar b_{n+1}(\tau)=\left(0_{n+1-l},P(\tau)c^{n+1}\right),\quad P(\tau)=\omega_0^{-1}A_2X_2(\tau),\quad X_2(\tau)=\exp(\tau A_2),$$

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\|\lambda_{n+1}(\tau,\alpha)\|\equiv 0$. При этом вектор $b_{n+1}(\tau,\alpha)$ — нормаль к плоскости π_τ. Выберем векторы $c^{n+j}\in\mathbb{R}^l$, $j=\overline{2,l}$, образующие вместе с вектором c^{n+1} ортонормированную систему. В силу условия (17) справедливы равенства $P^T(\tau)P(\tau)\equiv E$, $\|P(\tau)\|_2\equiv 1$. Поэтому векторы $\bar b_{n+j}(\tau)=(0_{n+1},P(\tau)c^{n+j})$, $j=\overline{1,l}$, при любом τ тождественно образуют ортонормированную систему. Из столбцов c^{n+j}, $j=\overline{1,l}$, составим ортогональную $l\times l$-матрицу C. Таким образом, построена ортогональная матрица $B=B(\tau,\alpha)=\bar B(\tau)+\Lambda(\tau,\alpha)$, в которой $\bar B(\tau)=\operatorname{diag}(E_{n+1-l},P(\tau)C)$, матрица $\Lambda(\tau,\alpha)$ содержит последний столбец $\lambda_{n+1}(\tau,\alpha)$ и удовлетворяет условию $\lim\limits_{\alpha\to 0}\|\Lambda(\tau,\alpha)\|\equiv 0$.

Выполним замену переменной $z=B\bar x$ в системе (16). Учитывая ортогональность матрицы B, получим $B^{-1}=B^T(\tau)$. Продифференцируем равенство $\bar x=B^Tz$ и преобразуем систему (16) к виду

$$\frac{d\bar x}{d\tau}=B^T\tilde{\tilde f}(B\bar x,\alpha)+\left[\frac{dB}{d\tau}\right]^TB\bar x=\bar g(\tau,\bar x,\alpha).\tag{18}$$

При $\alpha=0$ справедливо равенство

$$\left[\frac{d\bar B(\tau)}{d\tau}\right]^T\bar B(\tau)=\operatorname{diag}\left[0_{n+1-l},\left(\frac{dP(\tau)}{d\tau}C\right)^T\right]\operatorname{diag}(E_{n+1-l},P(\tau)C).$$

Так как $A_2X_2(\tau)=X_2(\tau)A_2$, то $P^T\dfrac{dP(\tau)}{d\tau}=-A_2$. Следовательно,

$$\left[\frac{dB}{d\tau}\right]^T B=\operatorname{diag}(0_{n+1-l},-C^TA_2C)+\tilde\Lambda(\tau,\alpha),\quad \lim_{\alpha\to0}\left\|\tilde\Lambda(\tau,\alpha)\right\|\equiv0.$$

Так как $\lim\limits_{\alpha\to0}\|\bar v\|\equiv0$, то $\lim\limits_{\alpha\to0}\left\|\dfrac{\bar v_1^2}{\alpha}\right\|\equiv0$. По условию (17) справедливо равенство

$$\left(\bar B\bar x\right)^T\left[A^T+A\right]AX(\tau)a_0=0_{n+1}.$$

Поэтому, доопределив функцию $w(z,\alpha)$ из системы (16) при $\alpha\to0$ по непрерывности, получим равенство

$$w(B(\tau,0)\bar x,0)=\frac{-\left(\bar B\bar x\right)^T A^2X(\tau)a_0}{\left(A\bar B\bar x+f(\bar B\bar x,0)\right)^T AX(\tau)a_0}=.$$

$$=\frac{\left(\bar x^T\bar B^TA^T+\left(f(\bar B\bar x,0)\right)^T\right)AX(\tau)a_0}{\left(A\bar B\bar x+f(\bar B\bar x,0)\right)^T AX(\tau)a_0}-\frac{\left(\left(\bar B\bar x\right)^T\left[A^T+A\right]+\left(f(\bar B\bar x,0)\right)^T\right)AX(\tau)a_0}{\left(A\bar B\bar x+f(\bar B\bar x,0)\right)^T AX(\tau)a_0}=$$

$$=1-\frac{\left(f(\bar B\bar x,0)\right)^T AX(\tau)a_0}{\left(A\bar B\bar x+f(\bar B\bar x,0)\right)^T AX(\tau)a_0}.$$

Следовательно, в окрестности точки $\bar x=0_{n+1}$ имеет место разложение

$$w(B(\tau,0)\bar x,0)=1-\bar w(\tau,\bar x)+\tilde w(\tau,\bar x),\tag{19}$$

в котором $\bar w(\tau,\bar x)=\dfrac{\left(f(\bar B\bar x,0)\right)^T AX(\tau)a_0}{\left(A\bar B\bar x\right)^T AX(\tau)a_0}$, функция $\tilde w(\tau,\bar x)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\gamma\to0}\frac{\|\tilde w(\tau,\gamma\bar x)\|}{\|\bar w(\tau,\gamma\bar x)\|}\equiv0.$$

С учетом равенства (19) правая часть системы (18) при $\alpha=0$ имеет вид

$$\bar g(\tau,\bar x,0)=\bar B^Tw(\bar B\bar x,0)\left(A\bar B\bar x+f(\bar B\bar x,0_m)\right)+\left[\frac{d\bar B}{d\tau}\right]^T\bar B\bar x=D\bar x+\bar\varphi(\tau,\bar x)+\tilde\varphi(\tau,\bar x),$$

где $\bar D=\bar B^TA\bar B+\left[\dfrac{d\bar B}{d\tau}\right]^T\bar B=\operatorname{diag}(A_1,0_{ll})$, $\bar\varphi(\tau,\bar x)=\bar B^T(f(\bar B\bar x,0_m)-\bar w(\tau,\bar x)A\bar B\bar x)$, функция $\tilde\varphi(\tau,\bar x)$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{\gamma\to0}\dfrac{\|\tilde\varphi(\tau,\gamma\bar x)\|}{\|\bar\varphi(\tau,\gamma\bar x)\|}\equiv0$.

Итак, в окрестности начала координат при малом значении параметра система (18) имеет вид

$$\frac{dx}{d\tau}=\bar g(\tau,\bar x,\alpha)=\bar D\bar x+\bar\varphi(\tau,\bar x)+\tilde\varphi(\tau,\bar x)+\tilde{\tilde\varphi}(\tau,\bar x,\alpha),\tag{20}$$

$\bar g(\tau,0_{n+1},\alpha)\equiv0_{n+1}$, $\lim\limits_{\alpha\to0}\left\|\tilde{\tilde\varphi}(\tau,\bar x,\alpha)\right\|\equiv0$. Множество $\Pi=\{\bar x=(x,0)\}$ в силу проведенных преобразований инвариантно для системы (20) [12]. В системе выберем $\bar x=(x,0)$, исключим последнее уравнение и получим систему с ω_0-периодической по τ правой частью вида

$$\frac{dx}{d\tau}=g(\tau,x,\alpha)=Dx+\varphi(\tau,x)+\varphi_1(\tau,x)+\varphi_2(\tau,x,\alpha),\tag{21}$$

в которой $g(\tau, x, \alpha) = \bar{E}_{n+1}\bar{g}(\tau, (x, 0), \alpha)$, $n \times (n+1)$-матрица $\bar{E}_{n+1}$ получена из E_{n+1} вычеркиванием последней строки, $g(\tau, 0_n, \alpha) \equiv 0_n$, $D = \mathrm{diag}(A_1, 0_{(l-1)(l-1)})$, $\varphi(\tau, x) = \bar{E}_{n+1}\bar{\varphi}(\tau, (x, 0)$, функции $\varphi_1(\tau, x)$, $\varphi_2(\tau, x, \alpha)$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{\gamma \to 0} \frac{\|\varphi_1(\tau, \gamma x)\|}{\|\varphi(\tau, \gamma x)\|} \equiv 0, \quad \lim_{\alpha \to 0} \|\varphi_2(\tau, x, \alpha)\| \equiv 0.$$

Для решения $x = 0_n$ системы (21) используем определение устойчивости по параметру [8, 13].

Определение 3. *Решение $x = 0_n$ системы вида* (21) *α-устойчиво, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого решения $x(\tau, b, \alpha)$ из условий $x(0, b, \alpha) = b \in U(0_n, \delta)$ и $\alpha < \delta$ при всех $\tau > 0$ следует справедливость неравенства $\|x(\tau, b, \alpha)\| \le \varepsilon$.*

В силу преобразований, проведенных при построении системы (21), справедливо следующее утверждение, которое по способу доказательства аналогично теореме 25 [12].

Лемма 3. *Малое периодическое решение $\bar{v}$ системы* (3) *орбитально α-устойчиво тогда и только тогда, когда решение $x = 0_n$ системы* (21) *α-устойчиво.*

4. Достаточный признак орбитальной α-устойчивости малого периодического решения

Для применения леммы 3 исследуем локальную структуру оператора монодромии системы (21).

При $\alpha = 0$ линейное приближение $\dfrac{dx}{d\tau} = Dx$ системы (21) имеет фундаментальную матрицу $Y(\tau) = \mathrm{diag}(\exp(\tau A_1), E_{l-1})$. Выделим первое однородное нелинейное приближение от фазовой переменной для оператора монодромии системы (21). В силу гладкости функции $\varphi(\tau, x)$ получим разложение $Y \int\limits_0^{\omega_0} Y(-s)\varphi(s, Y(s)b)ds = u(b) + \bar{u}(b)$, в котором $Y = Y(\omega_0)$, $u(\gamma b) = \gamma^k u(b)$ — матрица монодромии системы (21) при $\alpha = 0$, функция $u(b)$ однородна, $u(\gamma b) = \gamma^k u(b)$, функция $\bar{u}(b)$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{\gamma \to 0} \gamma^{-k} \|\bar{u}(\gamma b)\| \equiv 0$. При этом правый оператор монодромии системы (21) имеет вид

$$x(\omega_0, b, \alpha) = Yb + u(b) + \tilde{u}(b, a) + \tilde{\tilde{u}}(b, a), \tag{22}$$

где функции $\tilde{u}(b, a)$, $\tilde{\tilde{u}}(b, a)$ удовлетворяют условиям

$$\tilde{u}(b, a) + \tilde{\tilde{u}}(b, a) = Y \int_0^{\omega_0} Y(-s)(\varphi(s, x(s, b, \alpha)) + \varphi_1(s, x(s, b, \alpha)) + \varphi_2(s, x(s, b, \alpha)))ds - u(b),$$

$$\lim_{\gamma \to 0} \gamma^{-k} \|\tilde{u}(\gamma b, \alpha)\| \equiv 0, \quad \lim_{\alpha \to 0} \|\tilde{u}(b, \alpha)\| \equiv 0.$$

По формуле Эйлера для однородной функции построим разложение

$$u(b) = U(b)b, \quad U(b) = \frac{1}{k}\frac{\partial u(b)}{\partial b}.$$

Применим к системе (21) результаты работ [8, 11, 13].

Теорема 2. *Если*
1) справедливо равенство (17)*;*
2) выполняются условия теоремы 1, в которых

$$a_0 = (0, \dots, 0, c^{(n+1)}), \quad c^{(n+1)} \in \mathbb{R}^l, \quad \left\| c^{(n+1)} \right\|_2 = 1;$$

3) для любого λ*:* $\|\lambda\| = 1$ *и достаточно малого* $\gamma > 0$ *справедлива оценка*

$$\|Y + \gamma U(\lambda)\| \le 1 - \sigma\gamma, \quad \sigma > 0,$$

то в системе (1) *имеет место бифуркация орбитально* α*-устойчивого решения вида* (2) *с периодом* $\omega = (1+\lambda)\omega_0$*,* $\lambda = \alpha^{k-1}(\lambda_0 + \bar{\lambda}(\alpha))$*,* $\lim\limits_{\alpha\to 0} \bar{\lambda}(\alpha)) = 0$.

Доказательство. По условиям 1), 2) в системе (1) имеет место бифуркация малого периодического решения вида (2). В силу леммы 3 сведем исследование устойчивости этого решения по определению 3 к локальной оценке нормы оператора монодромии системы (21). С этой целью вначале установим вспомогательные утверждения.

1. Нулевое решение системы (21) α-устойчиво тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, при котором из неравенств $\|b\| < \delta$, $\alpha < \delta$ следует, что значение $x(s\omega_0, b, \alpha)$ определено при всех $s \in \mathbb{N}$ и справедлива оценка $\|x(s\omega_0, b, \alpha)\| < \delta$.

Действительно, необходимость данного утверждения очевидна, если в определении 3 взять $\tau = s\omega$. Установим достаточность. В силу локальной продолжаемости решений системы (21) число δ можно считать таким, что любое решение $x(\tau, x(s\omega_0, b, \alpha), \alpha)$ для каждого $s \in \mathbb{N}$ определено при $\tau \in [0, \omega_0]$, если $\|x(s\omega_0, b, \alpha)\| < \varepsilon$, то есть продолжаемо вправо от момента $s\omega_0$. Значит, в условиях утверждения из пункта 1 любое решение $x(\tau, b, \alpha)$ нелокально продолжаемо вправо. В силу непрерывной зависимости решений системы (21) от начальных значений и параметров можно считать, что $\delta < \varepsilon$ и $\|x(\tau, b, \alpha)\| < \varepsilon$ при любых $\tau \in [0, \omega_0)$, если $\|b\| < \delta$, $\alpha < \delta$. Следовательно, по групповому свойству решений для произвольного $\tau = s\omega_0 + \xi$, $s = \left[\dfrac{\tau}{\omega_0}\right]$, при $\|b\| < \delta$, $\alpha < \delta$ получим оценку $\|x(\tau, b, \alpha)\| = \|x(\xi, x(s\omega_0, b, \alpha), \alpha)\| < 0$. То есть нулевое решение системы (21) устойчиво по определению 3.

2. Если для любого $\delta_1 > 0$ существует такое $\delta_2 > 0$, что при $\|b\| < \delta_1$, $\alpha < \delta_2$ справедлива оценка $\|x(\omega_0, b, \alpha)\| < \|b\|$, то нулевое решение α-устойчиво.

Действительно, произвольно выберем $\varepsilon > 0$. При $\delta_1 = \varepsilon$ подберем значение δ_2. Получим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, для которого из неравенств $\|b\| < \delta_1$, $\alpha < \delta_2$ следует, что $\|x(\omega_0, b, \alpha)\| < \varepsilon$. Тогда по индукции устанавливается, что значение $x(s\omega_0, b, \alpha)$ определено при всех $s \in \mathbb{N}$ и справедлива оценка $\|x(s\omega_0, b, \alpha)\| < \varepsilon$. То есть на основе утверждения из пункта 1 нулевое решение устойчиво по определению 3.

3. Далее в доказательстве используем достаточное условие устойчивости из пункта 2.

Равенство (22) запишем в виде

$$x(\omega_0, b, \alpha) = [Y + U(b) + G(\alpha, b) + V(\alpha, b)]b, \tag{23}$$

в котором матрицы $G(\alpha, b)$, $V(\alpha, b)$ удовлетворяют условиям

$$G(\alpha, b)b = \tilde{\tilde{u}}(b, a), \quad V(\alpha, b) = \tilde{u}(b, a), \quad \lim_{\beta\to 0} \beta^{1-k}\|G(\alpha, \beta b)\| \equiv 0, \quad V(0, b) \equiv 0_{nn}.$$

В равенство (23) подставим $b = \beta\lambda$, $\|\lambda\| = 1$. Выберем число $\delta_1 > 0$ так, чтобы при всех β: $\beta < \delta_1$ и α: $\alpha < \delta_1$ выполнялось неравенство $\|G(\alpha, \beta\lambda)\| \le \dfrac{\beta^{k-1}b_2}{4}$. Существует δ_2: $0 < \delta_2 \le \delta_1$, для которого из условия $\alpha < \delta_2$ при всех β: $\dfrac{\delta_1}{2} \le \beta < \delta_1$ верна оценка $\|V(\alpha, \beta\lambda)\| \le \dfrac{\beta^{k-1}b_2}{4}$.

Без ограничения общности $\|Y+U(b)+G(\alpha,b)+V(\alpha,b)\|<2$, если $\alpha<\delta_2$ и $\beta<\dfrac{\delta_1}{2}$, при этом $\|x(\omega_0,b,\alpha)\|\le 2\|b\|<\delta_1$. Если же $\alpha<\delta_2$ и $\dfrac{\delta_1}{2}<\beta<\delta_1$, то

$$\|x(\omega_0,b,\alpha)\|\le\left(1-\frac{\beta^{k-1}b_2}{2}\right)\|b\|<\delta_1.$$

Итак, произвольно выбрав $\varepsilon>0$, получим, что $\|x(\omega_0,b,\alpha)\|<\varepsilon$ для всех b: $\|b\|<\delta=\min\{\varepsilon,\delta_1\}$ и $\alpha<\delta_2$. Тогда в силу утверждения из пункта 3 нулевое решение системы (23) устойчиво по определению 3. Итак, по леммам 2 и 3 малое периодическое решение вида (2) системы (1) устойчиво по определению 2. Теорема 2 доказана.

5. Заключение

Итак, для автономной системы вида (1), имеющей при нулевом значении параметра критическую матрицу линейного приближения (17), по свойствам первого нелинейного приближения оператора монодромии установлены условия бифуркации малого периодического решения вида (2), которое обладает свойством орбитальной α-устойчивости по определению 2.

Заметим, что при условии 3) теоремы 2 нулевое решение системы (21) асимптотически устойчиво [14].

Действительно, при $\alpha=0$ в силу леммы 9.2 из монографии [15] задача об асимптотической устойчивости нулевого решения системы (21) сводится к задаче об асимптотической устойчивости нулевого решения системы в конечных разностях

$$b_{j+1}=[Y+U(b_j)+G(0,b_j)]b_j, \tag{24}$$

Так как $\lim\limits_{\alpha\to 0}\gamma^{1-k}\|G(0,\gamma b)\|=0$, то существует такое $\delta_0>0$, что $\|G(0,b)\|<\frac{1}{2}\sigma\|b\|^{k-1}$ при всех b: $\|b\|<\delta_0$. Тогда из равенства (24) по условию 3) теоремы 2 получим оценку

$$b_{j+1}=[Y+U(b_j)+G(0,b_j)]b_j, \tag{25}$$

Выберем тождественную последовательность функций $V_j(b)\equiv\|b\|$. Для любого члена этой последовательности и для любого малого b по свойствам нормы выполняются условия

$$a_1(\|b\|)=\frac{\|b\|}{2}\le V_j(b)\le a_2(\|b\|)=2\|b\|,\quad \left|V_j(b)-V_j(\tilde b)\right|\le\|b-\tilde b\|.$$

Кроме того, из оценки (25) при всех малых b справедливо неравенство

$$\|b_{j+1}\|-\|b_j\|<-\frac{1}{2}\|b_j\|^k<-a_3\left(\|b_{j+1}\|\right)=-\frac{1}{2}\sigma\|b_{j+1}\|^k.$$

Так как функции $a_1(\cdot)$, $a_2(\cdot)$, $a_3(\cdot)$ — функции класса Хана, то в силу предложения 2 из работы [16] нулевое решение системы (21) асимптотически устойчиво.

То есть в условиях теоремы 2 рассмотрен некритический случай устойчивости по определению 3. При этом для орбитальной α-устойчивости малого периодического решения оказывается достаточно учесть только его направление бифуркации a_0 в фазовом пространстве. В критических случаях орбитальной α-устойчивости для оператора монодромии системы (21) требуется дополнительно использовать свойства нелинейного приближения по аргументу (b,α), учитывая направление бифуркации μ_0 периодического решения в пространстве параметров.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демидович Б. П. Об одном аналоге теоремы Андронова — Витта // ДАН СССР 1967. Т. 176, №.5. С. 994-996.
2. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985.
3. Красносельский М. А., Кузнецов Н. А., Юмагулов М. Г. Операторный метод анализа устойчивости циклов при бифуркации Хопфа // Автоматика и телемеханика. 1996. № 12. С. 15–24.
4. Дунаева О. В., Шестаков А. А. О понятиях орбитальной устойчивости и фазовой устойчивости движений динамической системы // ДАН СССР. 1997. Т. 335, № 3. С. 33–341.
5. Мамонов С. С., Харламова А. О. Вынужденная синхронизация систем фазовой синхронизации с запаздыванием // Вестник РГРТУ. 2017. № 62. С. 26–35.
6. Мамонов С. С., Харламова А. О., Ионова И. В. Колебательно-вращательные циклы фазовой системы дифференциальных уравнений // Вестник РАЕН. 2018. Т. 18, № 4. С. 51–57.
7. Хапаев М. М. Усреднение в теории устойчивости. М.: Наука, 1986.
8. Абрамов В. В. Устойчивость нулевого решения периодической системы дифференциальных уравнений с малым параметром // Журнал СВМО. 2010. Т. 12, № 4. С. 49–54.
9. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: ГИТТЛ, 1956.
10. Абрамов В. В. Ненулевое периодическое решение нелинейной системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33, № 11. С. 1572.
11. Абрамов В. В. Устойчивость малого периодического решения // Вестник РАЕН. 2013. Т. 13, № 4. С. 3–5.
12. Зубов В. И. Теория колебаний. М.: Высшая школа, 1979.
13. Абрамов В. В. К вопросу об устойчивости решения по параметру // Известия ТулГУ. Сер. Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. 2005. Вып. 1. С. 3–8.
14. Абрамов В. В. Ветвление периодического решения неавтономной системы с малым параметром // Вестник РАЕН. 2015. Т. 15, № 3. С. 3–7.
15. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траектория дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.
16. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971.

REFERENCES

1. Demidovich, B. P. 1967, “On an analogue of the Andronov — Witt theorem“, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 176, no. 5, pp. 994-996.
2. Hassard, B. D., Kazarinoff, N. D. & Wan, U.-H. 2002, “Theory and applications of hopf bifurcation“. Mir, Moscow.

3. Krasnoselskii, M. A., Kuznetsov, N. A. & Yumagulov, M. G. 1996, “An operational method of analysis of stability of cycles in Hopf bifurcations“, *Automatika i telemekhanika*, no. 12, pp. 15-24.

4. Dunaeva, O. V., Shestakov, I. E. 1997, “On the concepts of orbital stability and phase stability of motions of a dynamical system“, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 335, no. 3, pp. 33-341.

5. Mamonov, S. S., Kharlamova, A. 0. 2017, “Forced synchronization of phase systems automotive equipment with landing“, *Vestnik RGRTU*, no. 62, pp. 26-35.

6. Mamonov, S. S., Kharlamova, A. 0. & Ionova, I. V. 2018, “Vibrational-revolution cycles phase system of differential equations“, *Vestnik RAEN*, vol. 18, no. 4, pp. 51-57.

7. Khapaev, M. M. 1986, “Averaging in stability theory“. Nauka, Moscow.

8. Abramov, V. V. 2010, “Stability of zero solution of periodic system of differential equations with small parameter“, *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, vol. 12, no. 4, pp. 49-54.

9. Malkin, I. G. 1956, “Some problems of the theory of nonlinear oscillations“. GITTL, Moscow.

10. Abramov, V. V. 1997, “Nonzero periodic solution of nonlinear system of differential equations“, *Differ. Uravn*, vol. 33, no. 11, pp. 1572.

11. Abramov, V. V. 2013, “Stability of small periodic solution“, *Vestnik RAEN*, vol. 13, no. 4, pp. 3-5.

12. Zubov, V. I. 1979, “Theory of oscillations“. Vysshaya Shkola, Moscow.

13. Abramov, V. V. 2005, “On the stability of the solution in the parameter“, *Izvestiya TulGU. Ser. Differentialnyiye Uravneniya i Prikladnyie Zadachi*, iss. 1, pp. 3-8.

14. Abramov, V. V. 2015, “Branching of the periodic solution of a non-autonomous system with a small parameter“, *Vestnik RAEN*, vol. 15, no. 3, pp. 3-7.

15. Krasnoselskii, M. A. 1966, “Shift operator on trajectories of differential equations“. Nauka, Moscow.

16. Halanay, A., Wexler, D. 1971, “Qualitative theory of impulse systems“. Mir, Moscow.

Получено 8.10.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 51-7, 519.816 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-3-92-106

Стохастические тренды на основе нечеткой математики[1]

С. М. Агаян, Ш. Р. Богоутдинов, Д. А. Камаев, М. Н. Добровольский

Агаян Сергей Мартикович — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Геофизический центр РАН (г. Москва).
e-mail: s.agayan@gcras.ru
Богоутдинов Шамиль Рафекович — кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Геофизический центр РАН; старший научный сотрудник, Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта (г. Москва).
e-mail: shm@gcras.ru
Камаев Дмитрий Альфредович — доктор технических наук, заведующий лабораторией, Научно-производственное объединение «Тайфун» (г. Обнинск).
e-mail: kda@feerc.ru
Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Геофизический центр РАН (г. Москва).
m.dobrovolsky@gcras.ru

Аннотация

В настоящее время существует ряд способов определения трендов и экстремумов на стохастических временных рядах, что неудивительно, поскольку тренды временного ряда являются фундаментальной характеристикой динамики процесса, стоящего за ним.

Реальные стохастические тренды совсем не похожи на идеальные математические, посколько в них случаются сбои. Это не смущает исследователя, изначально обладающего адаптивным восприятием фундаментальных свойств предельности, непрерывности, связности, тренда и т. д. Он поймет, когда нарушение несущественно и тренд продолжается, а когда нарушение прерывает тренд.

В настоящей работе предлагается новый подход к распознаванию стохастических трендов, основанный на математической конструкции регрессионных производных для конечного временного ряда. Тренды ищутся с помощью производной по сценарию классического математического анализа.

Ключевые слова: нечеткая математика, меры близости, регрессионые производные, тренды.

Библиография: 8 названий.

Для цитирования:
С. М. Агаян, Ш. Р. Богоутдинов, Д. А. Камаев, М. Н. Добровольский. Стохастические тренды на основе нечеткой математики // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 92–106.

[1]Исследование выполнено в рамках государственного задания Геофизического центра РАН, утвержденного Минобрнауки России.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 3.

UDC 51-7, 519.816 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-3-92-106

Stochastic trends based on fuzzy mathematics[2]

S. M. Agayan, Sh. R. Bogoutdinov, D. A. Kamaev, M. N. Dobrovolsky

Agayan Sergey Martikovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Principal research scientist, Geophysical Center RAS (Moscow).
e-mail: s.agayan@gcras.ru
Bogoutdinov Shamil Rafekovich — candidate of physical and mathematical Sciences, Leading research scientist, Geophysical Center RAS; Senior research scientist, Schmidt Institute of Physics of the Earth RAS (Moscow).
e-mail: shm@gcras.ru
Kamaev Dmitry Alfredovich — doctor of engineering, Chief of laboratory, NPO «Taifun», Russian Federal Survey for Hydro meteorology and Environmental Monitoring (Obninsk).
e-mail: kda@feerc.ru
Dobrovolsky Mikhail Nikolaevich — candidate of physical and mathematical Sciences, Senior research scientist, Geophysical Center RAS (Moscow).
m.dobrovolsky@gcras.ru

Abstract

Currently, there are a number of ways to determine trends and extremes in stochastic time series, which is not surprising, since time series trends are a fundamental characteristic of the dynamics of the process behind it.

Real stochastic trends are not at all like ideal mathematical ones, because they contain violations. This does not bother the researcher, who initially has an adaptive perception of the fundamental properties of extremeness, continuity, connectedness, trend, etc. He will understand when the violation is insignificant and the trend continues, and when the violation interrupts the trend.

In this paper, we propose a new approach to the recognition of stochastic trends, based on the mathematical construction of regression derivatives for a finite time series. Trends are sought using the derivative from the scenario of classical mathematical analysis.

Keywords: fuzzy mathematics, nearness measures, regression derivatives, trends.

Bibliography: 8 titles.

For citation:
S. M. Agayan, Sh. R. Bogoutdinov, D. A. Kamaev, M. N. Dobrovolsky, 2019, "Stochastic trends based on fuzzy mathematics", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 92–106.

1. Введение

В настоящее время существует ряд способов определения трендов и экстремумов на стохастических временных рядах [1, 2, 3, 4], что неудивительно, поскольку тренды временного ряда являются фундаментальной характеристикой динамики процесса, стоящего за ним.

[2]The study was carried out within the framework of the state task of The geophysical center of the Russian Academy of Sciences, approved by the Ministry of education and science of Russia.

Реальные стохастические тренды совсем не похожи на идеальные математические, поскольку в них случаются сбои. Это не смущает исследователя, изначально обладающего адаптивным восприятием фундаментальных свойств предельности, непрерывности, связности, тренда и т. д. Он поймет, когда нарушение несущественно и тренд продолжается, а когда нарушение прерывает тренд.

Таким образом, если идеальные математические тренды однозначны и строги, то стохастические зависят от точки зрения исследователя и для разных точек зрения или разных исследователей они, вообще говоря, могут различаться.

Следовательно, формализация стохастических рядов должна быть разномасштабной, подобно вэйвлет-спектру, а потому необходимо многопараметрической. Меняя параметры, исследователь получит полное представление о трендах и выберет нужный.

Перечислим параметры такой формализации: локальная конструкция тренда, уровень значимости тренда, уровень нарушения тренда, способ поиска четкого экстремума между противоположными трендами. Их (тренды) мы трактуем как нечеткие множества, и потому стохастические тренды получаются как результат нечеткого моделирования.

В настоящей работе мы рассматриваем один подход к такой формализации стохастических трендов. Основывается он на новой математической конструкции регрессионных производных для конечного временного ряда. Тренды ищутся с помощью производной по сценарию классического математического анализа.

2. Исходные данные, соглашения и обозначения

2.1 Пространство $T = [a, b]$ – дискретный отрезок с узлами t_i:

$$t_i = a + (i-1)h,\ i = 1, \dots, N,\ h = \frac{b-a}{N-1}$$

2.2 Если $t \in T$, то t^+ (t^-) – следующий за t (предшествующий t) в T узел. Таким образом

$$\begin{aligned} t^+ &= t_{i+1}, \quad \text{если} \quad t = t_i,\ 1 \leqslant i \leqslant N-1 \\ t^- &= t_{i-1}, \quad \text{если} \quad t = t_i,\ 2 \leqslant i \leqslant N \end{aligned}$$

2.3 Отрезок τ в T это пересечение T с обычным отрезком в $\mathbb{R}$, то есть

$$\begin{aligned} &\tau = [t_i, t_j] = \{t_i < \dots < t_j\} \text{ для некоторых } 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant N \\ &t_i = b\tau \text{ (начало } \tau), \quad t_j = e\tau \text{ (конец } \tau) \end{aligned}$$

в частности,

$$t_1 = bT,\ t_N = eT.$$

Отрезок $[(b\tau)^+, (e\tau)^-] = \mathrm{int}\tau$ – внутренность τ.

2.4 Если S подмножество в T, то $C(S)$ – совокупность компонент "связности"S, а именно: максимальных в S отрезков из T.

2.5 Примеры:

1. Если $S = T$, то $C(S) = T$
2. t – "внутренний"узел T: $t \in T \setminus \{t_1, t_N\}$, $S = T_t = T \setminus \{t\}$, тогда $C(T_t) = \{\tau_1, \tau_2\}$, где $\tau_1 = [t_1, t^-]$, $\tau_2 = [t^+, t_N]$.

2.6 $f(t)$ – любая действительная функция на T, $F(T)$ – пространство действительных функций на T, $F(T) \approxeq \mathbb{R}^N$

3. Близость на T

3.1 Близость на $T \equiv$ нечеткое бинарное отношение на T [5] с функцией принадлежности (мерой близости) δ. В работе используются два варианта близости $\delta_t(\bar{t})$ узла $\bar{t}$ к узлу t в T, зависящие от положительных параметров r и p.

3.2 Глобальная мера близости (рис. 1)

$$\delta_t(r,p)(\bar{t}) = \delta_t(\bar{t}) = \left(1 - \frac{|\bar{t} - t|}{\max(t_N - t, t - t_1) + r}\right)^p \tag{1}$$

Agayan/figures/ris031.jpg

Рис. 1: Глобальная мера близости

3.3 Локальная мера близости (рис. 2)

$$\delta_t(r,p)(\bar{t}) = \delta_t(\bar{t}) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|\bar{t}-t|}{r}\right)^p, & \text{если } |\bar{t} - t| \leqslant r \\ 0, & \text{если } |\bar{t} - t| > r \end{cases} \tag{2}$$

Agayan/figures/ris032.jpg

Рис. 2: Локальная мера близости

4. Близость дискретных отрезков

4.1 Тренды на реальных данных в силу произвольности f могут ненадолго пропадать, так что реальная картина не на рис. 3а, а на рис. 3б:

Исследователь умеет закрыть глаза на незначительное нарушение тренда в рамках значительного его выполнения и разберется в ситуации на рис. 3б.

Возникает вопрос: "Как это формализовать?". Мы предлагаем путь, включающий в себя понятие близости отрезков.

4.2 Логика близости отрезков: мы считаем, что два дизъюнктных отрезка τ_1 и τ_2 из T близки в двух случаях

Agayan/figures/ris040.jpg

Рис. 3: а – идеальная ситуация; б – реальная ситуация

– во-первых, если близки их ближайшие концы (внешняя близость, зависящая от T);
– во-вторых, если объединение $\tau_1 \vee \tau_2$ значительно в их дискретной оболочке

$$\mathrm{hull}(\tau_1 \vee \tau_2) = [\min(b\tau_1, b\tau_2), \max(e\tau_1, e\tau_2)]$$

(внутренняя близость, зависящая только от них)

4.3 Формализация внешней близости: пусть $D(T)$ совокупность всех нетривиальных расстояний на T:

$$D(T) = \{d(t_1, t_2) : t_1, t_2 \in T, d(t_1, t_2) \neq 0\}$$

Порог $r = r_q$ близости в T определяется как степенное среднее при отрицательном показателе $q < 0$ всех расстояний из $D(T)$ [5, 6]:

$$r_q = r_q(T) = \left(\frac{\sum_{d \in D(T)} d^q}{|D(T)|} \right)^{1/q}, q < 0 \tag{3}$$

Здесь, как обычно, через $|D(T)|$ обозначено количество элементов во множестве $D(T)$. Отрезки τ_1 и τ_2 из T считаем внешне близкими, если

$$\min(|b\tau_2 - e\tau_1|, |b\tau_1 - e\tau_2|) < r_q. \tag{4}$$

Наши рекомендации $q \in [-3, -2]$

Пример 1. *Внешняя близость (рис. 4)*

Agayan/figures/ris041.jpg

Рис. 4: $q = -2$; $r_q = 6.81$; $b\tau_2 - e\tau_1 = 5.79$

4.4 Формализация внутренней близости: мерой внутренней близости дизъюнктных отрезков τ_1 и τ_2 из T считаем отношение количества точек в их объединении к количеству точек в их оболочке. Отрезки τ_1 и τ_2 считаются внутренне близкими (γ-близкими, $\gamma \in [0,1]$), если

$$\frac{|\tau_1 \vee \tau_2|}{|\operatorname{hull}(\tau_1 \vee \tau_2)|} \geqslant \gamma \tag{5}$$

Наш выбор $\gamma \in [0.75, 1)$

Пример 2. *Внутренняя близость (рис. 5)*

Agayan/figures/ris042.jpg

Рис. 5: $q = -2$; $r_q = 6.81$; $b\tau_2 - e\tau_1 = 11.59$; $\gamma = 0.82$

4.5 Совокупность отрезков $\tau_1, \ldots, \tau_k$ в T называется связной, если для каждого внутреннего отрезка τ_i, $1 < i < k$ найдется близкие ему в данной совокупности как слева, так и справа. А для концов соотвественно только справа и слева.

5. Регрессионные производные и регрессионные сглаживания

5.1 Для любой функции f на T мы определим регрессионную производную f' и воспользуемся ею для поиска трендов на f по сценарию классического математического анализа.

5.2 Предельный переход $\bar{t} \to t$ в дискретном случае заменяется мерой близости $\delta_t(\bar{t})$, показывающей в какой степени узел $\bar{t}$ близок к t в T. В связи с этим касательной $R_{f,t}(\bar{t}) = a_t\bar{t} + b_t$ к функции f в узле $t \in T$ считается линейная регрессия, построенная по взвешенному графику $\Gamma_f(\delta_t) = \{(\bar{t}, f(\bar{t}), \delta_t(\bar{t})), \bar{t} \in T\}$. Опуская стандартные вещи, связанные с линейными регрессиями, приведем формулы для a_t и b_t:

$$a_t = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{\bar{t}\in T} \bar{t}\delta_t(\bar{t}) f(\bar{t}) & \sum_{\bar{t}\in T} \bar{t}\delta_t(\bar{t}) \\ \sum_{\bar{t}\in T} \delta_t(\bar{t}) f(\bar{t}) & \sum_{\bar{t}\in T} \delta_t(\bar{t}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{\bar{t}\in T} \bar{t}^2\delta_t(\bar{t}) & \sum_{\bar{t}\in T} \bar{t}\delta_t(\bar{t}) \\ \sum_{\bar{t}\in T} \bar{t}\delta_t(\bar{t}) & \sum_{\bar{t}\in T} \delta_t(\bar{t}) \end{vmatrix}}$$

$$b_t = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{\bar{t}\in T} \bar{t}^2\delta_t(\bar{t}) & \sum_{\bar{t}\in T} \bar{t}\delta_t(\bar{t}) f(\bar{t}) \\ \sum_{\bar{t}\in T} \bar{t}\delta_t(\bar{t}) & \sum_{\bar{t}\in T} \delta_t(\bar{t}) f(\bar{t}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{\bar{t}\in T} \bar{t}^2\delta_t(\bar{t}) & \sum_{\bar{t}\in T} \bar{t}\delta_t(\bar{t}) \\ \sum_{\bar{t}\in T} \bar{t}\delta_t(\bar{t}) & \sum_{\bar{t}\in T} \delta_t(\bar{t}) \end{vmatrix}}$$

5.3

Определение 1. *1. Угловой коэффициент a_t регрессионной касательной $R_{f,t}$ называется производной f в t и обозначается через $(R'_f)(t)$.*

2. *Функция* $t \to a_t$ *называется производной* f *и обозначается через* $(R'_f) \in F(T)$.
3. *Функциональное соответствие* $f \to R'_f$ *является линейным оператором на* $F(T)$, *называется регрессионным дифференцированием и обозначается через* R'.

5.4

Определение 2. 1. *Значение* $a_t t + b_t$ *касательной* $R_{f,t}$ *в узле* t *называется регрессионным значением функции* f *в точке* t *и обозначается через* $(R_f)(t)$.

2. *Функция* $t \to a_t t + b_t$ *называется регрессионным сглаживанием* f *и обозначается через* $R_f \in F(T)$.
3. *Функциональное соответствие* $f \to R_f$ *является линейным оператором на* $F(T)$, *называется регрессионным сглаживанием и обозначается через* R.

5.5

Пример 3. *На рисунке 6 приведена зависимость регрессионного сглаживания (6а) и регрессионной производной (6б) функции* $f(t)$ *от степени* p *при постоянном радиусе* r. *На рисунке 7 приведена зависимость регрессионного сглаживания (7а) и регрессионной производной (7б) функции* $f(t)$ *от радиуса* r *при постоянной степени* p

Agayan/figures/ris051.jpg

Рис. 6: Зависимость от степени p. Радиус $r = 0.47$.

Agayan/figures/ris052.jpg

Рис. 7: Зависимость от радиуса r. Степень $p = 2$

6. Тренды через производные

6.1 Пара (R, R') определяет вариант дифференцирования D на $F(T)$

$$D = D_{sk} = R^s R' R^k;\ s \geqslant 0, k \geqslant 0$$

6.2 Представим концепцию трендов через дифференцирование, индуцированное классическим математическим анализом: для функции $f \in F(T)$ дифференцирование D дает производную $f' = Df$, через которую видна борьба на T между трендами f. В каждой точке $t \in T$ подъем и спад для f играют результативно либо вничью ($f'(t) \gtrless 0$, $f'(t) = 0$), а мера (сила) игры – модуль $|f'(t)|$.

6.3 Мы относимся к ничьей более мягко и полагаем, что подъем и спад для функции f сыграли вничью в точке $t \in T$, если $|f'(t)| < \alpha$. Параметр α – это граница, с которой мы считаем производную $f'(t)$ маленькой, точку t флэт-точкой, а функцию f в t флэт-функцией, осуществляющей боковое горизонтальное движение.

6.4 С выбором f и α возникает разбиение T:

$$T = T^+ \vee T^0 \vee T^-$$

где

$$\begin{aligned} T^+ &= T^+(f,\alpha) = \{t \in T : f'(t) > \alpha\} \\ T^0 &= T^0(f,\alpha) = \{t \in T : |f'(t)| \leqslant \alpha\} \\ T^- &= T^-(f,\alpha) = \{t \in T : f'(t) < -\alpha\} \end{aligned} \tag{6}$$

Компоненты связности τ^+ и τ^- множеств T^+ и T^-, на которых модуль производной $|f'|$ немаленький, естественно считать активными подъемами и активными спадами для f, а компоненты τ^0 множества T_0 – участками бокового тренда.

6.5 Мы считаем, что активные участки τ^+ обязательно должны входить в положительные тренды функции f и более того каждый такой тренд обязательно должен включать в себя хотя бы один активный участок из $C(T^+)$. Аналогично и в отрицательном случае.

6.6 В силу произвольности f тренды на ней в общем случае не могут быть постоянно значительными в каждой своей точке. Тренды могут быть слабыми в некоторых из них и, более того, вообще пропадать.

Ключ к трендам на f лежит через возвышенности и впадины на f'. Определив возвышенности и впадины на f, определим тренды на f.

6.7 <u>Логика возвышенности</u>: возвышенность на f' представляет собой связное чередование активных участков из $C(T^+)$ (генераторов возвышенности) и флэт-участков, начинающееся и заканчивающееся активно в T^+.

Аналогично определяются впадины на f', как возвышенности на $-f'$.

6.8 <u>Формализация трендов</u>. Положительный тренд tr^+ – максимальный по продолжительности участок функции f, основание которого является основанием возвышенности на производной f' (рис. 8):

1. $tr^+ = \tau_1^+ \vee \tau_1^0 \vee \ldots \tau_{k-1}^0 \vee \tau_k^+$
   $\begin{array}{l} e(\tau_i^+) = b(\tau_i^0) \\ e(\tau_i^0) = b(\tau_{i+1}^+) \end{array}$, $i = 1, \ldots, k-1$
2. Семейство $\{\tau_i^+|_{i=1}^k\}$ – максимальное связное семейство последовательных отрезков в $C(T^+)$

Agayan/figures/ris061.jpg

Рис. 8: Положительный тренд

Отрицательный тренд tr^- – максимальный по продолжительности участок функции f, основание которого является основанием впадины на производной f' (рис. 9):

1. $tr^- = \tau_1^- \vee \tau_1^0 \vee \ldots \tau_{k-1}^0 \vee \tau_k^-$
   $\begin{array}{l} e(\tau_i^-) = b(\tau_i^0) \\ e(\tau_i^0) = b(\tau_{i+1}^-) \end{array}$, $i = 1, \ldots, k-1$
2. Семейство $\{\tau_i^-|_{i=1}^k\}$ – максимальное связное семейство последовательных отрезков в $C(T^-)$

Agayan/figures/ris062.jpg

Рис. 9: Отрицательный тренд

7. Анализ трендов

7.1 Тренды не пересекаются, поскольку их концы являются активными точками и обязательно какие-то из них при пересечении должны попасть в активные узлы другого тренда. А это невозможно, поскольку компоненты связности как в T^+, так и в T^- не пересекаются, так же, как и не пересекаются T^+ и T^-.

7.2 Каждый флэт-участок τ^0 встроенный в тот или иной тренд tr, является компонентой связности T^0: $\tau^0 \subset tr \to \tau^0 \in C(T^0)$. Обозначим через $C^+(T^0)$ множество флэтов, встроенных в положительные тренды, а через $C^-(T^0)$ флэты, встроенные в отрицательные тренды. Эти множества не пересекаются. Пусть $C^0(T^0)$ их дополнение в $C(T^0)$:

$$C^0(T^0) = C(T^0) \setminus (C^+(T^0) \vee C^-(T^0)).$$

Если оно непусто, то любой флэт-участок из $C^0(T^0)$ разделяет два тренда, либо лежит в начале (конце) T.

7.3 Для $\tau \in C^0(T^0)$ обозначим через $ltr(\tau)$, $rtr(\tau)$ тренды которые он разделяет. Для концов это будут соотвественно $rtr(\tau)$ и $ltr(\tau)$.

В этих обозначениях $\tau \in C^0(T^0)$ называется

1. террасой, если $ltr(\tau)$ и $rtr(\tau)$ одноименные тренды (рис. 10а,б)

Agayan/figures/ris071.jpg

Рис. 10: Террасы

Agayan/figures/ris072.jpg

Рис. 11: а – плато; б – овраг

2. плато, если $ltr(\tau) \in Tr^{+}(f)$, $rtr(\tau) \in Tr^{-}(f)$ (рис. 11а)
3. оврагом, если $ltr(\tau) \in Tr^{-}(f)$, $rtr(\tau) \in Tr^{+}(f)$ (рис. 11б)

8. Экстремумы

8.1 Плато $\tau \in C^0(T^0)$ будем считать нечетким максимумом f, если разделяемые им тренды $ltr(\tau)$ и $rtr(\tau)$ близки (4.3, 4.4).

8.2 Овраг $\tau \in C^0(T^0)$ будем считать нечетким минимумом f, если разделяемые им тренды $rtr(\tau)$ и $rtr(\tau)$ близки (4.3, 4.4).

8.3 В нечетком максимуме τ мы выбираем точку t^*, в которой наиболее явно и одновременно функция f слева на отрезке $[b(ltr(\tau)), t^*]$ выглядит возрастающей, а справа на отрезке $[t^*, e(rtr(\tau))]$ – убывающей:

$$t^* = \underset{t\in\tau}{\operatorname{argmax}} \left(\min \left(\frac{\sum_{t\in[b,t^*]} f'(t) : f'(t) \geqslant 0}{\sum_{t\in[b,t^*]} |f'(t)|}, \frac{\sum_{t\in[t^*,e]} -f'(t) : f'(t) \leqslant 0}{\sum_{t\in[t^*,e]} |f'(t)|} \right) \right) \tag{7}$$

где $[b, t^*] = [b(ltr(\tau)), t^*]$, $[t^*, e] = [t^*, e(rtr(\tau))]$

8.4 Аналогично в нечетком максимуме τ мы выбираем точку t^*, в которой наиболее явно и одновременно функция f слева на отрезке $[b(ltr(\tau)), t^*]$ выглядит убывающей, а справа на отрезке $[t^*, e(rtr(\tau))]$ – возрастающей:

$$t^* = \underset{t\in\tau}{\operatorname{argmax}} \left(\min \left(-\frac{\sum_{t\in[b,t^*]} f'(t) : f'(t) \leqslant 0}{\sum_{t\in[b,t^*]} |f'(t)|}, \frac{\sum_{t\in[t^*,e]} f'(t) : f'(t) \geqslant 0}{\sum_{t\in[t^*,e]} |f'(t)|} \right) \right) \tag{8}$$

9. Примеры работы

Пример 4. *На рис. 12 показано построение регрессионной производной для некоторой функции $f(t)$ (рис. 12а). На рис. 12б приведены графики регрессионной производной для различных значениях p. На рис. 12в показана диаграмма зависимости трендов для разных p (синим цветом обозначены убывающие тренды, красным – возрастающие). Разноцветные горизонтальные срезы при $p = 2, 16, 30$ на этом рисунке соответствуют производным на среднем графике. Значения остальных параметров, используемых при вычислении производных, следущие $r = 0.816$ (2); $\alpha = 0.5$ (6)*

Agayan/figures/ris091.jpg

Рис. 12: Регрессионные производные

Пример 5. *На рис. 13а показано исходная диаграмма зависимости трендов функции из примера 4. На рис. 13б диаграмма зависимости объединенных трендов при* $q = -2$, $r_q = 0.248$ (4) *и* $\gamma = 0/75$ (5).

Agayan/figures/ris092.jpg

Рис. 13: Объединение трендов

Пример 6. *На рис. 14а изображена исходная функция* $f(t)$ *из примера 4 с выделенными трендами при* $p = 20$ *(рис. 13а). Цветными прямоугольниками отмечены серии убывающих и возрастающих трендов, которые в результате операций* (4) *и* (5) *будут объединены (рис. 13б* *и 14б). Также на рис. 14б изображены локальные экстремумы, полученные по* (7) *и* (8).

Agayan/figures/ris093.jpg

Рис. 14: Тренды и экстремумы ($\alpha = 0.5$)

Пример 7. *На рис. 15а изображена исходная функция* $f(t)$ *из примера 4 с выделенными трендами при* $p = 20$ *и* $\alpha = 2.0$. *Заметно, что объединенные тренды на рис. 15б менее продолжительны, чем на рис. 14б. Вследствие этого увеличились расстояния между противоположными трендами и исчезли незначительные экстремумы.*

Agayan/figures/ris094.jpg

Рис. 15: Тренды и экстремумы ($\alpha = 2.0$)

10. Заключение

1. Диаграммы зависимости трендов от параметров меры близости доказывают адаптивные возможности подхода к трендам, выбранного в работе.

2. В случае дифференцируемости исходной функции локальные регрессии подобно секущим в пределе переходят в касательную [7].

3. Диаграмма зависимости трендов от параметров меры близости напоминает не только вейвлет-диаграммы, а и иерархическую дивизимную кластеризацию [6]: самым мелким уровнем будет уровень классических математических трендов.

4. Созданный подход к распознаванию стохастических трендов является важным шагом в развитии дискретного математического анализа (ДМА) [8]. Его технической основой наряду с классической математикой является нечеткая математика.

Работа выполнена в рамках государственного задания Геофизического центра РАН, утвержденного Минобрнауки России.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений. М.: Мир, 1965. 451 с.

2. Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989. 392 с.

3. Любушин А. А. Анализ данных систем геофизического и экологического мониторинга. М.: Наука, 2005. 228 с.

4. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.

5. Аверкин А. Н., Батыршин И. З., Блишун А. Ф., Силов В. Б., Тарасов В. Б. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д. А. Поспелова. М.: Наука. 1986. 312 с.

6. Айвазян С. А., Бухштабер В. М., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности: Справ. изд. / Под ред. С. А. Айвазяна. М.: Финансы и статистика, 1989. 606 с.

7. Агаян С. М., Соловьев А. А., Богоутдинов Ш. Р., Николова Ю. И. Регрессионные производные и их применение в изучении геомагнитных джерков // Геомагнетизм и аэрономия. 2019. Т. 59, № 3. С. 383–392, DOI: 10.1134/S0016794019030027.

8. Агаян С. М., Богоутдинов Ш. Р., Красноперов, Р. И. Краткое введение в ДМА // Российский журнал наук о Земле. Т. 18, ES2001, DOI: 10.2205/2018ES000618.

REFERENCES

1. Gumbel, E. J. 1958, “Statistics of extremes“, *N. Y., Columbia Univ. Press*, 375 p.

2. Leadbetter, M. R., Lindgren, G., Rootzen, H. 1983, “Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes“, *Springer Series in Statistics*, 336 p.

3. Lyubushin, A. A. 2007, “Analysis of data from geophysical and environmental monitoring systems“, *M: Mir*, 228 p.

4. Mallat, S. 1999, “A Wavelet Tour of Signal Processing“, *Academic Press*, 620 p.

5. Averkin, A. N., Batyrshin, I. Z., Blishun, A. F., Silov, V. B., Tarasov, V. B. 1986, “Fuzzy sets in control and artificial intelligence models“/ Edited by D. A. Pospelov. *M.: Nauka*, 312 p.

6. Ayvazyan S. A., Buchstaber V. M., Yenyukov I. S., Meshalkin L. D. 1989, “Applied Statistics: Classification and Dimension Reduction (edited by Ayvazyan S. A.)“, *M: Finansy i statistika*, 606 p.

7. Agayan, S. M., Soloviev, A. A., Bogoutdinov, Sh. R., Nikolova, Y. I. 2019, “Regression derivatives and their application in the study of geomagnetic jerks“, *Geomagnetism and aeronomy*, vol. 59, no. 3, pp. 383–392, DOI: 10.1134/S0016794019030027.

8. Agayan, S. M., Bogoutdinov, Sh. R., Krasnoperov, R. I. 2018, “Short introduction into DMA“, *Russian journal of Earth sciences*, vol. 18, ES2001, DOI: 10.2205/2018ES000618.

Получено 8.10.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 3.

УДК 512.552.7+519.725 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-107-123

Структура конечной групповой алгебры одного полупрямого произведения абелевых групп и её приложения

К. В. Веденёв, В. М. Деундяк

Веденёв Кирилл Владимирович — Южный федеральный университет (г. Ростов-на-Дону).
e-mail: vedenev@sfedu.ru
Деундяк Владимир Михайлович — кандидат физико-математических наук, доцент, Южный федеральный университет, ФГАНУ НИИ «Спецвузавтоматика» (г. Ростов-на-Дону).
e-mail: vl.deundyak@gmail.com

Аннотация

В 1978 году Р. Мак-Элисом построена первая асимметричная кодовая криптосистема, основанная на применении помехоустойчивых кодов Гоппы, при этом эффективные атаки на секретный ключ этой криптосистемы до сих пор не найдены. К настоящему времени известно много криптосистем, основанных на теории помехоустойчивого кодирования. Одним из способов построения таких криптосистем является модификация криптосистемы Мак-Элиса с помощью замены кодов Гоппы на другие классы кодов. Однако, известно что криптографическая стойкость многих таких модификаций уступает стойкости классической криптосистемы Мак-Элиса.

В связи с развитием квантовых вычислений кодовые криптосистемы, наряду с криптосистемамми на решётках, рассматриваются как альтернатива теоретико-числовым. Поэтому актуальна задача поиска перспективных классов кодов, применимых в криптографии. Представляется, что для этого можно использовать некоммутативные групповые коды, т. е. левые идеалы в конечных некоммутативных групповых алгебрах.

Для исследования некоммутативных групповых кодов полезной является теорема Ведденберна, доказывающая существование изоморфизма групповой алгебры на прямую сумму матричных алгебр. Однако конкретный вид слагаемых и конструкция изоморфизма этой теоремой не определены, и поэтому для каждой группы стоит задача конструктивного описания разложения Веддерберна. Это разложение позволяет легко получить все левые идеалы групповой алгебры, т.е. групповые коды.

В работе рассматривается полупрямое произведение $Q_{m,n} = (\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n) \rightthreetimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ абелевых групп и конечная групповая алгебра $\mathbb{F}_q Q_{m,n}$ этой группы. Для этой алгебры при условиях $n \mid q-1$ и $\text{НОД}(2mn, q) = 1$ построено разложение Веддербёрна. В случае поля чётной характеристики, когда эта групповая алгебра не является полупростой, также получена сходная структурная теорема. Описаны все неразложимые центральные идемпотенты этой групповой алгебры. Полученные результаты используются для алгебраического описания всех групповых кодов над $Q_{m,n}$.

Ключевые слова: групповая алгебра, полупрямое произведение, конечное поле, разложение Веддербёрна, левые идеалы, групповые коды.

Библиография: 21 названий.

Для цитирования:

К. В. Веденёв, В. М. Деундяк. Структура конечной групповой алгебры одного полупрямого произведения абелевых групп и её приложения // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 107–123.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 3.

UDC 512.552.7+519.725 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-107-123

The structure of finite group algebra of a semidirect product of abelian groups and its applications

K. V. Vedenev, V. M. Deundyak

Vedenev Kirill Vladimirovich — Southern Federal University (Rostov-on-Don).
e-mail: vedenev@sfedu.ru
Deundyak Vladimir Mikhailovich — candidate of physical and mathematical Sciences, associate Professor, Southern Federal University, Research Institute "Specvuzavtomatika" (Rostov-on-Don).
e-mail: vl.deundyak@gmail.com

Abstract

In 1978 R. McEliece developed the first assymetric cryptosystem based on the use of Goppa's error–correctring codes and no effective key attacks has been described yet. Now there are many code–based cryptosystems known. One way to build them is to modify the McEliece cryptosystem by replacing Goppa's codes with other codes. But many variants of this modification were proven to be less secure.

In connection with the development of quantum computing code cryptosystems along with lattice-based cryptosystems are considered as an alternative to number-theoretical ones. Therefore, it is relevant to find promising classes of codes that are applicable in cryptography. It seems that for this non–commutative group codes, i.e. left ideals in finite non–commutative group algebras, could be used.

The Wedderburn theorem is useful to study non–commutative group codes. It implies the existence of an isomorphism of a semisimple group algebra onto a direct sum of matrix algebras. However, the specific form of the summands and the isomorphism construction are not explicitly defined by this theorem. Hence for each semisimple group algebra there is a task to explicitly construct its Wedderburn decomposition. This decomposition allows us to easily describe all left ideals of group algebra, i.e. group codes.

In this paper we consider one semidirect product $Q_{m,n} = (\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n) \leftthreetimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ of abelian groups and the group algebra $\mathbb{F}_q Q_{m,n}$. In the case when $n \mid q-1$ and $\gcd(2mn, q) = 1$, the Wedderburn decomposition of this algebra is constructed. In the case when field is of characteristic 2, i.e. when this group algebra is not semisimple, a similar structure theorem is also obtained. Further in the paper, the primitive central idempotents of this group algebra are described. The obtained results are used to algebraically describe the group codes over $Q_{m,n}$.

Keywords: group algebra, semidirect product, finite field, Wedderburn decomposition, left ideals, group codes.

Bibliography: 21 titles.

For citation:

K. V. Vedenev, V. M. Deundyak, 2019, "The structure of finite group algebra of a semidirect product of abelian groups and its applications" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 107–123.

Introduction

Let G be a finite group with the identity e, written multiplicatively, let R be a ring with the identity 1_R and $\mathbb{F}_q$ be a Galois field of order q. Recall, the group ring RG is a set of all formal linear combinations $\alpha = \sum_{g\in G} a_g g$, $a_g \in R$, equipped with operations of addition and (left and right) multiplication by elements of R defined componentwise and multiplication defined as follows:

$$\sum_{g\in G} \alpha_g g \sum_{g\in G} \beta_g g = \sum_{g\in G} \left(\sum_{h\in H} \alpha_{gh^{-1}} \beta_h \right) g.$$

(see [1]). In the case when R is commutative, RG is also called group algebra of G over R ([2], [1]). Note that, the correspondences $g \mapsto 1_R g$, $g \in G$, and $r \mapsto re$, $r \in R$, define natural embeddings of the group G and the ring R into RG.

Any left ideal $I \subset \mathbb{F}_q G$ is called a group code over G (see [3], [4]). This algebraic approach to codding theory was introduced by S.D. Berman [5]. In this approach, all elements of the field $\mathbb{F}_q$ are the encoding alphabet and the order of the group G is the length of codewords. Note that the dimension of a code $C \subset \mathbb{F}_q$ is its dimension as an $\mathbb{F}_q$-subspace in $\mathbb{F}_q G$. Many classical codes can be realized as (left) ideals in group algebras (see survey [3]), including Reed-Solomon codes ([4], [6]) and Reed–Muller codes ([4], [5], [7]). Algebraic approach to error–correcting codes gives some benefits, i.e. additional algebraic structure helps to study more efficient encoding and decoding algorithms for known codes (see for example [8]) and to discover new classes of codes in group algebras ([9], [10], [11]).

Another motivation to study codes in non–commutative group algebras is that this codes could be useful in cryptography. R. McEliece developed an asymmetric cryptosystem based on the use of binary Goppa codes in 1978 and no effective key attacks has been described yet. Code cryptosystems are considered as a potential replacement to number-theoretical ones in the connection with the development of quantum computing (see NIST-PQC competition [12]). The main disadvantage of the original McEliece cryptosystem is that the private and public keys are very large matrices. To reduce the key size there have been attempts to replace Goppa codes with other classes of error–correcting codes. Variants of the McEliece cryptosystem based on the use of well-known Reed–Solomon codes and Reed–Muller codes, which can be realized as two–sided ideals in some abelian group algebras, were proven to be less secure ([13], [14], [15]). So, non–commutative codes, which are one–sided (left) ideals in non–commutative group algebras, could be a good option to build new resistant and convenient in use cryptosystems.

The Wedderburn theorem implies that if $\mathbb{F}_q G$ is semisimple then $\mathbb{F}_q G$ is isomorphic to a direct sum of matrix algebras over some extensions of the field $\mathbb{F}_q$. This theorem is a very powerful tool to study the structure of non-commutative codes, but it gives no information about the summands and the isomorphism. So, for an arbitary group algebra $\mathbb{F}_q G$ there is a problem of constructing its Wedderburn decomposition. There are several results on how to construct the Wedderburn decomposition and central primitive idempotents known (see [16], [17]). In [18] the Wedderburn decomposition of finite dihedral group algebra was described and in [11] this decomposition was used to study the dihedral codes.

Let $m, n \in \mathbb{N}$ and let $Q_{m,n}$ be a group with the following presentation:

$$\langle a_1, a_2, b, c \mid a_1^m, a_2^n, b^2, c^2, a_1^c = a_1^{-1}, a_2^b = a_2^{-1}, a_1 a_2 = a_2 a_1, bc = cb, ba_1 = a_1 b, ca_2 = a_2 c\rangle, \qquad (1)$$

hereinafter $\hat{g}^g = g^{-1}\hat{g}g$. We will call $Q_{m,n}$ the (m, n)–bidihedral group. In this paper we consider the bidihedral group and its group algebra $\mathbb{F}_q Q_{m,n}$. Under certain conditions, we obtain its Wedderburn decomposition in the semisimple case. Also we prove the similar structure theorem in the non–semisimple case. Then we explicitly describe the primitive central idempotents of this algebra. Finally, the obtained results are applied to algebraic codding theory.

The paper is organized as follows. In section 1 we introduce some preliminaries about the bidihedral group $Q_{m,n}$, its group algebra and polynomials over finite fields. In section 2 we prove the general structure theorem for this group algebra and then we obtain the Wedderburn decomposition of $\mathbb{F}_q Q_{m,n}$. In section 3 we construct the inverse of isomorphisms described in the previous section and then explicitly describe primitive central idempotents. In section 4 we apply this results to codding theory, i.e. we obtain the explicit description of the group codes over $Q_{m,n}$.

1. Preliminaries

Let G be a group and $S \subset G$. Bellow, by $\langle S\rangle$ we denote the subgroup of G generated by S. Let D_{2n} be a dihedral of order $2n$, i.e. D_{2n} has the presentation (see [19], p. 6):

$$D_{2n} = \langle x, y \mid x^n, y^2, x^y = x^{-1}\rangle.$$

Consider the group $Q_{m,n}$ defined in (1). Hereinafter a_1, a_2, b, c are from (1).

Lemma 1. *Let $G_1 = \langle a_1, c\rangle$ and $G_2 = \langle a_2, b\rangle$. Then*
(i) $G_1 \simeq D_{2m}$ and $G_2 \simeq D_{2n}$
(ii) $Q_{m,n}$ decomposes into a direct product of G_1 and G_2.

Доказательство. We obviously have

$$G_1 = \langle a_1, c \mid a_1^m, c^2, a_1^c = a_1^{-1}\rangle, \quad G_2 = \langle a_2, b \mid a_2^n, b^2, a_2^b = a_2^{-1}\rangle$$

are presentations of G_1 and G_2. It follows that $G_1 \simeq D_{2m}$ and $G_2 \simeq D_{2n}$.

Since [19], p. 3, it follows that a direct product of G_1 and G_2 has a presentation of the form (1), hence $Q_{m,n}$ decomposes into a direct product of G_1 and G_2. $\square$

From previous lemma we obtain the following result.

Lemma 2. *Let $N = \langle a_1, a_2\rangle$ and $H = \langle b, c\rangle$; then*
(i) $N \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ is normal;
(ii) $H \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$;
(iii) $Q_{m,n}$ is a semidirect product of N by H ($Q_{m,n} = N \rtimes H$).

Let R be a ring (field); by $\mathbb{M}_n(R)$ we denote the ring (algebra) of $(n \times n)$–matrices over R.

Lemma 3. *The group $Q_{m,n}$ is isomorphic to the matrix group*

$$T_{m,n} := \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon_1 & nz_1 & mz_2 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{Z}_{mn}) \;\middle|\; \epsilon_i = \pm 1, z_1, z_2 \in \mathbb{Z}_{mn} \right\}$$

Доказательство. Let

$$\hat{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{b} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observe that

$$\widehat{b}^t \widehat{c}^k \widehat{a}_1^i \widehat{a}_2^j = \begin{pmatrix} (-1)^t & (-1)^t ni & (-1)^t mj \\ 0 & (-1)^{k+t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

It follows that $\widehat{a}_1, \widehat{a}_2, \widehat{b}, \widehat{c}$ are the generators of $T_{m,n}$. It is easy to check that

$$\widehat{a}_1^m = \widehat{a}_2^n = \widehat{b}^2 = \widehat{c}^2 = \widehat{a}_1^0, \quad \widehat{a}_1^{\widehat{c}} = \widehat{a}_1^{-1}, \quad \widehat{a}_2^{\widehat{b}} = \widehat{a}_2^{-1},$$

$$\widehat{a}_1\widehat{a}_2 = \widehat{a}_2\widehat{a}_1, \quad \widehat{b}\widehat{c} = \widehat{c}\widehat{b}, \quad \widehat{b}\widehat{a}_1 = \widehat{a}_1\widehat{b}, \quad \widehat{c}\widehat{a}_2 = \widehat{a}_2\widehat{c}.$$

Hence we can define epimorphism (see [20], p. 15) $\varphi : Q_{m,n} \to T_{m,n}$ by the generators of $Q_{m,n}$:

$$\varphi : \quad a_1 \mapsto \widehat{a}_1, \quad a_2 \mapsto \widehat{a}_2, \quad b \mapsto \widehat{b}, \quad c \mapsto \widehat{c}.$$

Since $|Q_{m,n}| = 4mn$ and $|T_{mn}| = 4mn$, it follows that φ is an isomorphism. □

Consider the group algebra $\mathbb{F}_q Q_{m,n}$. Any $u \in \mathbb{F}_q Q_{m,n}$ can be written as

$$u = P_0(a_1, a_2) + bP_1(a_1, a_2) + cP_2(a_1, a_2) + bcP_3(a_1, a_2), \tag{2}$$

where $P_k(x_1, x_2) \in \mathbb{F}_q[x_1, x_2]$ has degree in x_1 less than m and degree in x_2 less than n, i.e. $\deg_{x_1}(P_k) < m$, $\deg_{x_2}(P_k) < n$.

Throughout this paper we will assume that $\gcd(mn, q) = 1$ *and* $n \mid q-1$.

Bellow we will use the following results on polynomials over finite fields. For every polynomial $g(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ with $g(0) \neq 0$, $g^*(x)$ denotes its reciprocal polynomial, i.e., $g^*(x) = x^{\deg(g)} g(x^{-1})$. We say that a polinomial $g(x)$ is auto-reciprocal if $g(x)$ and $g^*(x)$ differ by a multiplicative constant.

Define

$$\xi(n) := \begin{cases} 1, & n \text{ is odd}, \\ 2, & n \text{ is even}. \end{cases}$$

The polynomials $x^m - 1 \in \mathbb{F}_q[x]$ and $x^n - 1 \in \mathbb{F}_q[x]$ split into monic irreducible factors as

$$x^m - 1 = (f_1 \dots f_{r_1})(f_{r_1+1} f^*_{r_1+1} f_{r_1+2} f^*_{r_1+2} \cdots f_{r_1+s_1} f^*_{r_1+s_1}), \tag{3}$$

$$x^n - 1 = (g_1 \dots g_{r_2})(g_{r_2+1} g^*_{r_2+1} g_{r_2+2} g^*_{r_2+2} \cdots g_{r_2+s_2} g^*_{r_2+s_2}), \tag{4}$$

where $f_1 = g_1 = x - 1$, $f_j^* = f_j$ for $1 < j \le r_1$, $g_j^* = g_j$ for $1 < j \le r_2$; and $f_2 = x + 1$ if m is even, $g_2 = x + 1$ if n is even. Here r_1, r_2 denote the numbers of auto-reciprocal factors in these factorizations and $2s_1, 2s_2$ denote the numbers of non-auto-reciprocal factors.

Since $\mathbb{F}_q^* \simeq \mathbb{Z}_{q-1}$ and $n \mid q-1$, it follows that there exist a multiplicative subgroup of $\mathbb{F}_q^*$ of order n, hence the factors in (4) are of degree 1. And since $x-1$ and $x+1$ are the only auto–reciprocal polynomials of degree 1, it follows that $r_2 = \xi(n)$ and $s_2 = \frac{n-\xi(n)}{2}$.

Let $h \in \mathbb{F}_q[x]$ be irreducible, $\deg(h) = k$ and let α be a root of h in an extension of $\mathbb{F}_q$. By $\mathbb{F}_q[\alpha]$ we denote the extension of $\mathbb{F}_q$ with α. It is well known that $\mathbb{F}_q[\alpha] = \mathbb{F}_q[\alpha^{-1}]$ and $\mathbb{F}_q[\alpha] \simeq F_{q^{\deg(h)}}$. Any element $t \in \mathbb{F}_q[\alpha]$ can be written as $v(\alpha)$ or $w(\alpha^{-1})$, $v, w \in \mathbb{F}_q[x]$ and $\deg(v) < k$, $\deg(u) < k$. Polynomials $v(x)$ and $w(x)$ are called polynomial representations of t with α and α^{-1}.

By α_i we denote a root of the polynomial f_j in an extension of $\mathbb{F}_q$ and by β_j we denote a root of the polynomial g_j.

2. The Wedderburn decomposition of $\mathbb{F}_q Q_{m,n}$

Bellow, by $\langle h \rangle_k$ we denote the cyclic group of order k with a generator h.

Let G be a group and R be a $\mathbb{F}_q$–algebra, then we can extend multiplication by the elements of $\mathbb{F}_q$ to RG. Note that, RG equipped with this operation is a $\mathbb{F}_q$–algebra.

For each $i \in \{1, \dots, r_1 + s_1\}$ and $j \in \{1, \dots, r_2 + s_2\}$ let $\nu_{i,j}$ be the $\mathbb{F}_q$–algebras homomorphism of $\mathbb{F}_q Q_{m,n}$ defined by the generators of $Q_{m,n}$ as follows:

1. $1 \le i \le \xi(m)$ and $1 \le j \le r_2$:

$$\nu_{i,j} : \mathbb{F}_q Q_{m,n} \to \mathbb{F}_q(\langle h_1 \rangle_2 \times \langle h_2 \rangle_2)$$

$$\nu_{i,j}(a_1) = \alpha_i, \quad \nu_{i,j}(a_2) = \beta_j, \quad \nu_{i,j}(b) = h_1, \quad \nu_{i,j}(c) = h_2.$$

2. $\xi(m) + 1 \le i \le r_1 + s_1$ and $1 \le j \le r_2$:

$$\nu_{i,j} : \mathbb{F}_q Q_{m,n} \to \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q[\alpha_i])\langle h \rangle_2$$

$$\nu_{i,j}(a_1) = \begin{pmatrix} \alpha_i & 0 \\ 0 & \alpha_i^{-1} \end{pmatrix}, \quad \nu_{i,j}(a_2) = \begin{pmatrix} \beta_j & 0 \\ 0 & \beta_j \end{pmatrix}, \quad \nu_{i,j}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h, \quad \nu_{i,j}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. $1 \le i \le \xi(m)$ and $r_2 + 1 \le j \le r_2 + s_2$:

$$\nu_{i,j} : \mathbb{F}_q Q_{m,n} \to \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q)\langle h \rangle_2$$

$$\nu_{i,j}(a_1) = \begin{pmatrix} \alpha_i & 0 \\ 0 & \alpha_i \end{pmatrix}, \quad \nu_{i,j}(a_2) = \begin{pmatrix} \beta_j & 0 \\ 0 & \beta_j^{-1} \end{pmatrix}, \quad \nu_{i,j}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nu_{i,j}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h.$$

4. $\xi(m) + 1 \le i \le r_1 + s_1$ and $r_2 + 1 \le j \le r_2 + s_2$:

$$\nu_{i,j} : \mathbb{F}_q Q_{m,n} \to M_4(\mathbb{F}_q[\alpha_i])$$

$$\nu_{i,j}(a_1) = \begin{pmatrix} \alpha_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_i^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_i^{-1} \end{pmatrix}, \quad \nu_{i,j}(a_2) = \begin{pmatrix} \beta_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_j^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_j^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\nu_{i,j}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nu_{i,j}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

For each $\xi(m) + 1 \le i \le r_1$ define

$$Z_i := \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_i \\ 1 & -\alpha_i^{-1} \end{pmatrix}, \quad \hat{Z}_i := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha_i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha_i \\ 1 & 0 & -\alpha_i^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha_i^{-1} \end{pmatrix}$$

and automorphisms

$$\sigma_i : \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q[\alpha_i])\langle h \rangle_2 \to \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q[\alpha_i])\langle h \rangle_2, \quad \sigma_i(X) = Z_i^{-1} X Z_i;$$

$$\hat{\sigma}_i : \mathbb{M}_4(\mathbb{F}_q[\alpha_i]) \to \mathbb{M}_4(\mathbb{F}_q[\alpha_i]), \quad \hat{\sigma}_i(X) = \hat{Z}_i^{-1} X \hat{Z}_i.$$

Lemma 4. *(i) Let $\xi(m) + 1 \le i \le r_1$ and $1 \le j \le r_2$; then $\operatorname{im}(\sigma_i \nu_{i,j}) \subset \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q[\alpha_i + \alpha_i^{-1}])\langle h \rangle_2$.*
(ii) Let $\xi(m) + 1 \le i \le r_1$ and $r_2 + 1 \le j \le r_2 + s_2$; then $\operatorname{im}(\hat{\sigma}_i \nu_{i,j}) \subset \mathbb{M}_4(\mathbb{F}_q[\alpha_i + \alpha_i^{-1}])$.

Доказательство. In the case $\xi(m)+1 \le i \le r_1+s_1$ and $1 \le j \le r_2$ we have

$$(\sigma_i\nu_{i,j})(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \alpha_i+\alpha_i^{-1} \end{pmatrix}, \quad (\sigma_i\nu_{i,j})(a_2) = \begin{pmatrix} \beta_j & 0 \\ 0 & \beta_j \end{pmatrix}, \quad (\sigma_i\nu_{i,j})(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h,$$

$$(\sigma_i\nu_{i,j})(c) = \begin{pmatrix} 1 & -(\alpha_i+\alpha_i^{-1}) \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hence $\operatorname{im}(\sigma_i\nu_{i,j}) \subset \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q[\alpha_i+\alpha_i^{-1}])\langle h\rangle_2$.

Similar computations shows that in the case $\xi(m)+1 \le i \le r_1+s_1$ and $r_2+1 \le j \le r_2+s_2$ we have $\operatorname{im}(\hat{\sigma}_i\nu_{i,j}) \subset \mathbb{M}_4(\mathbb{F}_q[\alpha_i+\alpha_i^{-1}])$. $\square$

Замечание 1. *Observe that if t is a root of the polynomial $g \in \mathbb{F}_q[x]$, then t^{-1} is a root of g^*. When $g \in \mathbb{F}_q[x]$ is auto-reciprocal and irreducible and $g(1) \neq 0$, $g(-1) \neq 0$, there exists a polynomial $h \in \mathbb{F}_q[x]$, such that $h(t+t^{-1}) = 0$ and $\deg(h) = \frac{\deg(g)}{2}$ (see [18], remark 3.2). It follows that*

$$\dim_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_q[t+t^{-1}]) = \frac{\deg(g)}{2}. \tag{5}$$

Finally, let us define the map

$$\rho := \bigoplus_{i=1}^{r_1+s_1}\bigoplus_{j=1}^{r_2+s_2} \rho_{i,j}, \quad \rho_{i,j} := \begin{cases} \sigma_j\nu_{i,j}, & (\xi(m)+1 \le i \le r_1) \wedge (1 \le j \le r_2) \\ \hat{\sigma}_j\nu_{i,j}, & (\xi(m)+1 \le i \le r_1) \wedge (r_2+1 \le j \le r_2+s_2) \\ \nu_{i,j}, & \textit{otherwise} \end{cases}. \tag{6}$$

Теорема 1. *Let $\gcd(mn, q) = 1$ and $n \mid q-1$; then the map*

$$\rho : \mathbb{F}_q Q_{m,n} \to \bigoplus_{i=1}^{r_1+s_1}\bigoplus_{j=1}^{r_2+s_2} \mathcal{B}_{i,j},$$

$$\mathcal{B}_{i,j} = \begin{cases} \mathbb{F}_q(\langle h_1\rangle_2 \times \langle h_2\rangle_2), & (1 \le i \le \xi(m)) \wedge (1 \le j \le r_2) \\ \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q[\alpha_i+\alpha_i^{-1}])\langle h\rangle_2, & (\xi(m)+1 \le i \le r_1) \wedge (1 \le j \le r_2) \\ \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q[\alpha_i])\langle h\rangle_2, & (r_1+1 \le i \le r_1+s_1) \wedge (1 \le j \le r_2) \\ \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q)\langle h\rangle_2, & (1 \le i \le \xi(m)) \wedge (r_2+1 \le j \le r_2+s_2) \\ \mathbb{M}_4(\mathbb{F}_q[\alpha_i+\alpha_i^{-1}]), & (\xi(m)+1 \le i \le r_1) \wedge (r_2+1 \le j \le r_2+s_2) \\ \mathbb{M}_4(\mathbb{F}_q[\alpha_i]), & (r_1+1 \le i \le r_1+s_1) \wedge (r_2+1 \le j \le r_2+s_2) \end{cases}$$

is an isomorphism.

Доказательство. First we show that ρ is injective, i.e. if $\rho(u) = 0$ then $u = 0$.

Now let $u \in \mathbb{F}_q Q_{m,n}$ be of the form (2) then

1) in the case $(1 \le i \le \xi(m))$ and $(1 \le j \le r_2)$ we have

$$\nu_{i,j}(u) = P_0(\alpha_i,\beta_j) + P_1(\alpha_i,\beta_j)h_1 + P_2(\alpha_i,\beta_j)h_2 + P_3(\alpha_i,\beta_j)h_1h_2; \tag{7}$$

2) in the case $\xi(m)+1 \le i \le r_1+s_1$ and $1 \le j \le r_2$ we have

$$\nu_{i,j}(u) = \begin{pmatrix} P_0(\alpha_i,\beta_j) & P_2(\alpha_i^{-1},\beta_j) \\ P_2(\alpha_i,\beta_j) & P_0(\alpha_i^{-1},\beta_j) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_1(\alpha_i,\beta_j) & P_3(\alpha_i^{-1},\beta_j) \\ P_3(\alpha_i,\beta_j) & P_1(\alpha_i^{-1},\beta_j) \end{pmatrix} h; \tag{8}$$

3) in the case $1 \le i \le \xi(m)$ and $r_2+1 \le j \le r_2+s_2$ we have

$$\nu_{i,j}(u) = \begin{pmatrix} P_0(\alpha_i,\beta_j) & P_1(\alpha_i,\beta_j^{-1}) \\ P_1(\alpha_i,\beta_j) & P_0(\alpha_i,\beta_j^{-1}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_2(\alpha_i,\beta_j) & P_3(\alpha_i,\beta_j^{-1}) \\ P_3(\alpha_i,\beta_j) & P_2(\alpha_i,\beta_j^{-1}) \end{pmatrix} h; \tag{9}$$

4) in the case $\xi(m)+1 \le i \le r_1+s_1$ and $r_2+1 \le j \le r_2+s_2$ we have

$$\nu_{i,j}(u) = \begin{pmatrix} P_0(\alpha_i,\beta_j) & P_1(\alpha_i,\beta_j^{-1}) & P_2(\alpha_i^{-1},\beta_j) & P_3(\alpha_i^{-1},\beta_j^{-1}) \\ P_1(\alpha_i,\beta_j) & P_0(\alpha_i,\beta_j^{-1}) & P_3(\alpha_i^{-1},\beta_j) & P_2(\alpha_i^{-1},\beta_j^{-1}) \\ P_2(\alpha_i,\beta_j) & P_3(\alpha_i,\beta_j^{-1}) & P_0(\alpha_i^{-1},\beta_j) & P_1(\alpha_i^{-1},\beta_j^{-1}) \\ P_3(\alpha_i,\beta_j) & P_2(\alpha_i,\beta_j^{-1}) & P_1(\alpha_i^{-1},\beta_j) & P_0(\alpha_i^{-1},\beta_j^{-1}) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Note that, since $\alpha_i \in \mathbb{F}_q[\alpha_i]$ and $\beta_j \in \mathbb{F}_q$, it follows that $P_k(\alpha_i,\beta_j^{\pm 1}), P_k(\alpha_i^{-1},\beta_j^{\pm 1}) \in \mathbb{F}_q[\alpha_i]$.

Since $\rho(u)=0$ we see that $\nu_{i,j}(u)=0$. It follows that

$$P_k(\alpha_i,\beta_j) = P_k(\alpha_i,\beta_j^{-1}) = P_i(\alpha_i^{-1},\beta_j) = P_i(\alpha_i^{-1},\beta_j^{-1}) = 0 \quad (k=0..3) \tag{11}$$

for all $1 \le i \le r_1+s_1$, $1 \le j \le r_2+s_2$. Since $\deg_{x_1} P_k(x_1,x_2) < m$ and $\deg_{x_2} P_k(x_1,x_2) < n$, it follows that

$$P_k(x_1,x_2) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} c_{i,j} x_1^i x_2^j = \sum_{i=0}^{m-1} x_1^i \left(\sum_{j=0}^{n-1} c_{i,j} x_2^j \right) = \sum_{i=0}^{m-1} x_1^i P_{ki}(x_2), \quad \deg P_{ki}(x) < n.$$

Using (11) and (3), we obtain $P_k(x,\beta_j) \in \mathbb{F}_q[x]$ and $P_k(x,\beta_j^{-1}) \in \mathbb{F}_q[x]$ are divisible by the polynomial x^m-1 for all $j \in \{1,\dots,r_2+s_2\}$. Since $\deg_{x_1} P_k(x_1,x_2) < m$, we conclude that $P_k(x,\beta_j)$ and $P_k(x,\beta_j^{-1})$ are null polynomials, hence

$$P_{ki}(\beta_j) = P_{ki}(\beta_j^{-1}) = 0.$$

It follows that polynomials $P_{ki}(x)$ are divisible by x^n-1 and we immediately conclude that $P_{ki}(x)$ are also null polynomials. Therefore, we have $P_k(x_1,x_2) \equiv 0$. Injectivity is proved.

Finally, it remains to show that

$$\dim_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_q Q_{m,n} = \dim_{\mathbb{F}_q} \left(\bigoplus_{i=1}^{r_1+s_1} \bigoplus_{j=1}^{r_2+s_2} \mathcal{B}_{i,j} \right).$$

Using (5), we obtain $\dim_{\mathbb{F}_q}\left(\bigoplus_{i=1}^{r_1+s_1}\bigoplus_{j=1}^{r_2+s_2} \mathcal{B}_{i,j}\right) =$

$$= r_2 \left(4\xi(m) + 2\sum_{i=\xi(m)+1}^{r_1} \dim_{\mathbb{F}_q}\left(\mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q[\alpha_i+\alpha_i^{-1}])\right) + 2\sum_{i=r_1+1}^{r_1+s_1} \dim_{\mathbb{F}_q}\left(\mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q[\alpha_i])\right) \right) +$$

$$+ s_2 \left(2\xi(m)\dim_{\mathbb{F}_q}\mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q) + \sum_{i=r_1+1}^{r_1+s_1} \dim_{\mathbb{F}_q}\left(\mathbb{M}_4(\mathbb{F}_q[\alpha_i+\alpha_i^{-1}]\right) + \sum_{i=r_1+1}^{r_1+s_1} \dim_{\mathbb{F}_q}\left(\mathbb{M}_4(\mathbb{F}_q[\alpha_i])\right) \right) =$$

$$= (n-2s_2)\left(4\xi(m) + 4\sum_{i=\xi(m)+1}^{r_1} \deg f_j + 8\sum_{i=r_1+1}^{r_1+s_1} \deg f_j \right) +$$

$$+ s_2 \left(8\xi(m) + 8\sum_{i=\xi(m)+1}^{r_1} \deg f_j + 16\sum_{i=r_1+1}^{r_1+s_1} \deg f_j \right) = 4(n-2s_2)m + 8s_2 m = 4mn =$$

$$= \dim_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_q Q_{m,n}.$$

Hence ρ is an isomorphism. $\square$

Lemma 5. *Let R be an algebra with identity 1_R and (1_R+1_R) has an inverse element in R; then $R\langle h\rangle_2 \simeq R\oplus R$ and $R(\langle h_1\rangle_2\times\langle h_2\rangle_2)\simeq R\oplus R\oplus R\oplus R$.*

Доказательство. Indeed, the map $\varphi : R\langle h\rangle_2 \to R\oplus R$ such that

$$\varphi(r_1+r_2h) = (r_1+r_2, r_1-r_2)$$

is an isomorphism and

$$\varphi^{-1}(r_1,r_2) = \frac{r_1+r_2}{(1_R+1_R)} + \frac{r_1-r_2}{(1_R+1_R)}h.$$

Since $R(\langle h_1\rangle_2\times\langle h_2\rangle_2)\simeq (R\langle h_1\rangle_2)\,\langle h_2\rangle_2$ it follows that

$$R(\langle h_1\rangle_2\times\langle h_2\rangle_2)\simeq R\langle h\rangle_2\oplus R\langle h\rangle_2\simeq R\oplus R\oplus R\oplus R.$$

□

Now we can establish the Wedderburn decomposition of $\mathbb{F}_qQ_{m,n}$ in the case $\gcd(2mn,q)=1$ and $n\mid q-1$.

Теорема 2. *Let $\gcd(2mn,q)=1$ and $n\mid q-1$; then $\mathbb{F}_qQ_{m,n}$ has the Wedderburn decomposition of the form:*

$$d : \mathbb{F}_qQ_{m,n} \to \bigoplus_{i=1}^{r_1+s_1}\bigoplus_{j=1}^{r_2+s_2}\mathcal{A}_{i,j}, \tag{12}$$

$$\mathcal{A}_{i,j} = \begin{cases} \mathbb{F}_q\oplus\mathbb{F}_q\oplus\mathbb{F}_q\oplus\mathbb{F}_q, & (1\le i\le\xi(m))\wedge(1\le j\le r_2)\\ \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q[\alpha_i+\alpha_i^{-1}])\oplus\mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q[\alpha_i+\alpha_i^{-1}]), & (\xi(m)+1\le i\le r_1)\wedge(1\le j\le r_2)\\ \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q[\alpha_i])\oplus\mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q[\alpha_i]), & (r_1+1\le i\le r_1+s_1)\wedge(1\le j\le r_2)\\ \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q)\oplus\mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q), & (1\le i\le\xi(m))\wedge(r_2+1\le j\le r_2+s_2)\\ \mathbb{M}_4(\mathbb{F}_q[\alpha_i+\alpha_i^{-1}]), & (\xi(m)+1\le i\le r_1)\wedge(r_2+1\le j\le r_2+s_2)\\ \mathbb{M}_4(\mathbb{F}_q[\alpha_i]), & (r_1+1\le i\le r_1+s_1)\wedge(r_2+1\le j\le r_2+s_2) \end{cases}$$

Доказательство. Let us define the maps $\tau_{i,j}$

1. for $1\le i\le\xi(m)$ and $1\le j\le r_2$:

$$\tau_{i,j} : \mathbb{F}_q(\langle h_1\rangle_2\times\langle h_2\rangle_2)\to\mathbb{F}_q^4$$

$$\begin{aligned}\tau_{i,j}(X_0+X_1h_1+X_2h_2+X_3h_1h_2) = \quad & (P_0+P_1+P_2+P_3,\ P_0+P_1-P_2-P_3,\\ & P_0-P_1+P_2-P_3,\ P_0-P_1-P_2+P_3);\end{aligned}$$

2. for $\xi(m)+1\le i\le r_1$ and $1\le j\le r_2$:

$$\tau_{i,j} : M_2(\mathbb{F}_q[\alpha_i+\alpha_i^{-1}])\langle h\rangle_2\to M_2(\mathbb{F}_q[\alpha_i+\alpha_i^{-1}])\oplus M_2(\mathbb{F}_q[\alpha_i+\alpha_i^{-1}]),$$

$$\tau_{i,j}(X_0+X_1h) = (X_0+X_1, X_0-X_1);$$

3. for $r_1+1\le i\le r_1+s_1$ and $1\le j\le r_2$:

$$\tau_{i,j} : M_2(\mathbb{F}_q[\alpha_i])\langle h\rangle_2\to M_2(\mathbb{F}_q[\alpha_i])\oplus M_2(\mathbb{F}_q[\alpha_i]),\quad \tau_{i,j}(X_0+X_1h) = (X_0+X_1, X_0-X_1);$$

4. for $1\le i\le\xi(m)$ and $r_2+1\le j\le r_2+s_2$

$$\tau_{i,j} : M_2(\mathbb{F}_q)\langle h\rangle_2\to M_2(\mathbb{F}_q)\oplus M_2(\mathbb{F}_q),\quad \tau_{i,j}(X_0+X_1h) = (X_0+X_1, X_0-X_1);$$

Using lemma 5 we conclude that $\tau_{i,j}$ are $\mathbb{F}_q$–algebras isomorphisms. Now let

$$d = \bigoplus_{i=1}^{r_1+s_1} \bigoplus_{j=1}^{r_2+s_2} d_{i,j}, \quad d_{i,j} := \begin{cases} \tau_{i,j}\nu_{i,j}, & (1 \le i \le \xi(m)) \wedge (1 \le j \le r_2) \\ \tau_{i,j}\sigma_i\nu_{i,j}, & (\xi(m)+1 \le i \le r_1) \wedge (1 \le j \le r_2) \\ \tau_{i,j}\nu_{i,j}, & (r_1+1 \le i \le r_1+s_1) \wedge (1 \le j \le r_2) \\ \tau_{i,j}\nu_{i,j}, & (1 \le i \le \xi(m)) \wedge (r_2+1 \le j \le r_2+s_2) \\ \widehat{\sigma}_i\nu_{i,j}, & (\xi(m)+1 \le i \le r_1) \wedge (r_2+1 \le j \le r_2+s_2) \\ \nu_{i,j}, & (r_1+1 \le i \le r_1+s_1) \wedge (r_2+1 \le j \le r_2+s_2) \end{cases}$$

Therefore, using theorem 1 we see that d is an isomorphism. □

Замечание 2. *Since $Q_{m,n} \simeq Q_{n,m}$, we can also use these theorems in the case $n \nmid q-1$ but $m \mid q-1$.*

3. Primitive central idempotents of $\mathbb{F}_q Q_{m,n}$

Let R be a ring. Recall, $i \in R$ is an idempotent if $i^2 = i$. Two idempotents $i_1, i_2 \in R$ are called orthogonal if $i_1 i_2 = i_2 i_1 = 0$. An idempotent i is called central if $ri = ir$ for all $r \in R$. An (central) idempotent i is said to be primitive (central) idempotent if i cannot be written as $i = i' + i''$ where i' and i'' are such (central) idempotents that $i', i'' \neq 0$ and $i'i'' = 0$.

In this section, firstly, we consider the set of idempotents of cyclic group algebra. This set allows us to explicitly construct ρ^{-1} and d^{-1}, where isomorphisms ρ and d are defined in the section 3. Then we use d^{-1} to describe the primitive central idempotents of $\mathbb{F}Q_{m,n}$ in the case $\gcd(2mn, q) = 1$, $n \mid q-1$. Note that the maps ρ^{-1} and d^{-1} could also be useful to study the algebraic structure of group codes over $Q_{m,n}$.

Let $\gcd(k, q) = 1$. Let $\mathcal{R}_k := \mathbb{F}_q[x]/(x^k - 1)$, where (x^k-1) denotes the principal ideal of $F_q[x]$ generated by $x^k - 1$. It is known (see [18], lemma 2.1) that for monic polynomial $g(x) \mid x^k - 1$ an element

$$e_g^k(x) := -\frac{[(g(x)^*)']^*}{k} \cdot \frac{x^k-1}{g(x)}, \tag{13}$$

is the principal idempotent of the ideal $\mathcal{R}_k \lceil \frac{x^k-1}{g(x)} \rceil$, where $\lceil g(x) \rceil \in \mathcal{R}_k$ is the equivalence class of $g(x)$.

Lemma 6. *Let $g(x)$ be a monic irreducible divisor of $x^k - 1$ and α be a root of g; then*
(i) $e_g^k(\alpha) = 1$;
(ii) $e_g^k(\beta) = 0$ for any root β of the polynomial $\frac{x^k-1}{g(x)}$.

Доказательство. The definition (13) yields *(ii)*. The Chinese reminder theorem implies that the map

$$\varphi : \mathcal{R}_k \to \frac{\mathbb{F}_q[x]}{(g(x))} \oplus \frac{\mathbb{F}_q[x]}{((x^k-1)/g(x))}, \quad P(x) \mapsto \left(P(x) \bmod g(x), P(x) \bmod \frac{x^k-1}{g(x)} \right)$$

is an isomorphism. Since $e_g^k(x)$ is an idempotent and $\frac{\mathbb{F}_q[x]}{(g(x))}$ is a field, it follows that

$$e_g^k(x) \bmod g(x) = 1.$$

Hence $e_g^k(\alpha) = 1$. □ It is well known that $\mathbb{F}_q\langle h \rangle_k \simeq \mathcal{R}_k$, hence for any $g(x) \mid (x^k - 1)$ we have $e_g^k(h) \in \mathbb{F}_q\langle h \rangle_k$ is an idempotent.

Let S be a set. By id_S we denote the identity map on S.

Lemma 7. *Let* $\gcd(q, mn) = 1$, $1 \le i \le \xi(m)$ *and* $1 \le j \le r_2$. *Let*

$$\mu_{i,j} : \mathbb{F}_q(\langle h_1 \rangle_2 \times \langle h_2 \rangle_2) \to \mathbb{F}_q Q_{m,n}$$

be a map defined by

$$\mu_{i,j}(p_0 + p_1 h_1 + p_2 h_2 + p_3 h_1 h_2) := (p_0 + p_1 b + p_2 c + p_3 bc)\, e^m_{f_i}(a_1) e^n_{g_j}(a_2).$$

Then $\nu_{i,j}\mu_{i,j} = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(\nu_{i,j})}$ *and* $\nu_{i'j'}\mu_{i,j} = 0$ *if* $i' \ne i$ *or* $j' \ne j$.

Доказательство. Lemma 6 implies that $\nu_{i'j'}\mu_{i,j} = 0$ if $i' \ne i$ or $j' \ne j$. We have

$$\nu_{i,j}\Big((p_0 + p_1 b + p_2 c + p_3 bc)\, e^m_{f_i}(a_1) e^n_{g_j}(a_2)\Big) = p_0 + p_1 h_1 + p_2 h_2 + p_3 h_3.$$

Hence $\nu_{i,j}\mu_{i,j} = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(\nu_{i,j})}$. $\square$

Lemmas 8–12 are proved in the same way. Recall, the maps $\nu_{i,j}$ are $\mathbb{F}_q$–algebras homomorphism and their images in fact were described in (7)—(10).

Lemma 8. *Let* $\xi(m) + 1 \le i \le r_1$ *and* $1 \le j \le r_2$. *Let*

$$\mu_{i,j} : \mathrm{im}(\nu_{i,j}) \to \mathbb{F}_q Q_{m,n},$$

$$\mu_{i,j} : \begin{pmatrix} p_0(\alpha_i) & p_1(\alpha_i^{-1}) \\ p_1(\alpha_i) & p_0(\alpha_i^{-1}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_2(\alpha_i) & p_3(\alpha_i^{-1}) \\ p_3(\alpha_i) & p_2(\alpha_i^{-1}) \end{pmatrix} h \mapsto \Big[p_0(a_1) + bp_2(a_1) + cp_1(a_1) + \\ + bcp_3(a_1)\Big] e^m_{f_i}(a_1) e^n_{g_j}(a_2).$$

Then $\nu_{i,j}\mu_{i,j} = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(\nu_{i,j})}$ *and* $\nu_{i'j'}\mu_{i,j} = 0$ *if* $i' \ne i$ *or* $j' \ne j$.

Lemma 9. *Let* $r_1 + 1 \le i \le r_1 + s_1$ *and* $1 \le j \le r_2$. *Let*

$$\mu_{i,j} : \mathrm{im}(\nu_{i,j}) \to \mathbb{F}_q Q_{m,n},$$

$$\mu_{i,j} : \begin{pmatrix} p_0(\alpha_i) & p_2(\alpha_i^{-1}) \\ p_1(\alpha_i) & p_3(\alpha_i^{-1}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_4(\alpha_i) & p_6(\alpha_i^{-1}) \\ p_5(\alpha_i) & p_7(\alpha_i^{-1}) \end{pmatrix} h \mapsto \Big[p_0(a_1) + bp_4(a_1) + cp_1(a_1) + \\ + bcp_5(a_1)\Big] e^m_{f_i}(a_1) e^n_{g_j}(a_2) + \\ + \Big[p_2(a_1) + bp_6(a_1) + cp_3(a_1) + bcp_7(a_1)\Big] e^m_{f_i^*}(a_1) e^n_{g_j}(a_2).$$

Then $\nu_{i,j}\mu_{i,j} = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(\nu_{i,j})}$ *and* $\nu_{i'j'}\mu_{i,j} = 0$ *if* $i' \ne i$ *or* $j' \ne j$.

Lemma 10. *Let* $1 \le i \le \xi(m)$ *and* $r_2 + 1 \le j \le r_2 + s_2$. *Let*

$$\mu_{i,j} : \mathrm{im}(\nu_{i,j}) \to \mathbb{F}_q Q_{m,n},$$

$$\mu_{i,j} : \begin{pmatrix} p_0 & p_2 \\ p_1 & p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_4 & p_6 \\ p_5 & p_7 \end{pmatrix} h \mapsto \Big[p_0 + bp_1 + cp_4 + bcp_5\Big] e^m_{f_i}(a_1) e^n_{g_j}(a_2) + \\ + \Big[p_2 + bp_3 + cp_6 + bcp_7\Big] e^m_{f_i}(a_1) e^n_{g_j^*}(a_2).$$

Then $\nu_{i,j}\mu_{i,j} = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(\nu_{i,j})}$ *and* $\nu_{i'j'}\mu_{i,j} = 0$ *if* $i' \ne i$ *or* $j' \ne j$.

Lemma 11. *Let $\xi(m)+1 \le i \le r_1$ and $r_2+1 \le j \le r_2+s_2$. Let*

$$\mu_{i,j} : \mathrm{im}(\nu_{i,j}) \to \mathbb{F}_q Q_{m,n},$$

$$\mu_{i,j} : \begin{pmatrix} p_0(\alpha_i) & p_4(\alpha_i) & p_2(\alpha_i^{-1}) & p_6(\alpha_i^{-1}) \\ p_1(\alpha_i) & p_5(\alpha_i) & p_3(\alpha_i^{-1}) & p_7(\alpha_i^{-1}) \\ p_2(\alpha_i) & p_6(\alpha_i) & p_0(\alpha_i^{-1}) & p_4(\alpha_i^{-1}) \\ p_3(\alpha_i) & p_7(\alpha_i) & p_1(\alpha_i^{-1}) & p_5(\alpha_i^{-1}) \end{pmatrix} \mapsto$$
$$\mapsto \Big[p_0(a_1)+bp_1(a_1)+cp_2(a_1)+bcp_3(a_1)\Big] e^m_{f_i}(a_1) e^n_{g_j}(a_2) +$$
$$+\Big[p_5(a_1)+bp_4(a_1)+cp_7(a_1)+bcp_6(a_1)\Big] e^m_{f_i}(a_1) e^n_{g_j^*}(a_2).$$

Then $\nu_{i,j}\mu_{i,j} = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(\nu_{i,j})}$ and $\nu_{i'j'}\mu_{i,j} = 0$ if $i' \ne i$ or $j' \ne j$.

Lemma 12. *Let $r_1+1 \le i \le r_1+s_1$ and $r_2+1 \le j \le r_2+s_2$. Let*

$$\mu_{i,j} : \mathrm{im}(\nu_{i,j}) \to \mathbb{F}_q Q_{m,n},$$

$$\mu_{i,j} : \begin{pmatrix} p_0(\alpha_i) & p_4(\alpha_i) & p_8(\alpha_i^{-1}) & p_{12}(\alpha_i^{-1}) \\ p_1(\alpha_i) & p_5(\alpha_i) & p_9(\alpha_i^{-1}) & p_{13}(\alpha_i^{-1}) \\ p_2(\alpha_i) & p_6(\alpha_i) & p_{10}(\alpha_i^{-1}) & p_{14}(\alpha_i^{-1}) \\ p_3(\alpha_i) & p_7(\alpha_i) & p_{11}(\alpha_i^{-1}) & p_{15}(\alpha_i^{-1}) \end{pmatrix} \mapsto$$
$$\mapsto \Big[p_0(a_1)+bp_1(a_1)+cp_2(a_1)+bcp_3(a_1)\Big] e^m_{f_i}(a_1) e^n_{g_j}(a_2) +$$
$$+\Big[p_5(a_1)+bp_4(a_1)+cp_7(a_1)+bcp_6(a_1)\Big] e^m_{f_i}(a_1) e^n_{g_j^*}(a_2) +$$
$$+\Big[p_{10}(a_1)+bp_{11}(a_1)+cp_8(a_1)+p_9(a_1)\Big] e^m_{f_i^*}(a_1) e^n_{g_j}(a_2) +$$
$$+\Big[p_{15}(a_1)+bp_{14}(a_1)+cp_{13}(a_1)+bcp_{12}(a_1)\Big] e^m_{f_i^*}(a_1) e^n_{g_j^*}(a_2).$$

Then $\nu_{i,j}\tau_{i,j} = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(\nu_{i,j})}$ and $\nu_{i'j'}\mu_{i,j} = 0$ if $i' \ne i$ or $j' \ne j$.

In the following theorem by the use of these lemmas we describe ρ^{-1} and d^{-1}.

Теорема 3. *(i) Let $\gcd(mn,q)=1$ and let*

$$\bar\rho := \sum_{i=1}^{r_1+s_1}\sum_{j=1}^{r_2+s_2} \bar\rho_{i,j} : \quad \bigoplus_{i=1}^{r_1+s_1}\bigoplus_{j=1}^{r_2+s_2} \mathcal{B}_{i,j} \to \mathbb{F}_q Q_{m,n}$$

$$\bar\rho_{i,j} := \begin{cases} \mu_{i,j}\sigma_j^{-1}, & (\xi(m)+1 \le i \le r_1) \wedge (1 \le j \le r_2) \\ \mu_{i,j}\hat\sigma_j^{-1}, & (\xi(m)+1 \le i \le r_1) \wedge (r_2+1 \le j \le r_2+s_2) \\ \mu_{i,j}, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

Then $\rho^{-1} = \bar\rho$.

(ii) Let $\gcd(2mn,q)=1$ and let

$$\bar d = \sum_{i=1}^{r_1+s_1}\sum_{j=1}^{r_2+s_2} \bar d_{i,j} : \quad \bigoplus_{i=1}^{r_1+s_1}\bigoplus_{j=1}^{r_2+s_2} \mathcal{A}_{i,j} \to \mathbb{F}_q Q_{m,n}$$

$$\bar{d}_{i,j} := \begin{cases} \mu_{i,j}\tau_{i,j}^{-1}, & (1 \le i \le \xi(m)) \wedge (1 \le j \le r_2) \\ \mu_{i,j}\sigma_i^{-1}\tau_{i,j}^{-1}, & (\xi(m)+1 \le i \le r_1) \wedge (1 \le j \le r_2) \\ \mu_{i,j}\tau_{i,j}^{-1}, & (r_1+1 \le i \le r_1+s_1) \wedge (1 \le j \le r_2) \\ \mu_{i,j}\tau_{i,j}^{-1}, & (1 \le i \le \xi(m)) \wedge (r_2+1 \le j \le r_2+s_2) \\ \mu_{i,j}\widehat{\sigma}_i^{-1}, & (\xi(m)+1 \le i \le r_1) \wedge (r_2+1 \le j \le r_2+s_2) \\ \mu_{i,j}, & (r_1+1 \le i \le r_1+s_1) \wedge (r_2+1 \le j \le r_2+s_2) \end{cases}$$

Then $d^{-1} = \bar{d}$.

Доказательство. Since ρ is of the form (6), directly computing from lemmas 8–12 we obtain

$$\rho\bar{\rho} = \bigoplus_{i=1}^{r_1+s_1}\bigoplus_{j=1}^{r_2+s_2}\sum_{i'=1}^{r_1+s_1}\sum_{j'=1}^{r_2+s_2}\rho_{i,j}\bar{\rho}_{i'j'} = \bigoplus_{i=1}^{r_1+s_1}\bigoplus_{j=1}^{r_2+s_2}\rho_{i,j}\bar{\rho}_{i,j} = \bigoplus_{i=1}^{r_1+s_1}\bigoplus_{j=1}^{r_2+s_2}\mathrm{id}_{\mathcal{B}_{i,j}}$$

Since ρ is an isomorphism (see theorem 1), it follows that $\rho^{-1} = \bar{\rho}$. This is also true in the case (ii). $\square$

Now we can describe the primitive central idempotents in $F_qQ_{m,n}$ in the case $\gcd(2mn, q) = 1$ and $n \mid q-1$.

Теорема 4. *Let* $\gcd(2mn, q) = 1$ *and* $n \mid q-1$; *then* $\mathbb{F}_qQ_{m,n}$ *has*

1) $4\xi(m)r_2$ *primitive central idempotents of the form*

$$\frac{e+b+c+bc}{4}e_{f_i}^m(a_1)e_{g_j}^n(a_2), \quad \frac{e+b-c-bc}{4}e_{f_i}^m(a_1)e_{g_j}^n(a_2),$$
$$\frac{e-b+c-bc}{4}e_{f_i}^m(a_1)e_{g_j}^n(a_2), \frac{e-b-c+bc}{4}e_{f_i}^m(a_1)e_{g_j}^n(a_2),$$

where $1 \le i \le \xi(m)$ *and* $1 \le j \le r_2$;

2) $2(r_1 - \xi(m))r_2$ *primitive central idempotents of the form:*

$$\frac{e-b}{2}e_{f_i}^m(a_1)e_{g_j}^n(a_2), \quad \frac{e+b}{2}e_{f_i}^m(a_1)e_{g_j}^n(a_2),$$

where $\xi(m)+1 \le i \le r_1$ *and* $1 \le j \le r_2$;

3) $2s_1r_2$ *primitive central idempotents of the form:*

$$\frac{e-b}{2}\left(e_{f_i}^m(a_1) + e_{f_i^*}^m(a_1)\right)e_{g_j}^n(a_2), \quad \frac{e+b}{2}\left(e_{f_i}^m(a_1) + e_{f_i^*}^m(a_1)\right)e_{g_j}^n(a_2),$$

where $r_1+1 \le i \le r_1+s_1$ *and* $1 \le j \le r_2$;

4) $2\xi(m)s_2$ *primitive central idempotents of the form:*

$$\frac{e-c}{2}e_{f_i}^m(a_1)\left(e_{g_j}^n(a_2) + e_{g_j^*}^n(a_2)\right), \quad \frac{e+c}{2}e_{f_i}^m(a_1)\left(e_{g_j}^n(a_2) + e_{g_j^*}^n(a_2)\right),$$

where $1 \le i \le \xi(m)$ *and* $r_2+1 \le j \le r_2+s_2$;

5) $(r_1 - \xi(m))s_2$ *primitive central idempotents of the form:*

$$e_{f_i}^m(a_1)\left(e_{g_j}^n(a_2) + e_{g_j^*}^n(a_2)\right),$$

where $\xi(m)+1 \le i \le r_1$ *and* $r_2+1 \le j \le r_2+s_2$;

6) s_1s_2 primitive central idempotents of the form:

$$\left(e^m_{f_i}(a_1)+e^m_{f^*_i}(a_1)\right)\left(e^n_{g_j}(a_2)+e^n_{g^*_j}(a_2)\right),$$

where $r_1+1\le i\le r_1+s_1$ and $r_2+1\le j\le r_2+s_2$.

Доказательство. Let R be a semisimple ring and let

$$\varphi : R\to R_1\oplus R_2\oplus\dots\oplus R_l,$$

where R_i are matrix rings over division rings, be the Wedderburn decomposition of R. It is well-known (see [1], 2.6) that R has l primitive central idempotents, and each one is of the form

$$e_i=\varphi^{-1}(0\oplus\dots\oplus 0\oplus I_i\oplus 0\oplus\dots\oplus 0),$$

where $I_i\in R_i$ is the identity element.

Therefore, using theorems 2 and 3, we obtain 1)–6). Indeed, consider for example 1) in the case $i=1$ and $j=1$. Using theorem 3 we get

$$d^{-1}\left((1,0,0,0)\oplus 0\oplus 0\dots\oplus 0\right)=\mu_{1,1}\tau^{-1}_{1,1}(1,0,0,0).$$

By definitions of $\tau_{1,1}$ from theorem 2 and $\mu_{1,1}$ from theorem 3 we obtain

$$\mu_{1,1}\tau^{-1}_{1,1}(1,0,0,0)=\mu_{1,1}\left(\frac{1+h_1+h_2+h_1h_2}{4}\right)=\frac{e+b+c+bc}{4}e^m_{f_1}(a_1)e^n_{g_1}(a_2).$$

Similarly we can evaluate

$$d^{-1}\left((0,1,0,0)\oplus 0\oplus 0\dots\oplus 0\right)\dots d^{-1}\left((0,0,0,1)\oplus 0\oplus 0\dots\oplus 0\right)$$

and remaining primitive central idempotents for $1\le i\le\xi(m)$ and $1\le j\le r_2$.

Now let's consider 2). In the case $\xi(m)+1\le i\le r_1$ and $1\le j\le r_2$ using definitions of d and $\mu_{i,j}$ from theorem 3 and $\tau_{i,j}$ from theorem 2 we get

$$d^{-1}(0\oplus\dots\oplus 0\oplus(E\oplus 0)\oplus 0\oplus\dots\oplus 0)=\mu_{i,j}\sigma^{-1}_{i,j}\tau^{-1}_{i,j}(E\oplus 0)=\mu_{i,j}(E+0h)=\frac{e-b}{2}e^m_{f_i}(a_1)e^n_{g_j}(a_2)$$

and

$$d^{-1}(0\oplus\dots\oplus 0\oplus(0\oplus E)\oplus 0\oplus\dots\oplus 0)=\mu_{i,j}\sigma^{-1}_{i,j}\tau^{-1}_{i,j}(0\oplus E)=\mu_{i,j}(0+Eh)=\frac{e+b}{2}e^m_{f_i}(a_1)e^n_{g_j}(a_2),$$

here E denotes the identity matrix and $(0\oplus E),(E\oplus 0)\in\mathcal{A}_{i,j}$.

The remaining cases 3)–6) are proved in the same way. For example, let's consider 6). In the case $r_1+1\le i\le r_1+s_1$ and $r_2+1\le j\le r_2+s_2$ we have

$$d^{-1}(0\oplus\dots\oplus 0\oplus E\oplus 0\oplus\dots\oplus 0)=\mu_{i,j}(E)=\left(e^m_{f_i}(a_1)+e^m_{f^*_i}(a_1)\right)\left(e^n_{g_j}(a_2)+e^n_{g^*_j}(a_2)\right),$$

here $E\in\mathcal{A}_{i,j}$ is identity matrix. □

Замечание 3. *Note that, $\mathbb{F}_qQ_{m,n}$ splits into internal direct sum of minimal two–sided ideals $I_k\subset\mathbb{F}_qQ_{m,n}$. Each I_k is isomorphic to one of the simple direct summands in (12) and generated by an idempotent from theorem 4.*

4. An application to algebraic codding theory

Now we can establish the structure of the group codes over $Q_{m,n}$. First, let us introduce the notation. Define

$$M(i,j) := \begin{cases} 1, & (1 \le i \le \xi(m)) \wedge (1 \le j \le r_2), \\ 4, & (r_1+1 \le i \le r_1+s_1) \wedge (r_2+1 \le j \le r_2+s_2), \\ 2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

and

$$F_i := \begin{cases} \mathbb{F}_q, & 1 \le i \le \xi(n), \\ \mathbb{F}_q[\alpha_i + \alpha_i^{-1}], & \xi(n)+1 \le i \le r, \\ \mathbb{F}_q[\alpha_i], & r+1 \le i \le r+s. \end{cases}$$

Let $k \in \mathbb{N}$, let $\mathbb{F}$ be a field and V be a subspace of $\mathbb{F}^k$; by $\mathcal{I}(\mathbb{F}, k, V)$ we denote the set of all matrices $K \in \mathbb{M}_k(\mathbb{F})$ such that $K\bar{v} = 0$ for all $\bar{v} \in V$.

In [21], p. 93, it was proved that any left ideal of $\mathbb{M}_k(\mathbb{F})$ is of the form $\mathcal{I}(\mathbb{F}, k, V)$ and there is one–to–one correspondence between the left ideals of $\mathbb{M}_k(\mathbb{F})$ and the linear subspaces of $\mathbb{F}^k$.

Теорема 5. *Let* $\gcd(2mn, q) = 1$ *and* $n \mid (q-1)$. *For any group code* $C \subset \mathbb{F}_q Q_{m,n}$ *there exist subspaces* $V_{i,j,k} \subset F_i^{M(i,j)}$ *such that*

$$d(C) = \bigoplus_{i=1}^{r_1+s_1} \bigoplus_{j=1}^{r_2+s_2} \mathcal{C}_{i,j}, \quad \mathcal{C}_{i,j} = \tag{14}$$

$$= \begin{cases} \bigoplus_{k=1}^{4} \mathcal{I}(F_i, 1, V_{i,j,k}), & (1 \le i \le \xi(m)) \wedge (1 \le j \le r_2) \\ \mathcal{I}(F_i, 2, V_{i,j,1}) \oplus \mathcal{I}(F_i, 2, V_{i,j,2}), & (\xi(m)+1 \le i \le r_1) \wedge (1 \le j \le r_2) \\ \mathcal{I}(F_i, 2, V_{i,j,1}) \oplus \mathcal{I}(F_i, 2, V_{i,j,2}), & (r_1+1 \le i \le r_1+s_1) \wedge (1 \le j \le r_2) \\ \mathcal{I}(F_i, 2, V_{i,j,1}) \oplus \mathcal{I}(F_i, 2, V_{i,j,2}), & (1 \le i \le \xi(m)) \wedge (r_2+1 \le j \le r_2+s_2) \\ \mathcal{I}(F_i, 4, V_{i,j,1}), & (\xi(m)+1 \le i \le r_1) \wedge (r_2+1 \le j \le r_2+s_2) \\ \mathcal{I}(F_i, 4, V_{i,j,1}), & (r_1+1 \le i \le r_1+s_1) \wedge (r_2+1 \le j \le r_2+s_2) \end{cases} \tag{15}$$

Contrariwise, for any subspaces $V_{i,j,k} \subset F_i^{M(i,j)}$ *the set*

$$d^{-1}(\bigoplus_{i,j=1}^{r+s} \mathcal{C}_{i,j}),$$

with $\mathcal{C}_{i,j}$ *defined in (15), is a group code in* $\mathbb{F}_q Q_{m,n}$.

Доказательство. Consider (12) from theorem 2. Let

$$\Delta = \bigoplus_{i=1}^{r_1+s_1} \bigoplus_{j=1}^{r_2+s_2} \mathcal{A}_{i,j}.$$

Since $d : \mathbb{F}_q Q_{m,n} \to \Delta$ is an isomorphism, it follows that there is one–to–one correspondence between the codes in $\mathbb{F}_q Q_{m,n}$ and the left ideals of Δ. It is well–known that any left ideal of a direct sum of algebras is a direct sum of left ideals of summands. It is established that the ideals of summands are of the form $\mathcal{I}(F_i, t, V_{i,j,k})$. Hence the theorem is entirely proved. □

Consider a group code $C \subset \mathbb{F}_q Q_{m,n}$. We obliviously have the length of C equals to $4mn$ and the dimension can be evaluated by following formula:

$$\dim(C) = \sum_{i=1}^{r_1+s_1} \sum_{j=1}^{r_2+s_2} \dim(\mathcal{C}_{i,j}).$$

5. Conclusion

In the paper we considered the bidihedral group $Q_{m,n}$ and its group algebra $\mathbb{F}_q Q_{m,n}$. In the case $\gcd(mn, q) = 1$ and $n \mid q-1$ we obtained the structural theorem for $\mathbb{F}_q Q_{m,n}$. Then we used it to explicitly describe the Wedderburn decomposition of $\mathbb{F}_q Q_{m,n}$ in the case $\gcd(2mn, q) = 1$. Moreover, we constructed inverse isomorphisms ρ^{-1} and d^{-1}, which helped us to describe the central primitive idempotents of $\mathbb{F}_q Q_{m,n}$.

Finally, we used the Wedderburn decomposition d and d^{-1} to algebraically describe all codes in $\mathbb{F}_q Q_{m,n}$ in the case $\gcd(2mn, q) = 1$ and $n \mid (q-1)$. In addition, it is easy to find their length and dimension.

Further research is needed to find among these codes promising classes of error–correcting codes with good parameters and to construct decoders.

REFERENCES

1. Milies, C. P. & Sehgal, S. K. 2002, *An inroduction to Group Rings*, Kluwer Academic Publishers, Boston.
2. Lang, S., 2002, *Algebra*, Springer-Verlag, New York.
3. Kelarev, A. V. & Solé, P. 2001, "Error correcting codes as ideals in group rings", Contemp. Math., vol. 273, pp. 11–18.
4. Kouselo, E., Gonsales, S., Markov, V. T., Martines, K. & Nechaev, A. A. 2012, "Ideal representations of Reed-Solomon and Reed-Muller codes", *Algebra Logic*, vol. 51, no. 3, pp. 195–212.
5. Berman, S. D. 1967, "On the theory of group codes", *Cybernetics*, vol. 3, pp. 25–31.
6. Charpin, P. 1983, "The Extended Reed-Solomon Codes Considered as Ideals or a Modular Algebra" *North-Holland Mathematics Studies*, vol. 75, pp. 171–176.
7. Tumaykin, I. N. 2018, "Group Ring Ideals Related to Reed–Muller Codes", *J Math Sci*, vol. 233, pp. 745–748.
8. Zimmermann, K.-H. 1994, *Beitrage zur algebraischen Codierungstheorie mittels modularer Darstellungstheorie*, Bayreuther Mathematische Schriften Vol. 48, University of Bayreuth.
9. Assuena, S. & Milies, C. P 2019, "Good codes from metacyclic groups", Contemp. Math., vol. 727, pp. 39–49.
10. Olteanu, G. & Van Gelder, I. 2015, "Construction of minimal non-abelian left group codes", Des. Codes Cryptogr., vol. 75, no. 3, pp. 359–373.
11. Vedenev, K. V. & Deundyak, V. M 2018, "Codes in Dihedral Group Algebra" (in Russian), Modeling and Analysis of Information Systems, vol. 25, no. 2, pp. 232–245.
12. https://csrc.nist.gov/Projects/Post-Quantum-Cryptography/Post-Quantum-Cryptography-Standardization Last visited 1.07.2019.
13. Minder, L. & Shokrollahi, A. 2007, "Cryptanalysis of the Sidelnikov cryptosystem", Lecture Notes in Computer Science, vol. 4515, pp. 347–360.
14. Chizhov, I. I. & Borodin, M. A. 2014, "Effective attack on the McEliece cryptosystem based on Reed-Muller codes", Discrete Mathematics and Applications, vol. 24, issue 5, pp. 273–280.

15. Sidelnikov, V. M., & Shestakov, S. O. 1992, "On an encoding system constructed on the basis of generalized Reed–Solomon codes",Discrete Mathematics and Applications, vol. 2, issue 4, pp. 439–444.

16. Broche, O. & Del RiO, A. 2007, "Wedderburn decomposition of finite group algebras", Finite Fields and Their Applications, vol. 13(1), pp. 71–79.

17. Bakshi, G. K., Gupta, S., & Passi, I. B. S. 2013, "The structure of finite semisimple metacyclic group algebras", J. Ramanujan Math. Soc, vol. 28(2), pp. 141–158.

18. Martinez, F. B. 2015, "Structure of finite dihedral group algebra", Finite Fields and Their Applications, vol. 35, pp. 204–214.

19. Coxeter, H. S., & Moser, W. O. 2013, *Generators and relations for discrete groups*, Springer Science & Business Media.

20. Magnus, W., Karrass, A., & Solitar, D. 2004, *Combinatorial group theory: Presentations of groups in terms of generators and relations*, Courier Corporation.

21. Jacobson, N. 1956, *Structure of rings*, Vol. 37, American Mathematical Soc.

Получено 7.08.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 3.

УДК 512.623 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-124-133

Расширения Инабы полных полей характеристики 0 [1]

С. В. Востоков, И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова

Востоков Сергей Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей алгебры и теории чисел, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: s.vostokov@spbu.ru

Жуков Игорь Борисович — доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей алгебры и теории чисел, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: i.zhukov@spbu.ru

Иванова Ольга Юрьевна — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры высшей математики и механики № 1, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения (г. Санкт-Петербург).
e-mail: olgaiv80@mail.ru

Аннотация

В статье изучаются p-расширения полных дискретно нормированных полей смешанной характеристики, где p — характеристика поля вычетов рассматриваемого поля. Известно, что любое вполне разветвленное расширение Галуа степени p с немаксимальным скачком ветвления может быть задано уравнением Артина-Шрайера; при этом ограничение сверху на скачок ветвления соответствует ограничению снизу на нормирование правой части уравнения. Задача построения расширений с заданной группой Галуа произвольного конечного порядка не решена.

В работах Инабы рассматривались p-расширения полей характеристики p, заданные матричным уравнением $X^{(p)} = AX$, которое мы здесь называем уравнением Инабы. В этом уравнении $X^{(p)}$ обозначает матрицу, полученную возведением каждого элемента квадратной матрицы X в степень p, а — некоторая унипотентная матрица A над данным полем. Такое уравнение задает последовательность расширений полей, каждое из которых задано уравнением Артина-Шрайера. Было доказано, что любое уравнение Инабы задает расширение Галуа, и обратно, любое конечное p-расширение Галуа задается уравнением такого вида.

В настоящей работе для полей смешанной характеристики доказано, что расширение, задаваемое уравнением Инабы, является расширением Галуа, если нормирования элементов матрицы удовлетворяют некоторым оценкам снизу, т.е. если скачки промежуточных расширений степени p достаточно малы.

Данная конструкция может применяться при решении задачи погружения расширений полей. Уравнение Инабы задает последовательность расширений полей, полученную последовательным присоединением элементов диагоналей матрицы. Это означает, что, если расширение L/K задано уравнением Инабы, и матрица A выбрана так, что на диагоналях с большими номерами записаны нули, то можно получать расширения, содержащие L/K, заменяя нули другими элементами. В работе доказано, что любое нециклическое расширение степени p^2 с достаточно маленькими скачками можно погрузить в расширение с группой Галуа, изоморфной группе унипотентных матриц 3×3 над полем из p элементов.

[1] Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект 16-11-10200).

В конце статьи сформулирован ряд открытых вопросов, при исследовании которых, возможно, окажется полезной данная конструкция.

Ключевые слова: дискретно нормированное поле, скачок ветвления, уравнение Артина-Шрайера.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
С. В. Востоков, И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова. Расширения Инабы полных полей характеристики 0 // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 3, с. 124–133.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 3.

UDC 512.623 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-124-133

Inaba extension of complete field of characteristic 0 [2]

S. V. Vostokov, I. B. Zhukov, O. Yu. Ivanova

Vostokov Sergey Vladimirovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, head of the Department of higher algebra and number theory, Saint Petersburg State University (St. Petersburg).
e-mail: s.vostokov@spbu.ru
Zhukov Igor Borisovich — doctor of physical and mathematical Sciences, associate Professor, Professor of higher algebra and number theory, Saint Petersburg State University (St. Petersburg).
e-mail: i.zhukov@spbu.ru
Ivanova Olga Yurevna — candidate of physical and mathematical Sciences, senior lecturer of the Department of higher mathematics and mechanics No. 1, Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation (St. Petersburg).
e-mail: olgaiv80@mail.ru

Abstract

This article is devoted to p-extensions of complete discrete valuation fields of mixed characteristic where p is the characteristic of the residue field. It is known that any totally ramified Galois extension with a non-maximal ramification jump can be determined by an Artin-Schreier equation, and the upper bound for the ramification jump corresponds to the lower bound of the valuation in the right-hand side of the equation. The problem of construction of extensions with arbitrary Galois groups is not solved.

Inaba considered p-extensions of fields of characteristic p corresponding to a matrix equation $X^{(p)} = AX$ herein referred to as Inaba equation. Here $X^{(p)}$ is the result of raising each element of a square matrix X to power p, and A is a unipotent matrix over a given field. Such an equation determines a sequence of Artin-Schreier extensions. It was proved that any Inaba equation determines a Galois extension, and vice versa any finite Galois p-extension can be determined by an equation of this sort.

In this article for mixed characteristic fields we prove that an extension given by an Inaba extension is a Galois extension provided that the valuations of the elements of the matrix A satisfy certain lower bounds, i. e., the ramification jumps of intermediate extensions of degree p are sufficiently small.

[2]The study was supported by the Russian science Foundation (project 16-11-10200).

This construction can be used in studying the field embedding problem in Galois theory. It is proved that any non-cyclic Galois extension of degree p^2 with sufficiently small ramification jumps can be embedded into an extension with the Galois group isomorphic to the group of unipotent 3×3 matrices over $\mathbb{F}_p$.

The final part of the article contains a number of open questions that can be possibly approached by means of this construction.

Keywords: discrete valuation field, ramification jump, Artin-Schreier equation

Bibliography: 15 titles.

For citation:

S. V. Vostokov, I. B. Zhukov, O. Yu. Ivanova, 2019, "Inaba extensions of complete fields of characteristic 0" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 124–133.

1. Введение

В статье Инабы [4] было показано, что матричное уравнение вида $X^{(p)} = AX$, где $X^{(p)}$ обозначает матрицу, полученную из X возведением каждого элемента в степень p, а A — унипотентная квадратная матрица над полем K характеристики $p > 0$, задаёт p-расширение Галуа поля K, и что произвольное конечное p-расширение Галуа может быть задано уравнением такого вида.

В настоящей работе мы проверяем, что уравнение $X^{(p)} = AX$ также задаёт p-расширение Галуа, если K — полное дискретно нормированного поля характеристики 0 с произвольным полем вычетов характеристики $p > 0$, а нормирования элементов A удовлетворяют определённым оценкам снизу. Показано, как этот результат можно применить к решению задач погружения для расширений с малыми скачками ветвления.

В заключительном параграфе сформулирован ряд открытых вопросов, решать которые можно с использованием данной конструкции.

2. Обозначения и предварительные сведения

В данной статье через K обозначено полное дискретно нормированное поля характеристики 0 с произвольным полем вычетов характеристики $p > 0$, через Ω алгебраическое замыкание K, через v — нормирование на Ω (продолжение дискретного нормирования на K), нормализованное условием $v(p) = 1$, через e_K — абсолютный индекс ветвления поля K, т. е. $e_K = (v(K^*) : \mathbb{Z})$. Для строки $D = (D_1, \ldots, D_l)$ из элементов Ω считаем $v(D) = \min(v(D_1), \ldots, v(D_l))$.

Положим $\mathfrak{M} = \{x \in \Omega | v(x) > 0\}$.

Под унипотентной матрицей мы будем (как и в [4]) понимать верхнетреугольную квадратную матрицу, у которой все элементы на главной диагонали равны 1. Если $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ — такая матрица, то мы будем полагать $A[k, l] = a_{l,k+l}$ и

$$A[k] = (A[k, 1], \ldots, A[k, n-k])$$

для всех $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $1 \leqslant l \leqslant n-k$; при этом $A[k]$ будем называть k-й диагональю матрицы A. Через $A^{(p)}$ будем обозначать матрицу $(a_{ij}^p) \in M_n(K)$.

Через $\tilde{U}_n$ будет обозначаться множество унипотентных матриц из $M_n(\mathbb{Z}_p)$, все элементы которых — элементы Тайхмюллера, т. е. принадлежат $\mathcal{R} = \mu_{\sqrt{}^{-\infty}} \cup \{\prime\}$; через U_n — группа унипотентных матриц из $M_n(\mathbb{F}_p)$.

Лемма 1. *1. Пусть $a \in K$, $v(a) > -\frac{p}{p-1}$, $x \in \Omega$, $x^p - x = a$. Тогда $K(x)/K$ — расширение Галуа. Если $v(a) < 0$ и $p \nmid e_K v(a)$, то $K(x)/K$ вполне разветвлено и скачок ветвления $s(K(x)/K) = -e_K v(a)$.*

2. Если $a' \in K$, $v(a' - a) > 0$, то у многочлена $X^p - X - a'$ есть корень в $K(x)$.

Доказательство. Первое утверждение было доказано в [6] (см. изложение в [2, гл. III]); более простое доказательство с использованием формальных групп Любина-Тэйта получено в [10] (см. также [12]). Второе утверждение легко вытекает из первого с использованием леммы Гензеля. ■ □

3. Основной результат

Пусть n — натуральное число; α — рациональное число, меньшее $1/(n-1)$.

Пусть $A \in M_n(K)$ — унипотентная матрица такая, что $v(A[i,j]) \geqslant -i\alpha$ при всех j. Обозначим через X любую унипотентную матрицу из $M_n(\Omega)$ такую, что

$$X^{(p)} = AX. \tag{1}$$

Это матричное уравнение эквивалентно набору уравнений

$$X[i,j]^p - X[i,j] = A[1,j]X[i-1,j+1] + \cdots + A[i-1,j]X[1,i+j-1] + A[i,j], \tag{2}$$

откуда индукцией по i мы получаем существование всех $X[i,j] \in \Omega$.

Положим $K_l = K(X[1], \ldots, X[l])$, $l = 0, \ldots, n$.

Теорема 1. *Пусть X — какое-либо решение матричного уравнения (1).*

1. Имеем $v(X[i]) \geqslant -\frac{i\alpha}{p}$ при всех i.

2. Для любого $\sigma \in \mathrm{Gal}(K)$ найдётся единственная матрица $\Lambda_\sigma \in \tilde{U}_n$ такая, что

$$X^\sigma = X\Lambda_\sigma + \Delta_\sigma, \quad \Delta_\sigma \in M_n(\mathfrak{M}).$$

3. При этом $v(\Delta_\sigma[i]) > 1 - i\alpha$ при всех i.

4. K_i/K — расширение Галуа при всех i.

Доказательство. Основная идея состоит в том, что мы будем строить матрицу Λ_σ последовательно от 1-й до $(n-1)$-й диагонали, проверяя при этом выполнение всех условий применительно к $X[i]$, $\Lambda_\sigma[i]$ и $\Delta_\sigma[i]$ для i от 1 до $n-1$.

Будем обозначать через $\Lambda_\sigma^{[i]}$ матрицу из $\tilde{U}_n$ такую, что

$$\Lambda_\sigma^{[i]}[j] = \begin{cases} \Lambda_\sigma[j], & j \leqslant i, \\ 0, & j > i. \end{cases}$$

Эта матрица определена, как только построены элементы Λ_σ на диагоналях с 1-й по i-ю. Нетрудно видеть, что утверждение 2 теоремы сводится к выполнению следующего условия при всех i.

2'. Для любого $\sigma \in \mathrm{Gal}(K)$ найдётся единственная строка $\Lambda_\sigma[i]$ из элементов $\mathcal{R}$ такая, что

$$X^\sigma[i] = X\Lambda_\sigma^{[i]}[i] + \Delta_\sigma[i],$$

где $v(\Delta_\sigma[i,j]) > 0$ при всех $j = 1, \ldots, n-i$.

Мы докажем индукцией по i, что выполняются утверждения 1, 2', 3 и 4.

Из (2) имеем

$$
\begin{aligned}
v(X[i,j] &\geqslant \frac{1}{p}\min(v(A[1,j]X[i-1,j+1]),\ldots,\\
&\quad v(A[i-1,j]X[1,i+j-1]), v(A[i,j]))\\
&\geqslant -\frac{1}{p}\max(\alpha+\frac{i-1}{p}\alpha, 2\alpha+\frac{i-1}{p}\alpha,\ldots,(i-1)\alpha+\frac{1}{p}\alpha, i\alpha)\\
&= -\frac{i}{p}\alpha.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Далее, зафиксируем $\sigma\in\mathrm{Gal}(K)$ и положим

$$Y = X^\sigma - X\cdot\Lambda_\sigma^{[i-1]}.$$

Поскольку $(X^\sigma)^{(p)} = AX^\sigma$, имеем

$$
\begin{aligned}
(Y^{(p)}-Y)[i] &= ((X^\sigma)^{(p)}-X^\sigma)[i] - ((X\Lambda_\sigma^{[i-1]})^{(p)} - X\Lambda_\sigma^{[i-1]})[i]\\
&\quad + (Y^{(p)} - (X^\sigma)^{(p)} + (X\Lambda_\sigma^{[i-1]})^{(p)})[i]\\
&= D_1 + D_2 + D_3,
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
D_1 &= ((A-E_n)X^\sigma)[i] - ((X^{(p)}-X)\Lambda_\sigma^{[i-1]})[i],\\
D_2 &= (X^{(p)}\Lambda_\sigma^{[i-1]} - (X\Lambda_\sigma^{[i-1]})^{(p)})[i],\\
D_3 &= (Y^{(p)} - (X^\sigma)^{(p)} + (X\Lambda_\sigma^{[i-1]})^{(p)})[i];
\end{aligned}
$$

здесь E_n — единичная матрица.

Оценим снизу нормирования всех элементов строк D_1, D_2 и D_3; в частности, покажем, что эти нормирования положительны.

Поскольку $(C\Lambda_\sigma^{[i-1]})[i] = (C\Lambda_\sigma)[i]$ для любой строго верхнетреугольной матрицы C, в частности, для $C = A - E_n$ и для $C = X^{(p)} - X$, получаем

$$D_1 = ((A-E_n)(X\Lambda_\sigma^{[i-1]}+\Delta_\sigma))[i] - ((X^{(p)}-X)\Lambda_\sigma^{[i-1]})[i] = ((A-E_n)\Delta_\sigma)[i].$$

(Отметим, что $\Delta_\sigma[1],\ldots,\Delta_\sigma[i-1]$ уже определены.)

Отсюда

$$
\begin{aligned}
v(D_1) &\geqslant \min(v(A[1]) + v(\Delta_\sigma[i-1]),\ldots, v(A[i-1]) + v(\Delta_\sigma[1]))\\
&> \min(-\alpha+1-(i-1)\alpha,\ldots,-i\alpha+1-\alpha) = 1 - i\alpha \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Для оценки $v(D_2)$ и $v(D_3)$ воспользуемся тем, что

$$v((a+b)^p - a^p - b^p) \geqslant 1 + p\min(v(a), v(b)).$$

Это даёт

$$\min(v(D_2), v(D_3)) \geqslant 1 + p\min(v(X[1]),\ldots,v(X[i])) \geqslant 1 - i\alpha.$$

Таким образом, $v((Y^{(p)}-Y)[i]) \geqslant 1 - i\alpha \geqslant 0$. Отсюда получаем, что $v(Y[i]) \geqslant 0$, и $v(Y[i,j]^p - Y[i,j]) > 0$ $(j = 1,\ldots,n-i)$ что означает $Y[i,j] \equiv \Lambda_j \bmod \mathfrak{M}$ для некоторого $\Lambda_j \in \mathcal{R}$.

Пусть $\Delta_j = Y[i,j] - \Lambda_j$ и $\Delta = (\Delta_1,\ldots,\Delta_{n-i})$. Тогда имеем

$$(\Lambda_j + \Delta_j)^p - (\Lambda_j + \Delta_j) = (Y^{(p)} - Y)[i,j],$$

откуда $v(\Delta) \geqslant 1 - i\alpha$.

Теперь положим $\Lambda_\sigma[i] = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-i})$. Получаем

$$\begin{aligned}(X^\sigma - X\Lambda_\sigma)[i] &= (X^\sigma - X\Lambda_\sigma^{[i]})[i] \\ &= (X^\sigma - X\Lambda_\sigma^{[i-1]})[i] + (X(\Lambda_\sigma^{[i-1]} - \Lambda_\sigma^{[i]}))[i] \\ &= Y[i] - \Lambda_\sigma[i] = \Delta.\end{aligned}$$

Это доказывает выполнение условий 2' и 3 для данного i. Осталось проверить условие 4.

Для этого заметим, что $K_i = K_{i-1}(X[i])$, при этом элементы $X[i]$ служат корнями уравнений Артина-Шрайера (2) над K_{i-1}, и нормирование правой части каждого уравнения не может быть меньше $-\frac{i}{p} > -1$ (ср. (3)). Такие уравнения Артина-Шрайера задают расширения Галуа (см. лемму 1), и тем самым K_i нормально над K_{i-1}. Чтобы доказать, что K_i нормально над K достаточно проверить, что при каждом j и каждом $\sigma \in \mathrm{Gal}(K)$ выполнено $X[i,j]^\sigma \in K_i$.

Из (1) и условия 2' имеем

$$((X^\sigma)^{(p)} - X^\sigma)[i] = ((A - E_n)X^\sigma)[i] = ((A - E_n)X\Lambda_\sigma + (A - E_n)\Delta_\sigma)[i].$$

При этом из (1) также имеем

$$((X\Lambda_\sigma)^{(p)} - X\Lambda_\sigma)[i] = ((A - E_n)X\Lambda_\sigma)[i],$$

то есть при каждом j уравнение Артина-Шрайера с правой частью, равной $((A-E_n)X\Lambda_\sigma)[i,j]$, имеет корень в K_i. С другой стороны, из $v(A[j]) \geqslant -j\alpha$ и $v(\Delta_\sigma)[j] > 1 - j\alpha$ $(j = 1, \ldots, i-1)$ следует

$$v(((A - E_n)\Delta_\sigma)[i]) > 1 - i\alpha > 0.$$

Тогда по лемме 1 уравнение с правой частью $((A - E_n)X\Lambda_\sigma + (A - E_n)\Delta_\sigma)[i,j]$ также имеет корень (а тем самым и p различных корней) в K_i, откуда $X[i,j]^\sigma \in K_i$. ■

□

Данная конструкция позволяет доказывать разрешимость определённых задач погружения для p-расширений полных дискретно нормированных полей, имеющих достаточно малые скачки ветвления. Погружение циклических p-расширений в циклические изучалось в [7]; явное построение циклических расширений степени p^2 с малыми скачками ветвления было получено в [12] (см. также [9], [8]) и в [14]). Рассмотрим простейший случай погружения абелева расширения в неабелево, а именно в расширение степени p^3 с группой U_3.

Следствие 1. *Пусть L/K — вполне разветвлённое расширение с группой Галуа, изоморфной $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$, и его скачки ветвления в верхней нумерации не превосходят $e/2$, где $e = e_K > 3$. Тогда L/K можно погрузить в расширение с группой Галуа, изоморфной U_3.*

Доказательство. Расширение L/K представляет собой композит двух циклических расширений, скачки ветвления которых меньше $e/2$. Ввиду леммы 1 имеем $L = K(x_1, x_2)$, где $x_i^p - x_i = a_i \in K$, $v(a_i) > -1/2$ $(i = 1, 2)$. Выберем $b \in K$ такое, что $v(b) > -1$, положим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & b \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и построим расширения K_1/K и K_2/K как в теореме. Тогда $K_1 = L$, $K_2 = L(y_b)$, где

$$y_b^p - y_b = a_1x_2 + b.$$

Заметим, что сопоставление $\sigma \mapsto \Lambda_\sigma \in \tilde{U}_3$ с последующей редукцией $\bmod \mathfrak{M}$ задаёт вложение $\mathrm{Gal}(K_2/K)$ в U_3. Это вложение не будет изоморфизмом только если $|\,\mathrm{Gal}(K_2/K)| < p^3$, т. е. если $y_b \in L$. Таким образом, если утверждение следствия не выполняется, то должно быть выполнено $y_b \in L$ при всех b.

В духе [12], обозначим через $\mathfrak{M}_L$ (соответственно $\mathfrak{M}_K$) идеал нормирования поля $L' = L(\zeta_p)$ (соответственно $K' = K(\zeta_p)$) со сложением $+_0$, определяемым формальной группой Любина-Тэйта (см. [1, 15]) G_0 с $[p](X) = pX + X^p$, через w — элемент K' с $w^{p-1} = -p$. Тогда из $wy_b \in L'$ следует $w^p(a_1x_2 + b) \in [p]\mathfrak{M}_L$. Поскольку $\min(v(w^p(a_1x_2+b)), v(w^p b)) > v(w^p) - 1 = \frac{1}{p-1}$, а

$$G_0(X,Y) = X + Y + \text{члены степени } \geqslant p,$$

то отсюда следует и $w^p a_1 x_2 +_0 w^p b \in [p]\mathfrak{M}_L$. Это выполняется, в частности, для $b = 0$, и вычитанием (в формальном модуле $\mathfrak{M}_L$) получаем $w^p b \in [p]\mathfrak{M}_L$ для всех b. По теории Куммера имеем $w^p b \in \mathfrak{n}$, где подмодуль $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{M}_K$ порождён $w^p a_1$, $w^p a_2$ и $[p]\mathfrak{M}_K$. Однако $w^p b \in \mathfrak{n}$ не может выполняться, если выбрать b с $v(b) < \min(v(a_1), v(a_2))$ и $p \nmid ev(b)$. Последнее легко сделать, так как в $[\frac{e}{2}, e)$ найдётся целое число, не кратное p. ■ □

4. Заключение

Возможность задавать различные p-расширения Галуа поля K при помощи уравнения Инабы (1) делает актуальными новые вопросы; возможно, читатели этого текста присоединятся к поиску ответа на них.

1. Мы знаем, что любое расширение Галуа L/K степени p при условии $s(L/K) < \frac{pe_K}{p-1}$ может быть задано уравнением Артина-Шрайера (см. [2, Ch. III]). Можно ли утверждать, что любое конечное p-расширение Галуа с достаточно малыми скачками ветвлениями может быть задано при помощи уравнения Инабы? Более конкретно: верно ли, что для любой конечной p-группы G найдётся $\varepsilon = \varepsilon_G > 0$ такое, что для любого K любое L/K с $\mathrm{Gal}(L/K) \cong G$ и глубиной ветвления $< \varepsilon$ (или максимальным скачком $< \varepsilon e_K$) задаётся уравнением Инабы?

2. Можно ли ослабить условия $\alpha < 1/(n-1)$ и (или) $v(A[i,j]) \geqslant -i\alpha$? Можно ли модифицировать уравнение Инабы при пограничных значениях α так, чтобы оно задавало более широкий класс расширений Галуа (например, позволяло бы строить расширения Галуа K_n/K, у которых максимальные скачки ветвления «цоколя» K_1/K близки к $e_K/(n-1)$)?

3. Каков эффективный способ задавать *циклические* p-расширения с малой глубиной ветвления при помощи уравнения Инабы? В частности, какие матрицы A могут быть сопоставлены векторам Витта из [12] (или модифицированным векторам Витта из [14]), задающим циклические расширения степени p^2?

4. Можем ли мы задать более широкий класс расширений Галуа поля K (не только p-расширения), используя уравнения (1) с не обязательно унипотентной матрицей A (как это сделано в характеристике p в работе [5])?

5. В работе [12] было показано, что любое вполне разветвлённое циклическое расширение L/K со скачком ветвления, меньшим $e_K/(p-1)$, может быть вложено в циклическое расширение степени p^2. Может ли этот результат быть обобщён на произвольные конечные p-группы? А именно, рассмотрим задачу погружения $(G, H, L/K)$, где G — конечная p-группа, H — нормальная подгруппа, $\mathrm{Gal}(L/K) \cong G/H$. Верно ли, что для некоторого $\theta > 0$ (зависящего от G и H) эта задача разрешима для любых K и L/K с глубиной ветвления $d(L/K) < \theta$? Каково максимальное θ при заданных G и H?

6. Для циклического расширения L/K степени p^2 с промежуточным полем M глубины ветвления $d_1 = d(M/K)$ и $d_2 = d(L/M)$ связаны неравенством Хиодо

$$d_2 \geqslant \min((p-1+p^{-1})d_1, 1 - p^{-1} + p^{-1}d_1),$$

см. [3, Lemma (4-1)] или (без использования теории полей классов) [13, §1]. Можно ли обобщить это результат на другие задачи погружения $(G,\, H,\, L/K)$ с $H \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

7. Положительный ответ на предыдущий вопрос позволил бы предположить, что на «противоположном полюсе», при скачках ветвления близких к максимально возможным, задача погружения достаточного общего вида не имеет решения. Иначе говоря, можно ли утверждать, что для (некоторых) заданных G и H найдётся Θ такое, что *никакая* задача погружения вида $(G,\, H,\, L/K)$ при $d(L/K) > \Theta$ не имеет решения (хотя расширения с $\mathrm{Gal}(L/K) \cong G/H$ и $d(L/K) > \Theta$ существуют). Например, можно ли утверждать, что все «почти максимально разветвлённые» расширения (см. [11]) абелевы?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cassels, J. W. S. Frohlich, A. Algebraic Number Theory / J. W. S. Cassels, A. Frohlich // Academiv Press, London and New-York, 1967.

2. Fesenko, I. B., Vostokov, S. V. Local fields and their extensions. A constructive approach/ I. B. Fesenko and S. V. Vostokov // Second edition, AMS, Providence, RI, 2002.

3. Hyodo, O. Wild ramification in the imperfect residue field case / O. Hyodo // Adv. Stud. Pure Math. 1987. Vol. 12, P. 287–314.

4. Inaba, E. On matrix equations for Galois extensions of fields with characteristic p / E. Inaba // Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 1961. Vol. 12, P. 26–36.

5. Inaba, E. On generalized Artin-Schreier equations / E. Inaba // Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 1962. Vol. 13, № 2. P. 1–13.

6. MacKenzie, R. E., Whaples, G. Artin–Schreier equations in characteristic zero / R. E. MacKenzie, G. Whaples // Amer. J. Math. 1956. Vol. 78. P. 473–485.

7. Miki, H. On Z_p-extensions of complete p-adic power series fields and function fields / H. Miki // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect 1A. 1974. Vol. 21. P. 377–393.

8. Xiao, L., Zhukov, I. Ramification in the imperfect residue field case, approaches and questions / L. Xiao, I. Zhukov // Алгебра и анализ. 2014. Т. 26, № 5. С. 695–740.

9. Zhukov, I. Explicit abelian extensions of complete discrete valuation fields / I. Zhukov // in book: Fesenko, I., Kurihara, M. (eds.) Invitation to Higher Local Fields. Geometry and Topology Monographs, 2000. Vol. 3. P. 117–122.

10. Востоков, С. В., Жуков, И. Б., Фесенко И. Б. К теории многомерных локальных полей. Методы и конструкции / С. В. Востоков, И. Б. Жуков, И. Б. Фесенко // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2, № 4. С. 91–118.

11. Востоков, С. В., Жуков, И. Б., Пак, Г. К. Расширения с почти максимальной глубиной ветвления / С. В. Востоков, И. Б. Жуков, Г. К. Пак // Записки научных семинаров С.-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ). 1999. Т. 265. С. 77–109.

12. Востоков, С. В., Жуков И. Б. Некоторые подходы к построению абелевых расширений для p-адических полей / С. В. Востоков, И. Б. Жуков // Труды С.-Петерб. мат. общ. 1995. Т. 3. С. 194–214.

13. Жуков, И. Б. Структурная теорема для полных полей / И. Б. Жуков // Тр. С.-Петербург. мат. общ-ва. 1995. Т. 3. С. 194–214.

14. Жуков, И. Б., Лысенко, Е. Ф. Построение циклического расширения степени p^2 полного поля / И. Б. Жуков, Е. Ф. Лысенко // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2017. Т. 455. С. 52–66.

15. Мадунц, А. И. Формальные группы Любина–Тейта над кольцом целых многомерного локального поля / А. И. Мадунц // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2001. Т. 281. С. 221–226.

REFERENCES

1. Cassels, J. W. S. Frohlich, A., 1967, "*Algebraic Number Theory*", Academic Press, London and New-York.

2. Fesenko, I. B., Vostokov, S. V., Zhukov I. B., 1990, "On the theory of multidimensional local fields. Methods and constructions", *Algebra i Analiz* vol. 2, № 4. pp. 91–118.

3. Fesenko I. B., Vostokov, S. V., 2002, "*Local fields and their extensions. A constructive approach*", Second edition, AMS, Providence, RI.

4. Hyodo, O., 1987, Wild ramification in the imperfect residue field case", *Adv. Stud. Pure Math.*, vol. 12, pp. 287–314.

5. Inaba, E., 1961, "On matrix equations for Galois extensions of fields with characteristic p", *Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.*, vol. 12, pp. 26-36.

6. Inaba, E., 1962, "On generalized Artin-Schreier equations", *Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.*, vol. 13, № 2, pp. 1–13.

7. Zhukov, I. B., Lysenko, E.F., 2018, "Construction of cyclic extensions of degree p^2 for a complete field", *J. Math. Sci.*, vol. 234(2), pp. 148–157.

8. MacKenzie, R. E., Whaples, G., 1956, "Artin–Schreier equations in characteristic zero", *Amer. J. Math.*, vol. 78, pp. 473–485.

9. Madunts, A. I., 2004, "Lubin–Tate Formal Groups over the Ring of Integers of a Multidimensional Local Field", *J. Math. Sci.*, vol. 120(4) pp. 1609–1612.

10. Miki, H., 1974, "On Z_p-extensions of complete p-adic power series fields and function fields", *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect 1A*, vol. 21, pp. 377–393.

11. Vostokov, S. V., Zhukov, I. B., Pak, G. K., 1999, "Extensions with almost maximal depth of ramification", *J. Math. Sci.*, vol. 112(3), pp. 4285–4302.

12. Vostokov, S. V., Zhukov, I. B., 1995, "Some approaches to the construction of abelian extensions for $\mathfrak{p}$-adic fields", *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society*, Vol. III, 157–174, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 166, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

13. Xiao, L., Zhukov, I., 2014, "Ramification in the imperfect residue field case, approaches and questions", *Algebra i Analiz*, vol. 26, № 5. pp. 695–740.

14. Zhukov, I. B., 1995, "Structure theorems for complete fields", *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society*, Vol. III, 175–192, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 166, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

15. Zhukov, I., 2000, “Explicit abelian extensions of complete discrete valuation fields”, in book: Fesenko, I., Kurihara, M. (eds.) *Invitation to Higher Local Fields. Geometry and Topology Monographs*, vol. 3, pp. 117–122.

Получено 4.10.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 536.2+539.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-3-134-142

О роли двух термодинамических постулатов в феноменологическом построении механики сплошной среды[1]

Д. В. Георгиевский

Георгиевский Дмитрий Владимирович — профессор РАН, заведующий кафедрой теории упругости механико-математического факультета, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Аннотация

Обсуждаются единая интегральная форма записи пяти постулатов механики сплошной среды, возможная непротиворечивая аксиоматика феноменологического построения четвёртого и пятого из них — законов об изменении внутренней энергии и энтропии, а также роль закона Фурье или его гиперболического обобщения в определении температуры. Показывается, что в отличие от статистического и молекулярного подходов в данном случае внутренняя энергия и энтропия индивидуального (жидкого) объёма могут быть полностью определены посредством задания своих источника, потока через границу и производства. Тем самым два термодинамических постулата выполняют роль определений. Обсуждаются энергетические сопряжённые пары величин различной физической природы и возможности расширения таблицы постулатов.

Ключевые слова: термодинамика, сплошная среда, постулат, источник величины в объёме, поток через поверхность, производство величины, внутренняя энергия, теплопередача, энтропия.

Библиография: 15 названий

Для цитирования:
Д. В. Георгиевский. О роли двух термодинамических постулатов в феноменологическом построении механики сплошной среды // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 3, с. 134–142.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 3.

UDC 536.2+539.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-3-134-142

On the role of two thermodynamic postulates in the phenomenological construction of continuum mechanics[2]

D. V. Georgievskii

Georgievskii Dmitry Vladimirovich — RAN professor, Head of the theory of elasticity chair of the mechanics-mathematical department, Lomonosov Moscow state University (Moscow).
e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 18-29-10085мк, 19-01-00016а).
[2]The work was supported by RFBR (grants 18-29-10085mk, 19-01-00016a).

Abstract

A general integral form of representation of five postulates in continuum mechanics, possible noncontradictory axiomatics of phenomenological construction of the fourth and fifth of them (namely, the laws of change of the internal energy and entropy) as well as the role of the Fourier law or its hyperbolic generalization in definition of temperature, are discussed. It is shown that in contrast to the statistical and molecular approaches, in this case, the internal energy and entropy of an individual (liquid) volume can be completely defined by specifying its source, flow through the surface, and production. Thus two thermodynamic postulates serve as definitions. The energy conjugate pairs of quantities of different physical nature and the possibility of expanding the table of postulates are discussed.

Keywords: thermodynamics, continuum, postulate, source of quantity in the volume, flow of quantity through the surface, production of quantity, internal energy, heat transfer, entropy.

Bibliography: 15 titles

For citation:
D. V. Georgievskii, 2019, "On the role of two thermodynamic postulates in the phenomenological construction of continuum mechanics"// Chebyshevskiin sbornik, vol. 20, No. 3, pp. 134–142.

1. Введение

Шестая проблема Гильберта, сформулированная на II Международном конгрессе математиков в Париже в 1900 году, связана с вопросами строгой и внутренне корректной аксиоматизации физики. Степени глобальной решённости данной проблемы к концу XX века посвящены обширные дискуссии в естсетвенно-научной литературе (см., например, [1]). Важной подпроблемой, для анализа которой уже можно было бы привлечь мощный математический аппарат, является создание строгой теории предельного перехода от процессов, описывающихся на квантовом уровне, к процессам в континууме. На это можно посмотреть как на исключительно математическую проблему [2–4], так и на вопрос об аксимоматизации механики сплошной среды (МСС), в феноменологическом трактовании которой, вообще говоря, отсутствуют понятия атомов, молекул и т. д. Значительный вклад в этом направлении внесли создатели классических и общепризнанных в мире курсов МСС — представители московской школы Алексей Антонович Ильюшин (1911 — 1998) и Леонид Иванович Седов (1907 — 1999), ленинградской школы Анатолий Исакович Лурье (1901 — 1980) и Валентин Валентинович Новожилов (1910 — 1987), а также Клиффорд Амброуз Трусделл (1919 — 2000) и Поль Жермен (1920 — 2009).

2. Единая форма записи постулатов

Как известно, классическая механика сплошной среды аксиоматически базируется на пяти феноменологических постулатах, имеющих единую интегральную форму записи в виде законов изменения (сохранения) тех или иных термомеханических величин $A_V(t)$:

$$\frac{dA_V}{dt} = B_V + C_\Sigma + D_V \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered} A_V(t) = \int\limits_V \rho a(\mathbf{x},t)\,dV, \quad B_V(t) = \int\limits_V \rho b(\mathbf{x},t)\,dV, \\ C_\Sigma(t) = \int\limits_\Sigma c(\mathbf{y},t)\cdot \mathbf{n}(\mathbf{y},t)\,d\Sigma, \quad D_V(t) = \int\limits_V d(\mathbf{x},t)\,dV \end{gathered} \tag{2.2}$$

	a	b	$c\cdot\mathbf{n}$	d
I	1	0	0	0
II	$\mathbf{v}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{P}^{(\mathbf{n})}$	0
III	$\mathbf{x}\times\mathbf{v}$	$\mathbf{x}\times\mathbf{F}$	$\mathbf{y}\times\mathbf{P}^{(\mathbf{n})}$	0
*	$\dfrac{\lvert\mathbf{v}\rvert^2}{2}$	$\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$	$\mathbf{P}^{(\mathbf{n})}\cdot\mathbf{v}$	$-\underset{\sim}{\sigma}:\underset{\sim}{v}$
IV	$\dfrac{\lvert\mathbf{v}\rvert^2}{2}+u$	$\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}+q$	$\mathbf{P}^{(\mathbf{n})}\cdot\mathbf{v}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}$	0
V	s	$\dfrac{q}{T}$	$-\dfrac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}}{T}$	$\dfrac{w^*}{T}-\dfrac{\mathbf{q}\cdot\operatorname{grad}T}{T^2}$

где $\rho(\mathbf{x},t)$ — скалярное поле объёмной плотности в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t; $a(\mathbf{x},t)$ — массовая плотность величины $A_V(t)$ в объёме V; $b(\mathbf{x},t)$ — массовая плотность величины $B_V(t)$, являющейся источником A_V в V; $c(\mathbf{y},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{y},t)$ — поверхностная плотность величины $C_\Sigma(t)$ – потока A_V через границу Σ объёма V, в каждой точке которой определена единичная внешняя нормаль $\mathbf{n}$, $\mathbf{y}\in\Sigma$; $d(\mathbf{x},t)$ — объёмная плотность величины $D_V(t)$ – производства A_V в V. В (2.2) V — произвольный конечный объём среды, в любой момент состоящий из одних и тех же лагранжевых частиц (движущийся объём неизменной массы [5; с. 52], индивидуальный объём [6; с. 124], жидкий объём [7; с. 69], подвижный лагранжев объём [8; с. 142]).

Поле $a(\mathbf{x},t)$ может быть скалярным либо векторным, от этого зависит тензорная природа других величин, входящих в (2.1) и (2.2): $\operatorname{rang}a=\operatorname{rang}b=\operatorname{rang}c-1=\operatorname{rang}d$.

В таблице для каждого из пяти постулатов I – V указано, чему соответствуют введённые в (2.1) и (2.2) обозначения. Здесь $\mathbf{v}$ — скорость частиц; $\underset{\sim}{v}$ — симметричный тензор скоростей деформаций; $\underset{\sim}{\sigma}$ — симметричный тензор напряжений Коши; $\mathbf{F}$ — массовые силы; $\mathbf{P}^{(\mathbf{n})}=\underset{\sim}{\sigma}\cdot\mathbf{n}$ — поверхностные силы на Σ; q — массовая плотность источников тепла в V; $\mathbf{q}$ — вектор теплового потока; u и s — массовые плотности внутренней энергии и энтропии в V; w^* — объёмная плотность рассеивания в V; T — абсолютная температура.

Пользуясь тем, что объём V внутри среды произволен, из интегрального равенства (2.1) нетрудно вывести дифференциальное следствие

$$\rho\,\frac{da}{dt}=\rho b+\operatorname{Div}c+d,\qquad \mathbf{x}\in V \tag{2.3}$$

Число локальных уравнений (2.3) совпадает с числом интегральных равенств (2.1).

3. Постулат IV. Закон об изменении внутренней энергии

Первые три постулата I – III — закон сохранения массы и законы изменения количества движения и момента количества движения — оперируют изотермическими величинами. Четвёртая строка таблицы, помеченная звёздочкой, соответствует интегральному утверждению, называемому теоремой о кинетической энергии, или теоремой живых сил. Обычно она записывается в конечных дифференциалах:

$$dK=\delta A^{(e)}+\delta A^{(i)} \tag{3.1}$$

$$\begin{gathered}K=\frac{1}{2}\int\limits_V\rho|\mathbf{v}|^2\,dV,\qquad \delta A^{(i)}=-\int\limits_V\underset{\sim}{\sigma}:d\underset{\sim}{\varepsilon}\,dV\\ \delta A^{(e)}=\int\limits_V\rho\mathbf{F}\cdot d\mathbf{u}\,dV+\int\limits_\Sigma\mathbf{P}^{(\mathbf{n})}\cdot d\mathbf{u}\,d\Sigma\end{gathered} \tag{3.2}$$

где K — кинетическая энергия объёма V; $\delta A^{(e)}$ — сумма изменений работ массовых и поверхностных сил на действительных перемещениях $d\mathbf{u}$; $\delta A^{(i)}$ — изменение работы внутренних сил. Если внешние нагрузки $\mathbf{F}$ и $\mathbf{P}^{(\mathbf{n})}$ обладают скалярными потенциалами по $\mathbf{u}$, а также для данной среды существует скалярный потенциал напряжений $\underset{\sim}{\sigma}$ по деформациям $\underset{\sim}{\varepsilon}$, то дифференциальное соотношение (3.1) допускает первый интеграл, называемый интегралом энергии.

Теорема о кинетической энергии (3.1) не является независимым постулатом (поэтому ей не присвоен отдельный номер в таблице), а представляет собой следствие постулатов I–III. Но она играет важную роль в энергетическом переходе [9] к формулировке неизотермического постулата IV — закона об изменении внутренней энергии. При таком переходе утверждается, что в изменении напряжённо-деформированного состояния среды могут участвовать тепловые эффекты, определяемые массовой плотностью $q(\mathbf{x},t)$ источников тепла внутри объёма V и потоком тепла $(\mathbf{q}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{y},t)$ через границу Σ. Вектор теплового потока определён, вообще говоря, во всём объёме V.

Тогда строка IV таблицы образуется расширением строки $*$ следующим образом. Положим, что массовая плотность полной энергии, сосредоточенной в объёме V, складывается из слагаемого $|\mathbf{v}|^2/2$, уже присутствующего в строке $*$, и некоторой функции $u(\mathbf{x},t)$, которой придадим смысл массовой плотности внутренней энергии. Потребуем от этой функции, чтобы: a) её источником в V были лишь источники тепла $q(\mathbf{x},t)$; b) её потоком через Σ был лишь тепловой поток $-(\mathbf{q}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{y},t)$ внутрь Σ; c) производство полной энергии при этом было нулевым.

В силу линейности соотношения (2.1) по a, b, c и d строки таблицы допускают линейные комбинации. Беря разность строк IV и $*$, получим локальное равенство (2.3) для функции u:

$$\rho\,\frac{du}{dt} = \rho q - \operatorname{div}\mathbf{q} + \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{v}, \quad \mathbf{x}\in V \tag{3.3}$$

известное как локальное уравнение энергии. Его интегральный аналог, записанный в конечных дифференциалах:

$$dU = \delta Q - \delta A^{(i)} \tag{3.4}$$

$$U = \int\limits_V \rho u\,dV, \quad \delta Q = dt\biggl(\int\limits_V \rho q\,dV - \int\limits_\Sigma \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\,d\Sigma\biggr) \tag{3.5}$$

является одной из формулировок первого закона термодинамики.

Таким образом, с точки зрения аксиоматического построения строку IV естественно считать определением той новой функции, а именно массовой плотности $u(\mathbf{x},t)$ внутренней энергии, которая появилась в ней по сравнению со строкой $*$. Эта функция как один из четырёх возможных термодинамических потенциалов (все они связаны друг с другом преобразованиями Лежандра) играет большую роль в теории определяющих соотношений термомеханики сплошной среды.

Можно предложить и другой, “зеркальный”, вариант аксиоматики, т. е. расширения строки $*$ таблицы до строки IV, при котором последняя не будет определением внутренней энергии. Для этого надо отказаться от постулирования физического смысла тепловых величин $q(\mathbf{x},t)$ и $\mathbf{q}(\mathbf{x},t)$, а положить лишь, что полная энергия, что вполне разумно, должна иметь нулевое производство в любом индивидуальном (жидком) объёме. Достичь этого можно, добавив к $|\mathbf{v}|^2/2$ некоторую функцию $u(\mathbf{x},t)$ с отличным от нуля производством, такую чтобы в последнем столбце строки IV стоял нуль. Тогда источник этой величины в объёме V и её поток через границу Σ интерпретируются как функции $q(\mathbf{x},t)$ и $-(\mathbf{q}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{y},t)$, о которых шла речь выше. При таком подходе строка IV превращается в определния мощности источников тепла и вектора теплового потока. Данный путь представляется альтернативным, но логически более громоздким, поскольку здесь надо устанавливать единственность[3] выбора функции u [10].

[3] Действительно, заведомо не исключено существование смежных внутренних энергий с тем же самым

4. Постулат V. Закон об изменении энтропии

Физические размерности всех величин в таблице кроме строки V выражаются в базисе $\{\mathrm{M}, \mathrm{L}, \mathrm{T}\}$. Сюда входят и феноменологические функции q и $\mathbf{q}$, описывающие чисто тепловые эффекты, но имеющие размерности $\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-3}$ и MT^{-3} соответственно. Остановимся теперь на вариантах аксиоматики перехода от всех предыдущих строк таблицы к строке V, требующего привлечения величин с размерностями, не укладывающимися в базисе $\{\mathrm{M}, \mathrm{L}, \mathrm{T}\}$.

Положим, что вектор теплового потока для каждой выбранной среды полностью определяется заданием в V скалярного поля некоторой феноменологической функции $T(\mathbf{x}, t)$, а именно, зависит только от градиента этой функции по $\mathbf{x}$. При этом величине $T(\mathbf{x}, t)$, называемой абсолютной температурой, нельзя дать кинематически-силовое толкование в отличие, например, от самого вектора $\mathbf{q}$, т. е. её размерность не выражается степенным одночленом $\mathrm{M}^\alpha\mathrm{L}^\beta\mathrm{T}^\gamma$, как того требует теория размерностей[4], и необходимо пополнение базиса $\{\mathrm{M}, \mathrm{L}, \mathrm{T}\}$: $[T] = \mathrm{K}$.

Простейшей связью $\mathbf{q}$ и $\operatorname{grad} T$, как известно, является закон Фурье

$$\mathbf{q} = -\underset{\sim}{\Lambda} \cdot \operatorname{grad} T \tag{4.1}$$

где $\underset{\sim}{\Lambda}$ — симметричный тензор теплопроводности анизотропной среды. Для моделирования тепловых волн, распространяющихся с конечной скоростью, прибегают к гиперболическим теориям теплопроводности [11 – 14], получающимся при обобщении (4.1) в рамках аппарата векторно линейных функций от векторного вргумента:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -\int\limits_0^t \underset{\sim}{\Gamma}(t-\xi) \cdot (\operatorname{grad} T)(\mathbf{x}, \xi)\, d\xi \tag{4.2}$$

В частности, если ядро $\underset{\sim}{\Gamma}$ экспоненциально: $\underset{\sim}{\Gamma}(t) = (1/\tau)\underset{\sim}{\Lambda}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$, имеет место закон Каттанео с характерным временем релаксации τ. Закону Фурье соответствует обобщённая функция $\underset{\sim}{\Gamma}(t) = \underset{\sim}{\Lambda}\delta(t)$. Для однородной изотропной среды ($\underset{\sim}{\Lambda} = \lambda \underset{\sim}{I}$, где λ — постоянный коэффициент теплопроводности) поле вектора $\mathbf{q}$ безвихревое.

Векторные связи (4.1) или в более общем виде (4.2) обычно трактуют как определяющие соотношения теплопроводящей среды с материальными функциями $\underset{\sim}{\Gamma}$, $\underset{\sim}{\Lambda}$ и λ. Но в таких соотношениях, как и в формулировках законов, должны фигурировать физические величины, определённые ранее. Температура же T — первая при переходе от строк I – IV к V величина, в размерность которой входит K. Поэтому она никак не может быть введена на базе имеющихся в изотермической механике переменных, и к соотношениям (4.1) и (4.2) можно подходить как к феноменологическому определению T: это скалярная функция в V, градиент которой связан с уже известным из строки IV вектором $\mathbf{q}$ именно таким образом (в простейшем случае противонаправлен $\mathbf{q}$).

Появление температуры приводит к необходимости введения энергетически сопряжённой к ней скалярной величины такого же немеханического содержания — массовой плотности энтропии $s(\mathbf{x}, t)$ — и образования наряду с тензорной парой $(\underset{\sim}{\sigma}, \underset{\sim}{\varepsilon})$ другой, скалярной, пары (s, T) термодинамических параметров состояния, один из которых описывает процесс, совершаемый в объёме V среды, а другой отклик среды на этот процесс [5, 15]. Ни плотность $s(\mathbf{x}, t)$,

---

производством, но источник и поток через границу которых обусловлен не тепловыми эффектами, а например, электромагнитными или активно исследуемыми в последнее время с точки зрения математического моделирования биологическими и информационными факторами.

[4] Заметим, что здесь речь идёт о феноменологическом введении температуры. В статистическом и молекулярном описании, где распространение тепла — результат столкновительной передачи кинетической энергии от быстро движущихся молекул к медленным, включения дополнительной переменной в базис $\{\mathrm{M}, \mathrm{L}, \mathrm{T}\}$ можно избежать. В модели же сплошной среды понятие “молекула” отсутствует.

ни энтропия $S = \int_V \rho s \, dV$ всего объёма ненаблюдаемы и неизмеримы каким-либо прибором в эксперименте, они носят вспомогательный характер.

Проще определить энтропию s не строкой V таблицы, а локальным уравнением (2.3):

$$\rho T ds = \rho q \, dt - (\operatorname{div} \mathbf{q}) \, dt + w^* dt, \quad \mathbf{x} \in V \tag{4.3}$$

в одной из частей которого обязательно должно стоять “энергетическое” произведение Tds, размерность которого можно выразить в базисе $\{\mathrm{M}, \mathrm{L}, \mathrm{T}\}$, а в другой его расшифровку — разбиение на сумму источникового, потокового слагаемых и производства, несущее смысл определения. Необходимость из соображений размерности писать локальное уравнение именно для произведения Tds, а не отдельно для ds, влечёт появление интегрирующего множителя $1/T$. Деля обе части соотношения (4.3) на Tdt и интегрируя по V, придём к строке V таблицы — закону об изменении энтропии. Множитель $1/T$ при интегрировании по частям приводит к возникновению слагаемого $-(\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} T)/T^2$ в производстве энтропии. Даже если среда обратима, т. е. $w^* \equiv 0$, производство энтропии может быть ненулевым.

Принцип неубывания энтропии в изолированной системе, выдвинутый в конце XIX века Р.Клаузиусом и Л.Больцманом и составляющий физический смысл второго закона термодинамики, применительно к рассматриваемому индивидуальному объёму V формулируется так. Если $q|_V = 0$ и $(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})_\Sigma = 0$, то

$$\int\limits_V \left(\frac{w^*}{T} - \frac{\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} T}{T^2} \right) dV \geqslant 0 \tag{4.4}$$

В силу произвольности V неравенство (4.4) эквивалентно неотрицательности подынтегрального выражения в каждой точке $\mathbf{x} \in V$. Подставляя сюда, например, закон Фурье (4.1), получим неравенство для квадратичной формы:

$$\operatorname{grad} T \cdot \underset{\sim}{\Lambda} \cdot \operatorname{grad} T \geqslant -T w^*, \quad \mathbf{x} \in V \tag{4.5}$$

В случае $w^* \equiv 0$ неубывание энтропии равносильно положительной определённости тензора теплопроводности $\underset{\sim}{\Lambda}$ (положительности коэффициента λ в изотропной среде).

Таким образом, с точки зрения феноменологического построения аксиоматики к двум термодинамическим постулатам и соотношению, связывающему вектор теплового потока с градиентом температуры, можно подходить как к определениям внутренней энергии, энтропии и изменения температуры. Это не противоречит тому, что локальные уравнения энергии (3.3), энтропии (4.3), а также закон Фурье (4.1) или его гиперболические обобщения типа (4.2) присутствуют в замкнутых системах уравнений. Ведь помимо них в эти же системы входят определяющие соотношения среды, конкретизирующие зависимость функции u как термодинамического потенциала (или другого потенциала, например, свободной энергии $u - Ts$) от своих независимых параметров состояния.

Попытка избежать трактовки данных законов как определений обычно приводит к следующим формулировкам: “Существует некоторая величина такая, что ...”. Но подобные утверждения имеют полностью описательный характер данной величины, а не постулирующий существование, т. е. являются определениями. Сказанное относится не только к термодинамике. Так, например, утверждение “Существуют инерциальные системы отсчёта, в которых тело, не подверженное действию силы, покоится либо движется прямолинейно и равномерно” — по сути определение инерциальной системы отсчёта, а не условий её существования.

5. Заключение

Теория определяющих соотношений механики сплошной среды оперирует энергетически сопряжёнными парами, такими как $(\underset{\sim}{\sigma}, \underset{\sim}{\varepsilon})$ и (s, T). Одна из величин, входящих в каждую пару, трактуется как независимый параметр состояния, от которого зависит определённый термодинамический потенциал, например, внутренняя энергия $u(\underset{\sim}{\varepsilon}, s)$. Полагается, что эта величина пары задаёт процесс в среде. Вторая же величина в каждой паре, представляющая собой тензор того же ранга, что и первая, (для функции u это тензор напряжений $\underset{\sim}{\sigma}$ и температура T) имеет смысл отклика среды на данный процесс и конкретизируется определяющими соотношениями среды [1, 11]. В этих соотношениях присутствуют материальные функции — экспериментально получаемые функции координат и времени (в частности, материальные константы), характеризующие именно выбранную среду в том или ином классе определяющих соотношений.

Физические размерности величин из разных энергетически сопряжённых пар выражаются, вообще говоря, в различных размерных базисах, что указывает на их разную природу — механическую, тепловую и т. д. — и несводимость друг к другу.

Если термодинамический потенциал таков, что определяющие соотношения выражают какую-то из зависимых величин не только через независимую из этой же пары, но и через независимые параметры других пар, то модель среды является связанной и более сложной для исследования.

Введение в математическую модель взаимодействия новой, не учитываемой ранее, природы предполагает следующее.

1. Пополнение в строке IV таблицы источникового и потокового столбцов слагаемыми, связанными с изменением внутренней энергии вследствие нового вида взаимодействия (при этом производство полной энергии, по-прежнему, равно нулю), что означает придание физического смысла и математизацию новых массовой плотности источников в V и поверхностной плотности потока через Σ.

2. Предъявление энергетически сопряжённой пары новых характеризующих данное взаимодействие величин, которые нельзя свести или выразить через имеющиеся, и расширение мультипликативного базиса размерностей.

3. Формулировка аналога постулата V, определяющего источник, поток и производство одной из присутствующих в новой паре величин.

4. Придание внутренней энергии u или какому-либо смежному потенциалу новой независимой переменной и получение определяющих соотношений, связывающих зависимые параметры в каждой из имеющихся в модели пар с независимыми.

5. Создание (по крайней мере, виртуальное) установочных экспериментов для нахождения материальных функций, входящих в упомянутые ранее определяющие соотношения, в том числе материальных функций, характеризующих связанные эффекты.

Такой жёсткой системе требований помимо рассмотренных выше чисто механических и термических взаимодействий в настоящее время удовлетворяют лишь электромагнитные с энергетически сопряжённой парой $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$, где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — векторы напряжённости электрического и магнитного полей. Соответственно этому на протяжении последних двух веков сформировались три дисциплины — изотермическая механика сплошной среды, феноменологическая термодинамика и электромагнетизм, а также их различные связанные варианты. Следующим в этом ряду, вероятно, станет учёт химических и биологических взаимодействий, что означает прежде всего математизацию химической и биоэнергии.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Corry L. David Hilbert and the axiomatization of physics (1894—1905) // Arch. Hist. Exact Sci. 1997. V. 51. No. 2. P. 83–198.

2. Saint-Raymond L. Hydrodynamic limits of the Boltzmann equation // Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 2009. V. 1971.

3. Slemrod M. From Boltzmann to Euler: Hilbert's 6th problem revisited // Comput. Math. Appl. 2013. V. 65. No. 10. P. 1497–1501.

4. Gorban A. N., Karlin I. Hilbert's 6th Problem: exact and approximate hydrodynamic manifolds for kinetic equations // Bull. Amer. Math. Soc. 2014. V. 51. No. 2. P. 186–246.

5. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М.: ЛЕНАНД, 2014. 320 с.

6. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. СПб.: Лань, 2004. 640 с.

7. Победря Б. Е., Георгиевский Д. В. Основы механики сплошной среды. М.: Физматлит, 2006. 272 с.

8. Нигматулин Р. И. Механика сплошной среды. М: ГЭОТАР-Медиа, 2014. 528 с.

9. Pobedria B. E., Georgievskii D. V. Two thermodynamical laws as the forth and the fifth integral postulates of continuum mechanics // Adv. in Dynamical Systems and Control. Ser. Studies in Systems, Decision and Control. 2016. V. 69. P. 317–325.

10. Kondepudi D., Prigogine I. Modern Thermodynamics. From Heat Engines to Dissipative Structures. Chichester: Jonh Sons, 2000.

11. Соболев С. Л. Локально-неравновесные модели процессов переноса // Успехи физ. наук. 1997. Т. 167. № 10. С. 1095–1106.

12. Костановский А. В., Костановская М. Е. Критерий применения параболического уравнения теплопроводности // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34. № 12. С. 6–11.

13. Белов П. А., Лурье С. А. Идеальная несимметричная 4D среда как модель обратимой динамической термоупругости // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 5. С. 108–120.

14. Витохин Е. Ю., Бабенков М. Б. Численное и аналитическое исследование распространения термоупругих волн в среде с учётом релаксации теплового потока // Прикл. мех. и техн. физика. 2016. Т. 57. № 3. С. 171–185.

15. Бровко Г. Л. Определяющие соотношения механики сплошной среды. М.: Наука, 2017. 432 с.

REFERENCES

1. Corry L., 1997, "David Hilbert and the axiomatization of physics (1894—1905) *Arch. Hist. Exact Sci.* vol. 51. no. 2. pp. 83–198.

2. Saint-Raymond L., 2009, "Hydrodynamic limits of the Boltzmann equation *Lecture Notes in Mathematics.* Berlin: Springer-Verlag, vol. 1971.

3. Slemrod M., 2013, "From Boltzmann to Euler: Hilbert's 6th problem revisited *Comput. Math. Appl.* vol. 65. no. 10. pp. 1497–1501.

4. Gorban A. N., Karlin I., 2014, "Hilbert's 6th Problem: exact and approximate hydrodynamic manifolds for kinetic equations *Bull. Amer. Math. Soc.* vol. 51. no. 2. pp. 186–246.

5. Ilyushin A. A., 2014, "Mechanics of Continuum Moscow: LENAND, 320 p. (in Russian)

6. Sedov L. I., 2014, "Mechanics of Continuum vol. 1. Saint-Petersburg: Lan, 640 p. (in Russian)

7. Pobedria B. E., Georgievskii D.V., 2006, "Foundations of Mechanics of Continuum Moscow: Fizmatlit, 272 p. (in Russian)

8. Nigmatulin R. I., 2014, "Mechanics of Continuum Moscow: GEOTAR-Media, 528 p. (in Russian)

9. Pobedria B. E., Georgievskii D. V., 2016, "Two thermodynamical laws as the forth and the fifth integral postulates of continuum mechanics *Adv. in Dynamical Systems and Control. Ser. Studies in Systems, Decision and Control.* vol. 69. pp. 317–325.

10. Kondepudi D., Prigogine I., 2000, "Modern Thermodynamics. From Heat Engines to Dissipative Structures."Chichester: Jonh Sons.

11. Sobolev S. L., 1997, "Local non-equilibrium transport models *Physics – Uspekhi.* vol. 40. no. 10. pp. 1043–1053.

12. Kostanovskii A. V., Kostanovskaya M. E., 2008, "Determination of the limit of applicability of the parabolic equation of heat conduction *Measurement Techniques.* vol. 51. no. 6. pp. 642–648.

13. Belov P. A., Lurie S. A., 2012, "Ideal nonsymmetric 4D-medium as a model of invertible dynamic thermoelasticity *Mechanics of Solids.* no. 5. pp. 580–590.

14. Vitokhin E. Yu., Babenkov M. B., 2016, "Numerical and analytical study of the propagation of thermoelastic waves in a medium with heat-flux relaxation *J. Appl. Mech. and Techn. Phys.* vol. 57. no. 3. pp. 537–549.

15. Brovko G. L., 2017, "Constitutive Relations in Mechanics of Continuum Moscow: Nauka, 432 p. (in Russian)

Получено 4.10.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2019–20-3-143-153

Взаимосвязь между константами Никольского – Бернштейна для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа[1]

Д. В. Горбачев, И. А. Мартьянов

Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: dvgmail@mail.ru
Мартьянов Иван Анатольевич — аспирант, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

Аннотация

Пусть $0 < p \leqslant \infty$, $\mathcal{C}(n;p;r) = \sup_T \frac{\|T^{(r)}\|_{L^\infty[0,2\pi)}}{\|T\|_{L^p[0,2\pi)}}$ и $\mathcal{L}(p;r) = \sup_F \frac{\|F^{(r)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{\|F\|_{L^p(\mathbb{R})}}$ — точные константы Никольского–Бернштейна для r-х производных тригонометрических полиномов степени n и целых функций экспоненциального типа 1 соответственно. Недавно Е. Левин и Д. Любинский доказали, что для констант Никольского

$$\mathcal{C}(n;p;0) = n^{1/p}\mathcal{L}(p;0)(1+o(1)), \quad n \to \infty.$$

М. Ганзбург и С. Тихонов обобщили этот результат на случай констант Никольского–Бернштейна:

$$\mathcal{C}(n;p;r) = n^{r+1/p}\mathcal{L}(p;r)(1+o(1)), \quad n \to \infty.$$

Также они показали существование в этой задаче экстремальных полинома $\tilde{T}_{n,r}$ и функции $\tilde{F}_r$ соответственно. Ранее мы дали более точные границы в результате типа Левина–Любинского, доказав, что для всех p и n

$$n^{1/p}\mathcal{L}(p;0) \leqslant \mathcal{C}(n;p;0) \leqslant (n+\lceil 1/p\rceil)^{1/p}\mathcal{L}(p;0).$$

Здесь мы устанавливаем близкие факты для случая констант Никольского–Бернштейна, из которых также вытекает асимптотическое равенство Ганзбурга–Тихонова. Результаты формулируется в терминах экстремальных функций $\tilde{T}_{n,r}$, $\tilde{F}_r$ и коэффициентов Тейлора ядра типа Джексона–Фейера $(\frac{\sin \pi x}{\pi x})^{2s}$. Мы неявно используем полиномы типа Левитана, возникающие при применении равенства Пуассона. Мы формулируем одну гипотезу о знаках коэффициентов Тейлора экстремальных функций.

Ключевые слова: тригонометрический полином, целая функция экспоненциального типа, константа Никольского–Бернштейна, ядро Джексона–Фейера, полиномы Левитана.

Библиография: 11 названий.

Для цитирования:
Д. В. Горбачев, И. А. Мартьянов. Взаимосвязь между константами Никольского – Бернштейна для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 143–153.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 3.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2019–20-3-143-153

Interrelation between Nikolskii – Bernstein constants for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type[2]

D. V. Gorbachev, I. A. Martyanov

Gorbachev Dmitry Viktorovich — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University (Tula).
e-mail: dvgmail@mail.ru
Martyanov Ivan Anatol'evich — Graduate student, Department of applied mathematics and computer science, Tula State University (Tula).
e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

Abstract

Let $0 < p \leqslant \infty$, $\mathcal{C}(n;p;r) = \sup_T \frac{\|T^{(r)}\|_{L^\infty[0,2\pi)}}{\|T\|_{L^p[0,2\pi)}}$ and $\mathcal{L}(p;r) = \sup_F \frac{\|F^{(r)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{\|F\|_{L^p(\mathbb{R})}}$ be the sharp Nikolskii–Bernstein constants for r-th derivatives of trigonometric polynomials of degree n and entire functions of exponential type 1 respectively. Recently E. Levin and D. Lubinsky have proved that for the Nikolskii constants

$$\mathcal{C}(n;p;0) = n^{1/p}\mathcal{L}(p;0)(1+o(1)), \quad n \to \infty.$$

M. Ganzburg and S. Tikhonov generalized this result to the case of Nikolskii–Bernstein constants:

$$\mathcal{C}(n;p;r) = n^{r+1/p}\mathcal{L}(p;r)(1+o(1)), \quad n \to \infty.$$

They also showed the existence of the extremal polynomial $\tilde{T}_{n,r}$ and the function $\tilde{F}_r$ in this problem, respectively. Earlier, we gave more precise boundaries in the Levin–Lubinsky-type result, proving that for all p and n

$$n^{1/p}\mathcal{L}(p;0) \leqslant \mathcal{C}(n;p;0) \leqslant (n+\lceil 1/p\rceil)^{1/p}\mathcal{L}(p;0).$$

Here we establish close facts for the case of Nikolskii–Bernstein constants, which also imply the asymptotic Ganzburg–Tikhonov equality. The results are stated in terms of extremal functions $\tilde{T}_{n,r}$, $\tilde{F}_r$ and the Taylor coefficients of a kernel of type Jackson–Fejer $(\frac{\sin \pi x}{\pi x})^{2s}$. We implicitly use Levitan-type polynomials arising from the Poisson summation formula. We formulate one hypothesis about the signs of the Taylor coefficients of the extremal functions.

Keywords: trigonometric polynomial, entire function of exponential type, Nikolskii–Bernstein constant, Jackson–Fejer kernel, Levitan polynomials.

Bibliography: 11 titles.

For citation:
D. V. Gorbachev, I. A. Martyanov, 2019, "Interrelation between Nikolskii – Bernstein constants for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 143–153.

[2]This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199).

1. Введение

Мы продолжаем исследование предельной связи констант Никольского–Бернштейна для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа, начатое в работах [9, 10, 5, 8]. Будем существенно использовать результаты и обозначения нашей работы [8].

Пусть $0 < p \leqslant \infty$, $Q \subseteq \mathbb{R}$, $L^p(Q)$ — лебегово пространство комплекснозначных функций с конечной нормой

$$\|f\|_{L^p(Q)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_Q |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, & 0 < p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in Q} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Будем использовать привычное сокращение $\|f\|_p$, если из контекста ясно, о каком интервале Q идет речь. Через $\lfloor a \rfloor$, $\lceil a \rceil$, как обычно, обозначим наибольшее целое, не большее a, и наименьшее целое, не меньшее a соответственно.

Пусть $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_n[0, 2\pi)$ и $\mathcal{E}_\sigma$ — множество (комплекснозначных) 2π-периодических тригонометрических полиномов порядка не больше $n \in \mathbb{Z}_+$ и целых функций экспоненциального типа не больше $\sigma > 0$ соответственно. Положим для краткости $\mathcal{E}^p_\sigma = L^p(\mathbb{R}) \cap \mathcal{E}_\sigma$ и напомним, что функции $F \in \mathcal{E}^p_\sigma$, $p \in (0, \infty]$, ограничены на $\mathbb{R}$ и удовлетворяют оценке

$$|F(z)| \leqslant \|F\|_{L^\infty(\mathbb{R})} e^{\sigma|\operatorname{Im} z|}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Для $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leqslant q \leqslant \infty$ через

$$\mathcal{C}(n; p, q; r) = \sup_{T\in\mathcal{T}_n\setminus\{0\}} \frac{\|T^{(r)}\|_{L^q[0,2\pi)}}{\|T\|_{L^p[0,2\pi)}} \tag{1}$$

и

$$\mathcal{L}(\sigma; p, q; r) = \sup_{F\in\mathcal{E}^p_\sigma\setminus\{0\}} \frac{\|F^{(r)}\|_{L^q(\mathbb{R})}}{\|F\|_{L^p(\mathbb{R})}} \tag{2}$$

обозначим точные константы Никольского–Бернштейна для r-х производных полиномов и функций соответственно. Хорошо известно, что они конечны. В силу однородности имеем

$$\mathcal{L}(\sigma; p, q; r) = \sigma^{r+1/p-1/q}\mathcal{L}(1; p, q; r),$$

поэтому достаточно изучать константу $\mathcal{L}(p, q; r) = \mathcal{L}(1; p, q; r)$.

При $p = q$ константы (1) и (2) известны как константы Бернштейна, а при $r = 0$ — константы Никольского. В настоящее время во всей общности для произвольного r они известны только при $p = q \in (0, \infty]$,

$$\mathcal{C}(n; p, p; r) = n^r, \quad \mathcal{L}(p, p; r) = 1, \tag{3}$$

где экстремальные функции это косинусы и синусы (в зависимости от четности r), а также в случае $(p, q) = (2, \infty)$, где экстремальными функциями являются ядра Дирихле. Обзор этих результатов см., например, в [5]. Для всех остальных параметров проблема остается открытой.

На наш взгляд, вычисление тригонометрической константы $\mathcal{C}(n; p, q; r)$ для всех n при фиксированных $0 < p < q \leqslant \infty$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ представляется особо сложной задачей. Поэтому большой интерес представляет следующее асимптотическое равенство, устанавливающее предельную связь между константами для полиномов и функций:

$$\mathcal{C}(n; p, \infty; r) = n^{r+1/p}\mathcal{L}(p, \infty; r)(1 + o(1)), \quad n \to \infty. \tag{4}$$

В случае неравенства Никольского ($r = 0$) оно было установлено в работе [9], а в общем случае $r \in \mathbb{Z}_+$ — в работе [5], где использовались свойства полиномов Левитана. Если $q \neq \infty$, то известна только нижняя оценка [10, 5]

$$\mathcal{C}(n;p,q;r) \geqslant n^{r+1/p-1/q}\mathcal{L}(p,q;r)(1+o(1)).$$

Вопрос о равенстве здесь является открытой проблемой. Для $q = \infty$ данную проблему удается разрешить во многом за счет следующего предложения (см. теоремы 1.1, 1.5 в работе [5] и их доказательство).

Предложение 1 ([5]). *При $p \in (0,\infty]$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ имеем*

$$\mathcal{C}(n;p,\infty;r) = \sup_{T\in\mathcal{T}_n\setminus\{0\}} \frac{|T^{(r)}(0)|}{\|T\|_{L^p[0,2\pi)}} \tag{5}$$

и

$$\mathcal{L}(p,\infty;r) = \sup_{F\in\mathcal{E}_1^p\setminus\{0\}} \frac{|F^{(r)}(0)|}{\|F\|_{L^p(\mathbb{R})}}. \tag{6}$$

Супремумы достигаются на действительных четных или нечетных (в зависимости от четности r) полиноме $\tilde{T}_{n,r}$ порядка n и функции $\tilde{F}_r$ типа 1 соответственно.

Причем при нормировке $\tilde{T}_{n,r}^{(r)}(0) = \tilde{F}_r^{(r)}(0) = 1$ найдется последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots$, такая что на каждом отрезке из $\mathbb{R}$ функция $\tilde{F}_r(x)$ является пределом $\tilde{T}_{n_j,r}(x/n_j)$ при $n_j \to \infty$.

Отметим следующий факт. Равенства (5) и (6) вытекают из достижимости экстремума в ∞-норме в некоторой точке x_0 и инвариантности классов относительно сдвига $f(\cdot) \mapsto f(\cdot + x_0)$. В случае полиномов существование точки x_0 очевидно. Для функций это также верно при $1 \leqslant p < \infty$, поскольку тогда они стремятся к нулю [11, 3.2.5]. Однако для $p = \infty$ в общем случае это неверно, например, для четной функции

$$1 - \left(\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \left(\frac{d}{dx}\,\frac{\sin x}{x}\right)^2\right) \in \mathcal{E}_2^\infty.$$

Нетрудно показать, что эта функция монотонно возрастает при $x \geqslant 0$ и стремится к 1 при $x \to \infty$, поэтому для нее точки x_0 не существует. В [5] этот момент не обсуждается, поэтому в пункте 2.3 мы приведем простое обоснование равенств (5) и (6), покрывающее весь диапазон $p \in (0,\infty]$.

Отметим, что данная тематика получила продолжение в весовом и многомерных случаях [1, 3, 3, 9, 4, 6]. При $q \neq \infty$ неясно, что является эквивалентом предложения 1.

Далее рассматривается только случай $q = \infty$, поэтому для краткости положим

$$\mathcal{C}(n;p;r) = \mathcal{C}(n;p,\infty;r), \quad \mathcal{L}(p;r) = \mathcal{L}(p,\infty;r).$$

В работе [8] мы уточнили равенство (4) для случая $r = 0$, показав, что

Предложение 2 ([8]). *Для всех $n \in \mathbb{Z}_+$*

$$n^{1/p}\mathcal{L}(p;0) \leqslant \mathcal{C}(n;p;0) \leqslant (n+1)^{1/p}\mathcal{L}(p;0), \quad p \geqslant 1, \tag{7}$$

и

$$n^{1/p}\mathcal{L}(p;0) \leqslant \mathcal{C}(n;p;0) \leqslant (n+\lceil 1/p\rceil)^{1/p}\mathcal{L}(p;0), \quad 0 < p < 1, \tag{8}$$

Из этого предложения также следует, что

$$\mathcal{C}(n;p;0) = n^{1/p}\mathcal{L}(p;0)(1+O(n^{-1})), \quad n \to \infty.$$

Однако основное значение данного предложения 2 видится в том, что оно позволяет оценить остаточный член в предельном соотношении (4). Мы использовали этот факт, чтобы уточнить константу $\mathcal{L}(1;0)$.

Подход, использованный для доказательства предложения 2, позволяет доказать следующий результат для константы Никольского–Бернштейна. Для его формулировки введем для $s \in \mathbb{N}$ ядро типа Джексона–Фейера

$$\varphi_s(x) = \Big(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\Big)^{2s} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A_{s,k}(2\pi x)^{2k}}{(2k)!}, \quad A_{s,0} = 1. \tag{9}$$

По индукции нетрудно показать, что здесь коэффициенты $A_{s,k} > 0$.

Теорема 1. *Пусть $p \in (0,\infty]$, $r, n \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \mathbb{N}$.*

(i) *Если $2s \geqslant r+1$, $n \geqslant s-1$, то для произвольной функции $F \in \mathcal{E}_1^p$, такой что $\|F\|_p = 1$, имеем*

$$\mathcal{C}(n;p;r) \geqslant (n-s+1)^{r+1/p}\Bigg(F^{(r)}(0) + \sum_{i=1}^{\lfloor r/2\rfloor} \frac{(-1)^i\binom{r}{2i}A_{s,i}}{n^{2i}}\, F^{(r-2i)}(0)\Bigg).$$

(ii) *Если $n \geqslant 1$, $ps \geqslant 1$, то для произвольного полинома $T \in \mathcal{T}_n$, такого что $\|T\|_p = 1$,*

$$T^{(r)}(0) + \sum_{i=1}^{\lfloor r/2\rfloor} (-1)^i \binom{r}{2i} A_{s,i} T^{(r-2i)}(0) \leqslant n^r(n+s)^{1/p}\mathcal{L}(p;r).$$

Прокомментируем теорему. Во-первых, в ней можно положить $s = \lceil (r+1)/2\rceil$ для (i) и $s = \lceil 1/p\rceil$ для (ii) (тогда значения факторов оптимальные). Во-вторых, если взять экстремальные функции $\tilde{T}_{n,r}$, $\tilde{F}_r$ из предложения 1, нормированные условиями $\tilde{T}_{n,r}^{(r)}(0) > 0$, $\tilde{F}_r^{(r)}(0) > 0$ и $\|\tilde{T}_{n,r}\|_p = \|\tilde{F}_r^{(r)}\|_p = 1$ (напомним, что норма берется для соответствующего интервала), а также учесть, что для любого k в силу (3) и предложения 2

$$|\tilde{T}_{n,r}^{(k)}(0)| \leqslant n^k\|\tilde{T}_{n,r}\|_\infty \leqslant n^k\mathcal{C}(n;p;0) \leqslant n^k(n+\lceil 1/p\rceil)^{1/p}\mathcal{L}(p;0),$$

то получим

Следствие 1. *Имеем* (i)

$$\mathcal{C}(n;p;r) \geqslant (n-s+1)^{r+1/p}\Bigg(\mathcal{L}(p;r) + \sum_{i=1}^{\lfloor r/2\rfloor} \frac{(-1)^i\binom{r}{2i}A_{s,i}}{n^{2i}}\, \tilde{F}_r^{(r-2i)}(0)\Bigg)$$

и (ii)

$$\mathcal{C}(n;p;r) + \sum_{i=1}^{\lfloor r/2\rfloor} (-1)^i \binom{r}{2i} A_{s,i} \tilde{T}_{n,r}^{(r-2i)}(0) \leqslant n^r(n+s)^{1/p}\mathcal{L}(p;r),$$

где

$$|\tilde{T}_{n,r}^{(r-2i)}(0)| \leqslant n^{r-2i}(n+\lceil 1/p\rceil)^{1/p}\mathcal{L}(p;0).$$

Нетрудно видеть, что из этого следствия снова вытекает основное предельное соотношение (4). Тем не менее оно представляет интерес, поскольку дает дополнительную информацию об остаточном члене. Эта информация, как отмечено выше, может быть использована для численных оценок констант.

При $r=0$, полагая $s=1$ (i) и $s=\lceil 1/p\rceil$ (ii) получаем предложение 2. При $r=1$ имеем для $n\geqslant 1$

$$n^{1+1/p}\mathcal{L}(p;1)\leqslant \mathcal{C}(n;p;1)\leqslant n(n+\lceil 1/p\rceil)^{1/p}\mathcal{L}(p;1).$$

В связи с наличием фактора $(-1)^i$ в суммах из следствия 1 представляет интерес решить следующую задачу.

Гипотеза. *Знаки ненулевых коэффициентов Тейлора $\tilde{T}_{n,r}^{(j)}(0)$, $\tilde{F}_r^{(j)}(0)$ (как минимум до порядка r) чередуются.*

Если гипотеза верна, то при всех $p\in(0,\infty]$, $r\geqslant 0$ и $n\geqslant\lceil (r+1)/2\rceil-1$ ($n\geqslant 1$ при $r=1$)

$$(n-\lceil (r+1)/2\rceil+1)^{r+1/p}\mathcal{L}(p;r)\leqslant \mathcal{C}(n;p;r)\leqslant n^r(n+\lceil 1/p\rceil)^{1/p}\mathcal{L}(p;r).$$

Для $p=\infty$ экстремальными функциями являются косинусы (четные r) и синусы (нечетные r), поэтому гипотеза верна. Неравенства в гипотезе, как отмечено выше, также верны при $r=0,1$.

2. Доказательство теоремы 1

При $p=\infty$ в силу (3) имеем равенство

$$\mathcal{C}(n;\infty;r)=n^r\mathcal{L}(\infty;r),$$

поэтому далее пусть $p\in(0,\infty)$.

Воспользуемся предложением 1, а также доказательством предложения 2 из нашей работы [8] (повторяя некоторые выкладки для удобства чтения). В частности, с целью воспользоваться формулой суммирования Пуассона, будем работать с 1-периодическими полиномами и функциями типа не больше 2π:

$$t(x)=T(2\pi x)\in\mathcal{T}_n[0,1),\quad f(x)=F(2\pi x)\in\mathcal{E}_{2\pi}^p. \tag{10}$$

Напомним, что при этом можно ограничиться только действительными (четными или нечетными) полиномами и функциями. Через

$$\widehat{f}(y)=\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-2\pi ixy}\,dx,\quad y\in\mathbb{R},$$

обозначим преобразование Фурье.

2.1. Доказательство (i)

Пусть $n,s\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $2s\geqslant r+1$ и $f\in\mathcal{E}_{2\pi}^p$ — произвольная функция. Положим

$$g(x)=f(x)\varphi_s\Big(\frac{x}{n}\Big).$$

Тогда g — целая функция экспоненциального типа не больше $2\pi(1+s/n)$ и $g(x)=O(x^{-2})$ при $|x|\to\infty$. Поэтому $g\in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$, $\widehat{g}\in C(\mathbb{R})$ и по теореме Пэли–Винера

$$\widehat{g}(y)=0,\quad |y|\geqslant 1+\frac{s}{n}.$$

Рассмотрим 1-периодический полином t порядка $s+n-1$, получаемый периодизацией функции $ng(nx)$:

$$t(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} ng(n(x+k))=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{g}\Big(\frac{k}{n}\Big)e^{2\pi ikx}=\sum_{|k|\leqslant s+n-1}\widehat{g}\Big(\frac{k}{n}\Big)e^{2\pi ikx}.$$

При $s=1$ он тесно связан с полиномом Левитана функции f.

Оценим сверху p-норму полинома t. Имеем

$$\|t\|_p^p=\int_0^1\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} ng(n(x+k))\Big|^p\,dx\leqslant n^p\int_0^1\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+k))|\,\varphi_s(x+k)\Big)^p\,dx.$$

Здесь

$$\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+k))|\,\varphi_s(x+k)\Big)^p\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+k))|^p.$$

Действительно, при $p\geqslant 1$ по неравенству Гёльдера

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+k))|\varphi_s(x+k)\leqslant\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+k))|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi_s^{p'}(x+k)\Big)^{1/p'},$$

где сопряженный показатель $p'=p/(p-1)\geqslant 1$. Поэтому с учетом тождества

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi_1(x+k)=1,\quad x\in\mathbb{R}$$

(см. [8, (8)]) находим

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi_s^{p'}(x+k)\leqslant\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi_1(x+k)\Big)^{p'}=1.$$

Если $0<p<1$, то в силу $\varphi_s(x+k)\leqslant 1$

$$\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+k))|\,\varphi_s(x+k)\Big)^p\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+k))|^p\,\varphi_s^p(x+k)\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+k))|^p.$$

Таким образом,

$$\|t\|_p^p\leqslant n^p\int_0^1\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+k))|^p\,dx=n^{p-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{nk}^{n(k+1)}|f(x)|^p\,dx=n^{p-1}\|f\|_p^p$$

и

$$\frac{t^{(r)}(0)}{\|t\|_p}\geqslant n^{1/p-1}\,\frac{t^{(r)}(0)}{\|f\|_p}.$$

Здесь

$$t^{(r)}(0)=n\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}n^{r-j}f^{(r-j)}(nk)(\varphi_s(k))^{(j)}.$$

Функция φ_s имеет в точках $k\neq 0$ нули порядка $2s\geqslant r+1$, поэтому $(\varphi_s(k))^{(j)}=0$, $0\leqslant j\leqslant r$, $k\neq 0$. При $k=0$ в силу (9) имеем $\varphi_s^{(2i+1)}(0)=0$ и $\varphi_s^{(2i)}(0)=(-1)^i(2\pi)^{2i}A_{s,i}$. Следовательно,

$$t^{(r)}(0)=n^{r+1}\sum_{i=0}^{\lfloor r/2\rfloor}(-1)^i\binom{r}{2i}n^{-2i}f^{(r-2i)}(0)(2\pi)^{2i}A_{s,i}.$$

Отсюда получаем оценку

$$\frac{t^{(r)}(0)}{\|t\|_p} \geqslant \frac{n^{r+1/p}}{\|f\|_p} \sum_{i=0}^{\lfloor r/2 \rfloor} (-1)^i \binom{r}{2i} n^{-2i} (2\pi)^{2i} A_{s,i} f^{(r-2i)}(0),$$

Теперь вернемся к 2π-периодическим полиномам и функциям типа не больше 1 по формулам (10). Тогда после несложных преобразований получаем искомое неравенство

$$\mathcal{C}(s+n-1;p;r) \geqslant \frac{n^{r+1/p}}{\|F\|_p} \left(F^{(r)}(0) + \sum_{i=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} (-1)^i \binom{r}{2i} n^{-2i} A_{s,i} F^{(r-2i)}(0) \right),$$

где нужно заменить $s+n-1$ на n и положить $\|F\|_p = 1$.

2.2. Доказательство (ii)

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $ps \geqslant 1$, t — произвольный 1-периодический полином порядка не больше n. Одновременно он является целой функцией экспоненциального типа не больше $2\pi n$.

Определим целую функцию

$$f(x) = \varphi_s\Big(\frac{x}{n}\Big) t\Big(\frac{x}{n}\Big)$$

экспоненциального типа не больше $2\pi(1+s/n)$. Для нее

$$\|f\|_p^p = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{nk}^{n(k+1)} |f(x)|^p\,dx = n \int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(n(x+k))|^p\,dx.$$

Подставляя сюда выражение f и учитывая 1-периодичность t, находим

$$\|f\|_p^p = n \int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_s^p(x+k)\,|t(x+k)|^p\,dx = n \int_0^1 |t(x)|^p \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_s^p(x+k)\,dx.$$

Поскольку $sp \geqslant 1$, то как и выше

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_s^p(x+k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_1^{sp}(x+k) \leqslant \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_1(x+k) \Big)^{sp} = 1.$$

Поэтому

$$\|f\|_p \leqslant n^{1/p} \|t\|_p.$$

Таким образом,

$$n^{1/p}\,\frac{f^{(r)}(0)}{\|f\|_p} \geqslant \frac{f^{(r)}(0)}{\|t\|_p},$$

где как и выше

$$f^{(r)}(0) = n^{-r} \sum_{i=0}^{\lfloor r/2 \rfloor} (-1)^i \binom{r}{2i} (2\pi)^{2i} A_{s,i} t^{(r-2i)}(0),$$

Снова, делая обратные замены в соответствии с (10), находим

$$n^{r+1/p}\,\frac{F^{(r)}(0)}{\|F\|_p} \geqslant \frac{\sum_{i=0}^{\lfloor r/2 \rfloor} (-1)^i \binom{r}{2i} A_{s,i} T^{(r-2i)}(0)}{\|T\|_p}.$$

Произвольная функция F имеет тип не выше $1+s/n$, поэтому

$$\frac{F^{(r)}(0)}{\|F\|_p} \leqslant \mathcal{L}\Big(1+\frac{s}{n}; p,\infty; r\Big) = \Big(1+\frac{s}{n}\Big)^{1/p}\mathcal{L}(p;r).$$

Таким образом, получаем искомую оценку

$$T^{(r)}(0) + \sum_{i=1}^{\lfloor r/2\rfloor}(-1)^i\binom{r}{2i}A_{s,i}T^{(r-2i)}(0) \leqslant n^r(n+s)^{1/p}\mathcal{L}(p;r),$$

где положено $\|T\|_p = 1$.

2.3. Доказательство равенства (6)

Пусть $L = \sup\frac{F^{(r)}(0)}{\|F\|_{L^p(\mathbb{R})}}$, где супремум берется по всем функциям $F\in\mathcal{E}_1^p\setminus\{0\}$. Ясно, что

$$L \leqslant \mathcal{L}(p;r).$$

С другой стороны, для любого $\varepsilon>0$ найдется функция $F_\varepsilon\in\mathcal{E}_1^p\setminus\{0\}$ и точка $x_0\in\mathbb{R}$, такая что

$$\mathcal{L}(p;r) \leqslant \frac{F_\varepsilon^{(r)}(x_0)}{\|F_\varepsilon\|_p}+\varepsilon.$$

Пусть $F(x)=F_\varepsilon(x+x_0)$, тогда $F\in\mathcal{E}_1^p$ и $\|F\|_p=\|F_\varepsilon\|_p$. Поэтому

$$\mathcal{L}(p;r) \leqslant \frac{F^{(r)}(0)}{\|F\|_p}+\varepsilon \leqslant L+\varepsilon$$

и можно устремить ε к нулю.

Теперь, поскольку p-нормы функций $\frac{1}{2}(F(x)+\overline{F(\overline{x})})$, $\frac{1}{2}(F(x)+(-1)^rF(-x))$ (принадлежащих $\mathcal{E}_1^p$) не превосходит нормы F, а значения r-й производных в нуле совпадают, заключаем, что при поиске супремума в L можно ограничиться действительными четными или нечетными (в зависимости от четности r) функциями. Существование такой экстремальной функции вытекает из [5, теорема 1.5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arestov V., Babenko A., Deikalova M., Horváth Á. Nikol'skii inequality between the uniform norm and integral norm with Bessel weight for entire functions of exponential type on the half-line // Anal. Math. 2018. Vol. 44, no. 1. P. 21–42. DOI: 10.1007/s10476-018-0103-6

2. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere // J. d'Analyse Math. 2019 (to appear); arXiv:1708.09837. 2017. 21 p. https://arxiv.org/pdf/1708.09837.pdf

3. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Estimates of the asymptotic Nikolskii constants for spherical polynomials // arXiv:1907.03832. 2019. 27 p. https://arxiv.org/pdf/1907.03832.pdf

4. Ganzburg M. Sharp constants of approximation theory. I. Multivariate Bernstein–Nikolskii type inequalities // arXiv:1901.04400. 2019. 19 p. https://arxiv.org/pdf/1901.04400.pdf

5. Ganzburg M., Tikhonov S. On Sharp Constants in Bernstein–Nikolskii Inequalities // Constr. Approx. 2017. Vol. 45, no. 3. P. 449–466.

6. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Константы Никольского–Бернштейна для целых функций экспоненциального сферического типа в весовых пространствах // Тр. ИММ УрО РАН. 2019. Том 25, № 2. С. 75–87. DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-75-87

7. Горбачев Д. В., Добровольский Н. Н. Константы Никольского в пространствах $L^p(\mathbb{R}, |x|^{2\alpha+1}\,dx)$ // Чебышевский сб. 2018. Том 19, № 2. С. 67–79. DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-67-79

8. Горбачёв Д. В., Мартьянов И. А. О взаимосвязи констант Никольского для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сборник. 2018. Том 19, № 2. С. 80–89. DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-80-89

9. Levin E., Lubinsky D. L_p Chritoffel functions, L_p universality, and Paley–Wiener spaces // J. D'Analyse Math. 2015. Vol. 125. P. 243–283.

10. Levin E., Lubinsky D. Asymptotic behavior of Nikolskii constants for polynomials on the unit circle // Comput. Methods Funct. Theory. 2015. Vol. 15, no. 3. P. 459–468.

11. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Москва: Наука, 1977.

REFERENCES

1. Arestov V., Babenko A., Deikalova M., Horváth Á. Nikol'skii inequality between the uniform norm and integral norm with Bessel weight for entire functions of exponential type on the half-line // Anal. Math. 2018. Vol. 44, no. 1. P. 21–42. DOI: 10.1007/s10476-018-0103-6

2. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere // J. d'Analyse Math. 2019 (to appear); arXiv:1708.09837. 2017. 21 p. https://arxiv.org/pdf/1708.09837.pdf

3. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Estimates of the asymptotic Nikolskii constants for spherical polynomials // arXiv:1907.03832. 2019. 27 p. https://arxiv.org/pdf/1907.03832.pdf

4. Ganzburg M. Sharp constants of approximation theory. I. Multivariate Bernstein–Nikolskii type inequalities // arXiv:1901.04400. 2019. 19 p. https://arxiv.org/pdf/1901.04400.pdf

5. Ganzburg M., Tikhonov S. On Sharp Constants in Bernstein–Nikolskii Inequalities // Constr. Approx. 2017. Vol. 45, no. 3. P. 449–466.

6. Gorbachev D. V., Ivanov V. I. Nikol'skii–Bernstein constants for entire functions of exponential spherical type in weighted spaces // Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2019. Vol. 25, no. 2. P. 75–87. DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-75-87

7. Gorbachev D. V., Dobrovolskii N. N. Nikolskii constants in $L^p(\mathbb{R}, |x|^{2\alpha+1}\,dx)$ spaces // Chebyshevskii Sbornik. 2018. Vol. 19, no. 2. P. 67–79. (In Russ.) DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-67-79

8. Gorbachev D. V., Martyanov I. A. On interrelation of Nikolskii Constants for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type. Chebyshevskii Sbornik // 2018. Vol. 19, no. 2. P. 80–89. (In Russ.) DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-80-89

9. Levin E., Lubinsky D. L_p Chritoffel functions, L_p universality, and Paley–Wiener spaces // J. D'Analyse Math. 2015. Vol. 125. P. 243–283.

10. Levin E., Lubinsky D. Asymptotic behavior of Nikolskii constants for polynomials on the unit circle // Comput. Methods Funct. Theory. 2015. Vol. 15, no. 3. P. 459–468.

11. Nikolskii S. M. Approximation of functions of several variables and imbedding theorems. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1975.

Получено 24.09.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 3.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-3-154-164

О поведении функций, родственных функции Чебышева[1]

С. А. Гриценко, Е. И. Деза, Л. В. Варухина

Гриценко Сергей Александрович — доктор физико-математических наук профессор кафедры математических и компьютерных методов анализа Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: s.gritsenko@gmail.com
Деза Елена Ивановна — доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры теоретической информатики и дискретной математики, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: Elena.Deza@gmail.com
Варухина Лидия Владимировна — Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: Lidadgema@mail.ru

Аннотация

Многие вопросы теории чисел связаны с исследованием *рядов Дирихле*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

и *сумматорных функций*

$$\Phi(x) = \sum_{n\le x} a_n$$

их коэффициентов. Наиболее известным примером ряда Дирихле является *дзета-функция Римана* $\zeta(s)$, определенная для любого комплексного числа $s = \sigma + it$ с действительной частью $\mathrm{Re}s = \sigma > 1$ как

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Квадрат дзета-функции

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}, \qquad \mathrm{Re}s > 1,$$

связан с *функцией делителей* $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$, дающей число натуральных делителей натурального числа n. Сумматорной функцией ряда Дирихле $\zeta^2(s)$ является функция $D(x) = \sum_{n\le x} \tau(n)$, вопросы асимптотической оценки которой известны как *проблема делителей Дирихле*. В общем случае,

$$\zeta^k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_k(n)}{n^s}, \qquad \mathrm{Re}s > 1,$$

где функция $\tau_k(n) = \sum_{n=n_1\cdot\ldots\cdot n_k} 1$ дает число представлений натурального числа n в виде произведения k натуральных сомножителей. Сумматорной функцией ряда Дирихле $\zeta^k(s)$

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект XX-XX-XXXXX).

является функция $D_k(x) = \sum_{n \le x} \tau_k(n)$. Ее изучение — это *многомерная проблема делителей Дирихле*.

Логарифмическая производная $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ дзета-функции представима в виде

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}, \quad \mathrm{Re} s > 1.$$

Здесь $\Lambda(n)$ — *функция Мангольдта*, которая определяется как $\Lambda(n) = \log p$, если $n = p^k$ для простого p и натурального k, и как $\Lambda(n) = 0$, иначе. Таким образом, *функция Чебышева* $\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n)$ является сумматорной функцией коэффициентов ряда Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

соответствующего логарифмической производной $\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ дзета-функции Римана. Она хорошо известна в аналитической теории чисел и связана со многими классическими задачами, прежде всего, с *асимптотическим законом распределения простых чисел*.

В частности, хорошо известно представление функции $\psi(x)$ по нулям дзета-функции:

$$\psi(x) = x - \sum_{|\mathrm{Im}\rho| \le T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right),$$

где $x = n + 0,5$, $n \in \mathbb{N}$, $2 \le T \le x$, и $\rho = \beta + i\gamma$ — *нетривиальные нули* дзета-функции Римана, то есть нули $\zeta(s)$, лежащие в *критической полосе* $0 < \mathrm{Re} s < 1$.

Аналогичные представления, связанные с нетривиальными нулями дзета-функции Римана, можно получить и для арифметических функций, родственных функции Чебышева, например, для функции $\psi_1(x) = \sum_{n \le x} (x-n)\Lambda(n)$. Именно, в настоящей статье получено представление функции $\psi_1(x)$ по нулям дзета-функции Римана следующего вида:

$$\psi_1(x) = \frac{x^2}{2} - \left(\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}\right) x - \sum_{|\mathrm{Im}\rho| \le T} \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} + O\left(\frac{x^2}{T^2} \ln^2 x\right) + O\left(\sqrt{x} \ln^2 x\right),$$

где $x > 2$, $T \ge 2$, и $\rho = \beta + i\gamma$ — *нетривиальные нули* дзета-функции Римана, то есть нули $\zeta(s)$, лежащие в *критической полосе* $0 < \mathrm{Re} s < 1$.

Ключевые слова: арифметические функции, ряд Дирихле, суматорная функция коэффициентов ряда Дирихле, дзета-функция Римана, функция Чебышева, нетривиальные нули дзета-функции Римана, теорема Коши о вычетах.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

С. А. Гриценко, Е. И. Деза, Л. В. Варухина. О поведении функций, родственных функции Чебышева // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 154–164.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 3.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-3-154-164

On behavior of arithmetical functions, related to Chebyshev function[2]

S. A. Gritsenko, E. I. Deza, L. V. Varukhina

Gritsenko Sergey Aleksandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor of mathematical and computer methods of analysis department, Lomonosov Moscow state University (Moscow).
e-mail: s.gritsenko@gmail.com
Deza Elena Ivanovna — doctor of pedagogical sciences, candidate of physical and mathematical science, professor of the department of theoretical computer science and discrete mathematics, Moscow Pedagogical State University (Moscow).
e-mail: Elena.Deza@gmail.com
Varukhina Lidiya Vladimirovna — Moscow Pedagogical State University (Moscow).
e-mail: Lidadgema@mail.ru

Abstract

Many problems of Number Theory are connected with investigation of *Dirichlet series* $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nn^{-s}$ and the *adding functions* $\Phi(x)=\sum_{n\leq x}a_n$ of their coefficients. The most famous Dirichlet series is the *Riemann zeta function* $\zeta(s)$, defined for any $s=\sigma+it$ with $\mathrm{Re}s=\sigma>1$ as $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$.

The square of zeta function $\zeta^2(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^s}$, $\mathrm{Re}s>1$, is connected with the *divisor function* $\tau(n)=\sum_{d|n}1$, giving the number of a positive integer divisors of positive integer number n. The adding function of the Dirichlet series $\zeta^2(s)$ is the function $D(x)=\sum_{n\leq x}\tau(n)$; the questions of the asymptotic behavior of this function are known as *Dirichlet divisor problem.* Generally, $\zeta^k(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_k(n)}{n^s}$, $\mathrm{Re}s>1$, where function $\tau_k(n)=\sum_{n=n_1\cdot\ldots\cdot n_k}1$ gives the number of representations of a positive integer number n as a product of k positive integer factors. The adding function of the Dirichlet series $\zeta^k(s)$ is the function $D_k(x)=\sum_{n\leq x}\tau_k(n)$; its research is known as the *multidimensional Dirichlet divisor problem.*

The logarithmic derivative $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ of zeta function can be represented as $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}$, $\mathrm{Re}s>1$. Here $\Lambda(n)$ is the *Mangoldt function*, defined as $\Lambda(n)=\log p$, if $n=p^k$ for a prime number p and a positive integer number k, and as $\Lambda(n)=0$, otherwise. So, the *Chebyshev function* $\psi(x)=\sum_{n\leq x}\Lambda(n)$ is the adding function of the coefficients of the Dirichlet series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}$, corresponding to logarithmic derivative $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ of zeta function. It is well-known in analytic Number Theory and is closely connected with many important number-theoretical problems, for example, with *asymptotic law of distribution of prime numbers.*

In particular, the following representation of $\psi(x)$ is very useful in many applications: $\psi(x)=x-\sum_{|\mathrm{Im}\rho|\leq T}\frac{x^\rho}{\rho}+O\left(\frac{x\ln^2 x}{T}\right)$, where $x=n+0,5$, $n\in\mathbb{N}$, $2\leq T\leq x$, and $\rho=\beta+i\gamma$ are *non-trivial zeros* of zeta function, i.e., the zeros of $\zeta(s)$, belonging to the *critical strip* $0<\mathrm{Re}s<1$.

We obtain similar representations over non-trivial zeros of zeta function for an arithmetic function, relative to the Chebyshev function: $\psi_1(x)=\sum_{n\leq x}(x-n)\Lambda(n)$. In fact, we prove the

[2]The research was carried out at the expense of a grant from the Russian science Foundation (project XX-XX-XXXXX).

following theorem: $\psi_1(x) = \frac{x^2}{2} - \left(\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}\right) x - \sum_{|\mathrm{Im}\rho|\leq T} \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} + O\left(\frac{x^2}{T^2}\ln^2 x\right) + O\left(\sqrt{x}\ln^2 x\right),$ where $x > 2$, $T \geq 2$, and $\rho = \beta + i\gamma$ are *non-trivial zeros* of zeta function, i.e., the zeros of $\zeta(s)$, belonging to the *critical strip* $0 < \mathrm{Re}s < 1$.

Keywords: arithmetical functions, Dirichlet series, adding function of the coefficients of a Dirichlet series, the Riemann zeta function, the Chebyshev function, non-trivial zeros of the Riemann zeta function, Cauchy's residue theorem.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
S. A. Gritsenko, E. I. Deza, L. V. Varukhina, 2019, "On behavior of arithmetical functions, related to Chebyshev function Chebyshevskii sbornik, vol. 20, no. 3, pp. 154–164.

1. Введение

Многие вопросы теории чисел связаны с исследованием *рядов Дирихле*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

и *сумматорных функций*

$$\Phi(x) = \sum_{n\leq x} a_n$$

их коэффициентов ([2, 3, 6, 9, 11, 12, 17]).

Наиболее известным примером ряда Дирихле является *дзета-функция Римана* $\zeta(s)$ ([4, 6, 13, 14, 16]), определенная для любого комплексного числа $s = \sigma + it$ с действительной частью $\mathrm{Re}s = \sigma > 1$ как

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \mathrm{Re}s > 1.$$

Квадрат дзета-функции

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s},\ \mathrm{Re}s > 1,$$

связян с *функцией делителей* $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$, дающей число натуральных делителей натурального числа n. Именно, сумматорной функцией ряда Дирихле $\zeta^2(s)$ является функция $D(x) = \sum_{n\leq x} \tau(n)$, вопросы асимптотической оценки которой известны как *проблема делителей Дирихле* ([4, 5, 7, 8, 12]).

В общем случае,

$$\zeta^k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_k(n)}{n^s},\ \mathrm{Re}s > 1,$$

где функция $\tau_k(n) = \sum_{n=n_1\cdot\ldots\cdot n_k} 1$ дает число представлений натурального числа n в виде произведения k натуральных сомножителей. Сумматорной функцией ряда Дирихле $\zeta^k(s)$ является функция $D_k(x) = \sum_{n\leq x} \tau_k(n)$. Ее изучение - это *многомерная проблема делителей Дирихле* ([4, 5, 6, 7, 8, 12]).

Обобщением дзета-функции Римана и еще одним известным рядом Дирихле является L-функция Дирихле, определяемая равенством

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}, \mathrm{Re}s > 1,$$

где χ — *характер Дирихле* ([3, 4, 6, 16]).

Произведение нескольких L-функций дает ряд

$$L_1(s,\chi_1)\cdot\ldots\cdot L_k(s,\chi_k)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n n^{-s}, \mathrm{Re}s>1,$$

сумматорная функция коэффициентов которого имеет вид

$$C_k(x)=\sum_{n\leq x}c_n=\sum_{n_1\cdot\ldots\cdot n_k\leq x}\chi_1(n_1)\cdot\ldots\cdot\chi_k(n_k).$$

Задача об оценке $C_k(x)$ является обобщением проблемы делителей Дирихле и связана с проблемой делителей в числовых полях ([7, 8, 10, 12, 17]).

Логарифмическая производная дзета-функции $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ представима в виде

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}, \mathrm{Re}s>1.$$

Здесь $\Lambda(n)$ — *функция Мангольдта*:

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\ln p, & \text{если } n=p^k, p\in P, k\in\mathbb{N},\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Таким образом, *функция Чебышева*

$$\psi(x)=\sum_{n\leq x}\Lambda(n)$$

является сумматорной функцией коэффициентов ряда Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}$, соответствующего логарифмической производной $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ дзета-функции Римана.

Функция $\psi(x)$ является хорошо известной арифметической функцией, используемой во многих областях теории чисел. Так, она тесно связана с функцией $\pi(x)=\sum_{p\leq x}1$ (число простых, не превосходящих x), то есть с доказательством асимптотического закона распределения простых чисел ([3, 4, 6]).

В монографии [6] было получено представление функции Чебышева по нулям дзета-функции Римана:

$$\psi(x)=x-\sum_{|\mathrm{Im}\rho|\leq T}\frac{x^{\rho}}{\rho}+O\left(\frac{x\ln^2 x}{T}\right),$$

где $x=n+0,5$, $n\in\mathbb{N}$, $2\leq T\leq x$, и $\rho=\beta+i\gamma$ — *нетривиальные нули* дзета-функции, то есть нули $\zeta(s)$, лежащие в *критической полосе* $0<\mathrm{Re}s=\sigma<1$.

В работе [1] мы получили аналогичные результаты для двух других арифметических функций:

$$\psi_1(x)=\sum_{n\leq x}(x-n)\Lambda(n) \ \text{ и } \ \psi_2(x)=\sum_{n\leq x}\Lambda(n)\ln\frac{x}{n}.$$

Эти функции, родственные функции Чебышева, используются в некоторых теоретико-числовых задачах, связанных с изучением асимптотоического поведения суммарных функций рядов Дирихле.

Именно, были получены асимптотические формулы следующего вида:

$$\psi_1(x)=\sum_{n\leq x}(x-n)\Lambda(n)=\frac{x^2}{2}-\sum_{|\mathrm{Im}\rho|\leq T}\frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)}+O\left(\frac{x^2\ln x}{T}\right),$$

$$\psi_2(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n) \ln \frac{x}{n} = x - \sum_{|\mathrm{Im}\rho| \le T} \frac{x^\rho}{\rho^2} + O\left(\frac{x \ln x}{T}\right),$$

где $x = n + 0,5$, $n \in \mathbb{N}$, $2 \le x \le T$, и $\rho = \beta + i\gamma$ — нули дзета-функции Римана $\zeta(s)$ в критической полосе $0 < \mathrm{Re} s < 1$.

В настоящей статье мы уточняем результат, полученный для функции

$$\psi_1(x) = \sum_{n \le x} (x - n)\Lambda(n).$$

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема. *Для $x > 2$, $T \ge 2$ имеет место формула*

$$\psi_1(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n)(x - n) =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \left(\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}\right) x - \sum_{|\mathrm{Im}\rho| \le T} \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} + O\left(\frac{x^2}{T^2} \ln^2 x\right) + O\left(\sqrt{x} \ln^2 x\right),$$

где $\rho = \beta + i\gamma$ — нетривиальные нули дзета-функции Римана, то есть нули $\zeta(s)$, лежащие в критической полосе $0 < \mathrm{Re} s < 1$.

2. Доказательство вспомогательной леммы

Для доказательства основного результата нам потребуется вспомогательное утверждение об асимптотическом поведении интеграла $\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^{s+1}}{s(s+1)} ds$.

Лемма. *Для $b > 0$ и $T \ge 2$ имеет место формула*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^{s+1}}{s(s+1)} ds = \begin{cases} a - 1 + O\left(a^{b+1} \min\left(\frac{1}{T^2 \ln a}, \frac{1}{T}\right)\right), & \text{если} \quad a > 1, \\ O\left(\frac{1}{T}\right), & \text{если} \quad a = 1, \\ O\left(a^{b+1} \min\left(\frac{1}{T^2 |\ln a|}, \frac{1}{T}\right)\right), & \text{если} \quad 0 < a < 1. \end{cases}$$

Доказательство.

А. Пусть $a > 1$. Рассмотрим положительно ориентированный прямоугольник Γ с вершинами $b - iT$,$b + iT$, $-U + iT$,$-U - iT$, где $U \ge T$.

Тогда по теореме Коши ([15]) мы получаем, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{a^{s+1}}{s(s+1)} ds = a - 1.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^{s+1}}{s(s+1)} ds = a - 1 + O(J_1) + O(J_2),$$

где

$$J_1 = \int_{-U}^{b} \frac{a^{s+1}}{\sigma^2 + T^2} d\sigma, \quad J_2 = \int_{-T}^{T} \frac{a^{-U+1}}{U^2 + t^2} dt.$$

Оценим J_1 сверху двумя разными способами. Во-первых, имеет место следующая оценка:

$$J_1 \le \frac{a}{T^2} \int_{-\infty}^{b} a^\sigma d\sigma = \frac{a^{1+b}}{T^2 \ln a}.$$

Во-вторых, имеет место следующая оценка:

$$J_1 \le a^{b+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\sigma}{\sigma^2+T^2}=\frac{\pi a^{b+1}}{T}.$$

Таким образом,

$$J_1 = O\left(a^{b+1}\min\left(\frac{1}{T^2\ln a},\frac{1}{T}\right)\right).$$

При этом, так как $U>T$, мы получаем для интеграла J_2 такую оценку сверху:

$$J_2 \le \frac{2Ta}{U^2}\le\frac{2a}{U}.$$

Поскольку $\lim_{U\to+\infty} J_2=0$, то для $a>1$ мы получаем, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{a^{s+1}}{s(s+1)}ds = a-1+O\left(a^{b+1}\min\left(\frac{1}{T^2\ln a},\frac{1}{T}\right)\right).$$

B. Пусть $0<a<1$. Рассмотрим прямоугольник Γ_1 с вершинами $b+iT$, $b-iT$, $U-iT$, $U+iT$, где $U\ge T$. Повторяя рассуждения предыдущего пункта, приходим к равенствам

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{a^{s+1}}{s(s+1)}ds=0,$$

то есть

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{a^{s+1}}{s(s+1)}ds = O\left(a^{b+1}\min\left(\frac{1}{T^2|\ln a|},\frac{1}{T}\right)\right).$$

C. Пусть $a=1$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{ds}{s(s+1)}=0,$$

то есть, поскольку $U>T$, имеет место следующая формула:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{ds}{s(s+1)} = O\left(\int_{-U}^{b}\frac{d\sigma}{\sigma^2+T^2}\right)+O\left(\int_{-T}^{T}\frac{dt}{U^2+t^2}\right)=$$

$$=O\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\sigma}{\sigma^2+T^2}\right)+O\left(\frac{T}{U^2}\right)=O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Лемма доказана.

3. Доказательство основной теоремы

Перейдем к формулировке и доказательству основного результата статьи.

Теорема. *Для $x>2$, $T\ge 2$ имеет место формула*

$$\psi_1(x)=\sum_{n\le x}\Lambda(n)(x-n)=$$

$$=\frac{x^2}{2}-\left(\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}\right)x-\sum_{|\mathrm{Im}\rho|\le T}\frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)}+O\left(\frac{x^2}{T^2}\ln^2 x\right)+O\left(\sqrt{x}\ln^2 x\right),$$

где $\rho = \beta + i\gamma$ — нетривиальные нули дзета-функции Римана, то есть нули $\zeta(s)$, лежащие в критической полосе $0 < \mathrm{Re}s < 1$.

Доказательство.

Рассмотрим интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds,$$

где $b = 1 + \frac{1}{\ln x}$, а T выбрано так, чтобы для любого ρ имело место соотношение $|T-\gamma| \geq \frac{c}{\ln T}$, $c > 0$. Имеем:

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} n\Lambda(n)\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{s+1}}{s(s+1)}ds.$$

Применим вспомогательную лемму, полагая $a = \frac{x}{n}$:

$$I = \sum_{n<x}\left(n\Lambda(n)\left(\frac{x}{n}-1\right) + O\left(\frac{x^{1+b}}{n^b}\min\left(\frac{1}{T^2\ln(\frac{x}{n})}, \frac{1}{T}\right)\right)\right) +$$

$$+\sum_{x\leq n}\left(\frac{x^{1+b}}{n^b}\min\left(\frac{1}{T^2\ln(\frac{n}{x})}, \frac{1}{T}\right)\right).$$

Оценим остаток R, разбив соответствующий ряд следующим образом:

$$R = \sum_{n\leq\frac{x}{2}}\frac{x^{1+b}\Lambda(n)}{n^b}\min\left(\frac{1}{T^2\ln(\frac{x}{n})}, \frac{1}{T}\right) + \sum_{\frac{x}{2}<n\leq x-10}\frac{x^{1+b}\Lambda(n)}{n^b}\min\left(\frac{1}{T^2\ln(\frac{x}{n})}, \frac{1}{T}\right) +$$

$$+\sum_{x-10<n\leq x+10}\frac{x^{1+b}\Lambda(n)}{n^b}\min\left(\frac{1}{T^2\ln(\frac{x}{n})}, \frac{1}{T}\right) + \sum_{x+10<n\leq\frac{3x}{2}}\frac{x^{1+b}\Lambda(n)}{n^b}\min\left(\frac{1}{T^2\ln(\frac{x}{n})}, \frac{1}{T}\right) +$$

$$+\sum_{n>\frac{3x}{2}}\frac{x^{1+b}\Lambda(n)}{n^b}\min\left(\frac{1}{T^2\ln(n/x)}, \frac{1}{T}\right) = \sum_1 + \sum_2 + \sum_3 + \sum_4 + \sum_5.$$

Оценим $\sum_j$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

$$\sum_1 = \sum_{n\leq\frac{x}{2}}\frac{x^{1+b}\Lambda(n)}{n^b}\min\left(\frac{1}{T^2\ln(\frac{x}{n})}, \frac{1}{T}\right) = O\left(\frac{x^{1+b}}{T^2}\sum_{n\leq\frac{x}{2}}\frac{\Lambda(n)}{n^b}\right) = O\left(\frac{x^{1+b}}{T^2}\ln^2 x\right).$$

$$\sum_2 = \sum_{\frac{x}{2}<n\leq x-10}\frac{x^{1+b}\Lambda(n)}{n^b}\min\left(\frac{1}{T^2\ln(\frac{x}{n})}, \frac{1}{T}\right) = O\left(\frac{x^{1+b}}{T^2}\sum_{\frac{x}{2}<n\leq x-10}\frac{\ln n}{n^b\ln(\frac{x}{n})}\right) = O\left(\frac{x^2}{T^2}\ln^2 x\right).$$

$$\sum_3 = \sum_{x-10<n\leq x+10}\frac{x^{1+b}\Lambda(n)}{n^b}\min\left(\frac{1}{T^2\ln(\frac{x}{n})}, \frac{1}{T}\right) = O\left(\frac{x^{1+b}}{Tx}\right) = O\left(\frac{x^b}{T}\right).$$

$$\sum_4 = \sum_{x+10<n\leq\frac{3x}{2}}\frac{x^{1+b}\Lambda(n)}{n^b}\min\left(\frac{1}{T^2\ln(\frac{x}{n})}, \frac{1}{T}\right) = O\left(\frac{x^{1+b}}{T^2}\ln^2 x\right).$$

$$\sum_5 = \sum_{n>\frac{3x}{2}}\frac{x^{1+b}\Lambda(n)}{n^b}\min\left(\frac{1}{T^2\ln(n/x)}, \frac{1}{T}\right) = O\left(\frac{x^{1+b}}{T^2}\ln^2 x\right).$$

Поскольку $O\left(\frac{x^{1+b}}{T^2}\ln^2 x\right) = O\left(\frac{x^2}{T^2}\ln^2 x\right)$, и $O\left(\frac{x^b}{T}\right) = O\left(\frac{x}{T}\right)$, то

$$I = \sum_{n\le x}\Lambda(n)(x-n) + O\left(\frac{x^2}{T^2}\ln^2 x\right) + O\left(\frac{x}{T}\right).$$

Рассмотрим интеграл

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds,$$

где Γ_2 — положительно ориентированный прямоугольник с вершинами $b-iT$, $b+iT$, $-0,5+iT$, $-0,5-iT$. По теореме Коши,

$$J = \frac{x^2}{2} + \left(-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}\right)x.$$

С другой стороны,

$$J = I + O\left(\int_{-0,5}^{b}\frac{x^{\sigma+1}}{\sigma^2+T^2}\left|\frac{\zeta'(\sigma+iT)}{\zeta(\sigma+iT)}\right|d\sigma\right) + O\left(\int_{-T}^{T}\frac{x^{-0,5+1}}{0,25+t^2}\left|\frac{\zeta'(-0,5+it)}{\zeta(-0,5+it)}\right|dt\right).$$

Так как

$$\left|\frac{\zeta'(\sigma+iT)}{\zeta(\sigma+iT)}\right| = O\left(\left|\sum_{|\gamma-T|\le 1}\frac{1}{(\sigma-\beta)+i(T-\gamma)}\right|\right) + O(\ln T) = O\left(\ln^2 T\right),$$

$$\left|\frac{\zeta'(-0,5+it)}{\zeta(-0,5+it)}\right| = O\left(\ln^2 T\right),$$

и остаточный член $O\left(\frac{x}{T}\right)$ при $T\le x$ входит в $O\left(\frac{x^2}{T^2}\ln^2 x\right)$, а при $T\ge x$ - в $O\left(\sqrt{x}\ln^2 x\right)$, то

$$I = \frac{x^2}{2} + \left(-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}\right)x + O\left(\sqrt{x}ln^2x\right) + O\left(\frac{x^2}{T^2}\ln^2 x\right).$$

Теорема доказана.

Отметим, что при $T\le x$ в асимптотической формуле остается только один остаточный член $O\left(\frac{x^2}{T^2}\ln^2 x\right)$, и мы получаем следующий результат.

Следствие. *Для $x>2$, $T\le 2$ имеет место формула*

$$\psi_1(x) = \sum_{n\le x}\Lambda(n)(x-n) =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \left(\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}\right)x - \sum_{|\mathrm{Im}\rho|\le T}\frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} + O\left(\frac{x^2}{T^2}\ln^2 x\right),$$

где $\rho=\beta+i\gamma$ — нетривиальные нули дзета-функции Римана, то есть нули $\zeta(s)$, лежащие в критической полосе $0<\mathrm{Re}s<1$.

4. Заключение

Таким образом, в статье получены новые результаты, связанные с проблемой представления арифметических функций в виде сумм по нетривиальным нулям дзета-функции Римана.

В дальнейшем интересно было бы рассмотреть вопросы получения новых теоретико-числовых результатов, связанных с указанной проблемой. Одной из перспективных задач является получение аналогичных представлений по нетривиальным нулям дзета-функции Римана других арифметических функций, родственных функции Чебышева; такие функции нетрудно построить, если использовать логарифмические производные произведения нескольких L-рядов Дирихле.

С другой стороны, было бы интересно рассмотреть конкретные задачи на применение уже полученных представлений ([6]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Деза Е. И., Варухина Л. В. Вопросы суммирования арифметических функций, родственных функции Чебышева // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, № 2. С. 319–333.

2. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985.

3. Виноградов И. М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1981.

4. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994.

5. Карацуба А. А. Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле // Известия АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36, № 3. С. 475–483.

6. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.

7. Пантелеева (Деза) Е. И. К вопросу о проблеме делителей Дирихле в числовых полях // Математические заметки. 1988. Т. 44, вып. 4. С. 494–505.

8. Пантелеева (Деза) Е. И. Одно замечание к вопросу о проблеме делителей // Математические заметки. 1993. Т. 53, вып. 4. С. 148–152.

9. Пантелеева (Деза) Е. И. О средних значениях некоторых арифметических функций // Математические заметки. 1994. Т. 55, вып. 5. С. 7–12.

10. Пантелеева (Деза) Е. И. Проблема делителей Дирихле в кольце целых Гауссовых чисел // Труды МПГУ. 2001. № 4. С. 23–34.

11. Пантелеева Е. И., Варухина Л. В. Об оценке сумматорных функций рядов Дирихле // Научные труды математического факультета МПГУ. Юбилейный сборник. М.: МПГУ, 2000. С. 45–56.

12. Пантелеева Е. И., Варухина Л. В. Об оценке дзетовой суммы и проблеме делителей Дирихле // Вестник Санкт-петербургского Университета. 2013. Сер. 1, вып. 4. С. 15–24.

13. Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967.

14. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953.

15. Титчмарш Е. К. Теория функций. М.: Наука, 1980.

16. Iviĉ A. The Riemann zeta-function. New Jork: J. Wiley & Sons, 1985.

17. Deza E., Varukhina L. On mean values of some arithmetic functions in number fields // Discrete Mathematics. 2008. Vol. 308. P. 4892–4899.

18. Deza E., Varukhina L. Representations of arithmetic sums over non-trivial zeros of the zeta function // Asian-European Journal of Mathematics. 2008. Vol. 1, issue 4. P. 509–519.

REFERENCES

1. Deza, E. I., Varukhina, L. V. 2018, "Problems of the summation of arithmetical functions, relative to Chebyshev function", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 19, N 2, pp. 319–333.

2. Borevich, Z. I. & Shafarevich, I. R. 1985, "Theory of numbers", *M.: Nauka.*

3. Vinogradov, I. M. 1981, "Bases of the theory of numbers", *M.: Nauka.*

4. Voronin, S. M. & Karatsuba, A. A. 1994, "Riemann zeta function", *M.: Fizmatlit.*

5. Karatsuba, A. A. 1972, "Uniform estimate of error term in Dirichlet divisor problem", *Izv. Acad. of Sci. SSSR, Math.*, Vol. 36, N 3, pp. 475–483.

6. Karatsuba, A. A. 1983, "Bases of the analytical theory of numbers", *M.: Nauka.*

7. Panteleeva (Deza), E. I. 1988, "Dirichlet divisor problem in number fields", *Mathematical notes*, Vol. 44, issue 4, pp. 494–505.

8. Panteleeva (Deza), E. I. 1993, "A remark to Divisor problem", *Mathematical notes*, Vol. 53, issue 4, pp. 148–152.

9. Panteleeva (Deza), E. I. 1994, " Average values of some arithmetic functions", *Mathematical notes*, Vol. 55, issue 5, pp. 7–12.

10. Panteleeva (Deza), E. I. 2001, "Dirichlet divisor problem in the ring of the Gaussian integers", *Works of MPGU*, N 4, pp. 23–34.

11. Panteleeva (Deza), E. I.& Varukhina, L. V. 2000, "Estimations of adding function of Dirichlet series", in *Scientific works of mathematical department of MPGU*, *M.: MPGU*, pp. 45–56.

12. Panteleeva (Deza), E. I. & Varukhina L. V. 2013, "On estimation of zeta sums and Dirichlet divisor problem", *Issue of St. Petersburg University*, Series 1, issue 4, pp. 15–24.

13. Prahar, K. 1967, "Distribution of prime numbers", -*M.: Mir.*

14. Titchmarsh, E. K. 1953, "The theory of the Riemann zeta function", *M.: IL.*

15. Titchmarsh, E. K. 1980, "The theory of functions", *M.: Nauka.*

16. Iviĉ, A. 1985, *The Riemann zeta function*, *New Jork: J. Wiley & Sons.*

17. Deza, E. & Varukhina, L. 2008, "On mean values of some arithmetic functions in number fields", *Discrete Mathematics*, Vol. 308, pp. 4892–4899.

18. Deza, E. & Varukhina, L. 2008, "Representations of arithmetic sums over non-trivial zeros of the zeta function", *Asian-European Journal of Mathematics*, Vol. 1, issue 4. pp. 509–519.

Получено 16.10.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 517+519.713 DOI 10.22405/2226-8383-2019–20-3-165-192

Поведение конечных автоматов в лабиринтах[1]

Д. В. Гусев

Гусев Даниил Владимирович — аспирант, Московский физико-технический институт (г. Москва).
e-mail: gusdzerzhi@yandex.ru

Аннотация

Работа посвящена исследованию задач о поведении конечных автоматов в лабиринтах. Для любого n строится лабиринт, который можно обойти с помощью $2n$ камней но нельзя обойти с помощью n камней.

Спектр задач обхода обширен и затрагивает ключевые аспекты теоретической Computer Science. Конечно, решение таких задач не означает автоматическое решение сложных проблем теории сложности, тем не менее рассмотрение данных вопросов может положительно сказаться на понимании сути теоретической Computer Science. Есть надежда, что поведение автоматов в лабиринтах является хорошей моделью для нетривиальных теоретико-информационных задач, и отработка методов и подходов к исследованию поведения роботов даст более серьезные результаты с будущем.

Задачи связанные с автоматным анализом геометрических сред имеют довольно богатую историю изучения. Первой работой, давшей начало подобного рода задачам, стоит признать работу Шеннона [24]. В ней рассматривается модель мыши в виде автомата, которая должна найти определенную цель в лабиринте. Другая ранняя работа, так или иначе затрагивающая нашу проблематику, это работа Фишера [9] о вычислительных системах с внешней памятью в виде дискретной плоскости.

Серьёзным толчком к исследование поведения автоматов в лабиринтах послужила работы Деппа [7, 8], в которых предложена следующая модель: имеется некоторая конфигурация клеток из $\mathbb{Z}^2$ (шахматный лабиринт), в которой конечные автоматы, обозревая некоторую окрестность клетки, в которой они находятся, могут перемещаться в соседнюю клетку в одном из четырёх направлений.

Основной вопрос, который ставится в подобной модели, существует ли автомат обходящий все подобные лабиринты.

В [20] Мюллер построил для заданного автомата плоскую ловушку (лабиринт который обходится не полностью) в виде 3-графа. Будах [5] построил шахматную ловушку для любого заданного конечного автомата. Отметим, что решение Будаха было довольно сложным (первые варианты содержали 175 страниц). Более наглядные решения данного вопроса представлены здесь [29, 31, 33, 34]. Антельман [2] оценил сложность подобной ловушки по числу клеток, а в [1] Антельман, Будах и Роллик сделали конечную ловушку для любой конечной системы автоматов.

В постановке с шахматным лабиринтом и одним автоматом есть ещё ряд результатов, связанных с проблемами обходимости лабиринтов с различными числом дыр, с расслоениями лабиринтов по количеству состояний автомата и другими вопросами. Обзор подобных проблем можно найти например здесь [35].

Невозможность обхода всех плоских шахматных лабиринтов одним автоматом выдвинула вопрос об изучении возможных усилений модели автомата, которая решит задачу обхода. Основным способом усиления может являться рассмотрение коллектива автоматов,

[1]Работа была поддержана Российским научным фондом (грант № 17-11-01377).

вместо одного автомата, взаимодействующих между собой. Частным и широко используемым случаем является рассмотрение системы из одного полноценного автомата и некоторого количества автоматов камней, которые не имеют внутреннего состояние и могут передвигаться только совместно с главным автоматом. Взаимодействие между автоматами является ключевой особенностью данного усиления, оно позволяется иметь коллективу (или одному автомату с камнями) внешнюю память, тем самым существенно разнообразит его поведение. Если от взаимодействия автоматов избавиться, то полученная независимая система будет немногим лучше одного автомата.

Далее обсудим известные результаты связанные с коллективом автоматов.

Ключевые слова: обход лабиринта, конечный автомат.

Библиография: 38 названий.

Для цитирования:

Д. В. Гусев. Поведение конечных автоматов в лабиринтах // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 165–192.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 3.

UDC 517+519.713 DOI 10.22405/2226-8383-2019–20-3-165-192

Behavior of finite automata in mazes[2]

D. V. Gusev

Gusev Daniil Vladimirovich — post-graduate student, Moscow Institute of physics and technology (Moscow).
e-mail: gusdzerzhi@yandex.ru

Abstract

The paper is devoted to the study of problems on the behavior of finite automata in mazes. For any n, a maze is constructed that can be bypassed with $2n$ stones but you can't get around with n stones.

The range of tasks is extensive and touches upon key aspects of theoretical Com - puter Science. Of course, the solution of such problems does not mean the automatic solution of complex problems of complexity theory, however, the consideration of these issues can have a positive impact on the understanding of the essence of theoretical Computer Science. It is hoped that the behavior of automata in mazes is a good model for non-trivial information theoretic problems, and the development of methods and approaches to the study of robot behavior will give more serious results in the future.

Problems related to automaton analysis of geometric media have a rather rich history of study. The first work that gave rise to this kind of problems, it is necessary to recognize the work of Shannon [24]. It deals with a model of a mouse in the form of an automaton, which must find a specific target in the maze. Another early work, one way or another affecting our problems, is the work of Fisher [9] on computing systems with external memory in the form of a discrete plane.

A serious impetus to the study of the behavior of automata in mazes was the work of Depp [7, 8], in which the following model is proposed: there is a certain configuration of cells from

[2]The work was supported By the Russian scientific Foundation (grant № 17-11-01377).

$mathbbZ^2$ (chess maze), in which finite automata, surveying some neighborhood of the cell in which they are, can move to an adjacent cell in one of four directions.

The main question posed in such a model is whether there is an automaton that bypasses all such mazes.

In [20], Muller constructed a flat trap for a given automaton (a maze that does not completely bypass) in the form of a 3-graph. Budach [5] constructed a chess trap for any given finite automaton. Note that Budach's solution was quite complex (the first versions contained 175 pages). More visual solutions to this question are presented here [29, 31, 33, 34]. Antelman [2] estimated the complexity of such a trap by the number of cells, and in [1] Antelman, Budach, and Rollick made a finite trap for any finite automaton system.

In the formulation with a chess maze and one automaton, there are a number of results related to the problems of traversability of labyrinths with different numbers of holes, with bundles of labyrinths by the number of States of the automaton, and other issues. An overview of such problems can be found for example here [35].

The impossibility of traversing all flat chess labyrinths with one automaton raised the question of studying the possible amplifications of the automaton model, which will solve the problem of traversal. The main way of strengthening can be the consideration of a collective of automata, instead of one automaton, interacting with each other. A special and widely used case is the consideration of a system of one full-fledged automaton and a certain number of automata of stones, which have no internal state and can move only together with the main automaton. Interaction between machines is a key feature of this gain, it is allowed to have a collective (or one machine with stones) external memory, thereby significantly diversifies its behavior. If you get rid of the interaction of automata, the resulting independent system will be little better than a single machine.

Next, we discuss the known results associated with the collective automata.

Keywords: maze traversal, finite state machine.

Bibliography: 38 titles.

For citation:
D. V. Gusev, 2019, "Behavior of finite automata in mazes", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 165–192.

1. Введение

Первой работой вязанной с коллективами автоматов можно считать работу Блюма и Козена [3], в которой авторы демонстрируют, каким образом можно обойти конечный шахматный лабиринт с помощью автомата и двух камней или двух взаимодействующих автоматов. Хофман [14, 15] установил, что автомат с камнем в общем случае не обходит конечный шахматный лабиринт. Хемерлинга [12] и Кригела [18] показали, что класс шахматных конечных лабиринтов допускает естественное расслоение, (для любого слоя найдется коллектив из одного автомата с камнем, обходящий этот слой) в качестве параметра расслоения здесь выступает число дыр в лабиринте.

Случай плоского бесконечного шахматного лабиринта оказался более сложным. В работе [4] Блюм и Сакода установили, что автомат с семью камнями может обойти бесконечный шахматный лабиринт. После доказательство этого факта было уточнено Хабасинским и Карпинским [10]. В работе [25] Шепитовский с помощью алгоритма из [3] показал, что обойти можно, используя всего 5 камней. В [17, 30] Килибарада показывает, что нельзя обойти бесконечный шахматный лабиринт одним автоматом с тремя камнями (а также просто четырьмя автоматами) и можно двумя автоматами с тремя камнями. Таким образом для данной задачи остаётся открытым вопрос о обходе лабиринта автоматом с четырьмя камнями.

Для лабиринтов более общего вида Блюмом и Сакодой [4] частично обосновано, а впоследствии доказано Хемерлингом [13] наличие ловушки уже в трехмерном случае. Также установлено наличие бесконечной трехмерной ловушки сразу для всех коллективов автоматов [32]. При этом каждый коллектив обходит только конечную часть лабиринта. Ролликом предложен подобный результат для лабиринтов, имеющих вид плоского кубического графа [21].

Отдельный интерес представляет обход пространств $\mathbb{Z}^k$ для различных k. В [27] Анджансом рассмотрены случаи для малых k, в частности $\mathbb{Z}$ нельзя обойти автоматом с одним камнем, и можно автоматов с двумя камнями. Также существует лёгкий способ обойти $\mathbb{Z}^2$ используя автомат с тремя камнями. При этом любое $\mathbb{Z}^k$ обходится с помощью эмуляции машины Минского автоматом с тремя камнями [19]. При этом данный обход экспоненциальнен по времени и мной в моей бакалаварской работе был предъявлен автомат с четырьмя камнями обходящий быстро любое $\mathbb{Z}^k$. Также легко показать, что автомата с двумя камнями не достаточно для обхода $\mathbb{Z}^k, k > 1$.

В работах Савича [22, 23] рассмотрены специальные классы лабиринтов, для которых установлено, что проблема выхода из них по специальным путям эквивалентна открытой проблеме совпадения языков, распознаваемых детерминированными и недетерминированными линейно ограниченными машинами Тьюринга.

1.1. Постановка задачи и содержание работы

Если рассматривать только задачу обхода какого-либо семейства лабиринтов автоматом с некоторым набором камней, можно заметить, что до сих пор нижние и верхние оценки на количество необходимых для обхода камней были либо маленькими числами, либо были доказательства, что с никаким числом камней лабиринт не обходится. Поэтому, логично поставить задачу о нахождении лабиринта, который обходится с k камнями и не обходится с $k-1$. Собственно, построение подобного лабиринта являлось основной задачей этой работы.

В итоге, конкретно такой лабиринт построить не удалось, тем не менее построен лабиринт обладающий довольно близкими свойствами к требуемому, а именно $k+3$ мерный мозаичный лабиринт, который нельзя обойти с k камнями и заведомо можно с $2k+2$ камнями.

Были опробованы различные конструкции лабиринта. Основной идеей была модификация уже существующих лабиринтов посредством встраивания других лабиринтов в рёбра. После многочисленных не очень удачных попыток, была придумана конфигурация, которая дала нужные свойства.

В табличке ниже можно сравнить полученный лабиринт с некоторыми другими лабиринтами или семействами лабиринтов.

Лабиринт	Нельзя обойти	Можно обойти
Конечные плоские	1	2
Бесконечные плоские	3	5
$\mathbb{Z}$	1	2
$\mathbb{Z}^k, k > 1$	2	3
Конечные трёхмерные	∞	-
Планарные 3-графы	∞	-
$B(2, 665)$	∞	-
$k+3$-мерный специального вида	k	$2k+2$

Меньшая часть работы связана с использованием бёрнсайдовых свободных групп для построения сильной ловушки для любого коллектива автоматов. Используя подобные группы, мы получили лабиринт с максимально сильными свойствами в терминах коллективов автоматов. Ближайший аналог этого лабиринта, строится здесь [32], при этом построение получается довольно сложным. В нашем случае вся сложность заложена в структуре группы, при этом доказательство самого факта и описание самого лабиринта получается довольно простым.

Далее в работе мы сначала дадим все необходимые определения, потом рассмотрим сложную ловушку основанную на бёрнсайдовых группах и в конце концов предъявим необходимые построения и доказательства для лабиринта с нетривиальной оценкой на количество камней.

2. Определения

В этой секции мы введём основные определения, которые нам понадобятся. Во-первых мы определим понятие лабиринта. В нашем случае лабиринтом будет некоторый граф со специальной структурой на рёбрах. Отметим, что возможны и другие определения лабиринта. Во-вторых, определим конечный автомат и способ взаимодействия автомата с лабиринтом, то как автомат двигается по лабиринту. В-третьих, обобщим понятие конечного автомата до понятия коллектива автоматов. Также, определим поведение коллектива автоматов в лабиринте. В-четвёртых, определим интересный нам случай коллектива автоматов, где в коллективе некоторые автоматы (автоматы-камни) очень просто устроены.

При этом будем пользоваться основными понятиями и обозначениями теории из автоматов и графов, принятыми здесь [33, 34, 38].

2.1. Общие определения

Введём некоторые теоретико-множественные обозначения. Пусть X — некоторое множество. Через $|X|$ будем обозначать мощность X. Через $\mathcal{P}(X)$ будем обозначать булеан множества X. Через $\mathcal{P}_0(X)$ — булеан без пустого множества. Пусть $\{X_i\}_{i\in A}$ — семейство множеств, тогда через Pr_i обозначим проектирование произведения $\prod_{j\in A} X_j$ на i-ый сомножитель.

2.2. Лабиринт

В данной части введём понятия лабиринта.

Рассмотрим $G=(V,E)$ некоторый ориентированный граф. V — множество вершин графа G (не более чем счётное), E — множество рёбер (не более чем счётное). Назовём, тройку (G,f,X) — нагруженным графом, где $f : E \to X$ — разметка дуг графа, X — множество отметок (конечное). Для простоты разметку на ребре (v,u), будем обозначать $f(v,u)$.

Пусть X — некоторое конечное множество $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Через $D(X)$ будем обозначать множество $\{a_1, a_2, ..., a_n, \overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}\}$, где $\overline{a_i}$ — обратный элемент к a_i и наоборот. Обратный элемента к $a \in A_0$ будет обозначать также, через a^{-1} или $-a$, в зависимости от ситуации. Помимо множества $D(X)$, для удобства иногда будет использоваться 0 — нулевой элемент.

Определение 1. *Пусть $G=(E,V)$ — симметрический ориентированный граф без петель и кратных дуг. Тогда нагруженный граф $(G,f,D(X))$, для некоторого X, будем называть лабиринтом, если выполнено:*

- *Для любой вершины $v \in V$ и рёбер $(v,u),(v,w) \in E$, $f(v,u) \neq f(v,w)$*
- *Для любых $v,u \in V$ если $(v,u) \in E$, то $(u,v) \in E$ (из условия симметричности графа) и $f(v,u) = f(u,v)^{-1}$*

Для удобства доопределим $f(v,v)=0$, $v \in V$, $0 \notin D(X)$.

Замечание 1. *Симметрический ориентированному графу без петель и кратных дуг соответствует неориентированный граф без петель и кратных дуг. Поэтому иногда для удобства будем описывать обычный граф, подразумевая при это ориентированному симметрический.*

Для лабиринта $L = (G, f, D(X)) = ((V, E), f, D(X))$, обозначим $[v]_L = \{f(v, u)|(v, u) \in E\}$ – множество меток на выходящих из вершины v дугах. Также $[v]_L$ будем называть конфигурацией вершины. Пару дуг $(u, v), (u, v) \in E$ будем обозначать $< u, v >$ (при этом для удобства допускаем обозначение $< u, v > \in E$).

Определение 2. *Назовём лабиринт $L' = ((V', E'), f', D(X))$ — подлабиринтом лабиринта $L = ((V', E'), f', D(X))$, если*

- $V' \subseteq V$ *и* $E' \subseteq E$;
- *для любых* $v_1, v_2 \in V'$ *если* $(v_1, v_2) \in E$, *то* $(v_1, v_2) \in E'$, *причём* $f(v_1, v_2) = f'(v_1, v_2)$.

Через $\mathcal{L}(D(X))$ будем обозначать множество (семейство) всех лабиринтов $(G, f, D(X))$, где G и f корректно заданный граф и разметка на нём.

2.3. Автоматы

В этой части определим конечный автомат и поведение конечного автомата в лабиринте.

Под конечным автоматом $\mathfrak{A}$ будем понимать пятёрку (A, Q, B, φ, ψ), где A, B, Q — конечные множества (алфавиты): входной, выходной и алфавит состояний. $\varphi : Q \times A \to Q$, $\psi : Q \times A \to B$ — функции переходов и выходов. Если начальное состояние $q_0 \in Q$ фиксировано, то такой автомат $\mathfrak{A}_{q_0} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$ будем называть инициальным. Далее, если факт иницальности будет важен для нас, тогда будем обозначать автомат нижним индексом. Часто вместо конечного автомата будем говорить просто автомат.обратная

Определим взаимодействие автомата и лабиринта. Пусть задано некоторое семейство лабиринтов $\mathcal{L}(D(X))$.

Определение 3. *Автомат $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ — называется $\mathcal{L}(D(X))$-допустимым автоматом, если*

- $A = \mathcal{P}_0(D(X))$, $B = D(X) \cup \{0\}$
- $\psi(q, a) \in a \cup \{0\}$, *для любых* $q \in Q, a \in A$

Определение 4. *Поведением инициального $\mathcal{L}(D(X))$-допустимого автомата*

$$\mathfrak{A}_{q_0} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$$

в лабиринте $L = ((V, E), f, D(X))$ с начальной вершиной $v_0 \in V$, назовем последовательность $\pi(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0}) = (q_0, v_0), (q_1, v_1), \ldots$, такую, что

- $q_t \in Q$, $v_t \in V$, $(v_t, v_{t+1}) \in E$ *или* $v_t = v_{t+1}$
- $\varphi(q_t, [v_t]_L) = q_{t+1}$, $\psi(q_t, [v_t]_L) = f(v_t, v_{t+1})$

Положим $\pi_t(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0}) = (q_t, v_t)$.

Таким образом, A — входной алфавит автомата и множество различных возможных конфигураций вершины (множество меток на исходящих рёбрах), B – множество вариантов движения автомата, Q – множество состояний автомата (его внутренняя память), φ – функция отвечающая за изменение состояния автомата, ψ — за ходы автомата в лабиринте. В каждый момент времени автомат «видит» метки на дугах исходящих из текущей вершины лабиринта и в соответствии с набором этих меток и внутренним состоянием, он передвигается по какой-то из дуг в соседнюю вершину лабиринта и меняет своё внутренне состояние.

Пусть $\mathrm{Int}(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0}) = \bigcup\limits_{t=0}^{\infty}\{v_t\}$ — множество всех лабиринта вершин, которые автомат обойдет; $\mathrm{Fr}(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0}) = V \setminus \mathrm{Int}(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0})$ – множество вершин, которые автомат не обойдет.

Будем говорить, что $\mathfrak{A}_{q_0}$ обходит L_{v_0}, если $\mathrm{Fr}(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0}) = \emptyset$. Говорим, что $\mathfrak{A}_{q_0}$ сильно обходит L, если он обходит его начиная из любой вершины лабиринта. L_{v_0} — ловушка для $\mathfrak{A}_{q_0}$, если автомат не обходит лабиринт; L — ловушка для $\mathfrak{A}_{q_0}$, если автомат не обходит лабиринт с какой бы вершины он ни начинал.

2.4. Независимая система автоматов

Иногда в одном лабиринте L из вектора начальных вершин $\vec{v_0} = (v_0^1, ..., v_0^m)$ одновременно запускается сразу несколько инициальных автоматов $\mathcal{A}_{\vec{q_0}} = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, ..., \mathfrak{A}_m)$ с вектором начальных состояний $\vec{q_0} = (q_0^1, ..., q_0^m)$. Такую систему автоматов будем называть независимой. Логично для неё определить.

$$\mathrm{Int}(\mathcal{A}_{\vec{q_0}}, L_{\vec{v_0}}) = \bigcup_{t=1}^{m} \mathrm{Int}(\mathcal{A}_{i,q_0^i}, L_{v_0^i})$$

$$\mathrm{Fr}(\mathcal{A}_{\vec{q_0}}, L_{\vec{v_0}}) = V \setminus \mathrm{Int}(\mathcal{A}_{\vec{q_0}}, L_{\vec{v_0}})$$

Тогда, понятия (сильного) обхода и (сильной) ловушки для независимой системы автоматов определяются также как и для одного автомата.

2.5. Коллектив автоматов

По аналогии с одним автоматом, определим понятие коллектива автоматов и поведение коллектива в лабиринтах. Пусть задано некоторое семейство лабиринтов $\mathcal{L}(D(X))$.

Определение 5. *Набор $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, ..., \mathfrak{A}_m)$ называется коллективом $\mathcal{L}(D(X))$-допустимых автоматов, где $\mathfrak{A}_i = (A_i, Q_i, B_i, \varphi_i, \psi_i)$, для $i = 1, ...m$, некоторые автоматы, для которых выполнено:*

- $A_i = \{a \in \mathcal{P}_0(D(X)) \times \prod\limits_{i=1}^{m}(\theta \cup Q_i) | \, \mathrm{Pr}_{i+1}(a) = \theta\}$, *где $\theta \notin \bigcup\limits_{i=1}^{m} Q_i$ – некоторый выделенный элемент*
- $B_i = D(X) \cup \{0\}$
- $\psi_i(q, a) \in \mathrm{Pr}_1(a) \cup \{0\}$, *для любых $q \in Q_i, a \in A_i$*

Аналогично случаю с одним автоматом, если у всех m автоматов заданы начальные состояния $\vec{q_0} = (q_0^1, ..., q_0^m)$, то коллектив будем называть инициальным и обозначать $\mathcal{A}_{\vec{q}}$

Пусть $L = ((V, E), f, D(X))$ некоторый лабиринт; $\vec{v} = (v_1, ..., v_m)$, $v_i \in V$, набор вершин лабиринта L; $\vec{q} = (q_1, ..., q_m)$, где $q_i \in Q_i$ – некоторое состояние автомата $\mathfrak{A}_i$. Пусть для любого $i = 1, ..., m$

$$a_i(\vec{q}, \vec{v}) = ([v_i]_L, q'_{i1}, q'_{i2}, ..., q'_{im})$$

где для $1 \leq j \leq m$, $q'_{ij} = q_j$, если $v_i = v_j$ и $i \neq j$, иначе $q_{ij} = \theta$.

Определение 6. *Поведением коллектива $\mathcal{L}(D(X))$-допустимых автоматом $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, ..., \mathfrak{A}_m)$ с начальными состояниями $\vec{q_0} = (q_0^1, ..., q_0^m)$, $q_i \in Q_i$ в лабиринте $L = ((V, E), f, D(X))$ с набором начальных вершин $\vec{v_0} = (v_0^1, ..., v_0^m)$, назовем последовательность*

$$\pi(\mathcal{A}_{\vec{q_0}}, L_{\vec{v_0}}) = (\vec{q_0}, \vec{v_0}), (\vec{q_1}, \vec{v_1}), ...,$$

где $\vec{q_t} = (q_t^1, ..., q_t^m)$, $\vec{v_t} = (v_t^1, ..., v_t^m)$, такую, что

- $q_t^i \in Q_i$, $v_t^i \in V$, $(v_t^i, v_{t+1}^i) \in E$ или $v_t^i = v_{t+1}^i$
- $\varphi_i(q_t^i, a_i(\vec{q}, \vec{v})) = q_{t+1}^i$
- $\psi(q_t^i, a_i(\vec{q}, \vec{v})) = f(v_t^i, v_{t+1}^i)$

Положим $\pi_t(\mathcal{A}_{\vec{q_0}}, L_{\vec{v_0}}) = (\vec{q_t}, \vec{v_t})$.

Если в случае с одним автоматом, автомат принимает решение по какой метке пойти только в соответствии со своим состоянием, в случае коллектива их m автоматов, каждый автомат также учитывает состояния всех автоматов стоящих в текущий момент в той же вершине, что и он. Таким образом возникает «обратная связь» между автоматами.

Пусть,

$$\mathrm{Int}_i(\mathcal{A}_{\vec{q_0}}, L_{\vec{v_0}}) = \bigcup_{t=0}^{\infty} \{v_t^i\}, \forall i = 1, ..., m$$

$$\mathrm{Int}(\mathcal{A}_{\vec{q_0}}, L_{\vec{v_0}}) = \bigcup_{t=1}^{m} \mathrm{Int}_i(\mathcal{A}_{\vec{q_0}}, L_{\vec{v_0}})$$

$$\mathrm{Fr}(\mathcal{A}_{\vec{q_0}}, L_{\vec{v_0}}) = V \setminus \mathrm{Int}(\mathcal{A}_{\vec{q_0}}, L_{\vec{v_0}})$$

Тогда, понятия (сильного) обхода и (сильной) ловушки определим так же, как в случае с одним автоматом.

2.6. Коллектив с камнями

Определим частый случай коллектива – коллектив с камнями.

Определение 7. *Пусть $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, ..., \mathfrak{A}_m)$ – некоторый $\mathcal{L}(D(X))$-допустимый коллектив автоматов. Набор $(\mathfrak{A}_{i_1}, \mathfrak{A}_{i_2}, ..., \mathfrak{A}_{i_k})$, $1 \le i_1 < ... < i_k \le m$ назовём системой камней в коллективе $\mathcal{A}$, если*

- *у любого из этих автоматов $\mathfrak{A}_{i_j}$ только одно состояние – $q_{i_j}^0$*
- *у любого из этих автоматов $\mathfrak{A}_{i_j}$, для любого $a \in A_{i_j}$ либо $\psi_{i_j}(q_{i_j}^0, a) = 0$, либо $\psi_{i_j}(q_{i_j}^0, a) = \sigma$, но тогда существует автомат $\mathfrak{A}_l$ из этого коллектива, не являющийся камнем ($l \ne i_{j'}$, $j' = 1, ..., k$), со следующим свойством. Если $a = (b, z_1, ..., z_m)$, где $z_{i_j} = \theta$ как и положено, тогда выполнено $z_l \ne \theta$, а также $\psi_l(z_l, a') = \sigma$, где $a' = (b, z_1', ..., z_m')$, $z_l' = \theta, z_{i_j}' = q_{i_j}^0$ и $z_i' = z_i$ для остальных $i = 1, ..., m$.*

То есть, автомат-камень $\mathfrak{A}_{i_j}$ может двигаться, только тогда, когда в вершине с ним есть обычный автомат $\mathfrak{A}_l$, причем двигаться они будут по одной метке (в одном направлении).

Если в коллективе автоматов $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, ..., \mathfrak{A}_m)$, есть k автоматов-камней , то будем называть этот коллектив типа $(m - k, k)$. В основном нас будут интересовать коллективы типа $(k, 0)$ (все автоматы полноценные) или $(1, k)$ (одни автомат и k камней). В случае с коллективом типа $(1, k)$ будем подразумевать, что за всю сложную логику отвечает автомат, он принимает решение брать с собой камни стоящие с ним в одной вершине или не брать в соответствии своим состоянием.

3. Построение сильной ловушки для любого коллектива автоматов

В этой секции мы построим сильную ловушку для любого коллектива автоматов. Ловушка будет выглядеть как граф Кэли некоторой группы. Сама группа будет и, соответственно, лабиринт бесконечны, но любой коллектив автоматов обойдёт лишь конечную область в нём, что мы и докажем.

3.1. Проблема Бёрнсайда и её решения

Проблема Бёрнсайда о периодических группах фиксированного периода была поставлена Бёрнсайдом в 1902 году в следующей форме [6]

Проблема 1. *Пусть группа G имеет m независимых порождающих элементов $a_1, a_2, ..., a_m$ и для любого любого элемента $x \in G$ выполнено соотношение $x^n = 1$, где n — данное целое число. Будет ли определенная таким образом группа конечной, и если да, то каков ее порядок?*

Сейчас группы, определенные m порождающими и соотношением $x^n = 1$, называют свободными бёрнсайдовыми группами ранга m и периода n (экспоненты n). Обычно они обозначаются как $B(m, n)$.

Понятно, что вопрос нетривиален для случая $m > 1$. Самим Бёрнсайдом показана конечность $B(m, n)$ для $n \leq 3$ и любого m и $B(2, 4)$ [6]. Сановым [37] показана конечность $B(m, n)$ для $n = 4$ и любого, М.Холлом [11] для $n = 6$ и любого.

В 1964 году Голод и Шафаревич [28] доказали, что существуют бесконечные 2-порожденные периодические группы с неограниченными периодами элементов. В 1968 году Новиков и Адян представили отрицательное решение проблемы Бёрнсайда [36] для любого нечётного периода $n \geq 4381$ и любого $m > 1$. В [26] Адяном решение упрощено и доказано, что $B(m, n)$ бесконечны для любого нечётного $n \geq 665$ и любого $m > 1$.

Теорема 1. *$B(m, n)$ – бесконечна для всех нечётных $n \geq 665$ при $m > 1$.*

В 1992 году Иванов [16] анонсировал отрицательное решение для больших чётных периодов.

Таким образом, мы имеет бесконечные группы порождённые конечным количеством элементов, при этом период каждого элемента равномерно ограничен. В дальнейшем, при построении лабиринта, будем использовать какую-нибудь из таких групп, например $B(2, 665)$.

3.2. Определение лабиринта

Пусть G бесконечная группа нужного вида, M такое, что $g^M = 1$ для любого $g \in G$. $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ – множество её образующих группы G, среди которых нет повторяющихся и обратных. $S^{-1} = \{s_1^{-1}, s_2^{-1}, ..., s_n^{-1}\}$. Положим $D(S) = S \cup S^{-1}$, где структура обратных элементов в $D(S)$, такая же как в группе G.

Построим граф Кэли (ориентированный симметрический) для группы G и сделаем его нагруженным метками из $D(S)$. А конкретнее:

- за множество вершин V возьмём множество элементов группы G;
- между вершинами, отвечающими элементам g_1 и g_2 проведем дуги (g_1, g_2) и (g_2, g_1), если $g_1 s = g_2$, для некоторого $s \in S$;
- положим $f(g_1, g_2) = s$, $f(g_2, g_1) = s^{-1}$

Таким образом получился размеченный симметрический граф $((V,E),f,D(S))$ без кратных дуг и петель, удовлетворяющий условиям лабиринта. То есть, мы построили лабиринт по группе G, будем обозначать его L_G. Далее будем отождествлять элементы группы и вершины, а также будет использовать групповые операции над вершинами, если это потребуется.

Пусть $g = t_1t_2...t_n$, где $g \in G$ и $t_i \in D(S)$, причем n минимальное число с такими свойствами, т.е g нельзя представить меньшим количеством элементов из $D(S)$. Тогда будем обозначать $d(g) = n$. Заметим, что $d(g) = d(g^{-1})$. Также, легко видеть, что кратчайшее расстояние в лабиринте между двумя вершинами v_1 и v_2, равно $d(v_1^{-1}v_2) = d(v_2v_1^{-1})$.

3.3. Единичный автомат

Рассмотрим сначала случай с одним автоматом. Покажем, что единичный автомат сможет обойти только ограниченную часть L_G.

Пусть $\mathfrak{A}$ – $L(D(S))$-допустимый автомат. Заметим, что ход автомата в конкретной вершине определяется исключительно его состояние, поскольку конфигурация всех вершин одинакова (из каждой выходит $2n$ дуг всех возможных меток), а других автоматов нет. Пусть этот автомат $\mathfrak{A}$ начинает движение из некоторой вершины v_0. Тогда, его движение будет довольно простым.

Лемма 1. *Поведение автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ в лабиринте G_L с $|Q|$ состояниями будет обладать следующими свойствами:*

- *На начальной стадии автомат сделает $U < |Q|$ ходов, с неповторяющимися состояниями;*
- *Далее состояния будут повторяться с периодом $T \leq |Q|$;*
- *Каждые M периодов, вершины посещаемые автоматом будут повторятся;*

Доказательство леммы.

Так как количество состояний конечно, какое-то состояние автомата повториться как минимум два раза. Пусть первое такое состояние q_1 и между первым и вторым появлением сделано T ходов (очевидно $T \leq |Q|$), а перед q_1 было $U < |Q|$ ходов. Заметим, что текущее состояние однозначно определяет следующее, таким образом после второго появления q_1 последовательность состояний будет такой же как и после первого появления. Отсюда получаем зацикленность состояний с периодом T. Обозначим через v_1 вершину лабиринта, в которой автомат впервые оказался в состоянии q_1.

Пусть $s'_1, s'_2, ..., s'_T$ – направления движения автомата в цикле, $s'_i \in D(S)$. Пусть $g_T = s'_1s'_2...s'_T$, $g_T \in G$. Тогда через M циклов после посещения вершины v_1 автомат окажется в вершине $v_1g_T^M = v_1$, то есть вернётся обратно. Таким образом, сначала автомат посетит не более U вершин, а дальше в цикле будет посещать не более TM вершин. □

Из этой леммы легко видеть, что L_G – сильная ловушка для любого одиночного автомата.

3.4. Коллектив типа $(m, 0)$

Теперь рассмотрим случай коллектива автоматов.

Пусть $\mathcal{A}_{\vec{q_0}} = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, ..., \mathfrak{A}_m)$ – $L(D(S))$-допустимый коллектив автоматов. Основная наша цель – доказать, что построенный нами лабиринт – сильная ловушка для любого такого коллектива, причём коллектив сможет обойти только конечное число вершин лабиринта.

Пусть $|Q_1|, ...|Q_m|$ – количество состояний у автоматов. Обозначим через Q_A максимум из $|Q_i|$ $i = 1, ..., m$.

Назовём состоянием коллектива $\mathcal{A}$ в момент времени t набор $I = (q_t^1, q_t^2, ...q_t^m, F_t)$, где $q_t^i \in Q_i$ – состояние конкретного автомата в момент t; $F_t = \{F_t^1, F_t^2, ..., F_t^k\}$, $k \leq m$, где F_t^i – множество номеров всех автоматов находящихся в какой-то вершине в данный момент. Причём $\bigcup\limits_{i=1}^{k} F_t^i = \{1, ..., m\}$ и один индекс принадлежит только одному F_t^i. Если все автоматы находятся в разных вершинах, то F_t^i состоят их одного индекса каждый и их m штук. То есть, состояние коллектива – это состояния всех автоматов и разбивка автоматов на группы стоящих в одной вершине. Далее факт нахождения в одной вершине двух или более автоматов будем называть встречей.

Положением коллектива в лабиринте в момент времени t, назовём набор вершин $(v_t^1, v_t^2, ..., v_t^m)$, в котором находятся автоматы. Заметим, что пара положение-состояние однозначно все определяет последующее поведение коллектива автоматов.

Теорема 2. *Поведение коллектива автоматов $\mathcal{A}_{\vec{q_0}} = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, ..., \mathfrak{A}_m)$ в лабиринте L_G в вектором начальных вершин $\vec{v_0}$ обладает следующим свойством: существуют такие O_m и H_m зависящее только от m, M и Q_A, что:*

- *Состояния коллектива $\mathcal{A}$ любые в H_m подряд идущих моментов времени однозначно определяют следующее состояние.*
- *На начальной стадии коллектив автоматов сделает $U \leq O_m$ ходов, после которых состояния будут повторяться с периодом $T \leq O_m$;*
- *Каждые M периодов, положение коллектива будет повторяться, т.е. после первых U ходов пара положение-состояние коллектива $\mathcal{A}$ будет повторяться с периодом $MT \leq MO_m$.*

Доказательство теоремы.

Будем доказывать индукции по числу автоматов. В случае с одним автоматом, состояние коллектива фактически состояние автомата и $O_1 = Q_A$, $H_1 = 1$, что было доказано ранее. Таким образом база индукции есть.

Пусть $m = l$, тогда по предположению индукции для всех $m < l$ утверждение верно. H_l и O_l будем выражать через l, M, Q_A, H_i и O_i для $i < l$. Поскольку H_i и O_i по предположению зависят только от i, M и Q_A, H_l и O_l тоже можно будет выразить через l, M и Q_A.

Лемма 2. *Пусть существуют две группы автоматов размерами a и b, $a + b = l$. Пусть O_a и O_b константы из индукции. Тогда, если никакие два автомата из этих групп (один из первой, один из второй) не встречались $h = \max(O_a, O_b) + M^2 O_a O_b + 1$ ходов подряд, то и в дальнейшем никакие два не встретятся.*

Доказательство леммы. Заметим, что эти h ходов, группы не влияют на движения друг-друга, поэтому эти две группы мы можем в течении h ходов рассматривать как два коллектива в лабиринте L_G с некоторыми начальными состояниями и вектором начальных вершин. Заметим, так как $a, b < l$, то к этим коллективам применимы предположения индукции (но только на h первых ходов, в дальнейшем в худшем случае автоматы из разных групп встретятся и независимость пропадёт).

Тогда, после $\max(O_a, O_b)$ ходов (могут и раньше), состояния автоматов в обоих группах зацикливаются, причем циклы длиной не более O_a и O_b и каждые M таких циклов положения групп автоматов повторяются.

Заметим, что за следующие $M^2 O_a O_b + 1$ ходов первая группа будет находиться в не более MO_a различных парах положение-состояние, аналогично вторая в не более MO_b различных парах. Тогда существуют два момента времени t_1, t_2 из этих $M^2 O_a O_b + 1$ ходов, когда положение первого коллектива – $\vec{v_a}$, состояние – $(\vec{q_a}, F_a)$, положение второго коллектива – $\vec{v_b}$, состояние – $(\vec{q_b}, F_b)$. Заметим, что из эти двух пар положение-состояние однозначно получается пара положение-состояние всего коллектива. Таким образом, пара положение-состояние всего коллектива из m автоматов повторилась, то есть оно и дальше будет повторяться с периодом $T_{ab} = t_2 - t_1 < M^2 O_a O_b$. Поскольку, между t_1 и t_2 группы автоматов не встречались, они и дальше не будут встречаться. □

Докажем, следующую лемму, являющуюся подпунктом теоремы.

Лемма 3. *Положим H_l минимальным натуральным числом со следующими свойствами:*

$$H_l \geq \max(O_i, O_j) + M^2 O_i O_j + 1, \forall i > 0, j > 0, i + j = l$$

$$H_l \geq H_i, \forall i < l$$

Тогда, по последовательности $I_1, I_2, ..., I_{H_l}$ из H_l состояний коллектива можно однозначно определить состояние I_{H_l+1}.

Доказательство леммы.

Заметим, что по этим H_l состояниям мы можем определить, есть ли две группы автоматов, автоматы из которых не встречаются друг с другом за эти H_l ходов (в состояниях записана информация о встречах автоматов).

Пусть есть две такие группы A и B с размерами a и b. Тогда в силу выбора H_l эти группы удовлетворяют условию предыдущей леммы. Следовательно, автоматы из этих групп не встретятся после этих H_l ходов, а следовательно и на ходу $H_l + 1$. Заметим, что состояние состояние коллектива их l камней однозначно определяется определяется состоянием коллектива A и коллектива B и наоборот (если их рассматривать как коллективы автоматов в L_G) на этих $H_l + 1$ ходу.

Тогда, I_{H_l+1} – состояние коллектива $\mathcal{A}$ из l камней, однозначно определяется состоянием коллектива A и коллектива B на $H_l + 1$-ом ходу. В свою очередь, состояния коллективов A и B на этом ходу, однозначно определяются предыдущими своими H_a и H_b состояниями, а значит и предыдущими H_l состояниями. Следовательно I_{H_l+1} однозначно определяется через предыдущие H_l состояний коллективов A и B, а значит и $\mathcal{A}$, что и требовалось.

Пусть таких двух групп нет. Далее все моменты времени лежат в интервале от 1 до H_l (если не оговорено обратное). Заметим, что по состояниям $I_1, I_2, ..., I_{H_l}$ можно определить, направление движения автомата $\mathfrak{A}_i$ в момент t (будем обозначать его $g_t^i \in D(S)$). Следовательно, если известная вершина v_{t_1}, в которой $\mathfrak{A}_i$ находился в момент t_1, то и известна вершина v_{t_2}, в которой он находился любой другой момент t_2, причём $v_{t_2} = v_{t_1} g$, где $g \in G$ произведение каких-то g_j^i, либо их обратных.

Пусть $\mathfrak{A}_1$ в момент времени 1 находится в вершине v_0. Тогда в остальные моменты $2 \leq t \leq H_l$ он находится в вершинах $v_0 h_t^1$, где $h_t^1 \in G$ однозначно определяется через $I_1, I_2, ..., I_{H_l}$. В силу предположения о том, что разделённых групп не существует, есть автомат, для удобства $\mathfrak{A}_2$, с которым он встретится в момент t_1, в вершине $v_0 h_{t_1}^1$. Тогда, в момент t_1 известно положение $\mathfrak{A}_2$, а значит известны вершины в которой $\mathfrak{A}_2$ находится во все остальные моменты времени t, причём они имеют вид $v_0 h_t^2$, где h_t^2 однозначно выражается через $I_1, I_2, ..., I_{H_l}$ ($h_{t_1}^1 = h_{t_1}^2$, а остальные получаются из $h_{t_1}^2$ с помощью g_j^2).

Аналогично, найдем автомат $\mathfrak{A}_3$, с которым встречается хотя бы один из двух первых, для него положения вершин будут определятся аналогично. Так будем продолжать и далее. Заметим, что в силу условия о несуществовании двух невстречающихся групп, мы всегда найдем новый автомат, с которым есть встречи у уже рассмотренных. Таким образом, любой $\mathfrak{A}_i$ из m автоматов в момент t находится в вершине $v_0 h_t^i$, причём h_t^i однозначно выражается через $I_1, I_2, ..., I_{H_l}$.

Рассмотрим момент времени H_l+1. Состояния каждого из m автоматов, однозначно получаются из I_{H_l}. Пусть в момент H_l+1 $\mathfrak{A}_i$ находится в вершине $v_0 h^i_{H_l} g_i$, $g_i \in G$. Заметим, что для определения, стоят ли $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{A}_j$ достаточно сравнить на равенство $h^i_{H_l} g_i$ и $h^j_{H_l} g_j$. $h^i_{H_l}$ и $h^j_{H_l}$ однозначно определяется через $I_1, I_2, ..., I_{H_l}$, g_i и g_j через I_{H_l}. Следовательно, разбиение на группы стоящие в одной вершине на шаге H_l+1 однозначно определяется через $I_1, I_2, ..., I_{H_l}$, а значит и I_{H_l+1} однозначно через них определяется. Что нам и требовалось. Итого пункт про H_l выполнен. $\square$

Посчитаем, сколько различных состояний $I=(\vec{q}, F)$ может быть у коллектива $\mathcal{A}$. Различных $\vec{q}$ не более Q_A^l (т.к. состояний у каждого из автоматов не более Q_A). Количество различных F грубо оценим сверху числом l^l. Действительно, разложить l индексов автоматов по l множествам можно не более чем l^l способами, и каждому такому способу соответствует только одно F (разбиение автоматов по группам стоящим в одной вершине). Итого, различных состояний коллектива не более чем $(Q_A l)^l$.

Тогда заметим, что существует не более $(Q_A l)^{lH_l}$ различных блоков из H_l подряд идущих состояний коллектива. Положим $O_l = (Q_A l)^{lH_l} + H_l$, рассмотрим первые O_l ходов коллектива $\mathcal{A}$ в L_G. В этих ходах можно выделить $(Q_A l)^{lH_l}+1$ блок из H_l подряд идущих состояний коллектива. Тогда, два блока начинающиеся в ходы t_1 и t_2 будут одинаковыми. Так как каждый такой блок однозначно определяет последующую последовательность состояний коллектива, мы получаем, что, начиная с момента t_1, состояния коллектива зацикливаются с периодом t_2-t_1. Таким образом, U из условия теоремы равно $t_1 \leq O_l$ (если первый ход считается нулевым), а $T = t_2 - t_1 \leq O_l$. Получаем, что второй пункт теоремы выполнен, нужное O_l найдено.

Для доказательства теоремы осталось показать, что каждые M получившихся циклов, положения коллектива будут повторяться. Действительно, пусть любой $\mathfrak{A}_i$ на каком-то ходе $t \geq t_1$ находится в вершине v_t. Пусть за каждые T ходов он сдвигается на $g_i \in G$, тогда через M ходов он попадёт в вершину $v_t g_i^M = v_t$, что нам и требуется. Таким образом после первых U ходов пара положение-состояние всего коллектива $\mathcal{A}$ будет повторяться с периодом $MT \leq MO_m$. $\square$

Таким образом, мы показали, что любой коллектив автоматов стартующий из любых вершин не обойдёт только конечную части графа Кэли группы G.

3.5. Замечания

Интересным представляется вопрос, какие модификации можно внести коллектив автоматов, чтобы он таки обошел данный граф Кэли. Самым напрашивающейся модификацией является добавления датчика случайных чисел в автомат. Легко видеть, что случайно блуждающий по группе G автомат сможет выйти из любой конечной области. Интересно, что коллектив автоматов на это не способен. В принципе это не первый случай, когда случайность переигрывает коллектив автоматов, здесь [27] рассматриваются другие, более тривиальные примеры такого рода. Тем не менее, вопрос об обходе коллективом с датчиком случайных чисел группы G представляется довольно интересным.

4. Лабиринт с нетривиальной оценкой на количество камней

В этой части работы мы покажем как построить лабиринт, с нетривиальными верхними и нижними оценками на количество камней k, требующихся для обхода лабиринта коллективом автоматов типа $(1, k)$.

4.1. Прямоугольный, мозаичный и шахматный лабиринты

Определим некоторые классы лабиринтов, вершины которых будут лежать в пространстве $\mathbb{R}$.

Обозначим через $B_n = \{b_1, ..., b_n\}$ – единичные вектора n-мерного евклидового пространства $\mathbb{R}^n$. Положим $D(B_n) = \{b_1, ..., b_n, -b_1, ..., -b_n\}$.

Если $A, B \in \mathbb{R}^k$, то в зависимости от ситуации под $\overline{AB}$ будем понимать любо вектор, либо отрезок между точками A и B. Назовём множество отрезков в $\mathbb{R}^n$ n-конфигурацией, если любые два отрезка имеют не более одной общей точки и если таковая есть, то это конец для каждого из отрезков.

Определение 8. *Лабиринт $L = ((V, E), f, D(B_n))$ назовём прямоугольным, если*

- $V \subseteq \mathbb{R}^n$ *и если $(v, u) \in E$, то вектор $\overline{vu}$ сонаправлен направлению $f(v, u)$;*
- *Множество отрезков $\{\overline{vu} | (v, u) \in E\}$ является n-конфигурацией.*

Фигура $\overline{L} = \bigcup\limits_{(v,u)\in E} \overline{vu}$ в $\mathbb{R}^n$ называется конфигурацией прямоугольного лабиринта L. Далее не будем отличать лабиринт от его фигуры, из контекста будет понятно, что имеется ввиду.

Gusev/rectangular.png

Рис. 1: Примеры плоских прямоугольных лабиринтов

Пусть $\mathbb{Z}^n$ – целочисленная решётка в $\mathbb{R}^n$, тогда логично ввести такие типы лабиринтов.

Определение 9. *Прямоугольны L назовём целочисленным, если множество вершин лежит в $\mathbb{Z}^n$.*

Определение 10. *Если для некоторого целочисленного лабиринта L выполняется, $\bigcup\limits_{(v,u)\in E} \overline{vu}$ – множество отрезков длины k, то будем называть такой лабиринт k-мозаичным. Если $k = 1$, будем говорить, что такой лабиринт просто мозаичный.*

Определение 11. *Мозаичный лабиринт, у которого любые две вершины на расстоянии 1 соединены ребром, назовём шахматным.*

В случае $\mathbb{Z}^n$ шахматный лабиринт обычно представляется как некоторое множество клеток в бесконечной клетчатой плоскости.

4.2. Невозможность обхода плоских конечных мозаичных лабиринтов без камней

Для правильного построения лабиринта нам потребуется некоторая теорема, сформулируем её здесь.

Ещё Будахом [5] была сформулирована и доказана следующая теорема

Gusev/maze.png

Рис. 2: Пример плоского мозаичного лабиринта

Gusev/cheese.png

Рис. 3: Пример плоского шахматного лабиринта

Теорема 3. *Для любого конечного автомата существует конечный плоский шахматный (мозаичный) лабиринт, который он не обходит.*

Замечание 2. *Для лабиринтов такого рода обычно не принципиально есть в них шахматность или нет (если построен мозаичных, то можно построить и шахматный).*

Решение было довольно громоздким, и в дальнейшем существенно было упрощено Подкользиным [33, 34] , а также Килибарда [31, 17] доказал это более легким и понятным способом.

В [1] было показано, для любой конечной независимой системы автоматов существует бесконечный плоский мозаичный лабиринт, являющийся ловушкой для каждого автомата в отдельности. Из этого факта легко следует следующая теорема.

Теорема 4. *Для любой независимой системы автоматов $\mathcal{A}_{\vec{q_0}} = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, ..., \mathfrak{A}_m)$, стартующих из одной вершины, существует конечная плоская шахматная (мозаичная) ловушка.*

Простое доказательство этой теорема приведено в [29]. Именно эта теорема понадобится в дальнейших наших рассуждениях.

4.3. Построение лабиринта

Лабиринт, который мы будем строить, будем являться мозаичным в каком-то $\mathbb{Z}^n$. При этом его нельзя будет обойти никакому коллективу автоматов типа $(1, n-2)$, и будет существовать коллектив типа $(1, 2n-2)$ его обходящий.

4.3.1. Вложение лабиринтов

Определим вспомогательную конструкцию. Конкретнее, это будет способ сделать из плоского мозаичного лабиринта более сложный, вставив в его ребро конструкцию содержащую другой мозаичный лабиринт. При построении итогового лабиринта мы будем многократно использовать такую конструкцию.

Пусть имеется два мозаичных лабиринта L_1=$((V_1, E_1), f_1, D(B_2))$ и L_2=$((V_2, E_2), f_2, D(B_k))$, $k > 1$ и две вершины $v', v'' \in V_2$. При этом первый L_1 – плоский, т.е. вершины лежат в $\mathbb{Z}^2$, и возможно бесконечный; вершины второго лежат в $\mathbb{Z}^k$ и он весь лежит в некотором k-мерном шаре радиуса $R-2$ (при этом R - нечетное, $R > 6$).

Определим мозаичный лабиринт $L = ((V, E), f, D(B_{k+1}))$, который будем обозначать $\Delta(L_1, L_2, v', v'')$, вершины которого лежат в $\mathbb{Z}^{k+1}$, который будет фактически являться лабиринтом L_1 в ребра которого встроили пары лабиринтов L_2.

Опишем построение L точнее. Заметим, что нам достаточно описать $k+1$-конфигурацию этого лабиринта, нагруженный симметрический граф будет получатся из неё очевидным образом. $B_{k+1} = \{b_1, ..., b_{k+1}\}$ – единичные вектора в $\mathbb{Z}^{k+1}$. Пусть $v \in V_1$ и имеет координаты (x, y) в $\mathbb{Z}^2$, тогда в лабиринте L будет вершина $g(v)$ с координатами $(3Rx, 3Ry, 0, ..., 0)$.

Пусть есть две точки в $\mathbb{Z}^{k+1}$ на расстоянии $3R$, например $(0, ..., 0)$ и $(3R, 0, ..., 0)$. Будем строит некоторое множество единичных отрезков T, соединяющие эти точки.

Рассмотрим, k-конфигурацию T_2, соответствующую L_2. Пусть, шар радиуса R, в котором лежат все вершины L_2, имеет центр $(r_1, ..., r_k)$. Определим два отображения $g_1, g_2 : \mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}^{k+1}$. Первое переводит $(x_1, ..., x_k)$ в $(R, x_1 - r_1, ..., x_k - r_k)$, второе переводит $(x_1, ..., x_k)$ в $(2R, x_1 - r_1, ..., x_k - r_k)$. Применим g_1 и g_2 к конфигурации T_2, получим получившиеся наборы $g_1(T_2)$ и $g_2(T_2)$ единичных отрезков в T.

Рассмотрим образы вершины v'' $g_1(v'')$ и $g_2(v'')$. Заметим, что их координаты имеют вид $(2, y_1, ..., y_k)$ и $(2R, y_1, ..., y_k)$. Тогда мы можем соединить их цепочкой T'' из R единичных отрезков параллельных направлению b_1. Положим T'' в T.

Возьмем 4 отрезка между точками $(0, .., 0), (1, 0, ..., 0), (2, 0, ..., 0), (2, 1, 0, ..., 0), (3, 1, 0, ..., 0), (3, 0, ..., 0)$. Далее продолжим эту цепочку отрезков цепочкой из $R-4$ отрезков из точки $(3, 0, ..., 0)$ в точку $(R-1, ..., 0)$. Пусть $g_1(v')$ имеет координаты $(R, y_1, ..., y_k)$. Тогда продолжим цепочку $|y_1|$ отрезками в направлении $\sigma(y_1)b_2$, $|y_2|$ отрезками в направлении $\sigma(y_2)b_3$, и так далее, при этом последним будут $|y_k|$ отрезов в направлении $\sigma(y_k)b_{k+1}$ ($\sigma(y_i)b_{i+1}$ – b_i если $y_i \geq 0$, $-b_{i+1}$ иначе). Завершает эту цепочку отрезок из $(R-1, y_1, ..., y_k)$ в $(R, y_1, ..., y_k)$. Таким образом мы соединили $(0, ..., 0)$ с $g_1(v')$ цепочкой отрезков T_1'. Цепочку отрезков T_2', соединяющую $(3R, ..., 0)$ с $g_2(v')$, можно получить симметрично отразив T_1' относительно гиперплоскости проходящей через $(3R/2, 0, ..., 0)$ и перпендикулярной b_1. Таким образом, мы получили множество единичных отрезков $T = T_1' \cup g_1(T_2) \cup T'' \cup g_2(T_2) \cup T_2'$. Далее составные части T будем обозначать верхними индексами T^1, T^5 – начальная и конечная части, T^3 – середина, T^2, T^4 – подлабиринты L_2.

Лемма 4. *Все точки $(x_1, ..., x_k) \in T$, кроме нулевой удовлетворяют неравенству $x_1 - |x_2| > 0$*

Доказательство леммы.

Действительно, для точек начального изгиба и точек прямой из T^1 это верно. Для точек с $x_1 \geq R-1$ это верно, т.к. ни у одной точки из T не $x_2 \geq R-2$, т.к. L_2-подобные части лежат в шарах с радиусом $R-2$ и второй координатой центра равной 0.

□

Gusev/T_construct.png

Рис. 4: Примерная конструкция T в проекции на первые две координаты. Утолщения – L_2-подобные части

Возьмем любые $v_1, v_2 \in V_1$ из первого лабиринта такие, что $< v_1, v_2 > \in E_1$. Предположим $\overline{v_1 v_2}$ – параллелен $b_1 \in B_2$ (для удобства будем считать $f_1(v_1, v_2) = b_1$, иначе рассуждения будут аналогичны, нужно только поменять местами v_1 и v_2), а $v_1 = (x, y)$ и $v_2 = (x+1, y)$, тогда в лабиринте L_2 им соответствуют вершины $(3Rx, 3Ry, 0, ..., 0)$ и $(3Rx+3R, 3Ry, 0, ..., 0)$. Пусть $g_{<v_1,v_2>}$ – параллельный перенос в $\mathbb{Z}^{k+1}$ на вектор $(3Rx, 3Ry, 0, ..., 0)$. Тогда, $g_{<v_1,v_2>}(T)$ – это множество единичных отрезков соединяющих $(3Rx, 3Ry, 0, ..., 0)$ и $(3Rx+3R, 3Ry, 0, ..., 0)$. В случае, если $\overline{v_1 v_2}$ параллелен $b_2 \in B_2$, аналогично соединим образы v_1 и v_2, $(3Rx, 3Ry, 0, ..., 0)$ и $(3Rx, 3Ry+3R, 0, ..., 0)$ с помощью $g_{<v_1,v_2>}(T)$, где $g_{<v_1,v_2>}$ – движение, переводящее $(x_1, ..., x_{k+1})$ в $(3Rx + x_2, 3Ry + x_1, x_3, ..., x_{k+1})$.

Итого, $k+1$-конфигурацию $\Delta(L_1, L_2, v', v'')$ определим как объединение

$$\bigcup_{<v_1,v_2>\in E_1} g_{<v_1,v_2>}(T).$$

Покажем, что различные $g_{<v_1,v_2>}(T)$ не пересекаются между собой нигде кроме начальных точек. Для этого докажем, что проекции различных $g_{<v_1,v_2>}(T)$ на плоскость первые две координаты не пересекаются. Действительно, заметим, что T легко вкладывается в прямоугольник длиной $3R$ и шириной $2R$, так как L_2-подобные части помешаются внутри шара с радиусом $R-1$. Поэтому имеет смысл проверять только $g_{<v_1,v_2>}(T)$ и $g_{<v_1,v3>}(T)$, где v_1 общая вершина $g_{<v_1,v_2>}(T)$ и $g_{<v_1,v3>}(T)$. Заметим, что они не пересекаются в силу ранее доказанной леммы, оказываясь отделимыми биссектрисой соответствующего угла. Таким образом, это объединение действительно $k+1$-конфигурация и $\Delta(L_1, L_2, v', v'')$ действительно мозаичный лабиринт.

В дальнейшем будем иногда называть вершины $\Delta(L_1, L_2, v', v'')$ соответствующие L_1 главными, а конструкции T между ними сложными рёбрами.

4.4. Построение сложного лабиринта

Теперь можно преступить к итоговому построению лабиринта. Параллельно будем доказывать, что его не может обойти любой автомат с необходимым нам количеством камней.

Определим понятие изоморфизма лабиринтов. Нам оно понадобится для правильного описания соответствия мозаичных лабиринтов и подлабиринтов различных размерностей (лабиринты маленьких размерностей будет использовать при построении лабиринтов в больших размерностях).

Определение 12. *Назовём лабиринты* L_1=$((V_1, E_1), f_1, D(B_l))$ *и* L_2=$((V_2, E_2), f_2, D(B_n))$, $l < n$ (g, h)*-изоморфными, если*

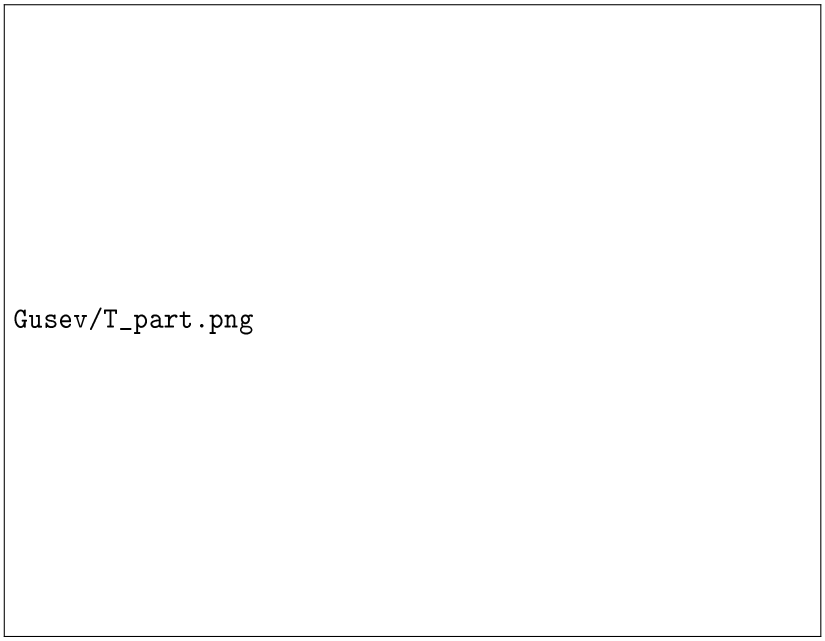


Рис. 5: Часть лабиринта $\Delta(L_1, L_2, v', v'')$ в районе образа вершины $v \in V_1$ из которой ведут 4 дуги

- *g – биекция из V_1 в V_2;*
- *h – инъекция из $D(B_l)$ в $D(B_n)$ (если $n = l$, то биекция);*
- *Для любых $v_1, v_2 \in V_1$ выполнено $(v_1, v_2) \in E_1$, тогда и только тогда, когда $(g(v_1), g(v_2)) \in E_2$, причём $h(f_1(v_1, v_2)) = f_2(g(v_1), g(v_2))$*

Замечание 3. *Заметим, что инъекция h переводит обратные друг другу элементы из $D(B_l)$ в обратные друг другу элементы из $D(B_n)$. Все инъекции в дальнейшем будут обладать таким свойством.*

Пусть есть лабиринт $L = ((V, E), f, D(B_k))$.

Определение 13. *Назовём пару (L', v) висячим подлабиринтом лабиринта L, если выполняется:*

- *L' подлабиринт L, $v \in L'$;*
- *L' связан с остальным лабиринтом только одним ребром, причём это ребро выходит из v.*

Зафиксируем следующие сущности:

- натуральные числа $l \leq n$;
- лабиринт $L \in \mathcal{L}(D(B_l))$ с вершинами v и u в нём;
- инъекцию h из $D(B_l)$ в $D(B_n)$ (переводящую обратные направления в обратные)
- $\mathcal{A}_{\vec{[q]}} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, ..., \mathfrak{B}_k)$ – инициальный $\mathcal{L}(D(B_n))$-допустимый коллектив автоматов типа $(1, k)$;

- неупорядоченный набор индексов $\{i_1, ..., i_m\}$, $1 \le i_j \le k$.

Пусть $L \in \mathcal{L}(D(B_l))$ (g,h)-изоморфно $L_1 \in \mathcal{L}(D(B_n))$ для какой-то g, $g(v) = v_1$, $g(u) = u_1$. Тогда, если для любого $L_2 \in \mathcal{L}(D(B_n))$ с висячим подлабиринтом (L_1, v_1) и любого вектора вершин $\vec{v_0} = (v^1, ..., v^{k+1})$, где $v^i \in L_2$, $v^1 \notin L_1$, таких, что при обходе L_2 коллективом $\mathcal{A}$, начиная с вектора $\vec{v_0}$, в L_1 бывает только автомат $\mathfrak{A}$ и камни $\mathfrak{B}_{i_j}$, $j = 1, ..., k$, выполнено, что автомат $\mathfrak{A}$ не посетит вершину $g(u)$, в этом случае назовём (L, v, u) – $(h, (i_1, ..., i_m))$-висячей ловушкой для $\mathcal{A}$.

Другими словами, (L, v, u) – $(h, (i_1, ..., i_m))$-висячая ловушка, если изоморфную ей часть нельзя обойти автоматом (а именно посетить конкретную вершину), используя только конкретные камни при передвижении по ней. Вне неё можно использовать все камни и лабиринт может быть вообще произвольного вида. При этом старовая позиция автомата может быть любой вершине вне лабиринта, а стартовая позиция камней просто любой вершине (в том числе, они могу располагаться в вершине, которую автомату нужно посетить).

Определение 14. *Если $(L, v, u), L \in \mathcal{L}(D(B_l))$ – $(h, (i_1, ..., i_m))$-висячая ловушка для $\mathcal{L}(D(B_n))$-допустимого коллектива $\mathcal{A}_{\vec{[q]}} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, ..., \mathfrak{B}_k)$, для всех возможных инъекций h из $D(B_l)$ в $D(B_n)$ и всех возможных выборов m индексов из k, то назовём её (l, m)-висячей ловушкой для $\mathcal{A}$.*

Теперь докажем основную теорему, позволяющую построить лабиринт.

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, ..., \mathfrak{B}_k)$ – инициальный $\mathcal{L}(D(B_n))$-допустимый коллектив автоматов типа $(1, k)$. (L_2, v_2, u_2) – (l, m)-висячая ловушка для $\mathcal{A}$, $l < n$. Тогда существует конечный $L_1 \in \mathcal{L}(D(B_2))$ и вершины v_1 и u_1 в нём, что $(\Delta(L_1, L_2, v_2, u_2), v_1', u_1)$ – $(l+1, m+1)$-висячая ловушка для $\mathcal{A}$, где v_1' и u_1' образы v_1 и u_1 при конструировании Δ.*

Доказательство теоремы.

Основная идея доказательства примерно такая, показать, что поведение автомата $(m+1)$ камнями в $(\Delta(L_1, L_2, v_2, u_2), v_1', u_1)$ соответствует поведению некоторого автомата (без камней) в лабиринте L_1, после для выбора правильного L_1 воспользуемся о существовании конечной плоской шахматной ловушки для любого коллектива автоматов.

Рассмотрим какой-то конечный $L_1 \in \mathcal{L}(D(B_2))$ с выделенной вершиной v_1. Построим $L_3 = \Delta(L_1, L_2, v_2, u_2)$, причём v_3 образ v_1 при этом построении. Заметим, что $L_3 \in \mathcal{L}(D(B_{l+1}))$. Рассмотрим какую-то инъекцию h из $D(B_{l+1})$ в $D(B_n)$ и набор камней $i_1, ..., i_{m+1}$. Пусть $L \in \mathcal{L}(D(B_n)$ и L_3 (g,h)-изоморфен висячему подлабиринту (L_4, v_4) (v_4 соответствует v_3) лабиринта L. Пусть коллектив стартует с какой-то вершины в L вне L_4 (камни с любых вершин в L) и при обходе L в L_4 могут находиться только камни с индексами $i_1, ..., i_{m+1}$. Вершина с которой стартует автомат и как выглядит остальная часть L (не L_4) нам будет не важно, они могут любыми. Попытаемся обойти L_4.

L_4 выглядит как лабиринт L_1 со сложными рёбрами, в которые вставлены пары лабиринтов L_2. Вершины соответствующие вершинам L_1 будем обозначать множеством U, а получающиеся сложные рёбра множеством E_U. Пусть $u \in U$ вершина соответствующая какой-то вершине L_1, тогда через $\sigma(u)$ будем обозначать следующий подлабиринт. Пусть из u выходит несколько сложных рёбер (не больше четырёх) вида T в другие вершины из U (каждое состоит из частей T^1, T^2, T^3, T^4 и T^5). Тогда в $\sigma(u)$ для каждого T, выходящего из неё, положим вершины из T^1, T^2 и ближайшей половины T^3 (длина T^3 нечётная, поэтому она делится пополам) вместе с отрезами их соединяющими. Таким образом, весь L_4 разбился на подлабиринты соответствующие вершинам из U.

Рассмотрим поведение автомата в области $\sigma(u)$ для какой-то $u \in U$. Если автомат находится в вершине u, а в $\sigma(u)$ находится меньше $m+1$ камней, то автомат никогда больше не выйдет из $\sigma(u)$, так как области, соответствующие L_2 (они практически висячие подлабиринты лабиринта $\sigma(u)$), автомат не может обойти, используя не более m любых камней и стартуя из u (при этом начальное расположение камней в $\sigma(u)$ не важно).

Рассмотрим поведение автомата в L_4. Во все моменты времени автомат находится в $\sigma(u)$, для какого-то $u \in U$ (моменты когда автомат выходит из L_4 в остальную часть лабиринта будем считать, что автомат находится в $\sigma(v_4)$). Таким образом всё время разобьется на отрезки $[t_1, t_2 - 1]$, $[t_2, t_3 - 1]$, ..., $[t_i, t_{i+1} - 1]$, ... , где в течении каждого отрезка автомат находится в конкретном $\sigma(u)$, при этом для соседних отрезков, эти $\sigma(u)$ разные. Заметим, что в течении каждого отрезка, количество камней в соответствующем $\sigma(u)$ постоянно.

Из этих отрезков, выделим те, в которых автомат посещает соответствующую вершину $u \in U$. Назовём эти отрезки времени – главными. Т.к. в течении главного отрезка времени, автомат посещает $u \in U$, количество находящихся в $\sigma(u)$ камней либо $m + 1$ (чтобы автомат мог выйти), либо этот отрезок последний (автомат навсегда останется в $\sigma(u)$). Пусть главный отрезок $a = [a_1, a_2]$ такой, что после него следующий главный отрезок (не последний) $b = [b_1, b_2]$ соответствует другой вершине. Пусть эти вершины u_a и u_b (очевидно, что они соседние вершины в лабиринте L_1) и их соединяет сложное ребро T.

Рассмотрим моменты времени a_2 и b_1. Заметим, что в эти моменты все камни находятся на ребре T.

Действительно, до a_2 они находились в $\sigma(u_a)$, после b_2 в $\sigma(u_b)$, а между моментами a_2 и b_1 автомат всегда находится на ребре T, соответственно, чтобы их можно было перетащить, они должны находиться на T. Пусть ходу a_2 соответствует $S_{a_2} = (q_{a_2}, \vec{s_{a_2}})$, где q_{a_2} – состояние автомата в этот момент, $\vec{s_{a_2}}$ – вектор смещения автомата и камней относительно u_a в этот момент.

Аналогично, определим $S_{b_1} = (q_{b_1}, \vec{s_{b_1}})$ (только смещения будем считать относительно u_{b_1}). Назовём S_{a_2} – выходным состоянием вершины u_a, S_{b_1} – входным состоянием вершины u_b.

Пусть автомат последовательно посещает вершины из U (фактически обходит лабиринт L_1). Пусть эта последовательность $u_0, u_1, ..., u_t, ...$ (считаем, что из неё выкинуты подряд повторяющиеся посещения одной и той же вершины). Возможно она конечная, возможно бесконечная. Заметим, что выходное состояние вершины u_t, либо однозначно определяет входное состояние u_{t+1}, либо однозначно определяет, что в $\sigma(u_{t+1})$ будет меньше $m + 1$ камня и u_{t+1} будет последней вершиной в последовательности. Если $u_t \neq v_4$, конфигурация u_t (множество направлений для рёбер в E_U из неё исходящих) и входное состояние вершины, однозначно определяют либо направление движения из вершины (в лабиринте L_1) и выходное состояние, либо то, что это последняя вершина в последовательности. Если $u_t = v_4$ выходное состояние и направление могут в принципе быть любыми.

Пусть $\mathcal{S}$ – множество всех выходных состояний, оно конечно (состояний $\mathfrak{A}$ – конечно и конфигураций $m + 1$ камней в T – конечно). Тогда пусть $Q = \mathcal{S} \cup \{\alpha\} \cup \mathcal{S}'$, где $\mathcal{S}'$ множество такой же мощности, как и $\mathcal{S}$ и каждый элемент из $\mathcal{S}'$ соответствует какому-то элементу из $\mathcal{S}$. $A = \mathcal{P}_0(D(B_2))$, $B = D(B_2) \cup \{0\}$.

Пусть дана произвольная вершина $u \in U$, $v_4 \neq u$ вместе с $\sigma(u)$ с заданной конфигурацией рёбер a ($\sigma(u)$ для всех таких вершин выглядят одинаково). Пусть в u автомат попадает из какого-то выходного состояния $S_1 \in \mathcal{S}$ (заметим, что по этой конфигурации можно однозначно определить с какой стороны приходит робот), тогда $\varphi(S_1, a) = S_2$, $\psi(S_1, a) = b$, где S_2 – выходное состояние u (однозначно определяется из конфигурации a и S_2), b – направление выхода (также определяется однозначно). Если из u мы не можем выйти или выходное состояние S_1 не может быть таковым для этой вершины, то $\varphi(S_1, a) = \alpha$, $\psi(S_1, a) = 0$. Пусть $S_1' \in \mathcal{S}'$ соответствует $S_1 \in \mathcal{S}$, тогда определим $\varphi(S_1', a) = S_1$, $\psi(S_1', a) = b$, где b это направление хода для выходного состояния S_1. Если b нет в a, положим $\varphi(S_1', a) = \alpha$, $\psi(S_1', a) = 0$. Также положим $\varphi(\alpha, a) = \alpha$, $\psi(\alpha, a) = 0$.

Запустим автомат (A, Q, B, φ, ψ), инициализированный каким-то состоянием $q \in \mathcal{S}'$ (q соответствует $S \in \mathcal{S}$), по лабиринту L_1 из вершины v_1 (она соответствует v_4 в U). Запустим, $\mathcal{A}$ в L_4 состоянием автомата и начальными вершинами, соответствующими выходному состоянию S для вершины $v_4 \in U$. В силу построения автомата (A, Q, B, φ, ψ), вершины, которые обходит (A, Q, B, φ, ψ) в L_1 будут соответствовать вершинам из U, которые обходит $\mathcal{A}$ до возвращения обоих автоматов в v_4 (v_1), либо до бесконечности, если в v_4 (v_1) они не вернутся.

Пусть во время какого-либо обхода $\mathcal{A}$ лабиринта L_4 (начатого вне L_4) $\mathfrak{A}$ посещает вершину $u \in U$, тогда он вершину может посетить при обходе, начиная из выходного состояния S для вершины v_4 (т.к. любой обход с посещением u должен в какой-то момент выходить из v_4, последний такой момент перед посещением соответствует выходному состоянию S). Следовательно если запускать автомат (A, Q, B, φ, ψ) из вершины v_1 в лабиринте L_1 из всех состояний $\mathcal{S}'$ он посетит не меньше вершин, чем может посетить $\mathfrak{A}$ в U.

Построим подобные автоматы (A, Q, B, φ, ψ) для всех инъекций h и всех различных наборов из $m+1$ камня. Тогда если все такие автоматы не посещают какую-то вершину $u_1 \in L_1$, то и $\mathfrak{A}$ не посетит соответствующую вершины при любом висячем лабиринте изоморфном L_1 внутри которого нельзя использовать больше $m+1$ камня.

Для этого воспользуемся теоремой о существовании конечного шахматного лабиринта для любой системы независимых автоматов, который она не может обойти. Таким образом мы получим лабиринт L_1 с вершиной u_1 удовлетворяющие условие теоремы. □

Построим самую простейшую висячую ловушку.

Лемма 5. *Пусть $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, ..., \mathfrak{B}_k)$ – инициальный $\mathcal{L}(D(B_n))$-допустимый коллектив автоматов типа $(1, k)$, тогда существует $(2, 0)$-висячая конечная ловушка для $\mathcal{A}$.*

Доказательство леммы. Рассмотрим, плоский конечный лабиринт $L_1 \in \mathcal{L}(D(B_2))$ с вершиной v_1. Пусть он (g, h)-изоморфен висячему подлабиринту (L_2, v_2), какого-то лабиринта из $\mathcal{L}(D(B_n))$ ($g(v_1) = v_2$). Тогда, рассмотрим движение в L_2 автомата $\mathfrak{A}$ без камней. Заметим, что периоды движения автомата между посещениями вершины v_2 (либо начиная с неё и до бесконечности, если автомат в неё не возвращается) можно описать как движение $\mathcal{L}(D(B_2))$-допустимого автомата $\mathfrak{A}'$ по лабиринту L_1 стартующего из вершины v_1 с каким-то начальным состоянием q, причём этих начальных состояний не больше чем состояний у автомата $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathcal{A}'_h$ множество таких инициальных автоматов $\mathfrak{A}'_q$ для конкретного h, а $\mathcal{A}'$ объединение $\mathcal{A}'_h$ для всех инъекций из $D(B_2)$ и $D(B_n)$, переводящих обратные элементы в обратные. Тогда для системы независимых лабиринтов $\mathcal{A}'$ найдем конечный шахматный лабиринт L_1, который она не обходит. Этот лабиринт, точнее L_2 ему изоморфный, и будет являться искомой ловушкой. □

Теперь пользуясь леммой и теоремой получаем следующий факт.

Теорема 6. *Существует бесконечный лабиринт $L \in \mathcal{L}(D(B_{k+3}))$ такой с вершиной v_0, что любой $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, ..., \mathfrak{B}_k)$ – инициальный $\mathcal{L}(D(B_{k+3}))$-допустимый коллектив автоматов типа $(1, k)$, стартующий из v_0 (автомат и камни стартуют из одной вершины) обходит в нём ограниченную область.*

Доказательство леммы.

Рассмотрим конкретный коллектив $\mathcal{A}$. Будем строить для него большую висячую ловушку. Начнём с $(2, 0)$-висячей конечной ловушки (L_1, v_1, u_2) и будем применять теорему. Таким образом построим $(3, 1)$-висячую ловушку $(\Delta(L_2, L_1, v_1, u_1), v_2, u_2)$ с помощью плоского лабиринта (L_2, v_2, u_2), $(4, 2)$-висячую ловушку над $(3, 1)$-ловушкой с помощью плоского лабиринта (L_3, v_3, u_3) и так далее, до $(k+2, k)$-висячей ловушки (L', v', u').

Теперь пронумеруем коллективы (их счётное число, поэтому так можно сделать). Для i-го постоим $G_i = \Delta(I, L'_i, v'_i, u'_i)$, где I – лабиринт отрезок, соединяющий две вершины, (L'_i, v'_i, u'_i)

– соответствующая коллективу $(k+2,k)$-ловушка. Пусть у G_i две главные вершины g_i^1 и g_i^2. Тогда соединим G_i, так чтобы g_i^2 совпала с g_{i+1}^i. Получится цепочка в виде луча, составленная из G_i. Сделаем стартовой вершиной g_1^1. Тогда $\mathcal{A}_i$ для любого i не сможет дойти до вершины $g_i^2 = g_{i+1}^1$, т.к. внутри G_i на пути к g_i^2 есть $(k+2,k)$-висячая ловушка для $\mathcal{A}_i$. Таким образом, действительно каждый коллектив обойдёт только конечную область получившегося лабиринта.

$\square$

Далее будем получившийся лабиринт L, оставим обозначения для частей G_i. Через L_i $i = 1,...,k+1$ будем обозначать плоские лабиринты соответствующие какому либо G_j. Через Δ_i $i = 1,...,k+1$ будем обозначать подлабиринты которые получены с помощью оператора Δ. Для каждого G_j есть $k+1$ уровней таких подлабиринтов, каждые Δ_i содержит в себе Δ_j меньших уровней.

4.5. Алгоритм обхода

Теперь опишем алгоритм обход полученного $k+3$-мерного лабиринта L, коллективом $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, ..., \mathfrak{B}_{2k+2})$ типа $(1, 2k+2)$, т.е один автомат и $2k+2$ камня.

4.5.1. Части лабиринта

Посмотрим какие части есть у лабиринта.

- Есть главные вершины кусков G_i, их бесконечное количество. С одной из таких начинается обход;

- Части T_1, T_3 и T_5 сложных рёбер между вершинами из предыдущего пункта, части T_2 и T_4 это какие-то Δ_{k+1}-подлабиринты, их части рассмотрим далее (T_1 и T_5 на самом деле одно и тоже);

- Есть вершины соответствующие вершинам плоских лабиринтов L_i, $i = 1,...,k+1$. Для каждого G_j конфигурация всех L_i своя собственная;

- Части T_1, T_3 и T_5 (T_1 и T_5 на самом деле одно и тоже) сложных рёбер между вершинами из предыдущего пункта. Если вершины были из какого-то L_i, то T_2 и T_4 это какие-то Δ_{i-1}, поэтому их не включаем в список. Для L_1 очевидно не существует T_1, T_3 и T_5 (так рёбра идут напрямую).

Эти множества будем обозначать через M_i и N_i, $i = 1,...,k{+}2$, M_{k+2} и N_{k+2} – это первые два пункта, M_i для остальных i – это третий пункт (разделённый по соответствующим уровням), N_i – это последний пункт (разделённый по соответствующим уровням). N_1 не бывает.

В ходе обхода камни будут находится либо в одной вершине с автоматом, либо в вершинах из M_i $i \leq k+1$.

4.5.2. Состояние автомата

Опишем как устроено состояние автомата. При этом всё описание коллектива автоматов, это описание состояния автомата и описание взаимодействие с камнями.

Состояние автомата будем описывать как конечную память. У ней будут l частей, каждая i-ая принимает какие-то возможные значения из множества S_i. Тогда, итоговое множество состояний – это декартово произведение этих S_i.

Опишем эти части:

- S_1-часть описывающая в каком из M_i или N_i автомат сейчас находится;
- S_2-часть. Для каждого уровня L_i, $i \le k+1$ описывает производится ли обход L_i, если да, то какого типа (их может быть несколько, различающихся по конфигурации выходной вершины) и какое сейчас в этом обходе состояние;
- S_3-часть описывает для каждого i, что автомат делает сейчас в окрестности вершины из уровня M_i: продолжает обход соответствующего L_i или обходит все соседние более низкие уровни (σ этой вершины), а именно, описывает в какую строну сейчас необходимо продолжать какой обход (всего сторон, очевидно, 4 штуки);
- S_4-часть описывает внутренние состояния при обходе T_1 (T_5), а именно: состояния в которых записано в какую сторону сейчас движемся; состояния регулирующие правильное определение того, что T_1 закончилось; состояния устанавливающие какой тип обхода L_i, к которому автомат двигается, нам потребуется;
- S_5-часть описывает внутренние состояния при обходе T_3, а именно: состояния, в которых записано в какую сторону сейчас движемся и нужно ли сразу после прохода в одну сторону вернуться обратно; состояния регулирующие правильное определение того, что T_3 закончилось; состояния устанавливающие какой тип обхода L_i, к которому автомат двигается, нам потребуется;

4.5.3. Взаимодействие с камнями

Как было ранее замечено, любой камень либо находятся в M_i, $i \le k+1$, либо в вершине вместе автоматом. Соответственно, в вершинах их M_{k+2} и N_i автомат всегда забирает камни при движении с собой.

Разделим все камни на $k+1$ группу, камни из i-ой группы отвечают за обход лабиринтов типа L_i, и могут находится либо в вершинах M_i, либо в вершине с автоматом. При посещении автоматом вершины v из M_i, если в этой вершине оказывается камень (или два) из группы i, то принимается решение брать или не брать камень (камни) с собой. Если в S_3 сейчас записано, что производится обход $\sigma(v)$, то камни не берутся с собой. Если в S_3 записано, что выполняется обход L_i, то в соответствии с состоянием этого обхода записанным в S_2 автомат решает, брать камень (или камни) с собой или оставлять их на месте и в какую сторону двигаться. На уровне 1, всегда делается обход L_1 (т.к. там нет $\sigma(v)$ и все вершины связаны на прямую).

Если на уровне i лабиринт обойдён и найден выход из L_i, то при выходе из L_i камни уровня i всегда забираются с собой (камни остальных уровней тоже).

4.5.4. Общее описание обхода

Обход L выглядит следующим образом. Автоматом по очереди обходятся части G_j. Основную сложность в обходе G_j, представляют части Δ_{k+1} и лежащие в них различные Δ_i.

Обход каждой Δ_i делится на обход соответствующего L_i с помощью двух камней, где под обходом L_i подразумевается старт из какой-то вершины вместе со всеми камнями, обход всех вершин, а потом нахождение выхода и сбор всех камней у выхода. Вторая часть обхода Δ_i это передвижение по Δ_i по сложным рёбрам (состоящих в том числе из Δ_{i-1}), связывающим главные вершины Δ_i (которые соответствуют вершинам L_i), а также обход всех множеств σ для каждой главной вершины. Для этого, такой обход запускается при каждом посещении каждой главной вершины. При этом, для каждого направления, ведущего из вершины, по очереди обходятся части сложных рёбер T_1, T_2 (Δ_{i-1}), T_3 и они же в обратном порядке. В случае Δ_1 очевидно обход σ не производится. Заметим, что при таком способе подхода для любая Δ_i будет обойдена полностью.

Рассмотрим обход более конкретно, а именно опишем, что автомат делает в вершинах разного типа:

- В вершинах соответствующих M_{k+2} автомат всегда принимает решение двигаться из G_i в G_{i+1}, при этом он сразу попадает в сложное ребро N_{k+2} (при этом выставляется правильное S_1 состояние и S_4 часть, в которой записано, что это начал T_1 части ребра и направление в котором необходимо двигаться).

- В вершинах N_{k+2} автомат двигается в соответствии с заданными направление записанным в S_4 или S_5. При переходе в вершины из M_{k+2} и M_{k+1} он выставляет соответствующее состояние в S_1 (моменты переходов легко определяются по изгибам T_1 и конфигурациям вершин). При входе в вершину из M_{k+1} в S_2 устанавливается начальное состояние для обхода лабиринта L_{k+1}, в S_3 – состояние в котором записано, нужно начать обход σ.

- В вершинах M_i, если в части памяти S_3 для уровня i указано, что автомат должен продолжить обход лабиринта L_i. Тогда S_3 для уровня i переставляется на состояние на состояние «обходить σ в первом из четырёх направлений», сам автомат идёт в направлении задаваемым соответствующим состоянием из S_2 и набором камней из уровня i находящихся с ним сейчас в одной вершине. При этом он переходит в N_i (а именно какой-то T_1), выставляя соответствующий S_1 и S_4 (в котором в том числе указано в какую сторону идти по T_1) и забирая с собой нужный набор камней уровня i. Если из текущей вершины есть выход в N_{i+1}, оба камня уровня i находятся в вершине и состояние S_2 для уровня i соответствует конечному состоянию, то автомат выходит из вершины в N_{i+1}. При этом в S_4 (или S_5) прописывается направление хода автомата (это направление – это направление выходе в N_{i+1}).

- В вершинах M_i, если в части S_3 для уровня i указано, что автомат обходит соответствующую σ в направлении b. В этом случае, если такое направление доступно в данной вершине, то начинаем движение по T_1 в этом направлении, если не доступно – ничего не делаем, ждём следующие ход. В обоих случаях в меняем состояние S_3 для уровня i на следующее за b направление, если b было последним из четырёх, то выставляем состояние «продолжить обход лабиринта». Заметим, что при такой ротации состояний из S_3 при входе в какую-то вершину из M_i мы всегда сначала обойдем по очереди исходящие из неё ребра T возвращаясь обратно в неё, а потом продолжим обход L_i.

- В вершинах N_i, соответствующим T_1 автомат двигается в определённом в S_4 (понятно, что можно легко описать его движение с помощью конечного числа состояние). Заметим, что с помощью изгибов автомат может легко понять когда он входит в вершину из M_i или M_{i-1} (в этом случае просто изменим состояние S_1). При входе в вершину M_{i-1} будем инициализировать обход L_{i-1}, выставляя нужное состояние в S_2 для уровня $i-1$, и S_3 в котором записано, нужно начать обход σ.

- В вершинах N_i, соответствующим T_3 автомат двигается в определённом в S_5. Если из S_3 понятно, что сейчас выполняется обход σ, после прохода в одну сторону по T_3, развернёмся и пойдём в обратную сторону (как того требует обход σ). Если сейчас выполняется обычный обход L_i, то пройдём по T_3 просто в одну сторону. Концы T_3 легко детектируются наличию рёбер в направлениях отличных от направления T_3. При входе в вершину M_{i-1} будем инициализировать обход L_{i-1}, выставляя нужное состояние в S_2 для уровня $i-1$ и S_3 в котором записано, нужно начать обход σ.

4.5.5. Обход плоского конечного лабиринта с двумя камнями

Осталось обсудить существование обхода каждого L_i (плоского конечного лабиринта с помощью двух камней по построению). При этом обход заключается в старте с входа автомата с камнями, обхода всех вершин лабиринта, нахождение выхода и стягивание к выходу обоих камней.

Конечный шахматный лабиринт можно обойти с помощью двух каменей, при этом зафиксировать факт обхода [3]. Опишем в общих чертах алгоритм этого обхода.

Конечный шахматный лабиринт представляет собой конечное множество вершин (клеток) $A \in \mathbb{Z}^2$ (если две вершины находятся на расстоянии 1 – то они соединены ребром), остальные вершины $\mathbb{Z}^2$ являются вершинами дыр этого лабиринта. Если вершины дыр соединять рёбрами если они находятся на расстоянии $\sqrt{2}$, то граф с такими вершинами и ребрами разобьется на компоненты связности, эти компоненты связности и будем называть дырами. У конечного шахматного лабиринта есть одна бесконечная дыра и, возможно, некоторое количество конечных.

Определение 15. *Пусть h какая-то дыра, тогда $N(h) \subset A$ – это множество вершин из A, лежащих на расстоянии не больше $\sqrt{2}$, хотя бы от одной вершины дыры. Назовём $N(h)$ границей дыры.*

Введём на $\mathbb{Z}^2$ порядок $<$ такой, что $(a, b) < (c, d)$, только если $b < d$ или $b = d$ и $a \leq c$.

Определение 16. *$v_0 \in N(h)$ особенное поле дыры h, если для любого другого $v \in N(h)$ $v < v_0$.*

Если нам известны особые поля для всех дыр лабиринта, то мы можем горизонтально порезать лабиринт, как на рисунке. При том получившийся лабиринт (если считать разрезы его границами), легко обходиться автоматом без камней (автомат двигается по границе оставляя саму границу слава от направления движения, «внутренности» легко обходятся в промежутках между ходами). Тогда, если автомат будет уметь определять особенные точки дыр, он сможет не переступать получившиеся разрезы (переступать и тут же возвращаться обратно) и обойти таким образом лабиринт. Назовём эту часть обхода главной (заметим, что в ней автомат не использует камни, поэтому они всегда находятся в одной вершине с автоматом).

Для определения, является ли граничная вершина особенной или нет, достаточно наличия автомата со счётчиком (максимальное значение на нем не больше периметра дыры). Такой автомат легко эмулируется автоматом с двумя камнями. При этом также можно определить дыра, соответствующая этой вершине бесконечная или нет.

Пользуясь этим соображениями, для нужного нам обхода будем использовать следующий алгоритм.

- Запустим обход лабиринта из стартовой точки.

- Когда главный обход достигнет особенной точки бесконечной дыры, запустим главный обход заново. Заметим, что главный обход обойдет весь лабиринт и вернётся в эту вершину (что мы сможем зафиксировать), так как он фактически ходит в цикле по границе лабиринта получившегося после разреза.

- После этого запустим ещё раз главный обход. Заметим, что когда он дойдет до вершины выхода, все камни будут у автомата, поэтому в этот момент мы сможем завершить обход.

Таким образом мы обошли построенный нами $k{+}3$-мерный мозаичный лабиринт, используя $2k + 2$ камня.

Gusev/power_of_compass.png

Рис. 6: Точки – особые вершины дыр шахматного лабиринта, A_iB_i – разрезы на лабиринте

4.6. Замечания

Очевидно, что данный результат необходимо улучшать. Во-первых очевидно, что необходимо свести верхнюю и нижнюю оценку в одно число. Сейчас этому помешали некоторые технические трудности, тем не менее, кажется, они вполне преодолимы в будущем. Во-вторых, у автора есть некоторые соображения, как подобного результата добиться в $\mathbb{Z}^3$, а не в $k+3$ мерном пространстве. Наличие такого результата в $\mathbb{Z}^3$ может поднять вопрос о существовании каких-то критериев, которые позволяли бы отделять лабиринты из $\mathbb{Z}^3$ обходимые разным числом камней. Например, в плоских мозаичных лабиринтах, таким критерием служит количество и размер дыр (правда там разделение в основном делается по размеру памяти, а не по числу камней).

5. Заключение

По результатам работы нами получены два результата. Первый, построение сильной ловушки, несмотря на то, что вторичен, сам по себе позволяет намного проще описать такие ловушки и довольно наглядно показывает слабость модели коллектива автоматов при обходе сложных объектов. Второй, построение лабиринта с нетривиальными оценками на количество камней, требующихся для его обхода. Этот результат решает существенную часть поставленной перед нами задачи и сам по себе ценен, так как до этого не было примеров лабиринтов, обходимых автоматом с более чем пятью камнями.

address МФТИ, г. Москва email gusdzerzhi@yandex.ru

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Antelmann H., Budach L., Rollik H. A. On universale traps // EIK. 1979. Vol. 15. No. 3. Pp. 123–131.

2. Antelmann H. An application of the prime number theorem in automata theory // ICS PAS Reports 411. 1980. Pp. 9–11.

3. Blum M., Kozen D. On the power of the compass // Proc. 19th IEEE FOCS Conf. 1978. Pp. 132–142.

4. Blum M., Sakoda W. On the capability of finite automata in 2 and 3 dimensional space // Proc. 17th IEEE FOCS Conf. 1977. Pp. 147–161.

5. Budach L. Automata and labyrinths // Math. Nachrichten 86. 1978. Pp. 195–282.

6. Burnside W., “On an unsettled question in the theory of discontinuous groups” // Quart. J. Pure Appl. Math., 1902, 33, 230–238.

7. Dopp K. Automaten in Labyrinthen I // EIK. 1971. Vol. 7. No. 2. Pp. 79–94.

8. Dopp K. Automaten in Labyrinthen II // EIK. 1971. Vol. 7. No. 3. Pp. 167–190.

9. Fischer P. C. Multi-tape and infinite-state automata: A survey // Comm. ACM. 1965. Vol. 8. No. 12. Pp. 799–805.

10. Habasinski Z., Karpinski M. A codification of Blum-Sakoda 7-pebbles algorithm // ICS PAS Reports 448. Warszawa, 1981.

11. Hall M. jun., “Solution of the Burnside problem for exponentsix” // Illinois J. Math., 1958, 2, 764–786.

12. Hemmerling A. 1-pointer automata searching finite plane graphs // Z. Math. Logik Grundlag. Math. 1986. Vol. 32. Pp. 245–256.

13. Hemmerling A. Normed two-plane traps for finite systems of cooperating compass automata // J. Inf. Process. Cybern. EIK 1987. Vol. 28. No. 8/9. Pp. 453–470.

14. Hoffmann F. One pebble does not suffice to search plane labyrinths // Lecture Notes in Computer Science. 1981. Vol. 117. Pp. 433–444.

15. Hoffman F. 1-Kiesel-Automaten in Labyrinthen // Report R-Math-06/82. AdW der DDR, Berlin, 1982.

16. Ivanov S. On the Burnside problem on periodic groups // Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.), 27:2 (1992), 257–260; arXiv: math/9210221.

17. Kilibarda G. On the minimum universal collectives of automata for plane labyrinths // Discrete Math. Appl. 1993. Vol. 3. No. 6. Pp. 555–586.

18. Kriegel K. Universelle 1-Kiesel-Automaten fur ? k-komponentige Labyrinthe // Report R-Math-04/84. AdW der DDR, Berlin, 1984.

19. Minsky M. Computation: Finite and Infinite Machines (1st ed.). Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc, 1967.

20. Muler ? H. Endliche Automaten und Labyrinthen // EIK. 1971. Vol. 7. No. 4. Pp. 261–264.

21. Rollik H. A. Automaten in planaren Graphen // Acta Informatica. 1980. Vol. 13. Pp. 287–298.

22. Savitch W. Relations between nondeterministic and deterministic tape complexities // Journal of Computer and System Science. 1970. Vol. 4. Pp. 177–192.

23. Savitch W. Maze recognizing automata and nondeterministic tape complexity // Journal of Computer and System Science. 1973. Vol. 7. Pp. 389–403.

24. Shannon Cl. E. Presentation of a maze-solving machine // Cybernetics Trans. of the 8th Conf. of the Josiah Macy Jr. Found / Editor: H. Forester. 1951. Pp. 173–180.

25. Szepietowski A. A finite 5-pebble-automaton can search every maze // Information Processing Letters. 1982. Vol. 15. No. 5. Pp. 199–204.

26. Адян С. И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.

27. Анджанс А. В. Поведение детерминированных и вероятностных автоматов в лабиринтах: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Рига, 1987. 90 с.

28. Голод Е. С. О ниль-алгебрах в финитно-аппроксимируемых группах // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1964, 28(2), 273–276.

29. Килибарда Г. Об универсальных лабиринтах-ловушках для конечных множеств автоматов // Дискретная математика. 1990. Т. 2. Вып. 1. С. 72–79.

30. Килибарда Г. О минимальных универсальных коллективах автоматов для плоских лабиринтов // Дискретная математика. 1994. Т. 6. Вып. 4. С. 133–153.

31. Килибарда Г. Новое доказательство теоремы Будаха-Подколзина // Дискретная математика. 1991. Т. 3. Вып. 3. С. 135–146.

32. Килибарда Г., Ушчумлич Ш. О лабиринтах-ловушках для коллективов автоматов // Дискретная математика. 1993. Т. 5. Вып. 2. С. 29–50.

33. Кудрявцев В. Б., Подколзин А. С, Ушчумлич Ш. Введение в теорию абстрактных автоматов. М.: Изд-во МГУ, 1985.

34. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

35. Кудрявцев Г. Килибарда Ш. Ушчумлич Системы автоматов в лабиринтах. Грант РФФИ № 06-01-00240.

36. Новиков П. С., Адян С. И. О бесконечных периодических группах. I, II, III // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1968, 32(1), 212–244; 32(2), 251–524; 32(3), 709–731.

37. Санов И. Н. Решение проблемы Бернсайда для показателя 4 // Ученые записки ЛГУ. Сер. матем., 1940, 10, 166–170.

38. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973

Получено 5.10.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019–20-3-193-219

О трёхмерных сетках Смоляка I[1]

Н. Н. Добровольский, Д. В. Горбачев, В. И. Иванов

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: dvgmail@mail.ru
Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Аннотация

Это первая статья из серии посвящённой сеткам Смоляка. Работа относится к аналитической теории чисел и в ней рассматриваются вопросы приложения теории чисел к задачам приближенного анализа.

Рассмотрено понятие гиперболического параметра сеток с весами и аналог теоремы Бахвалова для гиперболического параметра сеток с весами и гиперболической дзета-функции сеток.

В данной работе получены следующие результаты:

1. доказана усиленная обобщённая теорема Бахвалова–Коробова для гиперболической дзета-функции трёхмерных сеток;
2. подсчитано число узлов сетки Смоляка с учетом их кратности; число узлов с учетом их весов.
3. подсчитано число узлов сетки Смоляка без учета их кратности;
4. подсчитано число узлов сетки Смоляка с учетом их весов;
5. найдена форма квадратурной формулы с сеткой Смоляка без кратных узлов и найдены явные формулы для весов этой квадратурной формулы. Показано, что количество узлов такой квадратурной формулы в 7 раз меньше, чем в случае формулы с кратными узлами.

Ключевые слова: сетки Смоляка, квадратурные формулы с сетками Смоляка, интерполяционные формулы с сетками Смоляка.

Библиография: 38 названий.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710005_р_а.

Для цитирования:
Н. Н. Добровольский, Д. В. Горбачев, В. И. Иванов. О трёхмерных сетках Смоляка I// Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 193–219.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 3.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019–20-3-193-219

About three-dimensional nets of Smolyak I[2]

N. N. Dobrovol'skii, D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov

Dobrovol'sky Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University; associate professor of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Gorbachev Dmitry Viktorovich — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University (Tula).
e-mail: dvgmail@mail.ru
Ivanov Valerii Ivanovich — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Head of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University (Tula).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Abstract

The work refers to the analytical theory of numbers and it deals with the application of number theory to problems of approximate analysis.

The concept of the hyperbolic parameter of grids with weights and the analogue of Bakhvalov's theorem for the hyperbolic parameter of grids with weights and the hyperbolic Zeta function of grids are considered.

In this paper the following results are obtained:

1. a strengthened generalized Bakhvalov–Korobov theorem for the hyperbolic Zeta function of three-dimensional grids is proved;
2. the number of nodes of the resin grid is calculated taking into account their multiplicity; the number of nodes taking into account their weights.
3. the number of nodes of the resin grid is calculated without taking into account their multiplicity;
4. the number of nodes of the resin grid is calculated taking into account their weights;
5. the form of a quadrature formula with a resin grid without multiple nodes is found and explicit formulas for the weights of this quadrature formula are found. It is shown that the number of nodes of such a quadrature formula is 7 times less than in the case of a formula with multiple nodes.

Keywords: grid Smolyak, quadrature formulas with grids of Smolyak, interpolation formula with grids of Smolyak.

Bibliography: 38 titles.

For citation:
N. N. Dobrovol'skii, D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov, 2019, "About three-dimensional nets of Smolyak I", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 193–219.

[2]Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710005_r_a.

1. Введение

Данная работа посвящена изучению трёхмерных сеток Смоляка. Во введении дается изложение истории вопроса и краткое описание полученных результатов. Так как наша цель — всестороннее изучение трёхмерных сеток Смоляка, то все необходимые результаты будут сформулированы для размерности $s = 3$, хотя они справедливы для произвольной размерности s.

Норма линейного функционала погрешности приближенного интегрирования на классе E_s^α выражается через гиперболическую дзету-функцию сеток. В случае параллелепипедальных сеток гиперболическая дзета-функция сеток совпадает с гиперболической дзета-функцией решёток. Общая оценка величины гиперболической дзета-функции решёток по теореме Бахвалова — Коробова дается через величину гиперболического параметра решётки. Поэтому было актуально найти аналог гиперболического параметра решёток для сеток и получить аналог теоремы Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции сеток. Это было сделано одним из авторов в работе [18]. Таким образом качество сеток стало возможно оценить в зависимости от гиперболического параметра сеток.

Сетки Смоляка относятся к числу парадоксальных сеток. С одной стороны, алгоритмы численного интегрирования по этим сеткам являются ненасышаемыми. С другой стороны, хотя они относятся к числу равномерно распределенных сеток, но величина их отклонения очень велика. Поэтому продолжение исследования этого феномена не потеряло своей актуальности.

Впервые гиперболическая дзета-функция сеток появилась в 1957 году в работе Н. М. Коробова [21], с которой ведется отсчет истории создания теоретико-числового метода. Сам термин появился гораздо позже в 2001 году в работе [14], и в более общем виде определение гиперболической дзета-функции сеток дается в работе [7]. Такая ситуация объясняется логикой развития теоретико-числового метода в приближенном анализе.

На первом этапе его развития к задачам интегрирования периодических функций многих переменных применялись известные результаты из теории чисел о тригонометрических суммах. После введения в 1959 году Н. М. Коробовым параллелепипедальных сеток и понятия оптимальных коэффициентов стали выделяться собственно актуальные задачи теории чисел, решение которых требовалось для развития метода оптимальных коэффициентов.

Прежде всего заметим, что применение метода тригонометрических сумм при анализе вопросов численного интегрирования стал возможным благодаря выделению Н. М. Коробовым класса E_s^α периодических функций с быстро убывающими коэффициентами кратного ряда Фурье.

В работе рассматриваются следующие классы периодических функций: $\mathfrak{A}_3$, E_3^2.

$\mathfrak{A}_3$ – класс периодических функций $f(x_1, x_2, x_3)$ с периодом 1 по каждой переменной и абсолютно сходящимся рядом Фурье

$$f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{+\infty} C(m_1,m_2,m_3)e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3)}, \quad \sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{+\infty} |C(m_1,m_2,m_3)|<\infty. \quad (1)$$

На пространстве $\mathfrak{A}_3$ рассмотрим норму

$$||f(x_1,x_2,x_3)||_{\mathfrak{A}_3} = \sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{+\infty} |C(m_1,m_2,m_3)|, \quad (2)$$

относительно которой $\mathfrak{A}_3$ сепарабельное банахово пространство, изоморфное пространству $l_{3,1}$ комплекснозначных функций на фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^3$ со сходящимся рядом из модулей значений.

В пространстве периодических функций $\mathfrak{A}_3$ выделяется класс E_3^2 более гладких функций, определяемый следующими условиями на коэффициенты Фурье.

Пусть $f(x_1,x_2,x_3) \in \mathfrak{A}_3$. Функция $f(x_1,x_2,x_3) \in E_3^2$ тогда и только тогда, когда для ее коэффициентов Фурье

$$C(m_1,m_2,m_3) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x_1,x_2,x_3)e^{-2\pi i(m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3)}dx_1dx_2dx_3$$

выполнено условие

$$\sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^3} |C(m_1,m_2,m_3)|(\overline{m}_1\overline{m}_2\overline{m}_3)^2 < \infty$$

где для любого вещественного m полагается $\overline{m} = \max\{1,|m|\}$.

На классе E_3^2 рассмотрим две эквивалентные нормы:

$$||f(\vec{x})||_{E_3^2} = \sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^3} |C(m_1,m_2,m_3)|(\overline{m}_1\overline{m}_2\overline{m}_3)^2 \text{ и} \tag{3}$$

$$||f(\vec{x})||_{E_3^2,C_1} = \sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^3} |C(m_1,m_2,m_3)|(\overline{C_1m_1}\,\overline{C_1m_2}\,\overline{C_1m_3})^2. \tag{4}$$

Класс функций E_3^2 с нормой (3) будем обозначать E_3^2, а с нормой (4) — $E_3^2(\cdot,C_1)$.

Пространства E_3^2 и $E_3^2(\cdot,C_1)$ — несепарабельные банаховы пространства, изоморфные пространству $l_{3,\infty}$ — ограниченных комплекснозначных функций на фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^3$, которое в силу счётности $\mathbb{Z}^3$ изоморфно пространству l_∞ — ограниченных последовательностей комплексных чисел. Действительно, этот изоморфизм нормированных пространств E_3^2 и $l_{3,\infty}$ задается равенствами для коэффициентов Фурье

$$C(\vec{m}) = \frac{c(\vec{m})}{(\overline{m}_1\overline{m}_2\overline{m}_3)^2},\ \vec{m}\in\mathbb{Z}^3, \quad ||c(\vec{m})||_\infty = \sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^3}|c(m_1,m_2,m_3)| < \infty.$$

Шар радиуса $C > 0$ в пространстве E_3^2 с нормой (3) обозначают через $E_3^2(C)$, а с нормой (4) — $E_3^2(C,C_1)$. Класс функций E_s^α ввел Н. М. Коробов. О свойствах этого класса подробно можно узнать в [25] и [27] (так же см. [13]).

Рассмотрим *квадратурную формулу с весами*

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N \rho_k f[\xi_1(k),\xi_2(k),\xi_3(k)] - R_N[f]. \tag{5}$$

Здесь через $R_N[f]$ обозначена погрешность, получающаяся при замене интеграла

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3$$

средним взвешенным значением функции $f(x_1,x_2,x_3)$, вычисленным в точках

$$M_k = (\xi_1(k),\xi_2(k),\xi_3(k)) \qquad (k = 1\ldots N).$$

Совокупность M точек M_k называется *сеткой* M, а сами точки — *узлами квадратурной формулы*. Величины $\rho_k = \rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы. В этой работе будем везде предполагать, что все веса вещественнозначные.

Для произвольных целых m_1,m_2,m_3 суммы $S_{M,\vec{\rho}}(m_1,m_2,m_3)$, определённые равенством

$$S_{M,\vec{\rho}}(m_1,m_2,m_3) = \sum_{k=1}^N \rho_k e^{2\pi i[m_1\xi_1(k)+m_2\xi_2(k)+m_3\xi_3(k)]}, \tag{6}$$

называются *тригонометрическими суммами сетки с весами.*

Будем, также, рассматривать *нормированные тригонометрические суммы сетки с весами*

$$S^*_{M,\vec{\rho}}(m_1, m_2, m_3) = \frac{1}{N} S_{M,\vec{\rho}}(m_1, m_2, m_3).$$

Положим $\rho(M) = \sum\limits_{j=1}^{N} |\rho_j|$, тогда для всех нормированных тригонометрических сумм сетки с весами справедлива тривиальная оценка

$$|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| \leqslant \frac{1}{N}\rho(M).$$

Если все веса равны 1, то будем говорить просто тригонометрическая сумма сетки и писать $S_M(\vec{m})$ и нормированная тригонометрическая сумма сетки $S^*_M(\vec{m})$.

Справедлива следующая обобщенная теорема Коробова о погрешности квадратурных формул (см. [7]).[3]

Теорема 1. *Пусть ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ сходится абсолютно, $C(\vec{m})$ — ее коэффициенты Фурье и $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — тригонометрические суммы сетки с весами, тогда справедливо равенство*

$$R_N[f] = C(\vec{0})\left(\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \frac{1}{N}\sideset{}{'}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C(\vec{m})S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) =$$
$$= C(\vec{0})\left(S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \sideset{}{'}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C(\vec{m})S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) \qquad (7)$$

и при $N \to \infty$ погрешность $R_N[f]$ будет стремиться к нулю тогда, и только тогда, когда взвещенные узлы квадратурной формулы равномерно распределены в единичном s-мерном кубе.

Из этой теоремы непосредственно следует, что для нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования $R_N[f]$ на классе $\mathfrak{A}_s$ справедливо равенство

$$\|R_N[\cdot]\|_{\mathfrak{A}_s} = \max\left(\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right|, \sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s\setminus\{\vec{0}\}} |S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|\right). \qquad (8)$$

Анализ формулы (8) позволяет сделать вывод, что класс $\mathfrak{A}_s$ слишком широк для рассмотрения вопросов о скорости сходимости погрешности квадратурной формулы к нулю. Как показали Н. М. Коробов и его последователи уже на классе E^α_s этот вопрос становится содержательным.

В работе [9] вводится понятие гиперболического параметра $q(\Lambda)$ решётки Λ и доказывается обобщенная теорема Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции решёток.[4]

Теорема 2. **(Обобщенная теорема Бахвалова для гиперболической дзета-функци решеток)** *Для любой s-мерной решетки Λ справедливы оценки*

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) \leqslant \begin{cases} (2+2\zeta(\alpha))^s \cdot \left(1 + \left[\frac{1}{\lambda}\right]\right)^s, & \text{при } q(\Lambda) = 1; \\ 2^{(\alpha+1)s+1}\alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^s \frac{(\ln q(\Lambda)+1)^{s-1}}{q^\alpha(\Lambda)}, & \text{при } q(\Lambda) > 1, \end{cases}$$

где λ — наибольшее число такое, что s-мерный куб $[-\lambda;\lambda]^s$ не содержит ни одной ненулевой точки решетки Λ.

---

[3]Здесь и далее $\sum'$ означает суммирование по системам $(m_1, \ldots, m_s) \neq (0, \ldots, 0)$.

[4]Гиперболический параметр $q(\Lambda)$ решётки Λ задается равенством $q(\Lambda) = \min\limits_{\vec{x}\in\Lambda, \vec{x}\neq\vec{0}} \overline{x_1} \cdot \ldots \cdot \overline{x_s}$.

Доказательство. См. [9]. □

Во втором разделе доказывается аналог этой теоремы для случая гиперболической дзета-функции сеток.

В теоретико-числовом методе приближенного анализа рассматриваются несколько основных классов сеток — это неравномерные сетки [21], параллелепипедальные сетки [22], комбинированные сетки [26], алгебраические сетки [31], обобщенные параллелепипедальные сетки [10], сетки Хэммерсли [37], сетки Холтона [36], сетки Фора [35], $ЛП_\tau$ сетки [30] и сетки Смоляка [29]. Современный обзор всех этих сеток дан в работе [28].

Отметим важную особенность параллелепипедальных сеток, комбинированных сеток, алгебраических сеток, обобщенных параллелепипедальных сеток и сеток Смоляка. Алгоритмы численного интегрирования по квадратурным формулам с этими классами сеток являются ненасыщаемыми на классах функций E_s^α.

В данной работе детально изучены трёхмерные сетки Смоляка, так как ранее в работе [16] и диссертации [19] были всесторонне изучены двумерные сетки Смоляка, а в работе [20] была дана достаточно подробно общая теория многомерных s-мерных сеток Смоляка, но аналогов результатов из работы [16] не удалось получить. Поэтому встал вопрос о рассмотрении следующего по сложности трёхмерного случая.

Рассмотрим 3-мерную простейшую декартову сетку

$$M(\nu_1,\nu_2,\nu_3)=\left\{\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\frac{k_2}{2^{\nu_2}},\frac{k_3}{2^{\nu_3}}\right)\middle|\, 0\leqslant k_1\leqslant 2^{\nu_1}-1,\, 0\leqslant k_2\leqslant 2^{\nu_2}-1,\, 0\leqslant k_3\leqslant 2^{\nu_3}-1\right\} \tag{9}$$

из $2^{\nu_1+\nu_2+\nu_3}$ точек, которая, также, называется обобщенной равномерной сеткой. Очевидно, что обобщенная равномерная сетка $M(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ является декартовым произведением соответствующих одномерных равномерных сеток:

$$M(\nu_1,\nu_2,\nu_3)=M(\nu_1)\times M(\nu_2)\times M(\nu_3).$$

Сетка Смоляка $Sm(q)=Sm(q,3)$ с параметром $q\geqslant 5$ определяется как объединение всех обобщенных равномерных сеток $M(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ с $q-2\leqslant\nu_1+\nu_2+\nu_3\leqslant q$, таким образом

$$Sm(q,3)=\left\{\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\frac{k_2}{2^{\nu_2}},\frac{k_3}{2^{\nu_3}}\right)\middle|\,\begin{array}{c}0\leqslant k_1\leqslant 2^{\nu_1}-1,\, 0\leqslant k_2\leqslant 2^{\nu_2}-1,\, 0\leqslant k_3\leqslant 2^{\nu_3}-1,\\ \nu_1,\nu_2,\nu_3\geqslant 1,\quad q-2\leqslant\nu_1+\nu_2+\nu_3\leqslant q\end{array}\right\}. \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что минимальной равномерной сеткой, содержащей сетку Смоляка как подсетку, является $M(q-2,q-2,q-2)$: $Sm(q)\subset M(q-2,q-2,q-2)$.

Трёхмерные сетки Смоляка $Sm(q)$ являются частным случаем s–мерных сеток $Sm(q,s)$, которые использовались в работе [29] для построения квадратурных и интерполяционных формул с весами и на них были получены результаты на различных классах функций, сравнимые с наилучшими из известных.

Естественно изучить величину отклонения этих сеток, как меры равномерности распределения их точек в s–мерном единичном кубе. Здесь возможно три различных подхода: с учетом кратности точек в объединении, без их учета и, наконец, с весами из квадратурной формулы. В работе [19] для первых двух случаев сформулированы общие результаты о величине отклонения сеток Смоляка и впервые было дано решение этой задачи об отклонении сеток Смоляка, а в работе [16] была найдена точная формула для отклонения двумерных сеток Смоляка и в работе были существенно усилены результаты для произвольных s–мерных сеток Смоляка.

Для двумерных сеток Смоляка в работе [19] найдены точные значения тригонометрических сумм сеток. Оказываются, что они принимают только три значения — 0, 1 и −1. Пользуясь этим легко найти точные значения гиперболических параметров сетки Смоляка. Для гиперболических параметров двумерной сетки Смоляка выполняются равенства:

$$q_3(Sm(q),\rho(\vec{x}))=\infty,$$
$$q_1(Sm(q),\rho(\vec{x}))=q_2(Sm(q),\rho(\vec{x}))=q(Sm(q),\rho(\vec{x}))=2^{q-1}. \qquad (11)$$

Квадратурные формулы с двумерными сетками Сомоляка выглядят достаточно просто (см. [16], стр. 122).

Целью данной серии работ является:

- получение оценок для гиперболической дзета-функции трёхмерных сеток Смоляка;
- получение новых оценок погрешности интерполяционных и квадратурных формул для трёхмерных сеток Смоляка;
- получение явной формулы выражения через элементарные функции граничной функции класса E_3^2 с нормой (4) для сеток Смоляка и вычисление нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования по квадратурным формулам с сетками Смоляка.

Во втором разделе мы даём новую усиленную форму обобщённой теоремы Бахвалова–Коробова для гиперболической дзета-функции трёхмерных сеток.

Третий раздел посвящён подсчёту количества узлов в трёхмерной сетке Смоляка, при этом это сделано в трёх случаях: число узлов с учетом их кратности; число узлов без учета их кратности; число узлов с учетом их весов.

Последний случай имеет принципиальную важность для приложений, так как позволяет записать квадратурную формулу по сеткам Смоляка без повторения узлов и с явным видом весов.

2. Гиперболический параметр сетки с весами

2.1. Гиперболический крест и гиперболические параметры

В трёхмерном пространстве усеченной нормой называется величина $q(\vec{x})=\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$.

Гиперболическим крестом называется область $K_3(t)=\{\vec{x}\mid q(\vec{x})\leqslant t\}$, а величина t — его параметром. Назовем r–ой компонентой гиперболического креста $K_3(t)$ подмножество

$$K_3^{(r)}(t)=\{\vec{x}\mid q(\vec{x})\leqslant t,\ \text{ровно } r \text{ координат } \vec{x} \text{ отличны от } 0\}.$$

Ясно, что справедливо следующее разбиение гиперболического креста:

$$K_3(t)=\left(\bigcup_{r=1}^{3}K_3^{(r)}(t)\right)\bigcup\{\vec{0}\}.$$

С понятием усеченной нормы и гиперболическим крестом связано понятие гиперболического параметра множества.

Определение 1. *Для произвольного подмножества K фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^3$ гиперболическим параметром $q(K)$ называется величина*

$$q(K)=\min_{\vec{m}\in K}\overline{m_1m_2m_3}. \qquad (12)$$

Для пустого множества K полагается $q(K)=\infty$.

Ясно, что гиперболический параметр $q(K)$ имеет простой геометрический смысл — он равен наименьшему значению параметра t гиперболического креста $K_3(t)$ такого, что на границе $K_3(t)$ имеются точки множества K, а внутри отсутствуют.

Важную роль в применении понятия гиперболического креста играет количество целых точек в гиперболическом кресте.

Обозначим через $KZ_3(t)$ множество всех целых точек принадлежащих гиперболическому кресту $K_3(t)$, а через $KZ_3^{(r)}(t)$ – множество всех целых точек принадлежащих r–ой компоненте $K_3^{(r)}(t)$ гиперболического креста $K_3(t)$. Таким образом

$$KZ_3(t) = K_3(t) \cap \mathbb{Z}^3, \quad KZ_3^{(r)}(t) = K_3^{(r)}(t) \cap \mathbb{Z}^3.$$

Для $t \geqslant 1$ положим:

$$B_j(t) = \sum_{m_1 \ldots m_j \leqslant t} 1, \tag{13}$$

здесь суммирование проводится только по натуральным значениям переменных $m_1, \ldots, m_j$. Ясно что

$$B_1(t) = [t]. \tag{14}$$

Из разбиения гиперболического креста на r-ые компоненты и определения величин $B_j(t)$ получим равенство для величины $|KZ_3(t)|$ — количества целых точек в гиперболическом кресте:

$$|KZ_3(t)| = 1 + \sum_{r=1}^{3} |KZ_3^{(r)}(t)| = 1 + \sum_{r=1}^{3} C_3^r 2^r B_r(t). \tag{15}$$

В работе [15] найдено число целых точек в гиперболическом кресте при значениях параметра $1 \leqslant t < 21$.

2.2. О гиперболическом параметре сетки

Мы рассматриваем класс $\mathfrak{A}_3$ всех периодических функций $f(\vec{x})$ с периодом 1 по каждой переменной, у которых их ряд Фурье (1) абсолютно сходится. Пространство $\mathfrak{A}_3$ относительно нормы (2) является сепарабельным банаховым пространством, изоморфным пространству l_1 — всех абсолютно суммируемых комплексно-значных последовательностей (см. [13]).

Н. М. Коробов ввёл в рассмотрение широкий класс периодических функций $E_3^\alpha(C)$ ($\alpha > 1$) с быстро убывающими коэффициентами Фурье. Через $E_3^\alpha(C)$ обозначается множество функций из E_3^α с нормой, не превосходящей C, то есть шар в банаховом пространстве E_3^α радиуса C с центром в нуле.

Банахово пространство E_3^α состоит из функций $f(x_1, x_2, x_3)$ из $\mathfrak{A}_3$, для которых их ряды Фурье (1) удовлетворяют условиям

$$\sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^3} |C(m_1, m_2, m_3)| (\overline{m}_1 \overline{m}_2 \overline{m}_3)^\alpha = \|f(\vec{x})\|_{E_3^\alpha} < \infty. \tag{16}$$

Ясно, что такие ряды Фурье сходятся абсолютно, так как

$$\|f(\vec{x})\|_{\mathfrak{A}_3} \leqslant \|f(\vec{x})\|_{E_3^\alpha} (1 + 2\zeta(\alpha))^3,$$

а поэтому для любого $\alpha > 1$ они представляют непрерывные функции. Здесь и далее, как обычно, $\zeta(\alpha)$ — дзета-функция Римана.

Относительно нормы $\|f(\vec{x})\|_{E_3^\alpha}$ пространство E_3^α является несепарабельным банаховым пространством изоморфным пространству l_∞ — всех ограниченных комплексно-значных последовательностей (см. [13]).

Для дальнейшего мы будем рассматривать класс $E_3 = \bigcup\limits_{\alpha>1} E_3^\alpha$. Очевидно $E_3 \subset \mathfrak{A}_3$. Ясно, что класс E_3 незамкнут в пространстве $\mathfrak{A}_3$ относительно нормы $\|f(\vec{x})\|_{\mathfrak{A}_3}$, но является всюду плотным множеством.

Усеченной норменной поверхностью с параметром $t \geqslant 1$ называется множество

$$N_3(t) = \{\vec{x}|q(\vec{x}) = t,\, \vec{x} \neq \vec{0}\},$$

которое является границей гиперболического креста $K_3(t)$. Для натурального t на усеченной норменной поверхности имеется $\tau_3^*(t)$ целых ненулевых точек, где

$$\tau_3^*(t) = \sideset{}{'}\sum_{\vec{m}\in N_3(t)} 1 \tag{17}$$

— число представлений натурального числа t в виде $t = \overline{m}_1 \cdot \overline{m}_2 \cdot \overline{m}_3$.

Используя новые обозначения, можно написать другое выражение для нормы функции $||f(\vec{x})||_{E_3^\alpha}$. Справедливо равенство

$$||f(\vec{x})||_{E_3^\alpha} = \max\left(|C(\vec{0})|, \sup_{t\in\mathbb{N}}\left(t^\alpha \cdot \max_{\vec{m}\in N_3(t)} |C(\vec{m})|\right)\right).$$

Нетрудно видеть, что произвольная периодическая функция $f(\vec{x})$ из $E_3^\alpha(C)$ по модулю ограничена величиной $C\cdot(1+2\zeta(\alpha))^3$, при этом данная оценка достижима на функции

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty} \frac{C\cdot e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}}{(\overline{m}_1\cdot\overline{m}_3\cdot\overline{m}_3)^\alpha}$$

в точке $\vec{x} = \vec{0}$.

Очевидно, что $E_3^\alpha(C) \subset E_3^\beta(C)$ при $\alpha \geqslant \beta$. Для любой периодической функции $f(\vec{x}) \in E_3^\alpha(C) \subset E_3^\beta(C)$ справедливо неравенство для норм

$$||f(\vec{x})||_{E_3^\alpha} \geqslant ||f(\vec{x})||_{E_3^\beta}.$$

Равенство достигается только для конечных тригонометрических многочленов вида

$$f(\vec{x}) = C(\vec{0}) + \sum_{\vec{m}\in N_3(1)} C(\vec{m})\, e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}.$$

В работе [7] дано следующее определение дзета-функцией сетки M с весами $\vec{\rho}$ и параметром $p \geqslant 1$.

Определение 2. *Дзета-функцией сетки M с весами $\vec{\rho}$ и параметром $p \geqslant 1$ называется функция $\zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho})$, заданная в правой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$ $(\sigma > 1)$ рядом Дирихле*

$$\zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho}) = \sideset{}{'}\sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{\infty} \frac{|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^p}{(\overline{m}_1\overline{m}_2\overline{m}_3)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^*(p, M, \vec{\rho}, n)}{n^\alpha}, \tag{18}$$

где

$$S^*(p, M, \vec{\rho}, n) = \sum_{\vec{m}\in N(n)} |S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^p. \tag{19}$$

Непосредственно из определения следует неравенство

$$\zeta(p\alpha, p|M, \vec{\rho}) \leqslant \zeta^p(\alpha, 1|M, \vec{\rho}) \quad (\alpha > 1). \tag{20}$$

Если все веса равны 1, то будем говорить просто дзета-функция сетки M с параметром p и писать $\zeta(\alpha, p|M)$.

Теорема 3. *Если $f(x_1, x_2, x_3) \in E_3^\alpha(C)$, то для погрешности квадратурной формулы справедлива оценка*

$$\begin{aligned} |R_N[f]| \le C\left|\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right| + \frac{C}{N}\sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|}{(\overline{m}_1\overline{m}_2\overline{m}_3)^\alpha} = \\ = C\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right| + C\cdot\zeta(\alpha, 1|M, \vec{\rho}), \end{aligned} \tag{21}$$

где сумма $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ определена равенством (6). На классе $E_3^\alpha(C)$ эту оценку нельзя улучшить.

Другими словами теорему 3 можно сформулировать так:

Для нормы $\|R_N[f]\|_{E_3^\alpha}$ линейного функционала погрешности приближенного интегрирования по квадратурной формуле (5) справедливо равенство

$$\begin{aligned} \|R_N[f]\|_{E_3^\alpha} = \left|\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right| + \frac{1}{N}\sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|}{(\overline{m}_1\overline{m}_2\overline{m}_s)^\alpha} = \\ = \left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right| + \zeta(\alpha, 1|M, \vec{\rho}). \end{aligned} \tag{22}$$

Если рассмотреть при $\alpha > \frac{1}{q-1}$ класс $E_3^{\alpha,q}$ с нормой

$$\|f(\vec{x})\|_{E_3^{\alpha,q}} = \left(|C(\vec{0})|^q + \sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{\infty}{}' |C(\vec{m})|^q(\overline{m}_1\overline{m}_2\overline{m}_3)^{(q-1)\alpha}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

то справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Если $f(\vec{x}) \in E_3^{\alpha,q}$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то для погрешности квадратурной формулы справедлива оценка*

$$\begin{aligned} |R_N[f]| \le \|f(\vec{x})\|_{E_3^{\alpha,q}}\left(\left|\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right|^p + \frac{1}{N^p}\sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^p}{(\overline{m}_1\overline{m}_2\overline{m}_3)^\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} = \\ = \|f(\vec{x})\|_{E_3^{\alpha,q}}\left(\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right|^p + \zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho})\right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned} \tag{23}$$

где сумма $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ определена равенством (6). На классе $E_3^{\alpha,q}$ эту оценку нельзя улучшить.

Доказательство. Действительно, по теореме 1

$$\begin{aligned} R_N[f] = C(\vec{0})\left(\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \frac{1}{N}\sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m})S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = \\ = C(\vec{0})\left(\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \frac{1}{N}\sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m})(\overline{m}_1\overline{m}_2\overline{m}_3)^{\frac{\alpha}{p}}\frac{S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})}{(\overline{m}_1\overline{m}_2\overline{m}_3)^{\frac{\alpha}{p}}}. \end{aligned}$$

Применим к правой части неравенство Гёльдера, получим

$$|R_N[f]| \leqslant \left(|C(\vec{0})|^q + \sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{\infty}{}' |C(\vec{m})|^q (\overline{m}_1\overline{m}_2\overline{m}_3)^{\frac{q\alpha}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} \cdot$$

$$\cdot \left(\left|\frac{1}{N} S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right|^p + \frac{1}{N^p} \sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^p}{(\overline{m}_1\overline{m}_2\overline{m}_3)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha,q}} \left(\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right|^p + \zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho})\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Так как неравенство Гёльдера обращается в равенство при

$$C(\vec{0}) = \begin{cases} 0, & \text{при } S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) = 1; \\ \frac{\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0})-1\right|^p}{S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0})-1}, & \text{при } S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) \neq 1; \end{cases}$$

и

$$C(\vec{m}) = \begin{cases} 0, & \text{при } S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = 0; \\ \frac{\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})\right|^p}{S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})(\overline{m}_1\overline{m}_2\overline{m}_3)^{\alpha}}, & \text{при } S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) \neq 0; \end{cases} \qquad \vec{m} \neq \vec{0},$$

то теорема полностью доказана. □

Из теорем 3 и 4 следует, что на классах E_s^{α} и $E_s^{\alpha,q}$ оценка погрешности приближенного интегрирования сводится к оценке гиперболической дзета-функции сеток. Проводя аналогию с гиперболической дзета-функцией решетки, которая равна гиперболической дзета-функции сеток в случае параллелепипедальной сетки, можно высказать гипотезу, что для гиперболической дзета-функции сеток должен быть справедлив аналог теоремы Бахвалова об оценке гиперболической дзета-функцией решетки через гиперболический параметр решетки.

Цель данного раздела — ввести понятие гиперболических параметров сетки и доказать аналог теоремы Бахвалова для гиперболической дзета-функции сеток.

2.3. Первый, второй и третий гиперболические параметры сеток

В работе [16] было дано такое определение.

"Гиперболическим параметром сетки M с весами $\rho(\vec{x})$ назовем величину

$$q(M, \rho(\vec{x})) = \min_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s\setminus\{\vec{0}\}, |S(\vec{m})|>0} \overline{m_1}\ldots\overline{m_s}\,.\text{ "}$$

Первое применение гиперболического параметра сетки вытекает из теоремы Абеля (см. [33], стр. 106), позволяющее представить гиперболическую дзету-функцию сетки M с весами $\rho(\vec{x})$ в интегральном виде

$$\zeta_H(M, \rho(\vec{x})|\alpha) = \alpha \int\limits_{q(M,\rho(\vec{x}))}^{\infty} \frac{D(t|M, \rho(\vec{x}))dt}{t^{\alpha+1}},$$

где

$$D(t|M, \rho(\vec{x})) = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^3,\, \overline{m}_1\overline{m}_2\overline{m}_3\leqslant t}{}' |S(\vec{m})|$$

— сумматорная функция тригонометрической суммы.

В работе [7] для любой сетки M с весами $\vec{\rho}$ на пространстве периодических функций E_3^α рассмотрен линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних заданный равенством

$$g(\vec{x}) = A_{M,\vec{\rho}}f(\vec{x}) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\rho_k f[x_1+\xi_1(k), x_2+\xi_2(k), x_3+\xi_3(k)]. \tag{24}$$

Через $A_{M,\vec{\rho}}C(\vec{m})$ обозначается действие линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ на коэффициенты Фурье функции $f(\vec{x})$.

Лемма 1. *Для любой периодической функции $f(\vec{x})$ из пространства E_3^α и её коэффициентов Фурье $C(\vec{m})$ разложения в ряд Фурье*

$$f(\vec{x}) = \sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{\infty} C(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} \tag{25}$$

справедливо равенство

$$A_{M,\vec{\rho}}C(\vec{m}) = \frac{S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})}{N}C(\vec{m}) = S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})C(\vec{m}) \tag{26}$$

где $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — тригонометрическая сумма сетки с весами, а $S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — нормированная тригонометрическая сумма сетки с весами.

Кроме того, справедлива тривиальная оценка для нормы образа

$$\left\|A_{M,\vec{\rho}}f(\vec{x})\right\|_{E_3^\alpha} \leqslant \frac{\rho(M)}{N}\left\|f(\vec{x})\right\|_{E_3^\alpha}. \tag{27}$$

Доказательство. См. [7], стр. 194. □

С точки зрения величины нормированной тригонометрической суммы сетки с весами естественно определить следующие пять подмножеств фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ таким образом:

$$\begin{aligned}
K_0 = K_0(M,\vec{\rho}) &= \{\vec{m}\in\mathbb{Z}^3 \,|\, S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = 0\}, &(28)\\
K_1 = K_1(M,\vec{\rho}) &= \{\vec{m}\in\mathbb{Z}^3 \,|\, S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = 1\}, &(29)\\
K_2 = K_2(M,\vec{\rho}) &= \{\vec{m}\in\mathbb{Z}^3 \,|\, S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) \neq 1,\, |S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| = 1\}, &(30)\\
K_3 = K_3(M,\vec{\rho}) &= \{\vec{m}\in\mathbb{Z}^3 \,|\, 0 < |S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| < 1\}, &(31)\\
K_4 = K_4(M,\vec{\rho}) &= \{\vec{m}\in\mathbb{Z}^3 \,|\, |S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| > 1\}. &(32)
\end{aligned}$$

Ясно что $\mathbb{Z}^3 = K_0\bigcup K_1\bigcup K_2\bigcup K_3\bigcup K_4$. Такое разбиение называется разбиением Коробова. Оно фактически возникало в его работах, когда он проводил оценки погрешности приближенного интегрирования.

В работе [7] было дано определение нормального и несмещенного линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних (см. [7], стр. 195 и 199). Нормальный оператор не увеличивает норму любой функции, то есть $K_4 = \varnothing$, а для несмещенного оператора имеем: $S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) = 1$.

Далее везде будем считать, что веса $\vec{\rho}$ выбраны так, что соответствующий линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным. Для таких операторов выражение гиперболической дзета-функции сетки имеет более простой вид

$$\zeta(\alpha,p|M,\vec{\rho}) = \sum_{\vec{m}\in K_1\bigcup K_2}{}' \frac{1}{(\overline{m_1m_2m_3})^\alpha} + \sum_{\vec{m}\in K_3}\frac{|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^p}{(\overline{m_1m_2m_3})^\alpha}. \tag{33}$$

Используя общее определение гиперболического параметра, в случае нормального, несмещенного линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних можно определить первый, второй и третий гиперболические параметры сетки M с весами $\vec{\rho}$.

Определение 3. *Для произвольной сетки M с весами $\vec{\rho}$ такими, что соответствующий линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, первый, второй и третий гиперболические параметры сетки M с весами $\vec{\rho}$ задаются равенствами*

$$q_\nu\left(M, \rho(\vec{x})\right) = q(K_\nu\left(M, \rho(\vec{x})\right)) \quad (\nu = 1, 2, 3). \tag{34}$$

Ясно, что гиперболический параметр сетки и первый, второй и третий гиперболические параметры сетки M с весами $\vec{\rho}$ связаны соотношением

$$q\left(M, \rho(\vec{x})\right) = \min_{\nu=1,2,3} q_\nu\left(M, \rho(\vec{x})\right).$$

Пусть сетка M — рациональная со знаменателем p, то есть в кубе $G_3 = \{\vec{x} | 0 \leqslant x_1, x_2, x_3 < 1\}$ имеется N рациональных точек вида

$$\left(\frac{x_1^{(k)}}{p}, \frac{x_2^{(k)}}{p}, \frac{x_3^{(k)}}{p}\right) \qquad k = 1, \ldots, N, \tag{35}$$

$x_i^{(k)}$ — целые, $0 \leqslant x_i^{(k)} \leqslant p - 1$, p — натуральное.

Теорема 5. *Для любой рациональной сетки M со знаменателем p и с весами $\vec{\rho}$, для которых линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, справедливо соотношение*

$$p \cdot \mathbb{Z}^3 \subset K_1\left(M, \rho(\vec{x})\right),$$

кроме того тригонометрические суммы $S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ с весами $\vec{\rho}$ принимают конечное число различных значений, не превосходящее p^3.

Доказательство. Действительно, если

$$\vec{x}_k = \left(\frac{x_1^{(k)}}{p}, \frac{x_2^{(k)}}{p}, \frac{x_3^{(k)}}{p}\right),$$

то $(\vec{m}, \vec{x}_k) \in \mathbb{Z}$ для любого $\vec{m} \in p \cdot \mathbb{Z}^3$, поэтому $e^{2\pi i (\vec{m}, \vec{x}_k)} = 1$ и

$$S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \rho(\vec{x}_k) = S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) = 1,$$

так как линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным.

Аналогично получаем, что

$$S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m} + p \cdot \vec{n}).$$

Следовательно, все различные значения тригонометрических сумм $S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ с весами $\vec{\rho}$ содержатся среди значений для $\vec{m} \in [-p_1, p_2]^3$, где $p_1 = \left[\frac{p-1}{2}\right]$ и $p_2 = \left[\frac{p}{2}\right]$. $\square$

Теорема 6. *Для любой рациональной сетки M со знаменателем p и с положительными весами $\vec{\rho}$, для которых линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, множество $K_1(M,\vec{\rho})$ является целочисленной решеткой.*

Доказательство. Действительно, если для $\vec{m}$ выполняется равенство $S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})=1$, то в силу положительности весов $\vec{\rho}$ это возможно только при условии, что $e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x}_k)}=1$ при $k=1,\ldots,N$. Это означает, что $(\vec{m},\vec{x}_k)\in\mathbb{Z}$ при $k=1,\ldots,N$. Таким образом, $\vec{m}\in K_1(M,\vec{\rho})$ тогда и только тогда, когда $(\vec{m},\vec{x}_k)\in\mathbb{Z}$ при $k=1,\ldots,N$. Но если $\vec{m}_1,\vec{m}_2\in K_1(M,\vec{\rho})$, то и $\vec{m}_1\pm\vec{m}_2\in K_1(M,\vec{\rho})$, это означает что $K_1(M,\vec{\rho})$ является целочисленной решеткой. □

Теорема 7. *Для любой рациональной сетки M со знаменателем p и с положительными весами $\vec{\rho}$, для которых линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, множество $K_1(M,\vec{\rho})\bigcup K_2(M,\vec{\rho})$ является целочисленной решеткой.*

Доказательство. Действительно, если для $\vec{m}$ выполняется равенство $|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|=1$, то в силу положительности весов $\vec{\rho}$ это возможно только при условии, что найдется $x\in[0,1)$ такой, что $e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x}_k)}=e^{2\pi i x}$ при $k=1,\ldots,N$. Это означает, что $\{(\vec{m},\vec{x}_k)\}=x$ при $k=1,\ldots,N$.

Таким образом, $\vec{m}\in K_1(M,\vec{\rho})\bigcup K_2(M,\vec{\rho})$ тогда и только тогда, когда $\{(\vec{m},\vec{x}_k)\}=\{(\vec{m},\vec{x}_1)\}$ при $k=1,\ldots,N$.

Но если $\vec{m}_1,\vec{m}_2\in K_1(M,\vec{\rho})\bigcup K_2(M,\vec{\rho})$, то и

$$\vec{m}_1\pm\vec{m}_2\in K_1(M,\vec{\rho})\bigcup K_2(M,\vec{\rho}),$$

это означает что $K_1(M,\vec{\rho})\bigcup K_2(M,\vec{\rho})$ является целочисленной решеткой. □

2.4. Обобщенная теорема Бахвалова–Коробова для гиперболической дзета-функции сеток

Для формулировки обобщенной теоремы Бахвалова–Коробова для гиперболической дзета-функции сеток нам потребуется обощенная теорема Бахвалова для гиперболической дзета-функци решеток из работы [9] (см. стр. 197), одна лемма из работы [8] и одно новое определение.

Определение 4. *Будем говорить, что сетка M с весами $\vec{\rho}$, для которой линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, имеет тип $\Delta(N)<1$, если для любого $\vec{m}\in K_3(M,\vec{\rho})$ выполняется оценка $|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|\leqslant\Delta(N)$.*

Для натурального $t>1$ положим:

$$A_j(t)=\sum_{m_1\ldots m_j>t}\frac{1}{(m_1\ldots m_j)^\alpha}\quad(\alpha>1), B_j(t)=\sum_{m_1\ldots m_j\leqslant t}1,\quad C_j(t)=\sum_{m_1\ldots m_j\leqslant t}\frac{1}{m_1\ldots m_j}. \quad (36)$$

Лемма 2. *Справедливы неравенства*

$$C_1(t)\leqslant\ln t+1,\quad C_2(t)\leqslant 1+2\ln t+\frac{\ln^2 t}{2},\quad C_3(t)\leqslant 1+3\ln t+\frac{3\ln^2 t}{2}+\frac{\ln^3 t}{6}. \quad (37)$$

Доказательство. Действительно,

$$C_1(t)\leqslant 1+\int\limits_1^t\frac{dx}{x}=1+\ln t.$$

Для $C_2(t)$ имеем:

$$C_2(t) = \sum_{m=1}^{t} \frac{1}{m} C_1\left(\left[\frac{t}{m}\right]\right) \leqslant \sum_{1}^{t} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m}\ln\left(\frac{t}{m}\right)\right) \leqslant 1 + 2\ln t + \int\limits_{1}^{t} \left(\ln\frac{t}{x}\right)\frac{dx}{x} =$$

$$= 1 + 2\ln t + \int\limits_{0}^{\ln t} u du = 1 + 2\ln t + \frac{\ln^2 t}{2}.$$

Наконец, для $C_3(t)$ имеем

$$C_3(t) = \sum_{m=1}^{t} \frac{1}{m} C_2\left(\left[\frac{t}{m}\right]\right) \leqslant 1 + 2\ln t + \frac{\ln^2 t}{2} + \sum_{m=2}^{t}\left(\frac{1}{m} + \frac{2}{m}\ln\frac{t}{m} + \frac{1}{2m}\ln^2\frac{t}{m}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 1 + 2\ln t + \frac{\ln^2 t}{2} + \int\limits_{1}^{t}\left(1 + 2\ln\frac{t}{x} + \frac{1}{2}\ln^2\frac{t}{x}\right)\frac{dx}{x} = 1 + 2\ln t + \frac{\ln^2 t}{2} +$$

$$+ \int\limits_{0}^{\ln t}\left(1 + 2u + \frac{u^2}{2}\right)du = 1 + 2\ln t + \frac{\ln^2 t}{2} + \ln t + \ln^2 t + \frac{\ln^3 t}{6} =$$

$$= 1 + 3\ln t + \frac{3\ln^2 t}{2} + \frac{\ln^3 t}{6},$$

что и доказывает (37). □

Лемма 3. *Справедливы неравенства*

$$B_1(t) \leqslant t, \quad B_2(t) \leqslant t(1 + \ln t), \quad B_3(t) \leqslant t\left(1 + 2\ln t + \frac{\ln^2 t}{2}\right). \tag{38}$$

Доказательство. Действительно,

$$B_1(t) = \sum_{m=1}^{t} 1 = t.$$

Так как при $j > 1$

$$B_j(t) = \sum_{m_1 \ldots m_{j-1} \leqslant t} B_1\left(\left[\frac{t}{m_1 \ldots m_{j-1}}\right]\right) \leqslant tC_{j-1}(t), \tag{39}$$

то утверждение леммы следует из леммы 2. □

Лемма 4. *При $\alpha > 1$ справедливы неравенства*

$$A_1(t) < \frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}, \quad A_2(t) < \frac{1}{t^{\alpha-1}}\left(1 + \frac{\zeta(\alpha) + 1 + \ln t}{\alpha - 1}\right), \tag{40}$$

$$A_3(t) < \frac{1}{t^{\alpha-1}}\left(1 + \zeta(\alpha) + \frac{1 + \zeta(\alpha) + \zeta^2(\alpha)}{\alpha - 1} + \left(1 + \frac{2 + \zeta(\alpha)}{\alpha - 1}\right)\ln t + \frac{\ln^2 t}{2(\alpha - 1)}\right). \tag{41}$$

Доказательство. Действительно, так как t — натуральное, то

$$A_1(t) = \sum_{m>t} \frac{1}{m^\alpha} < \int\limits_{t}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}.$$

Для $A_2(t)$ имеем:

$$A_2(t) = \zeta(\alpha)A_1(t) + \sum_{m=1}^{t}\frac{1}{m^\alpha}A_1\left(\left[\frac{t}{m}\right]\right) < \frac{\zeta(\alpha)}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} + \sum_{m=1}^{t}\left(\frac{1}{t^\alpha} + \frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}m}\right) <$$
$$< \frac{\zeta(\alpha)}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} + \frac{1}{t^{\alpha-1}} + \frac{1+\ln t}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} = \frac{1}{t^{\alpha-1}}\left(1 + \frac{\zeta(\alpha)+1+\ln t}{\alpha-1}\right).$$

Наконец, для $A_3(t)$ имеем

$$A_3(t) = \zeta(\alpha)A_2(t) + \sum_{m_1m_2\leqslant t}\frac{1}{(m_1m_2)^\alpha}A_1\left(\left[\frac{t}{m_1m_2}\right]\right) <$$
$$< \zeta(\alpha)\left(\frac{1}{t^{\alpha-1}}\left(1+\frac{\zeta(\alpha)+1+\ln t}{\alpha-1}\right)\right) + \sum_{m_1m_2\leqslant t}\left(\frac{1}{t^\alpha} + \frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}(m_1m_2)}\right) =$$
$$= \zeta(\alpha)\left(\frac{1}{t^{\alpha-1}}\left(1+\frac{\zeta(\alpha)+1+\ln t}{\alpha-1}\right)\right) + \frac{B_2(t)}{t^\alpha} + \frac{C_2(t)}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} <$$
$$< \zeta(\alpha)\left(\frac{1}{t^{\alpha-1}}\left(1+\frac{\zeta(\alpha)+1+\ln t}{\alpha-1}\right)\right) + \frac{1+\ln t}{t^{\alpha-1}} + \frac{1+2\ln t+\frac{\ln^2 t}{2}}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} =$$
$$= \frac{1}{t^{\alpha-1}}\left(\zeta(\alpha)\left(1+\frac{\zeta(\alpha)+1+\ln t}{\alpha-1}\right) + 1 + \ln t + \frac{1+2\ln t+\frac{\ln^2 t}{2}}{(\alpha-1)}\right) =$$
$$= \frac{1}{t^{\alpha-1}}\left(1+\zeta(\alpha)+\frac{1+\zeta(\alpha)+\zeta^2(\alpha)}{\alpha-1} + \left(1+\frac{2+\zeta(\alpha)}{\alpha-1}\right)\ln t + \frac{\ln^2 t}{2(\alpha-1)}\right),$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Теорема 8. **(Обобщенная теорема Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функци сеток)** *Для любой рациональной сетки M со знаменателем p и с положительными весами $\vec{\rho}$ типа $\Delta(N) < 1$, для которых линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, справедлива оценка*

$$\zeta(\alpha, p|M,\vec{\rho}) \leqslant 2^{(\alpha+1)3+1}\alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^3\frac{(\ln q(\Lambda)+1)^2}{q^\alpha(\Lambda)} +$$
$$+\frac{\Delta^p(N)}{t^{\alpha-1}}\left(\frac{\tau^*(t)}{t} + 20 + 8\zeta(\alpha) + \frac{26+20\zeta(\alpha)+8\zeta^2(\alpha)}{\alpha-1} + \left(8+\frac{28+8\zeta(\alpha)}{\alpha-1}\right)\ln t + \frac{4\ln^2 t}{\alpha-1}\right), \quad (42)$$

где решетка $\Lambda = K_1(M,\vec{\rho})\bigcup K_2(M,\vec{\rho})$, $q(\Lambda) > 1$ и $t = q_3(M, \rho(\vec{x})) > 1$.

Доказательство. Действительно, пользуясь формулой (33), теоремой 7 и обозначениями из формулировки доказываемой теоремы, получим

$$\zeta(\alpha, p|M,\vec{\rho}) = \zeta_H(\Lambda|\alpha) + \sum_{\vec{m}\in K_3}\frac{|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^p}{(\overline{m_1}\cdot\overline{m_2}\cdot\overline{m_3})^\alpha} \leqslant \zeta_H(\Lambda|\alpha) + \Delta^p(N)\sum_{\vec{m}\in K_3}\frac{1}{(\overline{m_1}\cdot\overline{m_2}\cdot\overline{m_3})^\alpha}.$$

Оценим последнюю сумму с помощью леммы 4, получим:

$$\sum_{\vec{m}\in K_3}\frac{1}{(\overline{m_1}\cdot\overline{m_2}\cdot\overline{m_3})^\alpha} = \frac{\tau^*(t)}{t^\alpha} + 6A_1(t) + 12A_2(t) + 8A_3(t) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\tau^*(t)}{t^\alpha} + \frac{6}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} + \frac{12}{t^{\alpha-1}}\left(1 + \frac{\zeta(\alpha)+1+\ln t}{\alpha-1}\right) +$$
$$+\frac{8}{t^{\alpha-1}}\left(1+\zeta(\alpha) + \frac{1+\zeta(\alpha)+\zeta^2(\alpha)}{\alpha-1} + \left(1+\frac{2+\zeta(\alpha)}{\alpha-1}\right)\ln t + \frac{\ln^2 t}{2(\alpha-1)}\right) = \frac{\tau^*(t)}{t^\alpha} +$$
$$+\frac{1}{t^{\alpha-1}}\left(20+8\zeta(\alpha) + \frac{26+20\zeta(\alpha)+8\zeta^2(\alpha)}{\alpha-1} + \left(8+\frac{28+8\zeta(\alpha)}{\alpha-1}\right)\ln t + \frac{4\ln^2 t}{\alpha-1}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho}) \leqslant \zeta_H(\Lambda|\alpha) + \Delta^p(N)A_s(t) \leqslant 2^{(\alpha+1)s+1}\alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^s \frac{(\ln q(\Lambda)+1)^{s-1}}{q^\alpha(\Lambda)} +$$
$$+\frac{\Delta^p(N)}{t^{\alpha-1}}\left(\frac{\tau^*(t)}{t} + 20 + 8\zeta(\alpha) + \frac{26+20\zeta(\alpha)+8\zeta^2(\alpha)}{\alpha-1} + \left(8+\frac{28+8\zeta(\alpha)}{\alpha-1}\right)\ln t + \frac{4\ln^2 t}{\alpha-1}\right).$$

□

3. Количество узлов в трёхмерной сетке Смоляка

Для того чтобы определить порядок роста отклонения сетки Смоляка при увеличении количества точек сетки необходимо подсчитать их количество. Из определения видно, что сетка Смоляка $Sm(q)$ является объединением нескольких обобщённых равномерных сеток, при этом любые две сетки входящие в объединение имеют непустое пересечение. Поэтому здесь возможно два случая: число узлов подсчитывается с учетом их кратности и без учета.

3.1. Число узлов с учетом их кратности

По определению сетки Смоляка справедливо представление

$$Sm(q) = \bigcup_{\substack{q-2\leqslant \nu_1+\nu_2+\nu_3\leqslant q,\\ \nu_1,\nu_2,\nu_3\geqslant 1}} M(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = \left(\bigcup_{\nu_1=1}^{q-2}\bigcup_{\nu_1=1}^{q-1-\nu_1} M(\nu_1,\nu_2,q-\nu_1-\nu_2)\right)\bigcup$$
$$\bigcup\left(\bigcup_{\nu=1}^{q-3}\bigcup_{\nu_1=1}^{q-2-\nu_1} M(\nu_1,\nu_2,q-1-\nu_1-\nu_2)\right)\bigcup\left(\bigcup_{\nu=1}^{q-4}\bigcup_{\nu_1=1}^{q-3-\nu_1} M(\nu_1,\nu_2,q-2-\nu_1-\nu_2)\right). \quad (43)$$

Нетрудно видеть, что любые два члена из объединения в правой части равенства (43) имеют непустое пересечение. А именно, справедливо равенство

$$M(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\bigcap M(\mu_1,\mu_2,\mu_3) = M(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3), \quad (44)$$

где $\lambda_1 = \min(\nu_1,\mu_1)$, $\lambda_2 = \min(\nu_2,\mu_2)$ и $\lambda_3 = \min(\nu_3,\mu_3)$.

Обозначим через $N_q^{(1)}$ число узлов сетки $Sm(q)$ с учетом кратности, то есть узел (x_1,x_2,x_3) имеет кратность равную числу различных наборов (ν_1,ν_2,ν_3) таких, что

$$(x_1,x_2,x_3) = (k_1 2^{-\nu_1}, k_2 2^{-\nu_2}, k_3 2^{-\nu_3}).$$

Ясно, что при таком подсчете узлов справедливо равенство

$$N_q^{(1)} = \sum_{\substack{q-2\leqslant \nu_1+\nu_2+\nu_3\leqslant q,\\ \nu_1,\nu_2,\nu_3\geqslant 1}} |M(\nu_1,\nu_2,\nu_3)|. \quad (45)$$

Теорема 9. *Если $N_q^{(1)}$ — число узлов сетки $Sm(q)$ с учетом кратности, то при $q \geqslant 5$ выполняются соотношения:*

$$N_q^{(1)} = \frac{7q^2-29q+32}{8}2^q, \quad q = O\left(\ln N_q^{(1)}\right). \quad 2^q = O\left(\frac{N_q^{(1)}}{\ln^2 N_q^{(1)}}\right) \tag{46}$$

Доказательство. Действительно, узлы сетки Смоляка имеют вид:

$$\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \frac{k_2}{2^{\nu_2}}, \frac{k_3}{2^{\nu_3}}\right), \text{ где } 0 \leqslant k_1 \leqslant 2^{\nu_1}-1,\ 0 \leqslant k_2 \leqslant 2^{\nu_2}-1,\ 0 \leqslant k_3 \leqslant 2^{\nu_3}-1,$$
$$\nu_1, \nu_2, \nu_3 \geqslant 1 \text{ и } q-2 \leqslant \nu_1+\nu_2+\nu_3 \leqslant q.$$

Отсюда следует, что

$$N_q^{(1)} = \sum_{k=0}^{2} \sum_{\substack{\nu_1+\nu_2+\nu_3=q-k\\ \nu_1,\nu_2,\nu_3\geqslant 1}} 2^{\nu_1}\cdot 2^{\nu_2}\cdot 2^{\nu_3} = \sum_{k=0}^{2} 2^{q-k} \sum_{\nu_1=1}^{q-k-2} \sum_{\nu_2=1}^{q-k-1-\nu_1} 1 =$$
$$= \sum_{k=0}^{2} 2^{q-k} \sum_{\nu_1=1}^{q-k-2} (q-k-1-\nu_1) = \sum_{k=0}^{2} 2^{q-k} \sum_{\nu_1=1}^{q-k-2} \nu_1 = \sum_{k=0}^{2} 2^{q-k} \frac{(q-k-2)(q-k-1)}{2} =$$
$$= \frac{7q^2-29q+32}{8}2^q.$$

Так как $N_q^{(1)} = O(q^2 2^q)$, то $q = O\left(\ln N_q^{(1)}\right)$, $2^q = O\left(\frac{N_q^{(1)}}{\ln^2 N_q^{(1)}}\right)$ и теорема доказана. □

3.2. Число узлов без учета их кратности

По аналогии с приведенной системой вычетов определим при $\nu_1, \nu_2, \nu_3 > 0$ приведенные обобщенные равномерные сетки $M^*(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, $M^*(\nu_1,\nu_2,0)$, $M^*(\nu_1,0,\nu_3)$, $M^*(0,\nu_2,\nu_3)$, $M^*(\nu_1,0,0)$, $M^*(0,\nu_2,0)$, $M^*(0,0,\nu_3)$ равенствами

$$M^*(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = \left\{\left(\frac{2k_1-1}{2^{\nu_1}}, \frac{2k_2-1}{2^{\nu_2}}, \frac{2k_3-1}{2^{\nu_3}}\right) \middle| \begin{array}{c} 1 \leqslant k_1 \leqslant 2^{\nu_1-1},\ 1 \leqslant k_2 \leqslant 2^{\nu_2-1}, \\ 1 \leqslant k_3 \leqslant 2^{\nu_3-1} \end{array}\right\},$$
$$M^*(\nu_1,\nu_2,0) = \left\{\left(\frac{2k_1-1}{2^{\nu_1}}, \frac{2k_2-1}{2^{\nu_2}}, 0\right) \middle| 1 \leqslant k_1 \leqslant 2^{\nu_1-1},\ 1 \leqslant k_2 \leqslant 2^{\nu_2-1}\right\},$$
$$M^*(\nu_1,0,\nu_3) = \left\{\left(\frac{2k_1-1}{2^{\nu_1}}, 0, \frac{2k_3-1}{2^{\nu_3}}\right) \middle| 1 \leqslant k_1 \leqslant 2^{\nu_1-1},\ 1 \leqslant k_3 \leqslant 2^{\nu_3-1}\right\},$$
$$M^*(0,\nu_2,\nu_3) = \left\{\left(0, \frac{2k_2-1}{2^{\nu_2}}, \frac{2k_3-1}{2^{\nu_3}}\right) \middle| 1 \leqslant k_2 \leqslant 2^{\nu_2-1},\ 1 \leqslant k_3 \leqslant 2^{\nu_3-1}\right\},$$
$$M^*(\nu_1,0,0) = \left\{\left(\frac{2k_1-1}{2^{\nu_1}}, 0, 0\right) \middle| 1 \leqslant k_1 \leqslant 2^{\nu_1-1}\right\},$$
$$M^*(0,\nu_2,0) = \left\{\left(0, \frac{2k_2-1}{2^{\nu_2}}, 0\right) \middle| 1 \leqslant k_2 \leqslant 2^{\nu_2-1}\right\},$$
$$M^*(0,0,\nu_3) = \left\{\left(0, 0, \frac{2k_3-1}{2^{\nu_3}}\right) \middle| 1 \leqslant k_3 \leqslant 2^{\nu_3-1}\right\}, \quad M^*(0,0,0) = \left\{\vec{0}\right\}. \tag{47}$$

Ясно, что приведенные обобщенные равномерные сетки $M^*(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, $M^*(\nu_1,\nu_2,0)$, $M^*(\nu_1,0,\nu_3)$, $M^*(0,\nu_2,\nu_3)$, $M^*(\nu_1,0,0)$, $M^*(0,\nu_2,0)$, $M^*(0,0,\nu_3)$ состоят из

$$|M^*(\nu_1,\nu_2,\nu_3)| = 2^{\nu_1+\nu_2+\nu_3-3}, \quad |M^*(\nu_1,\nu_2,0)| = 2^{\nu_1+\nu_2-2}, \quad |M^*(\nu_1,0,\nu_3)| = 2^{\nu_1+\nu_3-2}, \tag{48}$$
$$|M^*(0,\nu_2,\nu_3)| = 2^{\nu_2+\nu_3-2},\ |M^*(\nu_1,0,0)| = 2^{\nu_1-1},\ |M^*(0,\nu_2,0)| = 2^{\nu_2-1},\ |M^*(0,0,\nu_3)| = 2^{\nu_3-1} \tag{49}$$

точек, так как каждая трёхмерная приведенная обобщенная равномерная сетка $M^*(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ является декартовым произведением соответствующих одномерных приведенных равномерных сеток:

$$M^*(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = M^*(\nu_1) \times M^*(\nu_2) \times M^*(\nu_3)$$

и справедливо равенство для количества точек одномерной приведенной равномерной сетки $M^*(\nu)$:

$$M^*(\nu) = \left\{ \left(\frac{2k+1}{2^\nu} \right) \middle| 0 \leqslant k \leqslant 2^{\nu-1} - 1 \right\}, \quad |M^*(\nu)| = 2^{\nu-1}, \tag{50}$$

и для удобства примем соглашение

$$M^*(0) = \{(0, 0, 0)\}, \quad |M^*(0)| = 1. \tag{51}$$

Ясно, что при $\nu \geqslant 0$ справедлива общая формула $|M^*(\nu)| = 2^{\overline{\nu}-1}$, из которой при $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \geqslant 0$ следует равенство $|M^*(\nu_1, \nu_2, \nu_3)| = 2^{\overline{\nu}_1 + \overline{\nu}_2 + \overline{\nu}_3 - 3}$.

Приведенные обобщенные равномерные сетки попарно не пересекаются. Отсюда вытекает важное для дальнейшего разбиение обобщенной равномерной сетки на непересекающиеся подсетки.

Лемма 5. *Справедливо представление*

$$M(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \bigcup_{0 \leqslant \mu_j \leqslant \nu_j,\, j=1,2,3} M^*(\mu_1, \mu_2, \mu_3). \tag{52}$$

Доказательство. Действительно, имеется единственная нулевая точка, и он образует приведенную обобщенную равномерную сетку $M^*(0, 0, 0)$.

Рассмотрим произвольную ненулевую точку обощенной равномерной сетки

$$\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \frac{k_2}{2^{\nu_2}}, \frac{k_3}{2^{\nu_3}} \right) \quad 1 \leqslant k_1 \leqslant 2^{\nu_1} - 1,\ 1 \leqslant k_2 \leqslant 2^{\nu_2} - 1,\ 1 \leqslant k_3 \leqslant 2^{\nu_3} - 1.$$

Каждая такая точка однозначно определяет приведенную обобщенную сетку $M^*(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, которой она принадлежит. А именно, при $j = 1, 2, 3$

если $k_j = 0$, то $\mu_j = 0$;

если $k_j \neq 0$, $(k_j, 2^{\nu_j}) = 2^{d_j}$, то $\mu_j = \nu_j - d_j$.

Отсюда следует, что ненулевые точки образуют следующее объединение приведенных обобщенных равномерных сеток:

$$\bigcup_{0 \leqslant \mu_j \leqslant \nu_j,\, j=1,2,3\, (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \neq \vec{0}} M^*(\mu_1, \mu_2, \mu_3).$$

Объединяя с сеткой $M^*(0, 0, 0)$, получим утверждение леммы. □

Теорема 10. *Если $N_q^{(2)}$ — число узлов сетки $Sm(q)$ без учета кратности, то при $q \geqslant 5$ выполняются соотношения:*

$$N_q^{(2)} = 2^{q-2} \frac{q^2 + q - 4}{2}, \quad q = O\left(\ln N_q^{(2)} \right), \quad 2^q = O\left(\frac{N_q^{(2)}}{\ln^2 N_q^{(2)}} \right).$$

Доказательство. Из определения сетки Смоляка и из леммы 5 следует представление

$$Sm(q) = \bigcup_{\substack{q-2 \leqslant \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \leqslant q, \\ \nu_1, \nu_2, \nu_3 \geqslant 1}} M(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \bigcup_{\substack{0 \leqslant \mu_1, \mu_2, \mu_3 \leqslant q-2, \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \leqslant q}} M^*(\mu_1, \mu_2, \mu_3). \tag{53}$$

Так как различные приведенные обобщенные равномерные сетки не пересекаются, то

$$N_q^{(2)} = |Sm(q)| = \sum_{\substack{0\leqslant\mu_1,\mu_2,\mu_3\leqslant q-2,\\ \mu_1+\mu_2+\mu_3\leqslant q}} |M^*(\mu_1,\mu_2,\mu_3)| = \sum_{\substack{0\leqslant\mu_1,\mu_2,\mu_3\leqslant q-2,\\ \mu_1+\mu_2+\mu_3\leqslant q}} 2^{\overline{\mu}_1+\overline{\mu}_2+\overline{\mu}_3-3}.$$

Отсюда следует, что

$$N_q^{(2)} = 1 + 3\sum_{1\leqslant\mu_1\leqslant q-2} 2^{\mu_1-1} + 3\sum_{1\leqslant\mu_1\leqslant q-2}\ \sum_{1\leqslant\mu_2\leqslant q-1-\mu_1} 2^{\mu_1+\mu_2-2} +$$
$$+ \sum_{1\leqslant\mu_1\leqslant q-2}\ \sum_{1\leqslant\mu_2\leqslant q-1-\mu_1}\ \sum_{1\leqslant\mu_3\leqslant q-\mu_1-\mu_2} 2^{\mu_1+\mu_2+\mu_3-3} =$$

$$= 1 + 3\left(2^{q-2}-1\right) + 3\sum_{1\leqslant\mu_1\leqslant q-2} 2^{\mu_1-1}\left(2^{q-1-\mu_1}-1\right) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant\mu_1\leqslant q-2}\ \sum_{1\leqslant\mu_2\leqslant q-1-\mu_1} 2^{\mu_1+\mu_2-2}\left(2^{q-\mu_1-\mu_2}-1\right) = 3\cdot 2^{q-2} - 2 + 3\cdot 2^{q-2}(q-2) - 3\left(2^{q-2}-1\right) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant\mu_1\leqslant q-2} 2^{q-2}(q-1-\mu_1) - \sum_{1\leqslant\mu_1\leqslant q-2} 2^{\mu_1-1}\left(2^{q-1-\mu_1}-1\right) = 1 + 3\cdot 2^{q-2}(q-2) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant\mu_1\leqslant q-2} 2^{q-2}(q-2-\mu_1) + 2^{q-2} - 1 = 2^{q-2}(3q-5) + 2^{q-2}\frac{(q-2)(q-3)}{2} = 2^{q-2}\frac{q^2+q-4}{2}.$$

Отсюда следует $q = O(\ln N_q^{(2)})$, $2^q = O\left(\frac{N_q^{(2)}}{\ln^2 N_q^{(2)}}\right)$ и утверждение теоремы полностью доказано. $\square$

3.3. Число узлов с учетом их весов

Квадратурная формула трёхмерной сетки Смоляка с весами имеет вид

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3 = \sum_{l=0}^{2}\frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}} \sum_{\nu_1=1}^{q-l-2}\ \sum_{\nu_2=1}^{q-l-\nu_1-1}\ \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1}\sum_{k_2=0}^{2^{\nu_2}-1}\ \sum_{k_3=0}^{2^{q-l-\nu_1-\nu_2}-1} 1\times$$
$$\times f\left(\frac{m_1k_1}{2^{\nu_1}}, \frac{m_2k_2}{2^{\nu_2}}, \frac{m_3k_3}{2^{q-l-\nu_1-\nu_2}}\right) - R_{N(q)}[f], \tag{54}$$

где $N(q)$ — число узлов сетки с ненулевыми весами, а $R_{N(q)}[f]$ — линейный функционал погрешности приближенного интегрирования по квадратурной формуле.

Введём обозначение

$$I_q[f] = \sum_{l=0}^{2}\frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}} \sum_{\nu_1=1}^{q-l-2}\ \sum_{\nu_2=1}^{q-l-\nu_1-1}\ \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1}\sum_{k_2=0}^{2^{\nu_2}-1}\ \sum_{k_3=0}^{2^{q-l-\nu_1-\nu_2}-1} f\left(\frac{m_1k_1}{2^{\nu_1}}, \frac{m_2k_2}{2^{\nu_2}}, \frac{m_3k_3}{2^{q-l-\nu_1-\nu_2}}\right).$$

Это равенство можно переписать в виде

$$I_q[f] = \sum_{l=0}^{2}\frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}} \sum_{\nu_1=1}^{q-l-2}\ \sum_{\nu_2=1}^{q-l-\nu_1-1}\ \sum_{\nu_3=q-l-\nu_1-\nu_2}\ \sum_{\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\frac{k_2}{2^{\nu_2}},\frac{k_3}{2^{\nu_3}}\right)\in M(\nu_1,\nu_2,\nu_3)} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \frac{k_2}{2^{\nu_2}}, \frac{k_3}{2^{\nu_3}}\right).$$

Воспользуемся представлением (5), получим

$$I_q[f] = \sum_{l=0}^{2} \frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}} \sum_{\nu_1=1}^{q-l-2} \sum_{\nu_2=1}^{q-l-\nu_1-1} \sum_{\nu_3=q-l-\nu_1-\nu_2} \left(f(0,0,0) + \sum_{0\leqslant\mu_j\leqslant\nu_j,\, j=1,2,3\,(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\neq\vec{0}} 1\times \right.$$
$$\left. \times \sum_{\left(\frac{k_1}{2^{\mu_1}},\frac{k_2}{2^{\mu_2}},\frac{k_3}{2^{\mu_3}}\right)\in M^*(\mu_1,\mu_2,\mu_3)} f\left(\frac{k_1}{2^{\mu_1}},\frac{k_2}{2^{\mu_2}},\frac{k_3}{2^{\mu_3}}\right)\right).$$

Меняя порядок суммирования, получим:

$$I_q[f] = f(\vec{0})\rho(\vec{0}) + \sum_{\mu_1+\mu_2+\mu_3\leqslant q,\, (\mu_1,\mu_2,\mu_3)\neq\vec{0}} \sum_{\left(\frac{k_1}{2^{\mu_1}},\frac{k_2}{2^{\mu_2}},\frac{k_3}{2^{\mu_3}}\right)\in M^*(\mu_1,\mu_2,\mu_3)} f\left(\frac{k_1}{2^{\mu_1}},\frac{k_2}{2^{\mu_2}},\frac{k_3}{2^{\mu_3}}\right)\cdot$$
$$\cdot\rho\left(\frac{k_1}{2^{\mu_1}},\frac{k_2}{2^{\mu_2}},\frac{k_3}{2^{\mu_3}}\right),$$

где

$$\rho(\vec{0}) = \sum_{l=0}^{2} \frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}} \sum_{\nu_1=1}^{q-l-2} \sum_{\nu_2=1}^{q-l-\nu_1-1} \sum_{\nu_3=q-l-\nu_1-\nu_2} 1 = \sum_{l=0}^{2} \frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}} \sum_{\nu_1=1}^{q-l-2} (q-l-\nu_1-1) =$$
$$= \frac{1}{2^q}\left(\frac{(q-2)(q-1)}{2} - 2(q-3)(q-2) + 2(q-4)(q-3)\right) = \frac{1}{2^q}\frac{q^2-11q+26}{2},$$

а для $\left(\frac{k_1}{2^{\mu_1}},\frac{k_2}{2^{\mu_2}},\frac{k_3}{2^{\mu_3}}\right)\neq\vec{0}$ имеем:

$$\rho\left(\frac{k_1}{2^{\mu_1}},\frac{k_2}{2^{\mu_2}},\frac{k_3}{2^{\mu_3}}\right) = \sum_{l=0}^{2} \frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}} \sum_{\nu_1=\max(1,\mu_1)}^{q-l-2} \sum_{\nu_2=\max(1,\mu_2)}^{q-l-\nu_1-1} \sum_{\nu_3=q-l-\nu_1-\nu_2\geqslant\mu_3} 1 =$$
$$= \sum_{l=0}^{2} \frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}} \sum_{\nu_1=\max(1,\mu_1)}^{q-l-2} \sum_{\nu_2=\max(1,\mu_2)}^{\min(q-l-\nu_1-1,q-l-\nu_1-\mu_3)} 1 = \sum_{l=0}^{2} \frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}} \sum_{\nu_1=\max(1,\mu_1)}^{q-l-2} \sum_{\nu_2=\max(1,\mu_2)}^{q-l-\nu_1-\max(1,\mu_3)} 1 =$$
$$= \sum_{l=0}^{2} \frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}} \sum_{\nu_1=\max(1,\mu_1)}^{\min(q-l-2,q-l-\max(1,\mu_3)-\max(1,\mu_2))} (q-l-\nu_1-\max(1,\mu_3)-\max(1,\mu_2)+1) =$$
$$= \sum_{l=0}^{2} \frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}} \sum_{\nu_1=\overline{\mu_1}}^{q-l-\overline{\mu_2}-\overline{\mu_3}} (q-l-\nu_1-\overline{\mu_2}-\overline{\mu_3}+1) =$$
$$= \sum_{l=0}^{\min(2,q-\overline{\mu_1}-\overline{\mu_2}-\overline{\mu_3})} \frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}} \frac{(q-l-\overline{\mu_2}-\overline{\mu_3}-\overline{\mu_1}+1)(q-l-\overline{\mu_2}-\overline{\mu_3}-\overline{\mu_1}+2)}{2}.$$

Лемма 6. *Пусть величина $S(q,\mu)$ при натуральных q и μ с $1\leqslant\mu\leqslant q$ задана равенством*

$$S(q,\mu) = \sum_{l=0}^{\min(2,q-\mu)} \frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}} \frac{(q-l-\mu+1)(q-l-\mu+2)}{2},$$

тогда справедливы соотношения

$$S(q,\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2^q}, & \text{при } \mu = q, \\ -\frac{1}{2^q}, & \text{при } \mu = q-1, \\ \frac{1}{2^q}\frac{\left(q-\mu-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{17}{4}}{2}, & \text{при } \mu\leqslant q-2. \end{cases}$$

Доказательство. Действительно,

$$S(q,q)=\sum_{l=0}^{0}\frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}}\frac{(1-l)(2-l)}{2}=\frac{1}{2^q}.$$

При $\mu=q-1$ получим

$$S(q,q-1)=\sum_{l=0}^{1}\frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}}\frac{(2-l)(3-l)}{2}=\frac{1}{2^q}(3-4)=-\frac{1}{2^q}.$$

Наконец, при $\mu\leqslant q-2$ имеем:

$$S(q,\mu)=\sum_{l=0}^{2}\frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}}\frac{(q-l-\mu+1)(q-l-\mu+2)}{2}=$$

$$=\frac{1}{2^q}\left(\frac{(q-\mu+1)(q-\mu+2)}{2}-2(q-\mu)(q-\mu+1)+2(q-1-\mu)(q-\mu)\right)=$$

$$=\frac{1}{2^q}\frac{q^2-(5+2\mu)q+\mu^2+5\mu+2}{2}=\frac{1}{2^q}\frac{\left(q-\mu-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{17}{4}}{2}$$

и лемма полностью доказана. □

Теорема 11. *В квадратурной формуле*

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3=f(\vec{0})\rho(\vec{0})+$$

$$+\sum_{\mu_1+\mu_2+\mu_3\leqslant q,\,(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\neq\vec{0}}\ \sum_{\left(\frac{k_1}{2^{\mu_1}},\frac{k_2}{2^{\mu_2}},\frac{k_3}{2^{\mu_3}}\right)\in M^*(\mu_1,\mu_2,\mu_3)} f\left(\frac{k_1}{2^{\mu_1}},\frac{k_2}{2^{\mu_2}},\frac{k_3}{2^{\mu_3}}\right)\rho\left(\frac{k_1}{2^{\mu_1}},\frac{k_2}{2^{\mu_2}},\frac{k_3}{2^{\mu_3}}\right)-R_{N(q)}[f] \quad (55)$$

все узлы отличны от нуля и их количество $N(q)=N_q^{(2)}=2^{q-2}\frac{q^2+q-4}{2}$.

Доказательство. Действительно, из предыдущего и леммы 6 следует, что

$$\rho(\vec{0})=\frac{1}{2^q}\frac{q^2-11q+26}{2},\quad \rho\left(\frac{k_1}{2^{\mu_1}},\frac{k_2}{2^{\mu_2}},\frac{k_3}{2^{\mu_3}}\right)=\frac{1}{2^q}\frac{\left(q-\overline{\mu_1}-\overline{\mu_2}-\overline{\mu_3}-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{17}{4}}{2}.$$

Таким образом, все веса не обращаются в ноль, а так совокупность всех узлов квадратурной формулы (55) совпадает с множеством всех узлов сетки Смоляка без повторений, то из теоремы 10 вытекает утверждение о количестве узлов в формуле (55). □

4. Заключение

В данной работе получены следующие результаты:

1. доказана усиленная обобщённая теорема Бахвалова–Коробова для гиперболической дзета-функции трёхмерных сеток;

2. подсчитано число узлов сетки Смоляка с учетом их кратности; число узлов с учетом их весов.

3. подсчитано число узлов сетки Смоляка без учета их кратности;

4. подсчитано число узлов сетки Смоляка с учетом их весов;

5. найдена форма квадратурной формулы с сеткой Смоляка без кратных узлов и найдены явные формулы для весов этой квадратурной формулы. Показано, что количество узлов такой квадратурной формулы в 7 раз меньше, чем в случае формулы с кратными узлами.

В следующих статьях предполагается дать формулы для значения тригонометрических сумм сеток Смоляка, новые оценки погрешностей квадратурных и интерполяционных формул для трёхмерных сеток Смоляка.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. N 4. С. 3–18.

2. Вронская Г. Т., Добровольский Н. Н. Отклонения плоских сеток / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. 193 с.

3. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Многомерные теоретико-числовые сетки и решетки и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. 284 с.

4. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012 Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.

5. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Огородничук Н. К., Ребров Е. Д., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Труды X международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". Ученые записки Орловского государственного университета. 2012. № 6. Часть 2. С. 90–98.

6. Добровольская Л. П., М. Н. Добровольский, Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2013. Вып. 4, ч. 2. С. 47–52.

7. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник 2008 Т. 9, вып. 1(25). С. 185–223.

8. Добровольский М. Н. Оценки сумм по гиперболическому кресту // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, вып. 1. С. 82–90.

9. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. № 6090–84.

10. Добровольский Н. М. Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6089–84.

11. Добровольский Н. М. О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$ / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. № 6091–84.

12. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Яфаева Р. Р. О сетках С. А. Смоляка // Современные проблемы математики, механики, информатики: Тезисы докладов Всероссийской научной конференции. Тула: ТулГу, 2002. С. 18–20.

13. Добровольский Н. М., Манохин Е. В. Банаховы пространства периодических функций // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Т. 4, вып. 3. Тула, 1998. С. 56–67.

14. Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. О непрерывности дзета-функции сетки с весами // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 7, вып. 1. Тула, 2001. С. 82–86.

15. Добровольский Н. Н. О числе целых точек в гиперболическом кресте при значениях параметра $1 \leqslant t < 21$ // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, вып. 1. С. 91–95.

16. Добровольский Н. Н. Отклонение двумерных сеток Смоляка // Чебышевский сборник, 2007. Т. 8, вып. 1(21). С. 110–152.

17. Добровольский Н. Н. О тригонометрическом полиноме сетки Смоляка // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики". Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. С. 36–36.

18. Добровольский Н. Н. О гиперболическом параметре сетки // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Ч. 1. С. 6–18.

19. Добровольский Н. Н. Гиперболический параметр сеток с весами и его применение: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ имени М. В. Ломоносова, 2014.

20. Киселёва О. В. О задаче Коробова для модифицированных сеток Смоляка // Чебышевский сборник, 2007. Т. 8, вып. 4(24). С. 50–104.

21. Коробов Н. М. Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел // ДАН СССР. 1957. № 6. С. 1062–1065.

22. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.

23. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207–1210.

24. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР. 1960. Т. 132. № 5. С. 1009–1012.

25. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

26. Коробов Н. М. Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Математические заметки. 1994. Т. 55, вып. 2. С. 83–90.

27. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе (второе издание). М.: МЦНМО, 2004.

28. Реброва И. Ю., Чубариков В. Н., Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О классических теоретико-числовых сетках // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 4, С. 118–176.

29. Смоляк С. А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // ДАН СССР. 1963. Т. 148, № 5, С. 1042–1045.

30. Соболь И. М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. М.: Наука, 1969.

31. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 1976. Т. 231. № 4. С. 818–821.

32. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР, 1979.

33. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел / М.: Изд-во "МИР" 1974.

34. Dobrovolskaya, L. P., Dobrovolsky, M. N., Dobrovol'skii, N. M., Dobrovolsky, N. N. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices. In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. V. 211. 2014. P. 23–62. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-03146-0_2

35. Faure H. Discrepance de suites associees a un systeme denumeration (en dimention s) // Acta Arith. 41. 1982. P. 337–351.

36. Halton J. H. On the efficiency of certain quasirandom sequences of points in evaluating multidimensional integrals. // Numerische Math. 27. № 2 (1960), 84–90, Bd 2 № 2.

37. Hammersley J. M. Monte-Carlo methods for sobving multivariable problems // Proc. N 4. Acad. Sci. 1960.

38. Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. // Math. Ann. 1916. Bd. 77. S. 313–352 (пер. в кн.: Вейль Г. Математика. Теоретическая физика. М.: Наука, 1984).

REFERENCES

1. Bakhvalov, N.S. 1959, "On approximate computation of multiple integrals", Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4, pp. 3–18.

2. Vronskaya, G.T. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, Otklonenie ploskikh setok [Standard deviation of a flat mesh], Izdatel'stvo TGPU im. L.N.Tolstogo, Tula, Russia.

3. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, Mnogomernye teoretiko-chislovye setki i reshyotki i algoritmy poiska optimal'nykh koehffitsientov [Multidimensional number-theoretic grids and lattices and algorithms for finding optimal coefficients], Izdatel'stvo Tul'skogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. L.N. Tolstogo, Tula, Russia. 284 p.

4. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, "The hyperbolic Zeta function of grids and lattices, and calculation of optimal coefficients", Chebyshevskij sbornik, vol. 13, no. 4(44), pp. 4–107.

5. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N., Ogorodnichuk, N. K., Rebrov, E. D. & Rebrova, I. YU. 2012, "Some questions of the number-theoretic method in the approximate analysis", Trudy X mezhdunarodnoj konferentsii "Algebra i teoriya chisel: sovremennye problemy i prilozheniya" Uchenye zapiski Orlovskogo gosudarstvennogo universiteta [Proceedings of the X international conference "Algebra and number theory: modern problems and applications"scientific notes of Orel state University], no. 6, part 2, pp. 90-98.

6. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N., & Rebrova, I. YU. 2013, "Some questions of the number-theoretic method in the approximate analysis", Izvestie Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika, vol.13, no. 4(2), pp. 47-52.

7. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, N. M. & Simonov, A.S. 2008, "On the error of approximate integration over modified grids", Chebyshevskij sbornik, vol. 9, no. 1(25), pp. 185–223.

8. Dobrovol'skii, M. N. 2003, "Estimates of sums over a hyperbolic cross", Izvestie Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika, vol.9, no. 1, pp. 82-90.

9. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "The hyperbolic Zeta function of lattices", Dep. v VINITI, no. 6090–84.

10. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Evaluation of generalized variance parallelepipedal grids", Dep. v VINITI, no. 6089–84.

11. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "On quadrature formulas in classes $E_s^\alpha(c)$ and $H_s^\alpha(c)$", Dep. v VINITI, no. 6091–84

12. Dobrovol'skii, N. M., Esayan, A.R. & Yafaeva, R. R. 2002, "On grids of Smolyak S. A.", Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki: Tezisy dokladov Vserossijskoj nauchnoj konferentsii, Tula, Russia, pp. 18–20.

13. Dobrovol'skii, N. M. & Manokhin, E.V. 1998, "Banach spaces of periodic functions", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 4, no. 3, pp. 56–67.

14. Dobrovol'skii, N. M., Manokhin, E.V., Rebrova, I. YU. & Roshhenya, A. L., 2001, "On the continuity of the Zeta function of a grid with weights", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 7, no. 1., pp. 82–86.

15. Dobrovol'skii, N. N. 2003, "On the number of integer points in a hyperbolic cross at the values of $1 \leqslant t < 21$", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 9, no. 1, pp. 91–95.

16. Dobrovol'skii, N. N. 2007, "Deviation of two-dimensional Smolyak grids", Chebyshevskij sbornik, vol. 8, no. 1(21), pp. 110–152.

17. Dobrovol'skii, N. N. 2007, "A trigonometric polynomial on a grid of Smolyak", Materialy mezhdunarodnoj nauchnoj konferentsii "Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki" [Proceedings of the international scientific conference "Modern problems of mathematics, mechanics, computer science"], Tula, Russia, pp. 34–36.

18. Dobrovol'skii, N. N., 2013, "О гиперболическом параметре сетки", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 2. P. 1. P. 6–18.

19. Dobrovol'skii, N. N., 2014, Hyperbolic parameter of meshes with weights and its application, Ph.D. Thesis, Moscow State University, Moscow, Russia.

20. Kiseleva O. V., 2007, "On the Korobov problem for modified resin grids", Chebyshevskij sbornik, vol. 8, no. 4(24), pp. 50–104.

21. Korobov, N. M., 1957, "Approximate evaluation of multiple integrals by using methods of the theory of numbers", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 115, no. 6, pp. 1062–1065.

22. Korobov, N. M., 1959, “The evaluation of multiple integrals by method of optimal coefficients”, Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4, pp. 19–25.

23. Korobov, N. M., 1959, “On approximate computation of multiple integrals”, Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 124, no. 6, pp. 1207–1210.

24. Korobov, N. M., 1960, “Properties and calculation of optimal coefficients”, Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 132, no. 5, pp. 1009–1012.

25. Korobov, N. M., 1963, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], Fizmat-giz, Moscow, Russia.

26. Korobov, N.M. 1994, “Quadrature formulas with combined grids”, Matematicheskie zametki, vol. 55, no. 2, pp. 83–90.

27. Korobov, N.M. 2004, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.

28. I. Yu. Rebrova, V. N. Chubarikov, N. N. Dobrovol’skii, M. N. Dobrovol’skii, N. M. Dobrovol’skii, 2018, "On classical number-theoretic nets" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 118–176.

29. Smolyak, S. A., 1963, “Quadrature and interpolation formulas on tensor products of some classes of functions”, Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 148, no. 5, pp. 1042–1045.

30. Sobol’, I. M., 1969, Mnogomernye kvadraturnye formuly i funktsii Khaara [Multidimensional quadrature formulas and Haar functions], Nauka, Moscow, USSR.

31. Frolov, K. K., 1976, “Upper bounds on the error of quadrature formulas on classes of functions”, Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 231, no.4, pp. 818–821.

32. Frolov, K. K., 1979, Quadrature formulas on classes of functions, Ph.D. Thesis, Vychislitel’nyj tsentr Akademii Nauk SSSR, Moscow, USSR.

33. Chandrasekharan K., 1974, *Vvedenie v analiticheskuju teoriju chisel*, Izd-vo Mir, Moskva, 188 p.

34. Dobrovol’skaya, L. P., Dobrovol’skii, M. N., Dobrovol’skii, N. M. & Dobrovol’skii, N. N., 2014, “On Hyperbolic Zeta Function of Lattices”, Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications, vol. 211, pp. 23–62. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-03146-0_2

35. Faure, H., 1982, “Discrepance de suites associees a un systeme denumeration (en dimention s)”, Acta Arith, vol. 41, pp. 337–351.

36. Halton, J. H., 1960, “On the efficiency of certain quasirandom sequences of points in evaluating multidimensional integrals”, Numerische Math, vol. 27, no. 2, pp. 84–90.

37. Hammersley, J. M., 1960, “Monte-Carlo methods for sobving multivariable problems”, Ann. New York Acad. Sci., vol. 86, 844–874.

38. Weyl H., 1916, “On the uniform distribution of Numbers mod. one”, Math. Ann., vol. 77, pp. 313–352.

Получено 16.10.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 3.

УДК 534.26 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-220-244

О решениях обратных задач дифракции звуковых волн [1]

Н. Н. Добровольский, Н. В. Ларин, С. А. Скобельцын, Л. А. Толоконников

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: Nikolai.Dobrovolsky@gmail.com

Ларин Николай Владимирович — кандидат физико-математических наук, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: Larin220577@gmail.com

Скобельцын Сергей Алексеевич — кандидат физико-математических наук, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: skbl@rambler.ru

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru

Аннотация

Представлен обзор работ по решению обратных задач рассеяния звуковых волн упругими телами. Теоретические основы решения обратных задач дифракции звука базируются на фундаментальных исследованиях проблемы обратных задач для уравнений в частных производных, выполненных отечественными учеными.

В самой общей классификации обратные задачи акустики делятся на обратные задачи излучения (ОЗИ) и обратные задачи рассеяния (ОЗР). При решении задач первого класса по характеристикам звукового поля определяют некоторые параметры излучателя. При решении задач второго класса измерения параметров рассеянного звукового поля используют для идентификации свойств рассеивающего объекта.

Большая часть приложений акустических методов основана на решении обратных задач дифракции, когда по параметрам излучаемого или отраженного звукового поля судят о параметрах объекта или среды.

Анализ звуковых полей составляет основу методов в гидро- и аэроакустике; исследований в биологии и медицине; неразрушающего контроля и диагностики объектов; ультразвуковой дефектоскопии; обследовании и испытании материалов, конструкций и сооружений.

Решения всех обратных задач основаны на решении прямых задач дифракции. В работе представлены наиболее значимые результаты в решении прямых задач рассеяния звуковых волн упругими объектами.

Выделены работы, посвященные проблемам обратных задач рассеяния звука неоднородными упругими телами. Это направление составляет предмет интересов в исследованиях авторов.

Ключевые слова: дифракция звуковых волн, прямая задача дифракции, обратная задача рассеяния, рассеяние звука упругими телами.

Библиография: 130 названий.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-41-710005).

Для цитирования:
Н. Н. Добровольский, Н. В. Ларин, С. А. Скобельцын, Л. А. Толоконников. О решениях обратных задач дифракции звуковых волн // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 3, с. 220–244.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 3.

UDC 534.26 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-220-244

About solutions of inverse problems sound waves diffraction

N. N. Dobrovol'skii', N. V. Larin, S. A. Skobel'tsyn, L. A. Tolokonnikov

Dobrovol'skii' Nikolai' Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, department of applied mathematics and computer science, Tula State University (Tula).
e-mail: Nikolai.Dobrovolsky@gmail.com
Larin Nikolai' Vladimirovich — candidate of physical and mathematical sciences, department of applied mathematics and computer science, Tula State University (Tula).
e-mail: Larin220577@gmail.com
Skobel'tsyn Sergey Alekseevich — candidate of physical and mathematical sciences, department of applied mathematics and computer science, Tula State University (Tula).
e-mail: skbl@rambler.ru
Tolokonnikov Lev Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, department of applied mathematics and computer science, Tula State University (Tula).
e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru

Abstract

A review of works on solving the inverse problems of scattering of sound waves by elastic bodies is presented. The theoretical foundations for solving inverse problems of sound diffraction are based on fundamental studies of the problem of inverse problems for partial differential equations performed by Russian scientists.

In the most general classification, inverse acoustic problems are divided into inverse radiation problems (IRP) and inverse scattering problems (ISP). When solving problems of the first class, the parameters of the sound field determine some parameters of the source. When solving the problems of the second class, the parameters of the scattered sound field are used to identify the properties of the scattering object.

Most applications of acoustic methods are based on solving inverse diffraction problems when the parameters of an object or medium are judged by the parameters of the emitted or reflected sound field.

Analysis of sound fields forms the basis of methods in hydro- and aeroacoustics; researches in biology and medicine; non-destructive testing and diagnostics of objects; ultrasonic flaw detection; inspection and testing of materials, structures and structures.

The solutions of all inverse problems are based on the solution of direct diffraction problems. The paper presents the most significant results in solving direct problems of scattering of sound waves by elastic objects.

The works devoted to the problems of inverse problems of sound scattering by inhomogeneous elastic bodies are singled out. This direction is the subject of interest in the research of the authors.

Keywords: sound waves diffraction, direct diffraction problem, inverse scattering problem, sound scattering by elastic bodies.

Bibliography: 130 titles.

For citation:
N. N. Dobrovol'skii', N. V. Larin, S. A. Skobel'tsyn, L. A. Tolokonnikov, 2019, "About solutions of inverse problems sound waves diffraction" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 220–244.

1. Введение

Акустические методы давно заняли прочные позиции в исследовательской и производственной практике. Прикладной аспект таких методов в основном построен на решении обратных задач рассеяния звука. Однако решение обратных задач невозможно без эффективных методов решения прямых задач.

Далее представлен краткий обзор работ, в которых представлены теоретические основы решения обратных задач рассеяния звука упругими телами и решения некоторых из таких задач.

2. О решениях обратных задач рассеяния звуковых волн упругими телами

Решение задач о рассеяния звуковых волн имеет как теоретическое так и практическое значение. В теоретическом плане подобные решения позволяют глубже понять особенности распространения звуковых волн в неоднородных средах, их взаимодействия с телами сложной формы выполненных из различных материалов.

В практическом плане решения задач дифракции звука на различных телах и в различных средах могут быть использованы для разработки технологий прикладных областей, в которых существенное значение имеют акустические эффекты. В одних случаях эти эффекты надо минимизировать (борьба с производственным и бытовым шумом), в других надо максимизировать (ультразвуковые методы обработки материалов), в третьих надо добиться баланса в сохранении/усилении и подавлении определенных частот звуковых колебаний (акустика помещений), в четвертых – извлекать информационную составляющую из них. Анализ звуковых полей составляет основу инструментария в акустических методах гидро и аэроакустики; исследований в биологии и медицине; неразрушающего контроля и диагностики объектов; ультразвуковой дефектоскопии; обследовании и испытании материалов, конструкций и сооружений; архитектурной и строительной акустики; проектирования электронных устройств на основе пъезоэлектрических эффектов.

Большая часть приложений акустических методов основана на решении так называемых обратных задач, когда по параметрам излучаемого или отраженного звукового поля судят о параметрах объекта или среды.

Теория обратных задач математической физики активно начала развиваться в середине прошлого века. Основы теории и практики исследования обратных задач математической физики заложены и развиты в фундаментальных работах выдающихся ученых современности – А.Н. Тихонова, В.Я. Арсенина, А.А. Самарского, А.С. Алексеева, М.М. Лаврентьева, В.Г. Романова, В.А. Амбарцумяна, Г. Борга, И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана, М.Г. Крейна и др. В фундаментальных работ академика А.Н. Тихонова были разработаны основы современной теории решения обратных задач, выявлены их особенности как некорректных задач, введено понятие и подходы к регуляризации процесса решения [1, 2, 3, 4, 5, 6].

Фундаментальные результаты в исследованиях обратных задач для системы уравнений Максвелла, гиперболических систем первого порядка, многомерных обратных задач для гиперболических уравнений и уравнений теории упругости, а также численным методам их решения были получены В.Г. Романовым [7, 8, 9, 10, 11, 12], С.И. Кабанихиным [8, 13, 14, 15], В.Г. Яхно [16, 17, 18], Ю.Е. Аниконовым [19, 20, 21] и др.

Теория обратных задач математической физики существенно развивается представителями ряда отечественных математических школ, в том числе Московской, основанной А.Н. Тихоновым и Сибирской, основанной М.М. Лаврентьевым и В.Г. Романовым: С.А. Аникиным, Ю.Е. Аниконовым, Г.В. Алексеев, А.В. Баевым, А.С. Барашковым, М.И. Белишевым, А.С. Благовещенским, А.Л. Бухгеймом, П.Н. Вабишевичем, А.О. Ватульяном, В.М. Волковым, Д.И. Глушковой, А.М. Денисовым, В.И. Дмитриевым, Н.Б. Ильинским, С.И. Кабанихиным, А.Л. Карчевским, В.С. Корниловым, М.М. Лаврентьевым, А.И. Прилепко, А.Г. Раммом, В.Г. Синько, Б.Ф. Тазюковым, А.М. Федотовым, В.А. Чевердой, В.Г. Чередниченко, Е.И. Шифриным, М.А. Шишлениным, В.Г. Яхно и др.

В качестве характерной для акустики обратной задачи выступает задача восстановления причинных показателей по информации о физических полях. Нарушение естественной причинно-следственной связи, имеющее место в постановке обратной задачи, может привести к ее математической некорректности, чаще всего неустойчивости решения. Поэтому обратные задачи представляют собой типичный пример некорректно поставленных задач.

В привязке к искомым функциям выделяют следующие типы обратных задач идентификации физических процессов для уравнений в частных производных [22, 23]: ретроспективные – установление предыстории некоторого состояния процесса; граничные – восстановление граничных условий или содержащихся в них параметров; коэффициентные – определение коэффициентов уравнений; геометрические – нахождение геометрических характеристик контура области или координат точек внутри нее. Многие из таких задач могут рассматриваться как коэффициентные, поскольку в математической постановке большая часть искомых параметров представляются неизвестными функциями (коэффициентами в них), входящими либо в решаемые уравнения, либо в граничные или начальные условия.

Графическая интерпретация постановки обратной задачи рассеяния звука в некотором обобщенном виде показана на рис. 1. На нем Ψ_p – потенциал скорости движения частиц акустической среды Ω_0 в падающей волне. Плотность и скорость звука содержащей среды задается величинами ρ_0, c_0. Волна рассеивается упругим в общем случае неоднородным анизотропным телом Ω ($\rho(\mathbf{r})$ – плотность упругой среды; $\lambda_{ij}(\mathbf{r})$ – модули упругости; Γ – поверхность тела). Потенциал скорости в рассеянной волне обозначен Ψ_s. Предполагается, что есть возможность измерить величину Ψ_s в некотором достаточно представительном подмножестве точек $V \in \Omega_0$ – апертуре наблюдения. Требуется на основе измеренных значений $\Psi_s(V)$ и совокупности известных характеристик θ падающей волны и препятствия найти неизвестные параметры тела Ω (материальные, геометрические, ...) – ξ_1, ξ_2, $\ldots$, ξ_I.

Skobeltsin/skbl_fig_01.png

Рис. 1: Геометрическая интерпретация ОЗР

Основные подходы к решению обратных задач при дифракции звуковых волн и их особенности сформулированы в работах Д. Колтона (D. Colton) и Р. Кресса (R. Kress) [24, 25, 26, 27, 28]. В них рассмотрено применение классических методов теории потенциала и интегральных уравнений к задачам теории дифракции акустических и электромагнитных волн на ограниченных телах, расположенных в однородном пространстве.

В монографии Горюнова А.А., Сасковца А.В. [29] представлены обзор решений и оригинальные решения обратных задач рассеяния и излучения в акустике. Освещены известные подходы, постановки и методы решений акустических обратных задач, приведены основные результаты, полученные к моменту выхода работы. Проведен анализ методов определения количественных характеристик рассеивающих неоднородностей, основанных на наблюдениях рассеяния падающего на них акустического поля. Представлены результаты численного моделирования решений некоторых обратных задач.

Известен ряд работ по решению обратных задач дифракции звука для упругих тел авторов Буров В.А., Ворович И.И., Горюнов А.А., Ринкевич А.Б., Сасковец А.В., Смородинский Я.Г., Beilina L., Hanneman R., Klibanov M.V., Langenberg K.J., Liu G.R., Marklein R., Zhang D. и др.

В частности, в работе [30] Бурова В.А. и соавторов исследовались обратные задачи рассеяния звука поверхностной неоднородностью. В работе [31] исследуется решение двумерной задачи рассеяния на основе функционально-аналитических методов. В работе [32] рассматривается задача акустической томография океана при использовании нестандартного представления рефракционных неоднородностей. Работы [33, 34] посвящены решению трехмерной обратной задачи акустического рассеяния на основе алгоритма Новикова-Хенкина и модифицированного алгоритма Новикова. В статье [35] предлагается построение оценок максимального правдоподобия в корреляционной акустической термотомографии. Работа [36] посвящена проблемам численного и физического моделирование процесса томографии на основе акустических нелинейных эффектов третьего порядка. В [37] обсуждается моделирование точного решения обратной задачи акустического рассеяния функциональными методами. Анализ единственности и устойчивости решения обратной задачи акустического рассеяния проводится в [38]. В книге [39, 40] рассматриваются обратные волновые задачи и их прикладные аспекты, связанные с современным состоянием исследований в области линейной и нелинейной акустической томографии, а также акустической термотомографии.

В работах Воровича И.И. исследовались как методы решения обратных задач теории упругости, так и обратные задачи акустики. В частности в работах [41, 42] исследовались задачи восстановление образа дефекта по рассеянному полю в акустическом приближении. В них в рамках решения геометрической обратной задачи предлагается идентификация полостей по диаграмме направленности.

В работе Горюнова А.А. [43] рассматривается решение задачи восстановления отражающей неоднородности методом среднего. Статья [44] посвящена вопросу использования матричной функции Грина при решении задач акустической интроскопии.

Физические основы и методы акустического контроля, приложения на основе решения обратных задач рассеяния звука рассматриваются в работах Ринкевича А.Б., Смородинского Я.Г. и соавторов. В работе [45] представлены результаты определения групповой скорости ультразвуковых волн в трансверсально-изотропной упругой среде. В статье [46] представлен анализ ультразвуковых полей и дефектоскопии в монокристаллах алюминия на основе лазерной методики. Работа [47] посвящена использованию вейвлетов для анализа ультразвуковых полей, обнаруженных лазерным интерферометром. Рассматривается порядок применения такой обработки при дефектоскопии и локализации в монокристалле алюминия. В статье [48] обсуждаются вопросы настройки и калибровки оборудования с использованием образцов с цилиндрическим сверлением при ультразвуковой дефектоскопии.

Решение обратных задач акустического рассеяния строится на основе известных решений прямых задач дифракции звука. В настоящее время известно большое количество работ, посвященных исследованию рассеяния звуковых волн упругими телами. Однако большинство работ выполнено в предположении, что упругие тела имеют каноническую форму поверхности (плоскости и полуплоскости, круговые и эллиптические цилиндры, сферы и сфероиды), а рассеиватели в виде упругих толстостенных оболочек рассматривались как однородные и изотропные. Большая часть исследований в области математической теории распространения звуковых и упругих волн посвящена изучению и анализу процессов, происходящих в физически однородных и изотропных средах.

Отражение звука плоскими упругими телам, сплошными упругими цилиндрами и шарами, а также оболочками (прямые задачи дифракции) исследовалась во многих работах. В [49, 50, 51, 52] рассмотрено рассеяние плоских звуковых волн круговыми цилиндрами и сферами. Рассмотрению дифракции звука на бесконечной тонкой цилиндрической оболочке посвящена работа [53]. В [54] рассматривается задача о рассеянии плоской звуковой волны упругим безграничным цилиндром кругового сечения. Экспериментально исследовано рассеяние звука латунными, алюминиевыми и стальными цилиндрами в воде. Установлено, что при некоторых углах падения звуковой волны на ограниченный упругий цилиндр возникает сильное рассеяние в направлении, противоположном направлению падающей волны (так называемое незеркальное отражение). Прохождение звуковой волны через упругую цилиндрическую оболочку рассматривалось в работе [55]. Рассеянию цилиндрической звуковой волны сплошным упругим цилиндром посвящена работа [56]. Отражение плоской звуковой волны от полой сферы, находящейся в воздухе, рассмотрено в [57]. Рассчитана зависимость интенсивности отраженной волны в дали от облучаемой сферы от частоты для тонкой алюминиевой сферической оболочки и полиэтиленовых оболочек различной толщины.

Результаты расчетов показывают, что интенсивность отраженной волны в широком диапазоне частот существенно зависит от отношения толщины оболочки и ее внешнему радиусу и от упругих свойств материала оболочки.

В [58] изучено рассеяние плоской звуковой волны, падающей на тонкую упругую сферическую оболочку, находящуюся в бесконечном пространстве, заполненном жидкость. Центр оболочки фиксирован неподвижно. В [59] с помощью метода Ватсона исследуется рассеянное акустическое поле давления при дифракции плоской волны на упругой сферической оболочке. Определены вклады отдельных мод в полный эхо-сигнал в дальней зоне поля. Исследованию рассеяния плоской акустической волны упругой сферической оболочкой с учетом инерции вращения и сдвиговых деформаций посвящена работа [49]. В [60] рассмотрены резонансные явления в акустическом поле вокруг бесконечно длинного цилиндрического тела при падении на него акустической волны и показано, что по характеристикам отраженного от цилиндра акустического поля можно судить как о размерах цилиндра, так и о материале, образующем его.

Исследование акустической волны, рассеянной от упругой сферической оболочки при падении на оболочку сферической синусоидальной акустической волны представлено в [61]. Вычисляется эхо от сферической оболочки по различным теориям оболочек и проводится сравнение результатов с соответствующими, подсчитанными по трехмерной теории упругости согласно. Показывается, что в задачах о рассеянии акустической волны тонкими оболочками при невысоких частотах применение теории оболочек оправдано.

В [62] рассмотрена задача дифракции нестационарной плоской звуковой волны на полой упругой сфере. При решении задачи используется интегральное преобразование Лапласа по времени.

Теоретический анализ распределения звукового давления вблизи поверхности упругой сферической оболочки на расстояниях, сравнимых с ее радиусом, проведен в работе [63].

Исследованию обратного рассеяния плоской волны на металлической сфере с малыми потерями, помещенной в жидкость, посвящена работа [64]. В [50] описываются результаты теоретических исследований отражения и рассеяния звука в воде цилиндрами и сферами из силиконовой резины.

В [65] проведены исследования резонансных явлений, возникающих при падении акустических волн на шар. Исследованию резонансного возбуждения сферической упругой оболочки, наполненной жидкостью или газом и помещенной в другую жидкость посвящена работа [66]. Рассмотрено рассеяние оболочкой плоской падающей звуковой волны с использованием теории резонансного рассеяния. Анализируется случай наполненной воздухом алюминиевой оболочки в воде.

В [67] рассмотрено рассеяние плоской наклонно падающей волны на круговую цилиндрическую оболочку. Рассмотрению задачи осесимметричного рассеяния звуковых импульсов давления упругим сферическим резонатором с круговым отверстием посвящена работа [68]. Движение оболочки описывается по теории типа Кирхгоффа-Лява.

В [69] с помощью потенциалов Дебая дается решение трехмерной задачи рассеяния гармонической звуковой волны упругой цилиндрической оболочкой. Все потенциалы представляются в виде интегралов, зависящих от осевой составляющей волнового вектора. В [70] разработан асимптотический подход для решения задач рассеяния акустических волн упругими оболочками. Осуществлен синтез приближенного решения задачи на основе сращивания разложений для различных асимптотических моделей. Сравнение с точным решением для цилиндрической и сферической оболочек подтверждает высокую эффективность предложенного подхода при различных значениях параметров оболочки.

В [52] использован подход классической резонансной теории ядерных реакций для исследования задач рассеяния звука упругими круговыми цилиндрами и сферами, погруженными в жидкость. Показано, что существенные изменения в сигнале обратного рассеяния могут быть представлены суперпозицией резонансов в отдельных нормальных модах (парциальных волнах) и базовых составляющих, соответствующих отражению от твердого тела.

Во всех перечисленных выше работах с решением прямых задач дифракции рассматривалось рассеяние звуковых волн на упругих цилиндрических и сферических сплошных телах либо на оболочках (тонкостенных и толстостенных). Дифракция звука на телах с произвольно расположенными полостями исследована в значительно меньшей степени. Например, в [71] решены задачи о дифракции сферической и плоской звуковых волн на шаре с неконцентрическим шаровым включением. Однако материал шара полагался не упругим, а жидким. При этом поверхность полости рассматривалась акустически мягкой или акустически жесткой.

Значительно меньше работ посвящено исследованию рассеяния звука неоднородными анизотропными телами. Получение аналитических решений дифракционных задач для неоднородных тел и тел сложной формы крайне затруднено. Следует отметить, что эффективные численные методы конечных и граничных элементов, широко используемые в механике сплошной среды, и соответствующие пакеты программ для ЭВМ трудно применять непосредственно для решения задач о рассеянии звука в случае, когда тело находится в неограниченной среде. Требуется модификация этих методов с учетом особенностей такого рода задач.

Рассеяние звуковых волн неоднородными упругими круговыми цилиндрическими телами рассматривалось в работах [72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87]. При этом решались прямые задачи.

Отражение и прохождение звуковых волн через плоский неоднородный изотропный упругий слой рассмотрено в работе Работа [88] посвящена изучению прохождения звуковых волн через трансверсально-изотропный неоднородный упругий слой. В [89] решена задача об отражении и преломлении плоской звуковой волны неоднородным упругим слоем, материал которого обладает анизотропией общего вида. Прохождение звука через неоднородный анизотропный слой, граничащий с вязкими жидкостями, изучено в [90]. В [91] рассмотрено прохождение плоской звуковой волны через неоднородный термоупругий слой.

Широкие возможности для исследования задач дифракции дает использование метода конечных элементов (МКЭ) [92, 93, 94]. Метод конечных элементов является широко используемым инструментом решения практических задач гидродинамики и теории упругости [95, 96]. При решении задач, связанных с изучением звуковых колебаний в основном рассматриваются случаи ограниченных областей: акустические свойства помещений, собственные частоты сложных ограниченных объемов. Однако значительно меньшее число исследований такого рода посвящено изучению рассеяния звуковых волн сложными объектами в неограниченной среде. Применение МКЭ для решения таких задач позволит оценить влияние, как сложной формы рассеивателя, так и особенностей реальных сред: неоднородности, вязкости, теплопроводности.

В монографии [94] подробно изложены различные аспекты применения МКЭ при решении задач о рассеянии звука объектами различного типа: жесткими, мягкими, упругими. В случае содержащей среды неограниченной из вне предлагается использовать искусственную внешнюю границу (artificial boundary), на которой формируются так называемые условия поглощения или "бесконечные" элементы, обеспечивающие выполнение условий излучения на бесконечности для потенциала скоростей в рассеянной волне. В работах автора [97, 98] предложен подход, в котором во внешней области решение представляется в виде разложения по ортогональной системе волновых функций. Поэтому искусственная внешняя граница рассматривается как поверхность, на которой устанавливаются обычные граничные условия согласования звуковых колебаний в двух областях жидкости: внешней (с аналитическим представлением решения) и внутренней, в которой для решения используется МКЭ.

Идентификации упругих характеристик непрерывно-неоднородных тел по известным физическим полям внутри исследуемых объектов посвящены работы [99, 100]. Задачи об определении свойств одномерных неоднородных объектов решены в [101, 102, 103]. Восстановление характеристик упругого слоя, произвольно меняющихся по глубине, рассматривалось в [104]. Задачи о восстановлении свойств изотропного и ортотропного неоднородных по толщине слоев по известному полю смещений на границе слоя при анализе установившихся колебаний решены в [105, 106, 107].

Значительный интерес представляет обратная задача по определению законов неоднородности для непрерывно-неоднородного упругого тела, которые обеспечивали бы требуемое звукоотражение. Изменение звукоотражающих характеристик тела в определенных направлениях можно осуществить с помощью покрытия в виде непрерывно-неоднородного упругого слоя. Такое покрытие можно реализовать с помощью системы однородных упругих слоев с различными значениями механических параметров (плотности и упругих постоянных). Рассеяние звуковых волн плоскими, цилиндрическими и сферическими телами с неоднородными по толщине покрытиями было исследовано в работах [108, 85, 86, 109].

В работах авторов [110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118] на основе решения ряда задач о рассеянии звука неоднородными и/или анизотропными телами предлагается решение некоторых обратных задач по определению характеристик упругих тел. Получены некоторые результаты в решении задач идентификации параметров упругих неоднородных и анизотропных тел по рассеянному полю, предложена модель приближенного решения задачи определения параметров препятствия по рассеянному акустическому полю.

Решены задачи определения по отражению звука: законов неоднородности плоского анизотропного упругого слоя, положения границы разделения двухслойной упругой пластины, параметров неоднородности анизотропного покрытия упругого полупространства, плотности материала упругого цилиндра, параметров анизотропного материала упругого цилиндра, положения эллиптической полости в упругом цилиндре, положения полости в упругом препятствии с использованием МКЭ в 3-х-мерной постановке, геометрических параметров конечного цилиндра, расположенного у границы полупространства, параметров анизотропного покрытия упругого шара, направления оси упругой симметрии анизотропного шара.

Как обратная может формулироваться задача обеспечение требуемых звукоотражающих свойств упругого рассеивателя. В работах [119, 120, 121, 122, 123, 124, 125] предлагается подход к определению параметров неоднородного анизотропного покрытия тела для обеспечения требуемых характеристик рассеянного поля. Получены решения задач определения законов неоднородности плоского упругого слоя, неоднородного покрытия упругой пластины, покрытия конечной упругой пластины с полостью, законов неоднородности цилиндрического упругого слоя, механических параметров неоднородного покрытия некругового упругого полого цилиндра, свойств неоднородного покрытия упругого шара, параметров неоднородности внешнего слоя упругого эллипсоида, находящегося у границы полупространства.

Заметим, использование непрерывно-неоднородных покрытий упругих тел позволяет изменять характеристики рассеяния звука на 5-15%. Специально сконструированные структурно неоднородные покрытия позволяют изменять акустические свойства объекта в разы. Ряд работ по исследованию эффективных неотражающих покрытий выполнен коллективом исследователей под руководством Бобровницкого Ю.И. В статье [126] предложена общая схема формирования поглощающих и нерассеивающих покрытий нового типа с повышенной эффективностью – т.н. покрытий с протяженной реакцией. Приводятся теория таких покрытий и метод определения наилучших значений его параметров. Подробно анализируется плоское покрытие с протяженной реакцией, показано, что его эффективность существенно выше эффективности существующих покрытий.

В работе [127] рассматривается задача формирования покрытий с протяженной реакцией для цилиндрических тел. Работы [128, 129, 130] посвящены анализу решения теоретических и прикладных задач конструирования эффективных поглощающих покрытий.

3. Заключение

Следует подчеркнуть существенный вклад отечественных исследователей в разработку теоретических основ решения широкого класса обратных задач для уравнений математической физики в целом и для процессов рассеяния звуковых и упругих волн в частности.

Проблема обратных задач рассеяния является столь разносторонней и глубокой, что по оценкам специалистов [40] к настоящему времени решена только небольшая часть актуальных задач. Предстоит еще множество исследований в этом направлении, результаты которых должны позволить целенаправленно и обоснованно конструировать технологии на основе анализа звуковых полей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А. Н. Теорема единственности для уравнения теплопроводности // Мат. сборник. 1935. Т. 42. № 2. С. 199–216.

2. Тихонов А. Н. Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. 1943. Т. 39. № 5. С. 195–198.

3. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. 1963. № 1. С. 49–52.

4. Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Доклады АН СССР. 1963. № 3. С. 501–504.

5. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 256 с.

6. Тихонов А., Леонов А., Ягола А. Нелинейные некорректные задачи. Москва: Наука, 1995. 398 с.

7. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 288 с.

8. Романов В. Г., Кабанихин С. И., Пухначева Т. П. К теории обратных задач электродинамики // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 5. С. 1070–1073.

9. Романов В. Г. Теоремы единственности в обратных задачах для некоторых уравнений второго порядка // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321. № 2. С. 254–257.

10. Романов В. Г. Устойчивость в обратных задачах. М.: Научн. мир. 2005. 296 с.

11. Романов В. Г. О задаче определения структуры слоистой среды и формы импульсного источника // Сибирский математический журнал. 2007. Т. 48. № 4. С. 867–881.

12. Романов В. Г. Обратная задача для уравнений упругости при неизвестной форме импульсного источника // Доклады Академии наук. 2007. Т. 417. № 6. С. 746-752.

13. Кабанихин С. И. Методы решения обратных динамических задач для гиперболических уравнений / Условно-коректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука (Сиб.отд.). 1992. С. 109–123.

14. Кабанихин С. И., Карчевский А. Л. Оптимизационный алгоритм решения задачи Коши для эллиптического уравнения // Докл. РАН. 1998. Т. 359. № 4. С. 445–447.

15. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с.

16. Лаврентьев М. М., Резницкая К. Г., Яхно В. Г. Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука (Сиб. отд.), 1982. 88 с.

17. Яхно В. Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. Новосибирск: Наука (Сиб. отд.), 1990. 303 с.

18. Karchevsky A. L., Yakhno V. G. One-dimensional inverse problems for systems of elasticity with a source of explosive type // J. of Inverse and Ill-Posed Problems, VSP. Netherlands. 1999. V. 7. № 4. P. 347–364.

19. Аниконов Ю. Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука (Сиб.отд.), 1978. 118 с.

20. Anikonov Yu.E., Bubnov B. A., Erokhin G. N. Inverse and Ill-Posed Sources Problems, VSP, Utrecht. Netherland, 1997. 239 p..

21. Anikonov Yu.E. Inverse problems for kinetic and other evolution equations. VSP, Utrecht. Netherland, 2001. 270 p..

22. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. - М.: Физматлит, 2007. 224 с.

23. Самарский А. А, Вабишевич П. Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Издательство ЛКИ, 2009. 480 с.

24. Colton D., Kress R. Integral Equation Methods in Scattering Theory. New York: Wiley-Interscience, 1983. 320 p..

25. Colton D. The inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves. SIAM Review. 1984. V.26. P. 323-350.

26. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М. Мир. 1987. 311 с.

27. Colton D., Kress R. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory, 2nd edition. New York: Springer 1998. 336 p..

28. Colton D., Kress R. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory. Berlin: Springer, 2013. 430 p..

29. Горюнов А. Л., Сасковец А. В. Обратные задачи рассеяния в акустике. М.: Изд-во МГУ, 1989. 152 с.

30. Burov V. A., Prudnikova I. P., Sirotkina N. S. Inverse problem of ultrasonic scattering by boundary inhomogeneity in isotropic solids // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 6. С. 1013–1018.

31. Burov V. A., Rumiantseva O. D. Solution of two-dimensional acoustical inverse scattering problem based on functional-analytical methods // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 3. С. 413–420.

32. Буров В.А., Попов А. Ю., Сергеев С. Н., Шуруп А. С. Акустическая томография океана при использовании нестандартного представления рефракционных неоднородностей // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 5. С. 602–613.

33. Алексеенко Н. В., Буров В. А., Румянцева О. Д. Решение трехмерной обратной задачи акустического рассеяния на основе алгоритма Новикова-Хенкина // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 4. С. 437–446.

34. Алексеенко Н. В., Буров В. А., Румянцева О. Д. Решение трехмерной обратной задачи акустического рассеяния. Модифицированный алгоритм Новикова // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 3. С. 469–482.

35. Буров В. А., Касаткина Е. Е., Марьин А. О., Румянцева О. Д. Оценки максимального правдоподобия в корреляционной акустической термотомографии // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 4. С. 580–596.

36. Буров В. А., Шмелев А. А. Численное и физическое моделирование процесса томографии на основе акустических нелинейных эффектов третьего порядка // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 4-5. С. 466–480.

37. Буров В. А., Вечерин С. Н., Морозов С. А., Румянцева О. Д. Моделирование точного решения обратной задачи акустического рассеяния функциональными методами // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 4. С. 516–536.

38. Буров В. А., Румянцева О. Д. Единственность и устойчивость решения обратной задачи акустического рассеяния // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 5. С. 590–603.

39. Буров В. А., Румянцева О. Д. Обратные волновые задачи акустической томографии: Обратные задачи излучения в акустике Ч. 1. М.: УРСС, 2018. 384 с.

40. Буров В. А., Румянцева О. Д. Обратные волновые задачи акустической томографии: Обратные задачи акустического рассеяния Ч. 2. М.: УРСС, 2019. 760 с.

41. Ворович И. И., Сумбатян М. А. Восстановление образа дефекта по рассеянному полю в акустическом приближении // Изв. АН СССР: МТТ. 1990. № 6. С. 79–84. 1.

42. Vorovich I. I., Boyev N. V., Sumbatyan M. A. Reconstruction of the obstacle shape in acoustic medium under ultrasonic scanning // Inverse Problems in Engineering. 2001. V. 9. № 4. P. 315–337.

43. Goryunov A. A., Rychagov M. N. Reconstruction of a refraction inhomogeneity by the method of averages // Soviet Journal of Nondestructive Testing. 1989. T. 24. № 12. C. 805–809.

44. Goryunov A. A. Matrix Green's function formalism in acoustic intrascopy problems // Russian Journal of Nondestructive Testing. 1992. T. 27. № 6. C. 381–386.

45. Rinkevich A. V., Smorodinskij Y. G., Volkova N. N., Zagrebin B. N. Group velocity of ultrasonics in transverse-isotrope media // Defectscopy (rus). 1994. № 2. C. 58–63.

46. Rinkevich A. B., Smorodinskii Ya.G., Burkhanov A. M., Krivonosova A. S., Keller B. Analysis of ultrasonic fields and flaw detection in aluminum single crystals based on laser detection technique // Russian Journal of Nondestructive Testing. 2000. T. 36. № 11. C. 831–838.

47. Perov D. V., Rinkevich A. B., Smorodinskii Ya.G., Keler B. Using wavelets for analyzing ultrasonic fields detected by a laser interferometer. Flaw detection and localization in an aluminum single-crystal // Russian Journal of Nondestructive Testing. 2001. T. 37. № 12. C. 889–899.

48. Mogilner L. Y., Smorodinskii Y. G. Ultrasonic Flaw Detection: Adjustment and Calibration of Equipment Using Samples with Cylindrical Drilling // Russian Journal of Nondestructive Testing. 2018. T. 54. № 9 C. 630–637.

49. David H. Y. Yen Interaction of a Plane Acoustic Wave with an Elastic Spherical Shell // J. Acoust. Soc. Amer. 1970. V. 47. № 5. P. 1325–1333.

50. Davis C. M., Dragonette L. R., Flax L. Acoustic scattering from silicone rubber cylinders and spheres // J. Acoust. Soc. Amer. 1978. V. 63. № 6. P. 268–275.

51. Faran J. J. Sound scattering by solid cylinders and spheres // J. Acoust. Soc. Amer. 1951. V. 23. № 4. P. 405–418.

52. Flax L., Dragonette L. R., Überall H. Применение теории упругих резонансов при изучении рассеяния звука // Акуст. журн. 2004. Т. 49. № 1. С. 87–92.

53. Лямшев Л. М. Дифракция звука на бесконечной тонкой цилиндрической оболочке // Акуст. журн. 1958. Т. 4. Вып. 2. С. 161–167.

54. Лямшев Л. М. Рассеяние звука упругими цилиндрами // Акуст. журн. 1959. Т. 5. Вып. 1. С. 58–63.

55. Шендеров Е. Л. Прохождение звуковой волны через упругую цилиндрическую оболочку // Акуст. журн. 1963. Т. 9. Вып. 2. С. 222–230.

56. Lee F. A. Scattering of a cylindrical wave of sound by an elastic cylinder // Acustica. 1963. V. 13. № 3. P. 26–31.

57. Hickling R. Echoes from Spherical Shells in Air. // J. Acoust. Soc. Amer. 1967. V. 42. № 2. P. 388–390.

58. Гнатовский И. И. Рассеяние плоской звуковой волны на тонкой упругой сферической оболочке // Прикладная акустика и вибрационная техника. Киев, 1968. С. 23–28.

59. Метсавээр Я. А. О рассеянии волн упругими сферическими оболочками в акустической среде // Известия Академии наук Эстонской ССР. 1970. Т. 19., № 4. С. 415–422.

60. Бабкин В. П., Фадеева Л. М. Модельные эксперименты по аттестации шаровых мишеней // Труды Акуст. Института. 1971. Вып. 17. С. 80–98.

61. Метсавээр Я. А., О применении теории оболочек в задачах рассеяния акустических волн от сферических оболочек в жидкой среде // Известия Академии наук Эстонской ССР. 1971. Т. 15. № 3. С. 321–328.

62. Векслер Н. Д. Дифракция плоской звуковой волны на полой упругой сфере // Акуст. журн. 1975. Т. 21. Вып. 5. С. 321–335.

63. Плахов Д. Д., Саволайнен Г. Я. Дифракция сферической звуковой волны на упругой сферической оболочке // Акуст. журн. 1975. Т. 21. Вып. 5. С. 789–796.

64. Vogt R. H., Neubauer W. G. Relationship between acoustic reflection and vibrational modes of elastic spheres // J. Acoust. Soc. Amer. 1976. V. 60. № 1. P. 15–22.

65. Кулько В. Ф., Михнова М. С. Резонансные явления, возникающие при падении акустических волн на шар // Отбор и передача информации (Киев). 1979. № 58. С. 128–132.

66. George J., Nagl A., Überall H. Isolation of the resonant component in acoustic scattering from fluid-loaded elastic spherical shells // J. Acoust. Soc. Amer. 1979. V. 65. № 2. P. 368–373.

67. Векслер Н. Д., Корсунский В. М., Рыбак С. А. Рассеяния плоской наклонно падающей волны круговой цилиндрической оболочкой // Акуст. журн. 1990. Т. 36. Вып. 1. С. 12–16.

68. Дыхта В. В., Кунец Я. И., Поддубняк А. П. Осесимметричное рассеяние звуковых импульсов упругой сферической оболочкой с отверстием // Механика твердого тела. 1990. № 4. С. 141–148.

69. Клещев А. А. Дифракция звука от точечного источника на упругой цилиндрической оболочке // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 1. С.86–89.

70. Ковалев В. А. Асимптотический подход в задачах рассеяния акустических волн упругими оболочками // Вестник Самарского гос. ун-та. 2006. № 9. С. 42–54.

71. Марневская Л. А. К дифракции звуковой волны на шаре с неконцентрическим шаровым включением // Акуст. журн. 1972. Т. 18. Вып. 1. С. 571–578.

72. Безруков А. В., Приходько В. Ю., Тютекин В. В. Рассеяние звуковых волн упругими радиально-слоистыми цилиндрическими телами // Акуст. журн. 1986. Т. 32. Вып. 6. С. 762–766.

73. Коваленко Г. П. К задаче о дифракции акустической волны на неоднородном твердом теле // Акуст. журн. 1987. Т. 33. Вып. 6. С. 1060–1063.

74. Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Рассеяние звуковых волн трансверсально-изотропным неоднородным цилиндрическим слоем // Акуст. журн. 1995. Т. 41. № 1. С. 134–138.

75. Толоконников Л. А. Дифракция звуковых волн на неоднородном анизотропном полом цилиндре // Оборонная техника. 1998. № 4–5. С. 11–14.

76. Толоконников Л. А. Дифракция цилиндрических волн на неоднородной трансверсально-изотропной цилиндрической оболочке // Оборонная техника. 1998. № 4–5. С. 9–11.

77. Толоконников Л. А. Резонансное рассеяние звука трансверсально-изотропной цилиндрической оболочкой // Изв. ТулГУ. Сер. Геодинамика, физика, математика, термодинамика, геоэкология. 2006. Вып. 3. С. 106–114.

78. Романов А. Г., Толоконников Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны неоднородным упругим полым цилиндром в вязкой жидкости // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2009. Вып. 1. С. 62–70.

79. Толоконников Л. А., Романов А. Г. Дифракция цилиндрических звуковых волн на неоднородном полом цилиндре в вязкой жидкости // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2008. Вып. 2. С. 151–160.

80. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на неоднородном упругом цилиндрическом слое, граничащем с невязкими теплопроводными жидкостями // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 3. С. 474–483.

81. Толоконников Л. А., Садомов А. А. О дифракции звука на неоднородной трансверсально-изотропной цилиндрической оболочке в слое жидкости // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 12. Вып. 5. С. 208–216.

82. Толоконников Л. А., Романов А. Г. Дифракция звуковых волн на неоднородном упругом полом цилиндре в слое жидкости с жесткими границами // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2009. Вып. 1-2. С. 3-10.

83. Толоконников Л. А., Романов А. Г. Распространение звука в волноводе в присутствии неоднородной цилиндрической оболочки произвольной толщины // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2008. Вып. 2. С. 161–176.

84. Толоконников Л. А. Дифракция звука на трансверсально-изотропной цилиндрической оболочке произвольной толщины в волноводе с акустически мягкими границами // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2009. Вып. 3. С. 154–163.

85. Романов А. Г., Толоконников Л. А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 850–857.

86. Толоконников Л. А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Часть 2. С. 265–274.

87. Толоконников Л. А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на цилиндре с неоднородным упругим покрытием // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 202–208.

88. Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Прохождение звуковых волн через трансверсально-изотропный неоднородный плоский слой // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 4. С. 740–744.

89. Толоконников Л. А. Отражение и преломление плоской звуковой волны анизотропным неоднородным слоем // ПМТФ. 1999. Т. 40. № 5. С. 179–184.

90. Толоконников Л. А. Прохождение звука через неоднородный анизотропный слой, граничащий с вязкими жидкостями // ПММ. 1998. Т. 62. № 6. С. 1029–1035.

91. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Прохождение плоской звуковой волны через неоднородный термоупругий слой // ПММ. 2006. Т. 70. № 4. С. 650–659.

92. Harari I., Hughes T. J.R. Finite element method for the Helmholtz equation in an exterior domain: model problems // Comp. Methods Appl. Mech. Eng. 1991. V. 87. P. 59–96.

93. Gan H., Levin P. L., Ludwig R. Finite element formulation of acoustic scattering phenomena with absorbing boundary condition in the frequency domain // J. Acoust. Soc. Am. 1993. V. 94. № 3. Pt. 1. P. 1651–1662.

94. Ihlenburg F. Finite element analysis of acoustic scattering. New York: Springer Publishing Company, Inc., 2013. 226 p.

95. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 428 с.

96. Полежаев В. И., Простомолотов А. И., Федосеев А. И. Метод конечных элементов в механике вязкой жидкости // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Механика жидкости и газа. 1987. Т. 21. С. 3–92.

97. Скобельцын С. А. Подход к решению задач о рассеянии упругих волн с использованием МКЭ // Тез. докл. междунар. научн. конф. “Современные проблемы математики, механики, информатики” Тула: ТулГУ, 2004. С. 135–136.

98. Иванов В. И., Скобельцын С. А. Моделирование решений задач акустики с использованием МКЭ // Изв. ТулГУ. Естественные науки. Вып. 2. Тула: ТулГУ, 2008. С. 132–145.

99. McLaughlin J., Yoon J.-R. Unique identifiability of elastic parameters from time-dependent interior displacement measurement // Inverse Problems. 2004. V 20. P. 25–45.

100. Jadamba B., Khan A. A., Raciti F. On the inverse problem of identifying Lame coefficients in linear elasticity // J. Computers and Mathematics with Applications. 2008. V. 56. P. 431–443.

101. Бочарова О. В., Ватульян А. О. О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 3. С. 275–282.

102. Ватульян А. О. К теории обратных коэффициентных задач в линейной механике деформируемого тела // ПММ. 2010. Т. 74. № 6. С. 911–918.

103. Nedin R., Nesterov S., Vatuljan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod // Int. J. Solids. Struct. 2014. V. 51. № 3–4. P. 767–773.

104. Ватульян А. О., Сатуновский П. С. Об определении упругих модулей при анализе колебаний неоднородного слоя // Доклады РАН. 2007. Т. 414. № 1. С. 36–38.

105. Ватульян А. О., Явруян О. В., Богачев И. В. Идентификация упругих характеристик неоднородного по толщине слоя // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 6. С. 723–730.

106. Ватульян А. О., Явруян О. В., Богачев И. В. Идентификация неоднородных свойств ортотропного упругого слоя // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 6. С. 752–758.

107. Vatuljan A. O., Bogachev I. V., Yavruyan O. V. Reconstruction of inhomogeneous properties of orthotropic viscoelastic layer // Int. J. Solids. Struct. 2014. V. 51. № 11–12. P. 2238–2243.

108. Толоконников Л. А., Юдачев В. В., О прохождении плоской звуковой волны через плоский упругий слой с неоднородным покрытием / Матер. междунар. научн. конф. “Совр. пробл. математики, механики, информатики”. Тула: Изд-во ТулГУ, 2013. С. 477–480.

109. Толоконников Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим шаром с неоднородным покрытием // ПММ, 2014. Т. 78. Вып. 4. С. 519–526.

110. Скобельцын С. А. Определение параметров неоднородности анизотропного упругого слоя по прохождению звука // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2016. Вып. 7. Ч. 2. С. 246–257.

111. Скобельцын С. А. Определение положения границы разделения двухслойной упругой пластины по отражению звука // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып. 3. С. 122–130.

112. Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Определение параметров неоднородности анизотропного покрытия упругого полупространства по отражению звука // Тез. докл. 8-й Всероссийской научной конф. с международным участием “Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред”. М.: ИПРИМ РАН, 2018. С. 58.

113. Скобельцын С. А. Идентификация плотности материала упругого цилиндра по рассеянному акустическому полю // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2015. Вып. 4. С. 158–169.

114. Скобельцын С. А., Пешков Н. Ю. Определение положения эллиптической полости в упругом цилиндре по отражению звука // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2018. Вып. 1. С. 109–121.

115. Скобельцын С. А. Идентификация размера и положения полости в упругом шаре по отражению звуковой волны // Сб. трудов Междунар. научно-технической конф. “Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики” Воронеж: "Научно-исследовательские публикации". 2017. С. 1255-1262.

116. Skobelt’syn S. A., Peshkov N. Y. Finding, by means of a scattered sound, the geometric parameters of a finite elastic cylinder located near the half-space border // J. Phys.: Conf. Ser., 2019. V. 1203. 012023. pp. 1-10.

117. Скобельцын С. А. Идентификация параметров анизотропного покрытия упругого шара по отраженному звуку // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2016. Вып. 11. Ч. 2. С. 144–156.

118. Скобельцын С. А. Определение направления оси упругой симметрии анизотропного шара по рассеянному звуковому полю // Сб. трудов II Всероссийской акустической конференции, совмещенной с XXX сессией Российского акустического общества. Н. Новгород: ИПФ РАН, 2017. С. 1699-1705.

119. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Определение законов неоднородности плоского упругого слоя с заданными звукоотражающими свойствами // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 5. С. 552–558.

120. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Моделирование неоднородного покрытия упругой пластины с оптимальными звукоотражающими свойствами // ПММ. 2016. Т. 80. Вып. 4. С. 480–488.

121. Скобельцын С. А. Оценка свойств покрытия конечной упругой пластины с полостью, обеспечивающих заданные параметры отражения звука // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2017. № 7. С. 83–92.

122. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Об определении линейных законов неоднородности цилиндрического упругого слоя, имеющего наименьшее отражение в заданном направлении при рассеянии звука // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып. 4. С. 54–62.

123. Скобельцын С. А. Определение параметров неоднородности покрытия эллиптического цилиндра по рассеянию звука в присутствии упругого полупространства // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2018. Вып. 9. С. 290–302.

124. Толоконников Л. А., Ларин Н. В., Скобельцын С. А. Моделирование неоднородного покрытия упругого шара с требуемыми звукоотражающими свойствами // Математическое моделирование. 2017. Т. 29. № 11. С. 89-98.

125. Скобельцын С. А. Минимизация рассеяния звука сфероидом вблизи идеальной поверхности выбором параметров внешнего слоя // Изв. ТулГУ. Технические науки, 2018. Вып. 9. С. 421–437.

126. Бобровницкий Ю. И. Теория новых поглощающих и нерассеивающих покрытий повышенной эффективности // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 5. С. 613–624.

127. Бобровницкий Ю. И. Нерассеивающее покрытие для цилиндра // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 6. С. 879–889.

128. Бобровницкий Ю. И., Морозов К. Д., Томилина Т. М. Периодическая поверхностная структура с экстремальными акустическими свойствами // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 2. С. 147–151.

129. Бобровницкий Ю. И. Научные основы акустического стелса // Доклады Академии наук. 2012. Т. 442. № 1. С. 41–44.

130. Бобровницкий Ю. И., Томилина Т. М. Поглощение звука и метаматериалы (обзор) // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 5. С. 517–525.

REFERENCES

1. Tikhonov A. N. 1935, "Teorema edinstvennosti dlia uravneniia teploprovodnosti", *Math. sbornik*, vol. 42. no. 2. pp. 199–216, [in Russian].

2. Tikhonov A. N. 1943, "Ob ustoichivosti obratnykh zadach", *Reports USSR Acad. Sci.*, vol. 39. no. 5. pp. 195–198, [in Russian].

3. Tikhonov A. N. 1963, "O reguliarizatcii nekorrektno postavlennykh zadach", *Reports USSR Acad. Sci.*, no. 1. pp. 49–52, [in Russian].

4. Tikhonov A. N. 1963, "O reshenii nekorrektno postavlennykh zadach i metode reguliarizatcii", *Reports USSR Acad. Sci.*, no. 3. pp. 501–504, [in Russian].

5. Tikhonov A. N. & Arsenin V. Ya. 1986, "Metody resheniia nekorrektnykh zadach", Nauka, Moscow, 256 p., [in Russian].

6. Tikhonov A., Leonov A. & YAgola A. 1995, “Nelineinye nekorrektnye zadachi”, Nauka, Moscow, 398 p., [in Russian].

7. Lavrentev M. M., Romanov V. G. & Shishatskii S. P. 1980, “Nekorrektnye zadachi matematicheskoi fiziki i analiza”, Nauka, Moscow, 288 p., [in Russian].

8. Romanov V. G., Kabanikhin S. I. & Pukhnacheva T. P. 1982, “K teorii obratnykh zadach elektrodinamiki”, *Reports USSR Acad. Sci.*, vol. 266. no. 5. pp. 1070–1073, [in Russian].

9. Romanov V. G. 1991, “Teoremy edinstvennosti v obratnykh zadachakh dlia nekotorykh uravnenii vtorogo poriadka”, *Reports USSR Acad. Sci.*, vol. 321. no. 2. pp. 254–257, [in Russian].

10. Romanov V. G. 2005, “Ustoichivost v obratnykh zadachakh”, Nauchnyi Mir, Moscow, 296 p., [in Russian].

11. Romanov V. G. 2007, “O zadache opredeleniia struktury sloistoi sredy i formy impulsnogo istochnika”, *Siberian Mathematical J.*, vol. 48. no. 4. pp. 867–881, [in Russian].

12. Romanov V. G. 2007, “Obratnaia zadacha dlia uravnenii uprugosti pri neizvestnoi forme impulsnogo istochnika”, *RAS reports*, T. 417. № 6. pp. 746-752, [in Russian].

13. Kabanikhin S. I. 1992, “Metody resheniia obratnykh dinamicheskikh zadach dlia giperbolicheskikh uravnenii”, Uslovno-korektnye zadachi matematicheskoi fiziki i analiza. Nauka, Novosibirsk„ 1992. C. 109–123, [in Russian].

14. Kabanikhin S. I. & Karchevskii A. L. 1998, “Optimizatcionnyi algoritm resheniia zadachi Koshi dlia ellipticheskogo uravneniia”, *RAS reports*, vol. 359. no. 4. pp. 445–447, [in Russian].

15. Kabanikhin S. I. 2009, “Obratnye i nekorrektnye zadachi”, Sibir. nauch. izd., Novosibirsk, 457 p., [in Russian].

16. Lavrentev M. M., Reznitckaia K. G. & YAkhno. V. G. 1982, Odnomernye obratnye zadachi matematicheskoi fiziki. Nauka, Novosibirsk„ 88 p., [in Russian].

17. YAkhno. V. G. 1990, “Obratnye zadachi dlia differentcialnykh uravnenii uprugosti”, Nauka, Novosibirsk, 303 p., [in Russian].

18. Karchevsky A. L. & YAkhno. V. G. 1999, “One-dimensional inverse problems for systems of elasticity with a source of explosive type”, J. of Inverse and Ill-Posed Problems, VSP. Netherlands. 1999, vol. 7. no. 4. pp. 347–364, [in Russian].

19. Anikonov Yu. E. 1978, “Nekotorye metody issledovaniia mnogomernykh obratnykh zadach dlia differentcialnykh uravnenii”, Nauka, Novosibirsk, 118 p., [in Russian].

20. Anikonov Yu.E., Bubnov B. A. & Erokhin G. N. 2001, “Inverse and Ill-Posed Sources Problems”, VSP, Utrecht. Netherland, 239 p.

21. Anikonov Yu.E. 2001, “Inverse problems for kinetic and other evolution equations”, VSP, Utrecht. Netherland, 270 p.

22. Vatuljan A. O. 2007, “Obratnye zadachi v mehanike deformiruemogo tverdogo tela”, Fizmatlit, Moscow, 224 p., [in Russian].

23. Samarskii A. A, Vabishevich P. N. 2009, “Chislennye metody resheniia obratnykh zadach matematicheskoi fiziki”, Izd. LKI, Moscow, 480 p., [in Russian].

24. Colton D. & Kress R. 1983, “Integral Equation Methods in Scattering Theory”, New York: Wiley-Interscience, 320 p.

25. Colton D. 1984, “The inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves”, SIAM Review, vol.26. pp. 323-350.

26. Colton D. & Kress R. 1987, “Metody integralnykh uravnenii v teorii rasseianiia”, Mir, Moccow, 311 p., [in Russian].

27. Colton D. & Kress R. 1998, “Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory, 2nd edition”, New York: Springer 1998. 336 p.

28. Colton D. & Kress R. 2013, “Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory”, Berlin: Springer, 430 p.

29. Goriunov A. L. & Saskovetc A. V. 1989, “Obratnye zadachi rasseianiia v akustike”, MSU, Moscow, 152 p., [in Russian].

30. Burov V. A., Prudnikova I. P. & Sirotkina N. S. 1992, “Inverse problem of ultrasonic scattering by boundary inhomogeneity in isotropic solids”, *Acoust. Pysics*, vol. 38. no. 6. pp. 1013–1018.

31. Burov V. A. & Rumiantseva O. D. 1992, “Solution of two-dimensional acoustical inverse scattering problem based on functional-analytical methods”, *Akust. Zhurnal*, vol. 38. no. 3. pp. 413–420, [in Russian].

32. Burov V. A., Popov A. Iu., Sergeev S. N. & Shurup A. S. 2005, “Akusticheskaia tomografiia okeana pri ispolzovanii nestandartnogo predstavleniia refraktcionnykh neodnorodnostei”, *Akust. Zhurnal*, vol. 51. no. 5. pp. 602–613, [in Russian].

33. Alekseenko N. V., Burov V. A. & Rumiantceva O. D. 2005, “Reshenie trekhmernoi obratnoi zadachi akusticheskogo rasseianiia na osnove algoritma Novikova-KHenkina”, *Akust. Zhurnal*, vol. 51. no. 4. pp. 437–446, [in Russian].

34. Alekseenko N. V., Burov V. A. & Rumiantceva O. D. 2008, “Reshenie trekhmernoi obratnoi zadachi akusticheskogo rasseianiia. Modifitcirovannyi algoritm Novikova”, *Akust. Zhurnal*, vol. 54. no. 3. pp. 469–482, [in Russian].

35. Burov V. A., Kasatkina E. E., Marin A. O. & Rumiantceva O. D. 2007, “Ocenki maksimalnogo pravdopodobiia v korreliatcionnoi akusticheskoi termotomografii”, *Akust. Zhurnal*, vol. 53. no. 4. pp. 580–596, [in Russian].

36. Burov V. A. & Shmelev A. A. 2009, “Chislennoe i fizicheskoe modelirovanie protcessa tomografii na osnove akusticheskikh nelineinykh effektov tretego poriadka”, *Akust. Zhurnal*, vol. 55. № 4-5. pp. 466–480, [in Russian].

37. Burov V. A., Vecherin S. N., Morozov S. A. & Rumiantceva O. D. 2010, “Modelirovanie tochnogo resheniia obratnoi zadachi akusticheskogo rasseianiia funktcionalnymi metodami”, *Akust. Zhurnal*, vol. 56. no. 4. pp. 516–536, [in Russian].

38. Burov V. A. & Rumiantceva O. D. 2003, “Edinstvennost i ustoichivost resheniia obratnoi zadachi akusticheskogo rasseianiia”, *Akust. Zhurnal*, vol. 49. no. 5. pp. 590–603, [in Russian].

39. Burov V. A. & Rumiantceva O. D. 2018, “Obratnye volnovye zadachi akusticheskoi tomografii: Obratnye zadachi izlucheniia v akustike P. 1”, URSS, Moscow, 384 p., [in Russian].

40. Burov V. A. & Rumiantceva O. D. 2020, “Obratnye volnovye zadachi akusticheskoi tomografii: Obratnye zadachi akusticheskogo rasseianiia P. 2”, URSS, Moscow, 760 p., [in Russian].

41. Vorovich I. I. & Sumbatian M. A. 1990, “Vosstanovlenie obraza defekta po rasseiannomu poliu v akusticheskom priblizhenii”, *Izv. USSR Academy of Sciences: MSB*, no. 6. pp. 79–84. 1, [in Russian].

42. Vorovich I. I., Boyev N. V. & Sumbatyan M. A. 2001, “Reconstruction of the obstacle shape in acoustic medium under ultrasonic scanning”, Inverse Problems in Engineering. 2001, vol. 9. no. 4. pp. 315–337, [in Russian].

43. Goryunov A. A. & Rychagov M. N. 1989, “Reconstruction of a refraction inhomogeneity by the method of averages”, Soviet Journal of Nondestructive Testing. 1989, vol. 24. no. 12. pp. 805–809, [in Russian].

44. Goryunov A. A. 1992, “Matrix Green’s function formalism in acoustic intrascopy problems”, Russian Journal of Nondestructive Testing. 1992, vol. 27. no. 6. pp. 381–386, [in Russian].

45. Rinkevich A. V., Smorodinskij Y. G., Volkova N. N. & Zagrebin B. N. 1994, “Group velocity of ultrasonics in transverse-isotrope media”, Defectscopy (rus). 1994, no. 2. pp. 58–63, [in Russian].

46. Rinkevich A. B., Smorodinskii Ya.G., Burkhanov A. M., Krivonosova A. S. & Keller B. 2000, “Analysis of ultrasonic fields and flaw detection in aluminum single crystals based on laser detection technique”, Russian Journal of Nondestructive Testing. 2000, vol. 36. no. 11. pp. 831–838, [in Russian].

47. Perov D. V., Rinkevich A. B., Smorodinskii Ya.G. & Keler B. 2001, “Using wavelets for analyzing ultrasonic fields detected by a laser interferometer. Flaw detection and localization in an aluminum single-crystal”, Russian Journal of Nondestructive Testing. 2001, vol. 37. no. 12. pp. 889–899, [in Russian].

48. Mogilner L. Y. & Smorodinskii Y. G. 2018, “Ultrasonic Flaw Detection: Adjustment and Calibration of Equipment Using Samples with Cylindrical Drilling”, Russian Journal of Nondestructive Testing. 2018, T. 54. no. 9 pp. 630–637, [in Russian].

49. David H. Y. 1970, “Yen Interaction of a Plane Acoustic Wave with an Elastic Spherical Shell”, J. Acoust. Soc. Amer. 1970, vol. 47. no. 5. pp. 1325–1333.

50. Davis C. M., Dragonette L. R. & Flax L. 1978, “Acoustic scattering from silicone rubber cylinders and spheres”, J. Acoust. Soc. Amer. 1978, vol. 63. no. 6. pp. 268–275.

51. Faran J. J. 1951, “Sound scattering by solid cylinders and spheres”, J. Acoust. Soc. Amer. 1951, vol. 23. no. 4. pp. 405–418.

52. Flax L., Dragonette L. R. & Überall H. 2004, “Primenenie teorii uprugikh rezonansov pri izuchenii rasseianiia zvuka”, *Akust. Zhurnal*, vol. 49. no. 1. pp. 87–92, [in Russian].

53. Liamshev L. M. 1958, “Difraktciia zvuka na beskonechnoi tonkoi tcilindricheskoi obolochke”, *Akust. Zhurnal*, vol. 4. no. 2. pp. 161–167, [in Russian].

54. Liamshev L. M. 1959, “Rasseianie zvuka uprugimi tcilindrami”, *Akust. Zhurnal*, vol. 5. no. 1. pp. 58–63, [in Russian].

55. SHenderov E. L. 1963, "Prohozhdenie zvukovoi volny cherez upruguiu tcilindricheskuiu obolochku", *Akust. Zhurnal*, vol. 9. no. 2. pp. 222–230, [in Russian].

56. Lee F. A. 1963, "Scattering of a cylindrical wave of sound by an elastic cylinder", Acustica. 1963, vol. 13. no. 3. pp. 26–31.

57. Hickling R. 1967, "Echoes from Spherical Shells in Air.", J. Acoust. Soc. Amer. 1967, vol. 42. no. 2. pp. 388–390.

58. Gnatovskii I. I. 1968, "Rasseianie ploskoi zvukovoi volny na tonkoi uprugoi sfericheskoi obolochke", *Applied acoustics and vibration technology*, Kiev, pp. 23–28, [in Russian].

59. Metsaveer Ya. A. 1970, "O rasseianii voln uprugimi sfericheskimi obolochkami v akusticheskoi srede", *Izv. Acad. Nauk Estonian SSR*, vol. 19, no. 4. pp. 415–422, [in Russian].

60. Babkin V. P. & Fadeeva L. M. 1971, "Modelnye eksperimenty po attestatcii sharovykh mishenei", *Proceedings of Acoust. Institute*, no. 17. pp. 80–98, [in Russian].

61. Metsaveer Ya. A. 1971, "O primenenii teorii obolochek v zadachakh rasseianiia akusticheskikh voln ot sfericheskikh obolochek v zhidkoi srede", *Izv. Acad. Nauk Estonian SSR*, vol. 15. no. 3. pp. 321–328, [in Russian].

62. Veksler N. D. 1975, "Difraktciia ploskoi zvukovoi volny na poloi uprugoi sfere", *Akust. Zhurnal*, vol. 21. no. 5. pp. 321–335, [in Russian].

63. Plahov D. D. & Savolainen G. Ia. 1975, "Difraktciia sfericheskoi zvukovoi volny na uprugoi sfericheskoi obolochke", *Akust. Zhurnal*, vol. 21. no. 5. pp. 789–796, [in Russian].

64. Vogt R. H. & Neubauer W. G. 1976, "Relationship between acoustic reflection and vibrational modes of elastic spheres", J. Acoust. Soc. Amer. 1976, vol. 60. no. 1. P. 15–22.

65. Kulko V. F. & Mikhnova M. S. 1979, "Rezonansnye iavleniia, voznikaiushchie pri padenii akusticheskikh voln na shar", Otbor i peredacha informatcii (Kiev). 1979, no. 58. pp. 128–132, [in Russian].

66. George J., Nagl A. & Überall H. 1979, "Isolation of the resonant component in acoustic scattering from fluid-loaded elastic spherical shells", J. Acoust. Soc. Amer. 1979, vol. 65. no. 2. P. 368–373.

67. Veksler N. D., Korsunskii V. M. & Rybak S. A. 1990, "Rasseianiia ploskoi naclonno padaiushchei volny krugovoi tcilindricheskoi obolochkoi", *Akust. Zhurnal*, vol. 36. no. 1. pp. 12–16, [in Russian].

68. Dykhta V. V., Kunetc Ia. I. & Poddubniak A. P. 1990, "Osesimmetrichnoe rasseianie zvukovykh impulsov uprugoi sfericheskoi obolochkoi s otverstiem", *Solid mechanics*, no. 4. pp. 141–148, [in Russian].

69. Cleshchev A. A. 2004, "Difraktciia zvuka ot tochechnogo istochnika na uprugoi tcilindricheskoi obolochke", *Akust. Zhurnal*, vol. 50. no. 1. pp. 86–89, [in Russian].

70. Kovalev V. A. 2006, "Asimptoticheskii podhod v zadachakh rasseianiia akusticheskikh voln uprugimi obolochkami", *Bulletin Samara state. Univ.*, no. 9. pp. 42–54, [in Russian].

71. Marnevskaia L. A. 1972, "K difraktcii zvukovoi volny na share s nekoncentricheskim sharovym vcliucheniem", *Akust. Zhurnal*, vol. 18. no. 1. pp. 571–578, [in Russian].

72. Bezrukov A. V., Prihodko V. Iu. & Tiutekin V. V. 1986, “Rasseianie zvukovykh voln uprugimi radialno-sloistymi tcilindricheskimi telami”, *Akust. Zhurnal*, vol. 32. no. 6. pp. 762–766, [in Russian].

73. Kovalenko G. P. 1987, “K zadache o difraktcii akusticheskoi volny na neodnorodnom tverdom tele”, *Akust. Zhurnal*, vol. 33. no. 6. pp. 1060–1063, [in Russian].

74. Skobel’tsyn S. A. & Tolokonnikov L. A. 1995, “Rasseianie zvukovykh voln transversalno-izotropnym neodnorodnym tcilindricheskim sloem”, *Akust. Zhurnal*, vol. 41. no. 1. pp. 134–138, [in Russian].

75. Tolokonnikov L. A. 1998, “Difraktciia zvukovykh voln na neodnorodnom anizotropnom polom tcilindre”, *Oboronnaia tekhnika*, no. 4–5. pp. 11–14, [in Russian].

76. Tolokonnikov L. A. 1998, “Difraktciia tcilindricheskikh voln na neodnorodnoi transversalno-izotropnoi tcilindricheskoi obolochke”, *Oboronnaia tekhnika*, no. 4–5. pp. 9–11, [in Russian].

77. Tolokonnikov L. A. 2006, “Rezonansnoe rasseianie zvuka transversalno-izotropnoi tcilindricheskoi obolochkoi”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Geodyn. Physics. Maths. Thermodyn. Geoecology*, no. 3. pp. 106–114, [in Russian].

78. Romanov A. G. & Tolokonnikov L. A. 2009, “Rasseianie ploskoi zvukovoi volny neodnorodnym uprugim polym tcilindrom v viazkoi zhidkosti”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 1. pp. 62–70, [in Russian].

79. Tolokonnikov L. A. & Romanov A. G. 2008, “Difraktciia tcilindricheskikh zvukovykh voln na neodnorodnom polom tcilindre v viazkoi zhidkosti”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2. pp. 151–160, [in Russian].

80. Larin N. V. & Tolokonnikov L. A. 2009, “Difraktciia ploskoi zvukovoi volny na neodnorodnom uprugom tcilindricheskom sloe, granichashchem s neviazkimi teploprovodnymi zhidkostiami”, *J. Appl Math. Mech.*, vol. 73. no. 3. pp. 474–483, [in Russian].

81. Tolokonnikov L. A. & Sadomov A. A. 2006, “O difraktcii zvuka na neodnorodnoi transversalno-izotropnoi tcilindricheskoi obolochke v sloe zhidkosti”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Maths. Mech. Computer science*, vol. 12. no. 5. pp. 208–216, [in Russian].

82. Tolokonnikov L. A. & Romanov A. G. 2009, “Difraktciia zvukovykh voln na neodnorodnom uprugom polom tcilindre v sloe zhidkosti s zhestkimi granitcami”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 1-2. pp. 3-10, [in Russian].

83. Tolokonnikov L. A. & Romanov A. G. 2008, “Rasprostranenie zvuka v volnovode v prisutstvii neodnorodnoi tcilindricheskoi obolochki proizvolnoi tolshchiny”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2. pp. 161–176, [in Russian].

84. Tolokonnikov L. A. 2009, “Difraktciia zvuka na transversalno-izotropnoi tcilindricheskoi obolochke proizvolnoi tolshchiny v volnovode s akusticheski miagkimi granitcami”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3. pp. 154–163, [in Russian].

85. Romanov A. G. & Tolokonnikov L. A. 2011, “Rasseianie zvukovykh voln tcilindrom s neodnorodnym uprugim pokrytiem”, *J. Appl Math. Mech.*, vol. 75. no. 5. pp. 850–857, [in Russian].

86. Tolokonnikov L. A. 2013, “Rasseianie naclonno padaiushchei ploskoi zvukovoi volny uprugim tcilindrom s neodnorodnym pokrytiem”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2. Part 2. pp. 265–274, [in Russian].

87. Tolokonnikov L. A. 2013, “Difraktciia tcilindricheskikh zvukovykh voln na tcilindre s neodnorodnym uprugim pokrytiem”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3. pp. 202–208, [in Russian].

88. Skobel'tsyn S. A. & Tolokonnikov L. A. 1990, “Prohozhdenie zvukovykh voln cherez transversalno-izotropnyi neodnorodnyi ploskii sloi”, *Akust. Zhurnal*, vol. 36. no. 4. pp. 740–744, [in Russian].

89. Tolokonnikov L. A. 1999, “Otrazhenie i prelomlenie ploskoi zvukovoi volny anizotropnym neodnorodnym sloem”, *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, vol. 40. no. 5. pp. 179–184, [in Russian].

90. Tolokonnikov L. A. 1998, “Prohozhdenie zvuka cherez neodnorodnyi anizotropnyi sloi, granichashchii s viazkimi zhidkostiami”, *J. Appl Math. Mech.*, vol. 62. no. 6. pp. 1029–1035, [in Russian].

91. Larin N. V. & Tolokonnikov L. A. 2006, “Prohozhdenie ploskoi zvukovoi volny cherez neodnorodnyi termouprugii sloi”, *J. Appl Math. Mech.*, vol. 70. no. 4. pp. 650–659, [in Russian].

92. Harari I. & Hughes T. J.R. 1991, “Finite element method for the Helmholtz equation in an exterior domain: model problems”, Comp. Methods Appl. Mech. Eng. 1991, vol. 87. pp. 59–96.

93. Gan H., Levin P. L. & Ludwig R. 1993, “Finite element formulation of acoustic scattering phenomena with absorbing boundary condition in the frequency domain”, J. Acoust. Soc. Am. 1993, vol. 94. no. 3. Pt. 1. pp. 1651–1662.

94. Ihlenburg F. 2013, Finite element analysis of acoustic scattering. New York: Springer Publishing Company, Inc., 226 p.

95. Gallager R. 1984, “Metod konechnykh elementov. Osnovy”, Mir, Moscow, 428 p., [in Russian].

96. Polezhaev V. I., Prostomolotov A. I. & Fedoseev A. I. 1987, “Metod konechnykh elementov v mehanike viazkoi zhidkosti”, *Results of science and technology. VINITI. Ser. Mechanics of fluid and gas*, vol. 21. pp. 3–92, [in Russian].

97. Skobel'tsyn S. A. 2004, “Podhod k resheniiu zadach o rasseianii uprugikh voln s ispolzovaniem MKE”, *Thes. doc. Int. sci. conf. Modern problems of mathematics, mechanics, computer science”*, Tula: TulSU, 2004. pp. 135–136, [in Russian].

98. Ivanov V. I. & Skobel'tsyn S. A. 2008, “Modelirovanie reshenii zadach akustiki s ispolzovaniem MKE”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2. Tula: TulSU, pp. 132–145, [in Russian].

99. McLaughlin J. & Yoon J.-R. 2004, “Unique identifiability of elastic parameters from time-dependent interior displacement measurement”, Inverse Problems. 2004, V 20. pp. 25–45, [in Russian].

100. Jadamba B., Khan A. A. & Raciti F. 2008, “On the inverse problem of identifying Lame coefficients in linear elasticity”, J. Computers and Mathematics with Applications. 2008, vol. 56. pp. 431–443.

101. Bocharova O. V. & Vatuljan A. O. 2009, “O rekonstruktcii plotnosti i modulia Younga dlia neodnorodnogo sterzhnia”, *Akust. Zhurnal*, 2009. T. 55. no. 3. pp. 275–282, [in Russian].

102. Vatuljan A. O. 2010, “K teorii obratnykh koeffitcientnykh zadach v lineinoi mehanike deformiruemogo tela”, *J. Appl Math. Mech.*, vol. 74. no. 6. pp. 911–918, [in Russian].

103. Nedin R., Nesterov S. & Vatuljan A. 2014, “On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod”, Int. J. Solids. Struct. 2014, vol. 51. no. 3–4. pp. 767–773.

104. Vatuljan A. O. & Satunovskii P. S. 2007, “Ob opredelenii uprugikh modulei pri analize kolebanii neodnorodnogo sloia”, *RAS reports*, vol. 414. no. 1. pp. 36–38, [in Russian].

105. Vatuljan A. O., Iavruian O. V. & Bogachev I. V. 2011, “Identifikatciia uprugikh harakteristik neodnorodnogo po tolshchine sloia”, *Akust. Zhurnal*, vol. 57. no. 6. pp. 723–730, [in Russian].

106. Vatuljan A. O., Iavruian O. V. & Bogachev I. V. 2013, “Identifikatciia neodnorodnykh svoistv ortotropnogo uprugogo sloia”, *Akust. Zhurnal*, vol. 59. no. 6. pp. 752–758, [in Russian].

107. Vatuljan A. O., Bogachev I. V. & Yavruyan O. V. 2014, “Reconstruction of inhomogeneous properties of orthotropic viscoelastic layer”, Int. J. Solids. Struct. 2014, vol. 51. no. 11–12. pp. 2238–2243.

108. Tolokonnikov L. A. & Yudachev V. V. 2013, “O prohozhdenii ploskoi zvukovoi volny cherez ploskii uprugii sloi s neodnorodnym pokrytiem”, *Math. Int. sci. conf. “Modern problems of mathematics, mechanics, computer science”*, Tula: Izd. TulSU, pp. 477–480, [in Russian].

109. Tolokonnikov L. A. 2014, “Rasseianie ploskoi zvukovoi volny uprugim sharom s neodnorodnym pokrytiem”, *J. Appl Math. Mech.*, vol. 78. no. 4. pp. 519–526, [in Russian].

110. Skobel’tsyn S. A. 2016, “Opredelenie parametrov neodnorodnosti anizotropnogo uprugogo sloia po prohozhdeniiu zvuka”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 7. P. 2. pp. 246–257, [in Russian].

111. Skobel’tsyn S. A. 2014, “Opredelenie polozheniia granitcy razdeleniia dvukhsloinoi uprugoi plastiny po otrazheniiu zvuka”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3. pp. 122–130, [in Russian].

112. Skobel’tsyn S. A. & Tolokonnikov L. A. 2018, “Opredelenie parametrov neodnorodnosti anizotropnogo pokrytiia uprugogo poluprostranstva po otrazheniiu zvuka”, *Thes. doc. 8-th All-Russian sci. conf. “Mehanika kompozitcionny‘kh materialov i konstruktcii‘, slozhny‘kh i geterogenny‘kh sred”*, IPRIM RAS, Moscow, pp. 58, [in Russian].

113. Skobel’tsyn S. A. 2015, “Identifikatciia plotnosti materiala uprugogo tcilindra po rasseiannomu akusticheskomu poliu”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 4. pp. 158–169, [in Russian].

114. Skobel’tsyn S. A. & Peshkov N. Yu. 2018, “Opredelenie polozheniia ellipticheskoi polosti v uprugom tcilindre po otrazheniiu zvuka”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 1. pp. 109–121, [in Russian].

115. Skobel’tsyn S. A. 2017, “Identifikatciia razmera i polozheniia polosti v uprugom share po otrazheniiu zvukovoi volny”, *Proceedings Int. sci.-tech. conf. Actual problems of applied mathematics, computer science and mechanics”*, “Nauchno-issledovatel‘skie publikatcii”, Voronezh, pp. 1255-1262, [in Russian].

116. Skobelt’syn S. A. & Peshkov N. Y. 2019, “Finding, by means of a scattered sound, the geometric parameters of a finite elastic cylinder located near the half-space border”, J. Phys.: Conf. Ser., vol. 1203. 012023. pp. 1-10.

117. Skobel'tsyn S. A. 2016, "Identifikatciia parametrov anizotropnogo pokrytiia uprugogo shara po otrazhennomu zvuku", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 11. P. 2. pp. 144–156, [in Russian].

118. Skobel'tsyn S. A. 2017, "Opredelenie napravleniia osi uprugoi simmetrii anizotropnogo shara po rasseiannomu zvukovomu poliu", *Proceedings of the II All-Russian Acoustic Conference*, IPF RAS, N. Novgorod, pp. 1699-1705, [in Russian].

119. Larin N. V., Skobel'tsyn S. A. & Tolokonnikov L. A. 2015, "Opredelenie zakonov neodnorodnosti ploskogo uprugogo sloia s zadannymi zvukootrazhaiushchimi svoistvami", *Akust. Zhurnal*, vol. 61. no. 5. pp. 552–558, [in Russian].

120. Larin N. V., Skobel'tsyn S. A. & Tolokonnikov L. A. 2016, "Modelirovanie neodnorodnogo pokrytiia uprugoi plastiny s optimalnymi zvukootrazhaiushchimi svoistvami", *J. Appl Math. Mech.*, vol. 80. no. 4. pp. 480–488, [in Russian].

121. Skobel'tsyn S. A. 2017, "Ocenka svoistv pokrytiia konechnoi uprugoi plastiny s polostiu, obespechivaiushchikh zadannye parametry otrazheniia zvuka", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 7. pp. 83–92, [in Russian].

122. Larin N. V., Skobel'tsyn S. A. & Tolokonnikov L. A. 2014, "Ob opredelenii lineinykh zakonov neodnorodnosti tcilindricheskogo uprugogo sloia, imeiushchego naimenshee otrazhenie v zadannom napravlenii pri rasseianii zvuka", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 4. pp. 54–62, [in Russian].

123. Skobel'tsyn S. A. 2018, "Opredelenie parametrov neodnorodnosti pokrytiia ellipticheskogo tcilindra po rasseianiiu zvuka v prisutstvii uprugogo poluprostranstva", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 9. pp. 290–302.

124. Tolokonnikov L. A., Larin N. V. & Skobel'tsyn S. A. 2017, "Modelirovanie neodnorodnogo pokrytiia uprugogo shara s trebuemymi zvukootrazhaiushchimi svoistvami", *Math modeling*, vol. 29. no. 11. pp. 89-98, [in Russian].

125. Skobel'tsyn S. A. 2018, "Minimizatciia rasseianiia zvuka sferoidom vblizi idealnoi poverkhnosti vyborom parametrov vneshnego sloia", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, 2018. no. 9. pp. 421–437, [in Russian].

126. Bobrovnitckii Yu. I. 2007, "Teoriia novykh pogloshchaiushchikh i nerasseivaiushchikh pokrytii povyshennoi effektivnosti", *Akust. Zhurnal*, vol. 53. no. 5. pp. 613–624, [in Russian].

127. Bobrovnitckii Yu. I. 2008, "Nerasseivaiushchee pokrytie dlia tcilindra", *Akust. Zhurnal*, vol. 54. no. 6. pp. 879–889, [in Russian].

128. Bobrovnitckii Yu. I., Morozov K. D. & Tomilina T. M. 2010, "Periodicheskaia poverkhnostnaia struktura s ekstremalnymi akusticheskimi svoistvami", *Akust. Zhurnal*, vol. 56. no. 2. pp. 147–151, [in Russian].

129. Bobrovnitckii Yu. I. 2012, "Nauchnye osnovy akusticheskogo stelsa", *RAS reports*, vol. 442. no. 1. pp. 41–44, [in Russian].

130. Bobrovnitckii Yu. I. & Tomilina T. M. 2018, "Pogloshchenie zvuka i metamaterialy (obzor)", *Akust. Zhurnal*, vol. 64. no. 5. pp. 517–525, [in Russian].

Получено 16.10.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 511.43 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-245-259

n-короны в разбиениях тора на множества ограниченного остатка

А. А. Жукова, А. В. Шутов

Жукова Алла Адольфовна — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационных технологий, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Владимирский филиал (г. Владимир).
e-mail: georg967@mail.ru
Шутов Антон Владимирович — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры вычислительной техники и систем управления, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых (ВлГУ) (г. Владимир).
e-mail: a1981@mail.ru

Аннотация

Теория геометрических подстановок Арно-Ито позволяет строить последовательности обобщенных перекладывающихся разбиений d-мерного тора. Эти разбиения состоят из параллелепипедов $d+1$ типа, а действие некоторого сдвига тора на разбиении сводится к перекладыванию $d+1$ центрального параллелепипеда. Более того, множество вершин всех параллелепипедов разбиения представляет собой фрагмент орбиты нуля относительно этого сдвига тора. Рассматриваемые разбиения активно используются в различных задачах теории чисел, комбинаторики и теории динамических систем.

В настоящей работе изучается локальная структура разбиений тора, получаемых на основе геометрических подстановок. n-короной параллелепипеда называется множество всех параллелепипедов, отстоящих от данного на расстояние не более n в естественной метрике разбиения. Задача состоит в описании всех возможных типов n-корон.

Каждому параллелепипеду разбиения естественным образом присваивается номер – его номер в орбите соответствующего центрального параллелепипеда относительно сдвига тора. Доказано, что множество всех номеров распадается на конечное число полуинтервалов, определяющих возможные типы n-корон. Более того, доказано, что границы соответствующих полуинтервалов определяются номерами параллелепипедов, входящих в n-корону набора из $d+1$ центрального параллелепипеда.

Показано, что этот результат можно рассматривать как некоторое многомерное обобщение знаменитой теоремы о трех длинах. Ранее аналогичное описание было получено для 1-корон разбиений тора получаемых при помощи одной конкретной геометрической подстановки: подстановки Рози. Кроме того, аналогичные результаты ранее были получены для ряда квазипериодических разбиений плоскости.

В заключении сформулирован ряд направлений для дальнейшего исследования.

Ключевые слова: геометрические подстановки, теория Арно-Ито, обобщенное перекладывающееся разбиение тора, локальная структура, n-корона.

Библиография: 33 названий.

Для цитирования:

А. А. Жукова, А. В. Шутов. n-короны в разбиениях тора на множества ограниченного остатка // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 245–259.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 3.

UDC 511.43 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-245-259

n-crowns in toric tilings into bounded remander sets

A. A. Zhukova, A. V. Shutov

Zhukova Alla Adolfovna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Information Technologies, Russian Academy of National Economy and Public Administration under the President of Russian Federation, Vladimir branch (Vladimir).
e-mail: georg967@mail.ru
Shutov Anton Vladimirovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Computer Engineering and Control Systems, Vladimir State University named after Alexander and Nicholay Stoletovs (VlSU) (Vladimir).
e-mail: a1981@mail.ru

Abstract

The Arnoux-Ito theory of geometric substitutions allows to construct sequences of generalized exchanged tilings of the d-dimensional torus. These tilings consist of parallelepipeds of $d+1$ type, and the action of a certain toric shift on the tiling reduces to exchanging of the $d+1$ central parallelepipeds. Moreover, the set of vertices of all parallelepipeds of the tiling is a fragment of the orbit of zero point under considered toric shift. The considered tilings are actively used in various problems of number theory, combinatorics, and the theory of dynamical systems.

In this paper, we study the local structure of toric tilings obtained using geometric substitutions. The n-corona of the parallelepiped is a set of all parallelepipeds located at a distance of not greater than n from a given parallelepiped in the natural metric of the tiling. The problem is to describe all possible types of n-coronas.

With each parallelepiped in the tiling we can naturally assigned a number — its number in the orbit of the corresponding central parallelepiped with respect to the toric shift. It is proved that the set of all parallelepipeds numbers splits into a finite number of half-intervals defining possible types of n-coronas. Moreover, it is proved that the boundaries of the corresponding half-open intervals are determined by the numbers of the parallelepipeds in the n-corona of the set of $d+1$ central parallelepiped.

It is shown that this result can be considered as some multi-dimensional generalization of the famous three lengths theorem. Earlier, a similar description was obtained for 1-coronas of the toric tilings obtained using one specific geometric substitution: the Rauzy substitution. In addition, similar results were previously obtained for some quasiperiodic plane tilings.

In conclusion, some directions for further research are formulated.

Keywords: geometric substitutions, Arnoux-Ito theory, generalized exchanged toric tiling, local structure, n-corona.

Bibliography: 33 titles.

For citation:

A. A. Zhukova, A. V. Shutov, 2019, "n-crowns in toric tilings into bounded remander sets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 245–259.

1. Введение

Пусть L — некоторая решетка, v — иррациональный относительно решетки L вектор, то есть вектор, координаты которого в некотором базисе решетки L линейно независимы над $\mathbb{Z}$ вместе с единицей (очевидно, что данное определение не зависит от выбора базиса). Отображение сдвига

$$S : x \to x + v \pmod{L}$$

переводит тор $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / L$ в себя. Разбиение

$$\mathbb{T}^d = \coprod_{j=1}^{d+1} \coprod_{i=0}^{\sharp E_j - 1} \mathbb{E}_j(i)$$

d-мерного тора на непересекающиеся множества $d+1$ типа называется обобщенным перекладывающимся разбиением тора, если действие сдвига S на этом разбиении сводится к перекладыванию множеств $E_j(0)$, а объединение всех множеств $E_j(0)$, $1 \leq j \leq d+1$ изоморфно развертке некоторого d-мерного тора. Данное понятие впервые было введено в [29] и позднее, независимо, в [17], хотя первые примеры таких разбиений были получены существенно ранее.

Интерес к обобщенным перекладывающимся разбиениям тора в первую очередь связан с тем, что они состоят из множеств ограниченного остатка относительно сдвига S [17], [29]. Более того, в этих случаях возможна эффективная оценка остаточного члена соответствующей проблемы распределения дробных долей линейной функции [19], [26], [30]. Также имеются связи обобщенных перекладывающихся разбиений тора с комбинаторикой слов [20] и многомерными диофантовыми приближениями [16], [18].

В одномерном случае фактически существует один вид обобщенных перекладывающихся разбиений — разбиения Фибоначчи. Данные разбиения впервые были введены Журавлевым [21] для сдвига $x \to x - \tau \bmod 1$, $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Далее эти разбиения были обобщены Мануйловым на случай сдвигов, связанных с так называемыми серебряными сечениями [27], [28] и Шутовым на случай произвольных сдвигов [25], [31], [32].

В многомерном случае мы крайне далеки от полного описания обобщенных перекладывающихся разбиений тора. Можно выделить три основных подхода к построению таких разбиений:

1) Теория геометрических подстановок Арно-Ито [1], [4], [26], [30];
2) Теория фракталов Рози [4], [5], [22];
3) Дифференцирование разбиений тора [17].

В настоящее время уделяется большое внимание изучению геометрических свойств конкретных обобщенных перекладывающихся разбиений тора. Это связано с очевидной интерпретацией соответствующих результатов в терминах геометрии орбит иррациональных сдвигов тора, а также другими многочисленными приложениями в арифметике, динамике и комбинаторике. Подробное изложение соответствующих результатов может быть найдено в книгах [4], [10]. Особый интерес при этом представляет подход, связанный с разбиениями Арно-Ито, поскольку множество вершин таких разбиений имеет вид $\{S^k(0)\}$, $0 \leq k < k_0$.

В работе [15] была рассмотрена локальная структура простейшего бесконечного семейства обобщенных перекладывающихся разбиений тора, получаемого на основе конструкции Арно-Ито и связанного со знаменитой подстановкой Рози. Данное разбиение состояло из ромбов трех различных типов. Было показано, что во всех разбиениях существует ровно 9 типов наборов ромбов, соседних с заданным ромбом. Также был дан способ позволяющий по ромбу разбиения однозначно установить его соседей. Кроме того, было показано, что эти результаты можно рассматривать как первый шаг к многомерному обобщению знаменитых теорем о трех длинах и трех прыжках [2], [6], [11], [12], [13].

Интересно отметить, что ранее результаты, аналогичные результатам из [15] были получены для ряда бесконечных квазипериодических разбиений плоскости, где удавалось получить описание тайлов соседних с заданным тайлом разбиения в терминах так называемого параметра этого тайла [8], [9], [23], [33]. При этом с точки зрения теории бесконечных квазипериодических разбиений множество тайлов, соседних с данным тайлом X, образует так называемую 1-корону тайла $Crn(X,1)$ [7]. Можно также индуктивно определить n-корону $Crn(X,n)$ как объединение $(n-1)$-короны $Crn(X,n-1)$ и множества соседних с ней тайлов разбиения. Для ряда бесконечных квазипериодических разбиений плоскости удается получить описание произвольных n-корон [14], [24], [33].

В настоящей работе рассматриваются произвольные обобщенные перекладывающиеся разбиения тора, построенные на основе теории геометрических подстановок Арно-Ито и дается полное описание их n-корон для произвольного n.

2. Вспомогательные результаты

Пусть имеется алфавит $A=\{1,2,\ldots,d+1\}$. Элементы множества $A^*=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}A^k$ назовем словами над алфавитом A. Определим отображение $\sigma: A\to A^*$ такое, что все слова $\sigma(i)$, где $i\in A$, непусты. Слово $a\in A^*$ запишем в виде $a=a_1a_2\ldots a_n$, где $a_i\in A$. Положим по определению $\sigma(a)=\sigma(a_1)\sigma(a_2)\ldots\sigma(a_n)$, таким образом отображение σ продолжено до отображения $\sigma: A^*\to A^*$. Отображение σ, определенное таким образом называется подстановкой над алфавитом A.

Назовем матрицей подстановки σ матрицу $M_\sigma=(m_{ij})_{i,j=1}^d$, элементами которой являются m_{ij} — количество вхождений символа i в слово j.

Подстановка называется примитивной, если существует k такое, что для любых i, j символ i входит в слово $\sigma(j)$. Подстановка называется унимодулярной, если $\det M_\sigma=\pm1$.

Рассмотрим множество Λ, состоящего из базисных множеств

$$(x,j^*)=\left\{x+\sum_{\substack{l=1,\\ l\neq j}}^{d+1}\mu_l e_l : 0\leqslant\mu_l<1\right\},$$

где e_l таковы, что образуют базис $B=\{e_1,e_2,\ldots,e_{d+1}\}$ в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$. Точку x базисного множества (x,i^*) назовем *отмеченной*.

Для примитивной унимодулярной подстановки σ определим геометрическую подстановку Θ_σ по следующему правилу: каждому слову ω поставим в соответствие $d+1$-мерный вектор-столбец $ab(\omega)$, компонентами которого являются числа, равные количеству вхождения символов алфавита A в слово ω. Затем для образов $\sigma(j)$, где $j\in A$, рассмотрим всевозможные представления вида $\sigma(i)=YiW$, такие что $i\in A$, а Y и W — некоторые слова над алфавитом A.

Будем полагать

$$\Theta_\sigma(0,i^*)=\coprod_{j=1}^{d+1}\coprod_{\substack{W,\\ \sigma(j)=YiW}}\left(M_\sigma^{-1}ab(W),j^*\right). \tag{1}$$

Продолжим отображение Θ_σ на все множество Λ

$$\Theta_\sigma(0,i^*)=M_\sigma^{-1}x+\Theta_\sigma(0,i^*)$$

и на множество комбинаций базисных множеств:

$$\Theta\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda}\lambda\right)=\coprod_{\lambda\in\Lambda}\Theta(\lambda).$$

Положим

$$D_k^{(j)} = \Theta_\sigma^k\left(0, j^*\right), \qquad D_k = \coprod_{j=1}^{d+1} D_k^{(j)}.$$

Обозначим через v_σ и v_σ^* правый и левый собственные векторы матрицы M_σ, соответствующие ее наибольшему собственному значению λ_σ. Пусть P_σ — это d-мерное подпространство, ортоганальное вектору v_σ^*. Заметим, что подпространство P_σ инвариантно относительно отображения M_σ. Обозначим через π проекцию вдоль вектора v_σ на подпространство P_σ. Отметим, что отображение M_σ коммутирует с отображением π.

Лемма 1. *Ограничение отображения π на множество D_k является взаимно-однозначным отображением при любом k.*

Данная лемма доказана в книге [4]

Рассмотрим d-мерные множества $T_k = \pi\left(D_k\right)$ и $T_k^{(j)} = \pi\left(D_k^{(j)}\right)$. На множестве T_k введем отображение S_k^* определяемое следующим образом:

$$S_k^*(x) = x + \pi\left(f_i^{(k)}\right), \qquad \text{если} \quad x \in T_k^{(j)},$$

где $f_i^{(k)}$ — i-й вектор-столбец матрицы M_σ^{-k}.

В книге [4] сформулирована и доказана следующая лемма.

Лемма 2. *Отображение $S_k^*(x)$ является взаимно-однозначным отображением множества T_k в себя.*

Введем в расмотрение решетки:

$$L_0 = \left\{\sum_{k=1}^{d} k_i(e_i - e_{d+1}) : k_i \in \mathbb{Z}\right\}, \qquad L_N = M_\sigma^{-k}(L_0).$$

Теорема 1. *Пусть σ — примитивная унимодулярная подстановка. Тогда множество T_k представляет собой фундаментальную область решетки $\pi\left(L_k\right)$. Кроме того, существует сдвиг $S_k : x \to x + v_k \pmod{\pi\left(L_k\right)}$ тора $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\pi\left(L_k\right)$, действие которого на $\mathbb{R}^d/\pi\left(L_k\right)$ изоморфно действию S_k^* на T_k. При этом в качестве вектора v_k можно взять любой из векторов $\pi\left(f_i^{(k)}\right)$. Если ι_k означает естественную проекцию $T_k \to \mathbb{R}^d/\pi\left(L_k\right)$, то диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} T_k & \xrightarrow{S_k^*} & T_k \\ \big\downarrow{\scriptstyle \iota_k} & & \big\downarrow{\scriptstyle \iota_k} \\ \mathbb{R}^d/\pi\left(L_k\right) & \xrightarrow{S_k} & \mathbb{R}^d/\pi\left(L_k\right) \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство этой теоремы можно найти в книге [4].

Наиболее известными примерами примитивных неприводимых унимодулярных подстановок на трехсимвольном алфавите являются подстановка Рози

$$\sigma_R : \begin{array}{ccc} 1 & \to & 12 \\ 2 & \to & 13 \\ 3 & \to & 1 \end{array}$$

и два семейства подстановок Якоби-Перрона

$$\sigma_{(a,0)}: \begin{array}{lll} 1 & \to & \overbrace{11\ldots 2}^{a \text{ раз}} \\ 2 & \to & 3 \\ 3 & \to & 1, \end{array}$$

$$\sigma_{(a,1)}: \begin{array}{lll} 1 & \to & \overbrace{11\ldots 3}^{a \text{ раз}} \\ 2 & \to & 1 \\ 3 & \to & 2 \end{array}$$

Соответствующие геометрические подстановки изображены на рисунках 1–3.

Zhukova/548-1196-1-SP.jpg

Рис. 1. Геометрическая подстановка, соответствующая подстановке σ_R

Zhukova/548-1197-1-SP.jpg

Рис. 2. Геометрическая подстановка, соответствующая подстановке $\sigma(a, 0)$

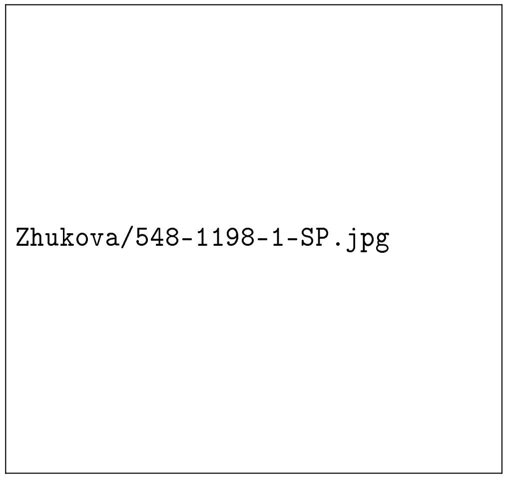


Рис. 3. Геометрическая подстановка, соответствующая подстановке $\sigma(a, 1)$

В статье [30] доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $E_j(0) = \pi\,(0, j^*)$, $E_j(i) = S_k^{*i}\,(\pi(0, j^*))$, $\mathbb{E}_j(i) = \iota_k^{-1}\,(E_j(i))$, $\sharp E_j$ *— количество множеств типа* E_j, *тогда множества* $\mathbb{E}_j(i)$ *образуют разбиение тора* $\mathbb{T}^d$ *вида*

$$\mathbb{T}^d = \coprod_{j=0}^{d+1} \coprod_{i=0}^{\sharp E_j - 1} \mathbb{E}_j(i).$$

Сформулируем и докажем следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть* v_j *— вектор, соединяющий отмеченные точки двух множеств, тогда найдется целое число* C_j, *т.ч.*

$$\pi\,(v_j) \equiv C_j \pi \left(f_1^{(k)}\right) \pmod{\pi\,(L_k)}.$$

Доказательство. Рассмотрим два произвольных множества $E_{j'}(i')$ и $E_{j''}(i'')$ разбиения T_k, тогда согласно теореме 2 справедливы равенства

$$E_{j'}(i') = S_k^{*i'}\left(E_{j'}(0)\right), \quad E_{j''}(i'') = S_k^{*i''}\left(E_{j''}(0)\right).$$

Обозначим через $x\left(E_{j'}(i')\right)$, $x\left(E_{j''}(i'')\right)$ отмеченные точки множеств $E_{j'}(i')$, $E_{j''}(i'')$, и воспользуемся утверждением теоремы 1, согласно которому имеют место сравнения

$$x\left(E_{j'}(i')\right) \equiv i'\pi\left(f_1^{(k)}\right) \pmod{\pi\,(L_k)}$$

и

$$x\left(E_{j''}(i'')\right) \equiv i''\pi\left(f_1^{(k)}\right) \pmod{\pi\,(L_k)}.$$

Пусть вектор v_j, соединяет отмеченные точки множеств $E_{j'}(i')$ и $E_{j''}(i'')$, т.е.

$$v_j = x\left(E_{j''}(i'')\right) - x\left(E_{j'}(i')\right),$$

тогда справедливо сравнение

$$\pi(v_j) \equiv (i'' - i')\pi\left(f_1^{(k)}\right) \pmod{\pi\,(L_k)}.$$

Обозначим через C_j разность чисел i'' и i', и получим утверждение леммы 3.

3. Основной результат

Определим n-корону $Crn(\mathbb{T}_0, n)$ для $\mathbb{T}_0 = \coprod_{j=1}^{d+1} \mathbb{E}_j(0)$ индуктивно. Назовем 1-короной $Crn(\mathbb{T}_0, 1)$ множества $\mathbb{T}_0$ само множество $\mathbb{T}_0$ вместе со всеми множествами соседними с множеством $\mathbb{T}_0$. Предположим, что имеется n-корона $Crn(\mathbb{T}_0, n)$ множества $\mathbb{T}_0$. Назовем $(n+1)$-короной $Crn(\mathbb{T}_0, n+1)$ множества $\mathbb{T}_0$ n-корону вместе со всеми множествами, соседними к множествам n-короны. При $n = 0$ корона $Crn(\mathbb{T}_0, 0)$ совпадает с $\mathbb{T}_0$.

Точно так же определяется n-корона для любого множества $\mathbb{E}_j(i)$.

Пусть имеются два множества $\mathbb{E}_j(i)$ и $\mathbb{E}_j(s)$. Две n-короны,$Crn(\mathbb{E}_j(i), n)$ и $Crn(\mathbb{E}_j(i'), n)$, будем называть *трансляционно эквивалентными*, если существует сдвиг тора, переводящий одну корону в другую.

Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть*

$$[0; \sharp E_j) = I_0 \sqcup I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_r$$

— разбиение полуинтервала $[0; \sharp E_j)$ на замкнутые слева и открытые справа полуинтервалы, границами которых являются номера всех множеств вида $\mathbb{E}_j(i)$, входящих в $Crn(\mathbb{T}_0, n)$. Тогда $Crn(\mathbb{E}_j(i), n)$ и $Crn(\mathbb{E}_j(i'), n)$ трансляционно эквивалентны тогда и только тогда, когда i и i' принадлежат одному и тому же интервалу I_l при некотором l.

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции.

Вначале убедимся, что утверждение теоремы верно при $n = 1$. Рассмотрим 1-корону некоторого множества $\mathbb{E}_j(i)$. Эта корона состоит из множества $\mathbb{E}_j(i)$ и всех соседних с ним множеств. Обозначим через $\mathbb{E}_{j'}(i')$ множество, соседнее с множеством $\mathbb{E}_j(i)$.

Отмеченные точки $x(\mathbb{E}_j(i))$ и $x\left(\mathbb{E}_{j'}(i')\right)$ множеств $\mathbb{E}_j(i)$ и $\mathbb{E}_{j'}(i')$ соединим вектором $v_{j'}$ так, что $v_{j'} = x\left(\mathbb{E}_{j'}(i')\right) - x(\mathbb{E}_j(i))$. Для вектора $v_{j'}$, согласно лемме (3), найдется число $C_{j'}$ такое, что $j' = i + C_{j'}$.

В разбиении многомерного тора $\mathbb{T}^d$ множеств вида $\mathbb{E}_{j'}(s)$ содержится в точности $\sharp E_{j'}$. Поэтому номер множества $\mathbb{E}_{j'}(i')$ должен удовлетворять неравенству $0 \leqslant i' < \sharp E_{j'}$. Множество $\mathbb{E}_j(i)$ имеет конечное число соседних множеств, значит справедлива система неравенств вида

$$0 \leqslant i + C_{j'} < \sharp E_{j'}. \tag{2}$$

Очевидно, что решением системы (2) является полуинтервал с включенной левой границей. Это означает, что имеет место равенство $i + C_j = 0$, где $C_j = \max(-C_{j'}, 0)$.

Перепишем последнее равенство как $i = 0 + (-C_j)$, где число $-C_j$ соответствует вектору $-v_j$, при условии, что вектору v_j соотвествует число C_j. Следовательно, если номер множества $\mathbb{E}_j(i)$ принадлежащего $Crn(\mathbb{T}_0, 1)$, совпадает с границей полуинтервала, то его 1-корона включает в себя множество с номером 0, т.е. $\mathbb{E}_{j'}(0)$.

Таким образом доказано, что если множество $\mathbb{E}_{j'}(i')$ имеет 1-корону заданного типа, то номер i' этого множества принадлежит замкнутому слева и открытому справа полуинтервалу I_l при некотором l.

Докажем обратное утверждение: если номера множеств данного вида принадлежат одному и тому же полуинтервалу I_l, то эти множества имеют 1-короны одинакового типа. Выберем такое множество $\mathbb{E}_j(s)$, что его номер s принадлежит тому же промежутку, что и номер i множества $\mathbb{E}_j(i)$. Тогда для номера s будет справедлива система неравенств аналогичная неравенству (2), т.е.

$$0 \leqslant i' + C_{j'} < \sharp E_{j'}.$$

Из каждого такого неравенства заключаем, что соседом множества $\mathbb{E}_j(i')$ обязательно будет являться множество $\mathbb{E}_r(i' + C_{j'})$. В силу того, что множество $\mathbb{E}_j(i')$ может иметь конечное число соседних множеств, делаем вывод о том, что других соседей у множества $\mathbb{E}_j(i')$ нет, т.е. 1-короны множеств $\mathbb{E}_j(i')$ и $\mathbb{E}_j(i)$ трансляционно эквивалентны.

Таким образом доказано утверждение теоремы 3 при $n = 1$.

Предположим, что утверждение теоремы 3 верно при $n = m - 1$, то есть

$$[0; \sharp E_j) = I_0 \sqcup I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_r$$

— разбиение полуинтервала $[0; \sharp E_j)$ на замкнутые слева и открытые справа полуинтервалы, границами которых являются номера всех множеств вида $\mathbb{E}_q(t)$, входящих в $Crn(\mathbb{E}_j(i), m-1)$. Причем $Crn(\mathbb{E}_j(i), m-1)$ и $Crn(\mathbb{E}_j(s), m-1)$ трансляционно эквивалентны тогда и только тогда, когда i и s принадлежат одному и тому же интервалу I_l при некотором l.

Проверим, верно ли утверждение теоремы 3 при $n = m$ учитывая, что теорема справедлива при $n = m - 1$.

Возможны два случая: 1) $Crn(\mathbb{E}_j(i), m)$ совпадает с $Crn(\mathbb{E}_j(i), m-1)$ для всех $\mathbb{E}_j(i)$; 2) $Crn(\mathbb{E}_j(i), m)$ и $Crn(\mathbb{E}_j(i), m-1)$ различны хотя бы для одного $\mathbb{E}_j(i)$.

В первом случае получаем, что новых корон нет, а значит нет новых полуинтервалов. Следовательно, типы интервалов не изменились, и утверждение теоремы верно.

Во втором случае выберем то множество $\mathbb{E}_j(i)$ для которого

$$Crn(\mathbb{E}_j(i), m) \quad \text{и} \quad Crn(\mathbb{E}_j(i), m-1)$$

отличаются. Согласно предположению индукции номер множества $\mathbb{E}_j(i)$ разбиения многомерного тора $\mathbb{T}^d$ принадлежит промежутку I_l, являющимся одним из полуинтервалов разбиения промежутка $[0; \sharp E_j)$. Рассмотрим m-корону множества $\mathbb{E}_j(i)$. Отмеченную точку множества $\mathbb{E}_j(i)$ соединим векторами $u_{j'}^{(m)}(\mathbb{E}_j(i))$ с отмеченными точками всех множеств, входящих в $Crn(\mathbb{E}_j(i), m)$ (рис. 4). Очевидно, что если существует еще одно множество $\mathbb{E}_j(i')$ с такой же m-короной, то набор векторов $u_{j'}^{(m)}(\mathbb{E}_j(i'))$, соединяющих отмеченную точку $\mathbb{E}_j(i')$ с отмеченными точками множеств входящих в $Crn(\mathbb{E}_j(i), m)$ будет таким же.

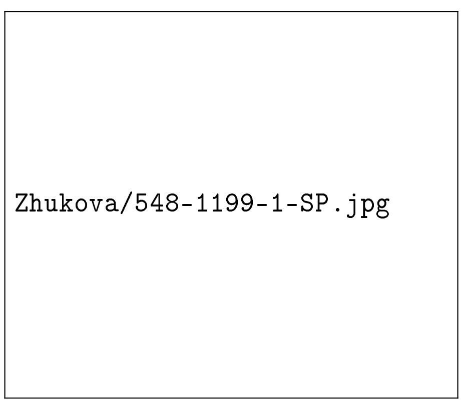


Рис. 4. Вектора $u_{j'}^{(m)}(\mathbb{E}_j(i))$

Каждому вектору $u_{j'}^{(m)}(\mathbb{E}_j(i))$ согласно лемме 3 соответствует определенное целое число $C_{j'}$. Как было доказано ранее, номер любого множества, входящего в $Crn(\mathbb{E}_j(i), m)$, равен сумме номера множества $\mathbb{E}_j(i)$ и числа $C_{j'}$, т. е. $i + C_{j'}$.

Пусть вектор $u_p^{(m)}(\mathbb{E}_j(i))$ соединяет отмеченные точки множеств $\mathbb{E}_j(i)$ и $\mathbb{E}_q(s)$. В силу того, что в разбиении многомерного тора $\mathbb{T}^d$ имеется $\sharp E_q$ множеств вида $\mathbb{E}_q(s)$, получаем, что номер множества $\mathbb{E}_q(s)$ удовлетворяет двойному неравенству $0 \leqslant s < \sharp E_q$ или

$$0 \leqslant i + C_r < \sharp E_q. \tag{3}$$

Для каждого множества, входящего в $Crn(\mathbb{E}_j(i), m)$ справедливы аналогичные неравенства, поэтому для номера множества $\mathbb{E}_j(i)$ получаем систему неравенств вида (3).

Решением системы неравенств вида (3) всегда является некоторый полуинтервал с включенной левой границей. Это утверждение является следствием того, что в общем случае система, состоящая из неравенств указанного вида либо не имеет решения; либо имеет решение, которое можно записать в виде промежутка замкнутого слева и открытого справа. В нашем случае система неравенств обязательно имеет решение, т.к. для номера i множества $\mathbb{E}_j(i)$ система неравенств справедлива. Кроме того, в силу того, что система неравенств вида (3) содержит, в частности, неравенства верные для номеров множеств, входящих в $Crn(\mathbb{E}_j(i), m-1)$, получаем, что полуинтервал для номера множества $\mathbb{E}_j(i)$, имеющего $Crn(\mathbb{E}_j(i), m)$, будет являться частью полуинтервала I_l.

Обратное утверждение, о том, что если номера множеств данного вида принадлежат одному и тому же полуинтервалу I_t, то эти множества имеют m-короны одинакового типа, доказывается также как и для $n = 1$.

Теперь перейдем к доказательству того, что границами полуинтервалов, указанных в условии теоремы, являются номера всех множеств вида $\mathbb{E}_q(s)$, входящих в $Crn(\mathbb{E}_j(i), m)$.

По предположению номер множества $\mathbb{E}_j(i)$, имеющего $Crn(\mathbb{E}_j(i), m-1)$ принадлежит промежутку I_l. Пусть при переходе к $Crn(\mathbb{E}_j(i), m)$ полуинтервал I_l разбился на несколько полуинтервалов, т.е. $I_l = I_{l_1} \sqcup I_{l_2} \sqcup \ldots \sqcup I_{l_q}$.

Каждая из границ указанных промежутков возникает в том случае, когда какое-то из неравенств вида (3) обращается в равенство.

В сиситеме неравенств вида (3) есть неравенства, записанные для множеств, принадлежащих $Crn(\mathbb{E}_j(i), m-1)$, и неравенства, полученные для множеств из $Crn(\mathbb{E}_j(i), m)$, но не входящих в $Crn(\mathbb{E}_j(i), m-1)$. Обозначим содержащиеся в этих неравенствах постоянные через $C_r^{(m-1)}$ и $C_r^{(m)-}$ соответственно. В таком случае система неравеств, записанная для $Crn(\mathbb{E}_j(i), m)$, включает в себя два вида неравеств:

$$0 \leqslant i + C_r^{(m-1)} < \sharp E_q \tag{4}$$

и

$$0 \leqslant i + C_r^{(m)-} < \sharp E_q. \tag{5}$$

Решением системы неравенств вида (4) является поуинтервал I_l. Значит, границы полуинтервалов I_{l_1}, I_{l_2}, ..., I_{l_q} получаются при обращении в равенства неравенств вида (5), и новые границы будут равны $-C_r^{(m)-}$. Зная, что каждому числу $C_p^{(m)-}$ соответствует определенный вектор $u_p^{(m)}(\mathbb{E}_j(i))$, а, следовательно, некоторое множество $\mathbb{E}_{j''}(i'')$, выясним что это за множество. Целое число $-C_r^{(m)-}$ представим как

$$-C_r^{(m)-} = -C_{r'}^{(m-1)} - C_{r''}, \tag{6}$$

где $C_{r'}^{(m-1)}$ соответствует вектору $u_{r'}^{(m-1)}(\mathbb{E}_j(i))$, проведенному из отмеченной точки множества $\mathbb{E}_j(i)$ к отмеченной точке множества $\mathbb{E}_{j'}(i')$, соседнего с множеством $\mathbb{E}_{j''}(i'')$, а число $C_{r''}$ — вектору $v_{r''}$, соединяющему отмеченные точки множеств $\mathbb{E}_{j'}(i')$ и $\mathbb{E}_{j''}(i'')$. Число $C_r^{(m)-}$ отлично от числа $C_{r'}^{(m-1)}$, т.к. все числа $C_{r'}^{(m-1)}$, соответствующие векторам $u_{r'}^{(m-1)}(\mathbb{E}_j(i))$, являются границами полуинтервалов для номеров множеств $Crn(\mathbb{E}_j(i), m-1)$. Следовательно, число $C_r^{(m)-}$ соответствует вектору $u_{r'}^{(m)}(\mathbb{E}_j(i))$, но не вектору $u_{r'}^{(m-1)}(\mathbb{E}_j(i))$.

Заметим, что по предположению индукции числу $-C_{r'}^{(m-1)}$ соответствует вектор, проведенный из начала координат к множеству $\mathbb{E}_{j'}(i')$ из короны $Crn(\mathbb{T}_0, m-1)$. Из равенства (6) следует, что числу $-C_r^{(m)-}$ соответствует вектор, проведенный из начала координат в множество $\mathbb{E}_{j''}(i'')$, являющееся соседним с множеством $\mathbb{E}_{j'}(i')$ из $Crn(\mathbb{T}_0, m-1)$. Данный вектор не совпадает ни с одним вектором, проведенным из начала координат к множествам из $Crn(\mathbb{T}_0, m-1)$. По предположению индукции множество $\mathbb{E}_{j''}(i'')$ не может принадлежать $Crn(\mathbb{T}_0, m-1)$, следовательно, это множество входит в $Crn(\mathbb{T}_0, m)$.

Таким образом теорема 3 полностью доказана.

4. Заключение

В работе изучена локальная теория обобщенных перекладывающихся разбиений многомерных торов, построенных на основе теории геометрических подстановок Арно-Ито. Дано полное описание корон в таких разбиениях.

Рассматриваемые разбиения состоят из d-мерных параллелепипедов $d+1$ типа. Все параллелепипеды одного типа получаются из некоторого центрального параллелепипеда итерацией некоторого иррационального сдвига тора. Номер этой итерации определяет номер параллелепипеда в разбиении. При этом оказывается, что каждому возможному типу n-корон соответствует однозначно определенный открытый справа полуинтервал на множестве номеров параллелепипедов. Границы таких полуинтервалов в точности совпадают с номерами параллелепипедов из n-короны $Crn(T_0, n)$ множества T_0 центральных параллелепипедов разбиения (в случае ряда бесконечных разбиений плоскости аналогичное множество назвалось ядром разбиения [24]).

Дальнейшие обобщения исследования могут проводиться в следующих направлениях.

1) Обобщение результатов на произвольные обобщенные перекладывающиеся разбиения тора.

2) В случае бесконечных квазипериодических разбиений тора иногда удается получить описание n-корон для разбиений полученных методом "проекции и среза" и на первый взгляд не связанных со сдвигами тора. Было бы интересно либо все же найти такую связь, либо получить конечный аналог метода "проекции и среза".

3) Число $p(n)$ различных n-корон разбиения может рассматриваться как многомерный аналог функции сложности из комбинаторики слов [3]. Было бы интересно изучить поведение функции $p(n)$ для обобщённых перекладывающихся разбиений торов. При этом легко показать, что $p(n) > cn^d$ если n достаточно мало по сравнению с числом параллелепипедов в разбиении. Кроме того, очевидно, $p(n) = const$ при достаточно больших n. Таким образом в поведении функции $p(n)$ имеется фазовый переход. Численное моделирование показывет, что даже в случае $d = 2$ таких фазовых переходов как минимум два. Было бы интересно найти асимптотические формулы для $p(n)$ и получить описание всех фазовых переходов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arnoux P., Ito S. Pisot substitutions and Rauzy fractals // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. 2001. V. 8, Issue 2. P. 181–207.

2. Floreik K. Une remarque sur la repartition des nombres $m\xi$ mod 1 // Coll. Math. Wroclaw. 1951. V. 2. P. 323-324.

3. Lagarias J. C., Pleasants P. A. B. Repetitive Delone sets and quasicrystals // Ergod. Th. Dyn. Sys. 2003. V. 23. P. 831–867.

4. Pytheas Fogg N. Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics // Springer. 2001.

5. Rauzy G. Nombres algébriques et substitutions // Bull. Soc. Math. France. 1982. V. 110. P. 147–178.

6. Ravenstein T. V. The three gap theorem (Steinhaus conjecture) // J. Austral. Math. Soc. Ser. A 1988 V. 45. P. 360–370.

7. Schattschneider D., Dolbilin N. One corona is enough for the Euclidean plane // Quasicrystals and discrete geometry (Toronto. ON. 1995), Fields Inst. Monogr. 10, Amer. Math. Soc. Providence. RI. 1998. P. 207–246.

8. Shutov A. V., Maleev A. V. Quasiperiodic planetilings based on stepped surfaces // Acta Crystallographica. Section A: Foundations of Crystallography. 2008. V. 64, Issue 3. P. 376–382.

9. Shutov A. V., Maleev A. V., Zhuravlev V. G. Complex quasiperiodic self-similar tilings: Their parameterization, boundaries, complexity, growth and symmetry // Acta Crystallographica. Section A: Foundations of Crystallography. 2010. V. 66, Issue 3. P. 427–437.

10. Siegel A., Thuswaldner J. M. Topological properties of Rauzy fractals // Mem. Soc. Math. Fr. N.S. 2009. V. 118. P. 1–144.

11. Slater N., Gaps and steps for the sequence $n\theta$ mod 1 // Proc. Camb. Phil. Soc. 1967. V. 63. P. 1115–1123.

12. Sós V. T. S. On the distribution mod 1 of the sequence $n\alpha$ // Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math. 1958. V. 1. P. 127–134.

13. Świerczkowski S. On successive settings of an arc on the circumference of a circle // Fund. Math. 1958. V. 46. P. 187–189.

14. Zhuravlev V. G. On additivity property of the complexity function related to rauzy tiling // Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory. 2007. P. 240–254.

15. Жукова А. А., Шутов А. В. Подстановка Рози и локальная структура разбиений тора // Чебышевский сборник 2019. Т. 20, вып. 4.

16. Журавлев В. Г. Двумерные приближения методом делящихся торических разбиений // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2015. Т. 440. С. 81–98.

17. Журавлев В. Г. Делящиеся разбиения тора и множества ограниченного остатка // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2015. Т. 440. С. 99–122.

18. Журавлев В. Г. Дифференцирование индуцированных разбиений тора и многомерные приближения алгебраических чисел // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2016. Т. 445. С. 33–92.

19. Журавлев В. Г. Индуцированные множества ограниченного остатка // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28, № 5. С. 171–194.

20. Журавлев В. Г. Модули торических разбиений на множества ограниченного остатка и сбалансированные слова // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, № 4. С. 97–136.

21. Журавлев В. Г. Одномерные разбиения Фибоначчи // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, № 2. С. 89–122.

22. Журавлев В. Г. Разбиения Рози и множества ограниченного остатка на торе // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2005. Т. 322. С. 83–106.

23. Журавлев В. Г., Малеев А. В. Послойный рост квазипериодического разбиения Рози // Кристаллография. 2007. Т. 52, № 2. С. 204–210.

24. Журавлев В. Г., Малеев А. В. Функция сложности и форсинг в двумерном квазипериодическом разбиении Рози // Кристаллография. 2007. Т. 52, № 4. С. 610–616.

25. Красильщиков В. В., Шутов А. В. Одномерные квазипериодические разбиения и их приложения // Владимир. ВФ РУК. 2011.

26. Кузнецова Д. В., Шутов А. В. Перекладывающиеся разбиения тора, подстановка Рози и множества ограниченного остатка // Матем. заметки. 2015. Т. 98, № 6. С. 878–897.

27. Мануйлов Н. Н. Самоподобие некоторых последовательностей точек на окружности // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2003. Т. 302, № 19. С. 81–95.

28. Мануйлов Н. Н. Прямые перенормировки на одномерном торе // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2004. Т. 314. С. 142–154.

29. Шутов А. В. Перекладывания на торе и многомерная проблема Гекке-Кестена // Ученые записки Орловского государственного университета. 2012. Т. 6, № 2. С. 249–253.

30. Шутов А. В. Подстановки и множества ограниченного остатка // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, № 2. С. 501–522.

31. Шутов А. В. Производные поворотов окружности и подобие орбит // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2004. Т. 314. С. 272–284.

32. Шутов А. В. Системы счисления и множества ограниченного остатка // Чебышевский сборник. 2006. Т. 7, № 3. С. 110–128.

33. Шутов А. В., Малеев А. В. Сильная параметризация и координационные окружения графа вершин разбиения Пенроуза // Кристаллография. 2017. Т. 62, № 4. С. 535–542.

REFERENCES

1. Arnoux, P. & Ito, S. 2001, “Pisot substitutions and Rauzy fractals“, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin.*, vol. 8, issue 2, pp. 181–207.

2. Floreik, K. 1951, “Une remarque sur la repartition des nombres $m\xi \bmod 1$“, *Coll. Math. Wroclaw.*, vol. 2, pp. 323–324.

3. Lagarias, J. C. & Pleasants, P. A. B. 2003, “Repetitive Delone sets and quasicrystals“, *Ergod. Th. Dyn. Sys.*, vol. 23. pp. 831–867. doi: https://doi.org/10.1017/S0143385702001566.

4. Pytheas Fogg, N. 2001, “Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics“, *Springer*. doi: 10.1007/b13861.

5. Rauzy, G. 1982, “Nombres algébriques et substitutions“, *Bull. Soc. Math. France*, vol. 110, pp. 147–178. doi: https://doi.org/10.24033/bsmf.1957.

6. Ravenstein, T. V. 1988, “The three gap theorem (Steinhaus conjecture)“, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, vol. 45, pp. 360–370.

7. Schattschneider, D. & Dolbilin, N. 1998, “One corona is enough for the Euclidean plane“, *Quasicrystals and discrete geometry (Toronto. ON. 1995), Fields Inst. Monogr. 10, Amer. Math. Soc. Providence. RI*, pp. 207–246.

8. Shutov, A. V. & Maleev, A. V. 2008, “Quasiperiodic planetilings based on stepped surfaces“, *Acta Crystallographica. Section A: Foundations of Crystallography*, vol. 64, no. 3, pp. 376–382. doi: 10.1107/S0108767308005059.

9. Shutov, A. V., Maleev, A. V. & Zhuravlev, V. G. 2010, “Complex quasiperiodic self-similar tilings: Their parameterization, boundaries, complexity, growth and symmetry“, *Acta Crystallographica. Section A: Foundations of Crystallography*, vol. 66, no. 3, pp. 427–437. doi: 10.1107/S0108767310006616.

10. Siegel, A. & Thuswaldner, J. M. 2009, “Topological properties of Rauzy fractals“, *Mem. Soc. Math. Fr. N.S.*, vol. 118, pp. 1–144. doi: 10.24033/msmf.430.

11. Slater, N. 1967, “Gaps and steps for the sequence $n\theta$ mod 1“, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 63, pp. 1115–1123. doi: https://doi.org/10.1017/S0305004100042195.

12. Sós, V. T. 1958, “On the distribution mod 1 of the sequence $n\alpha$“, *Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math.*, vol. 1, pp. 127–134.

13. Świerczkowski, S. 1958, “On successive settings of an arc on the circumference of a circle“, *Fund. Math.*, vol. 46, pp. 187–189.

14. Zhuravlev, V. G. 2007, “On additivity property of the complexity function related to rauzy tiling“, *Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory*, pp. 240–254.

15. Zhukova, A. A. & Shutov, A. V. 2019, “Rauzy substitution and local structure of torus tilings“, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 20, no. 4.

16. Zhuravlev, V. G. 2016, “Two-dimensional approximations by the method of dividing toric tilings“, *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 217, issue 1, pp. 54–64. doi: 10.1007/s10958-016-2955-2.

17. Zhuravlev, V. G. 2015, “Dividing toric tilings and bounded remainder sets“, *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 217, issue 1, pp. 65–80. doi: 10.1007/s10958-016-2956-1.

18. Zhuravlev, V. G. 2016, “Differentiation of induced toric tilings and multi-dimensional approximations of algebraic numbers“, *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 222, issue 5, pp. 544–584. doi: 10.1007/s10958-017-3321-8.

19. Zhuravlev, V. G. 2017, “Induced bounded remainder sets“, *St. Petersburg Math. J.*, vol. 28, pp. 671–688. doi: https://doi.org/10.1090/spmj/1466.

20. Zhuravlev, V. G. 2013, “Moduli of toric tilings into bounded remainder sets and balanced words“, *St. Petersburg Math. J.*, vol. 24, pp. 601–629. doi: https://doi.org/10.1090/S1061-0022-2013-01256-8.

21. Zhuravlev, V. G. 2007, “One-dimensional Fibonacci tilings“, *Izvestiya: Mathematics*, vol. 71, no. 2, pp. 281–323. doi: https://doi.org/10.4213/im621.

22. Zhuravlev, V. G. 2006, “Rauzy tilings and bounded remainder sets on the torus“, *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 137, no. 2, pp. 4658–4672. doi: https://doi.org/10.1007/s10958-006-0262-z.

23. Zhuravlev, V. G. & Maleev, A. V. 2007, “Layer-by-layer growth of quasi-periodic Rauzy tiling“, *Crystallography Reports*, vol. 52, no. 2. pp. 180–186. doi: 10.1134/S1063774507020022.

24. Zhuravlev, V. G. & Maleev, A. V. 2007, "Complexity function and forcing in the 2D quasi-periodic Rauzy tiling", *Crystallography Reports*, vol. 52, no. 4, pp. 582–588. doi: 10.1134/S1063774507040037.

25. Krasilshchikov, V. V. & Shutov, A. V. 2011, "One-dimensional quasiperiodic tilings and their applications", *VF RUK, Vladimir*.

26. Kuznetsova, D. V. & Shutov, A. V. 2015, "Exchanged toric tilings, Rauzy substitution, and bounded remainder sets", *Mathematical Notes*, vol. 98, issue 5–6, pp. 932–948. doi: 10.1134/S0001434615110267.

27. Manuylov, N. N. 2005, "Self-similarity of some sequences of points on a circle", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 129, issue 3, pp. 3860–3867. doi: https://doi.org/10.1007/s10958-005-0322-9.

28. Manuylov, N. N. 2006, "Direct renormalizations on the one-dimensional torus", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 133, issue 6, pp. 1686–1692. doi: https://doi.org/10.1007/s10958-006-0080-3.

29. Shutov, A. V. 2012, "Shifting on the torus and the multidimensional Hecke-Kesten problem", *Scientific notes of Oryol State University*, vol. 6, no. 2, pp. 249–253.

30. Shutov, A. V. 2018, "Substitutions and bounded remainder sets", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 501–522. doi: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-501-522.

31. Shutov, A. V. 2006, "Derivatives of circle rotations and similarity of orbits", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 133, issue 6, pp. 1765–1771. doi: https://doi.org/10.1007/s10958-006-0088-8.

32. Shutov, A. V. 2006, "Number systems and bounded remainder sets", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 7, no. 3, pp. 110–128.

33. Shutov, A. V. & Maleev, A. V. 2017, "Strong parameterization and coordination encirclements of graph of Penrose tiling vertices", *Crystallography Reports*, vol. 62, no. 4, pp. 535–542. doi: 10.1134/S1063774517040216.

Получено 11.07.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 3.

УДК 512.57, 512.579 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-3-260-270

Свободные прямоугольные n-кратные полугруппы

А. В. Жучок

Жучок Анатолий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры и системного анализа, Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко (г. Старобельск, Украина).
e-mail: zhuchok.av@gmail.com

Аннотация

n-кратной полугруппой называется непустое множество G, снабженное n бинарными операциями $\boxed{1}, \boxed{2}, ..., \boxed{n}$, удовлетворяющими аксиомам $(x\boxed{r}y)\boxed{s}z = x\boxed{r}(y\boxed{s}z)$ для всех $x, y, z \in G$ и $r, s \in \{1, 2, ..., n\}$. Это понятие рассматривал Н. А. Корешков в контексте теории n-кратных алгебр ассоциативного типа. Доппельполугруппы являются 2-кратными полугруппами. n-кратные полугруппы имеют связи с интерассоциативными полугруппами, димоноидами, триоидами, доппельалгебрами, дуплексами, g-димоноидами и рестриктивными биполугруппами. Если операции n-кратной полугруппы совпадают, то она превращается в полугруппу. Таким образом, n-кратные полугруппы являются обобщением полугрупп.

Класс всех n-кратных полугрупп образует многообразие. Недавно были построены свободная n-кратная полугруппа, свободная коммутативная n-кратная полугруппа, свободная k-нильпотентная n-кратная полугруппа и свободное произведение произвольных n-кратных полугрупп. Класс всех прямоугольных n-кратных полугрупп, то есть n-кратных полугрупп с n прямоугольными полугруппами, образует подмногообразие многообразия n-кратных полугрупп.

В этой статье мы строим свободную прямоугольную n-кратную полугруппу и характеризуем наименьшую прямоугольную конгруэнцию на свободной n-кратной полугруппе.

Ключевые слова: n-кратная полугруппа, свободная прямоугольная n-кратная полугруппа, свободная n-кратная полугруппа, полугруппа, конгруэнция.

Библиография: 37 названий.

Для цитирования:
А. В. Жучок. Свободные прямоугольные n-кратные полугруппы // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 260–270.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 3.

UDC 512.57, 512.579 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-3-260-270

Free rectangular n-tuple semigroups

A. V. Zhuchok

Zhuchok Anatolii Vladimirovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, head of the Department of algebra and system analysis, Luhansk Taras Shevchenko National University (Starobilsk, Ukraine).
e-mail: zhuchok.av@gmail.com

Abstract

An n-tuple semigroup is a nonempty set G equipped with n binary operations $\boxed{1}, \boxed{2}, ..., \boxed{n}$, satisfying the axioms $(x\boxed{r}y)\boxed{s}z = x\boxed{r}(y\boxed{s}z)$ for all $x, y, z \in G$ and $r, s \in \{1, 2, ..., n\}$. This notion was considered by Koreshkov in the context of the theory of n-tuple algebras of associative type. Doppelsemigroups are 2-tuple semigroups. The n-tuple semigroups are related to interassociative semigroups, dimonoids, trioids, doppelalgebras, duplexes, g-dimonoids, and restrictive bisemigroups. If operations of an n-tuple semigroup coincide, the n-tuple semigroup becomes a semigroup. So, n-tuple semigroups are a generalization of semigroups.

The class of all n-tuple semigroups forms a variety. Recently, the constructions of the free n-tuple semigroup, of the free commutative n-tuple semigroup, of the free k-nilpotent n-tuple semigroup and of the free product of arbitrary n-tuple semigroups were given. The class of all rectangular n-tuple semigroups, that is, n-tuple semigroups with n rectangular semigroups, forms a subvariety of the variety of n-tuple semigroups.

In this paper, we construct the free rectangular n-tuple semigroup and characterize the least rectangular congruence on the free n-tuple semigroup.

Keywords: n-tuple semigroup, free rectangular n-tuple semigroup, free n-tuple semigroup, semigroup, congruence.

Bibliography: 37 titles.

For citation:
A. V. Zhuchok, 2019, "Free rectangular n-tuple semigroups" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 260–270.

1. Introduction

As a natural generalization of semigroups, n-tuple semigroups form an important variety of algebras arising from interassociative semigroups. Recall that an n-tuple semigroup [12] is a nonempty set G equipped with n binary operations $\boxed{1}, \boxed{2}, ..., \boxed{n}$, satisfying the axioms $(x\boxed{r}y)\boxed{s}z = x\boxed{r}(y\boxed{s}z)$ for all $x, y, z \in G$ and $r, s \in \{1, 2, ..., n\}$. The class of n-tuple semigroups causes the greatest interest from the point of view of applications in the theory of n-tuple algebras of associative type [12, 13, 14]. It turns out that $n > 1$ pairwise interassociative semigroups give rise to an n-tuple semigroup. Recall that two semigroups defined on the same set G are interassociative [6] provided that they satisfy the latter axioms for $r, s \in \{1, 2\}$. The notion of interassociativity for semigroups is of interest too (see, e.g., [3, 4, 6, 8, 9, 10]). It is known [22] that commutative dimonoids and commutative trioids provide subclasses in the variety of 2-tuple semigroups and 3-tuple semigroups, respectively. This fact allows us to study the classes of commutative dimonoids (trioids) via n-tuple semigroups. Recall that dimonoids and trioids are peculiar algebraic structures, with applications to dialgebra theory [2, 15] and trialgebra theory [1, 5, 16], respectively. For details, see, e.g., [23, 28, 34] and [20, 29, 36], respectively. It should be noted that doppelalgebras [18] are linear analogs of 2-tuple semigroups. The 2-tuple semigroups or, equivalently, doppelsemigroups were studied in [21, 24, 25, 27, 30, 31, 35]. The n-tuple semigroups also have relationships with duplexes [17], g-dimonoids [37], and restrictive bisemigroups [19]. These connections increase the motivation for studying n-tuple semigroups.

One of the fundamental problems in the variety theory of algebraic systems is the problem of constructing free algebras in a given variety. Some free systems in the variety of n-tuple semigroups were studied recently: the constructions of the free n-tuple semigroup, of the free commutative n-tuple semigroup and of the free k-nilpotent n-tuple semigroup were presented in [22] and [33], respectively. The free product of arbitrary n-tuple semigroups was constructed in [32].

In this paper, we consider the variety of rectangular n-tuple semigroups which are analogs of rectangular semigroups. The main result of the paper is the construction of the free rectangular n-tuple semigroup of an arbitrary rank (Theorem 1). As a consequence, the free rectangular n-tuple semigroup of rank 1 is presented (Corollary 2). We also characterize the least rectangular congruence on the free n-tuple semigroup (Theorem 2), count the cardinality of the free rectangular n-tuple semigroup for a finite case, establish that the automorphism group of the free rectangular n-tuple semigroup is isomorphic to the symmetric group and the semigroups of the free rectangular n-tuple semigroup ($n > 1$) are isomorphic.

The results obtained in the present paper extend some results in [35].

2. Preliminaries

A semigroup S is called rectangular [28] if $xyz = xz$ foll all $x, y, z \in S$. In [7], the lattice of subvarieties of the variety defined by the identity $xyz = xz$ was indicated. This variety is the union of the variety of left zero semigroups, the variety of right zero semigroups and the variety of zero semigroups, and the lattice of its subvarieties is an 8-element Boolean algebra. The variety of dimonoids with rectangular semigroups and the variety of rectangular doppelsemigroups were considered in [28] and [35], respectively.

For n-tuple semigroups, it is natural to introduce an analog of a rectangular semigroup. An n-tuple semigroup $(G, \boxed{1}, \boxed{2}, ..., \boxed{n})$ will be called rectangular if semigroups $(G, \boxed{1})$, $(G, \boxed{2})$,..., $(G, \boxed{n})$ are rectangular. The class of all rectangular n-tuple semigroups forms a subvariety of the variety of n-tuple semigroups. An n-tuple semigroup which is free in the variety of rectangular n-tuple semigroups will be called a free rectangular n-tuple semigroup. If ρ is a congruence on an n-tuple semigroup $G^{'}$ such that $G^{'}/\rho$ is a rectangular n-tuple semigroup, we say that ρ is a rectangular congruence. As usual, $\mathbb{N}$ denotes the set of all positive integers.

We will need the following two lemmas.

Lemma 1. *([22], Lemma 1) In an n-tuple semigroup $(G, \boxed{1}, \boxed{2}, ..., \boxed{n})$, for any $1 < m \in \mathbb{N}$, and any $x_i \in G$, $1 \leqslant i \leqslant m+1$, and any $*_j \in \{\boxed{1}, \boxed{2}, ..., \boxed{n}\}$, $1 \leqslant j \leqslant m$, any parenthesizing of*

$$x_1 *_1 x_2 *_2 \cdots *_m x_{m+1}$$

gives the same element from G.

Lemma 2. *In a rectangular n-tuple semigroup $(G, \boxed{1}, \boxed{2}, ..., \boxed{n})$, for any $a, b, x, y \in G$, and any $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ the following identity is satisfied:*

$$a \boxed{i} b \boxed{j} x = a \boxed{i} y \boxed{j} x.$$

Proof. The proof follows from Lemma 2.2 of [35] and Lemma 1. $\square$

Semigroups $(D, \dashv)$ and $(D, \vdash)$ are called $\mathcal{P}$-related [11] if $x \dashv y \dashv z = x \vdash y \vdash z$ for all $x, y, z \in D$.

Proposition 2.3 of [35] implies the following statement which establishes necessary and sufficient conditions under which the operations of a rectangular n-tuple semigroup $(n > 1)$ coincide.

Proposition 1. *Let $1 < n \in \mathbb{N}$. The operations of a rectangular n-tuple semigroup* $(G, \boxed{1}, \boxed{2}, ..., \boxed{n})$ *coincide if and only if* $(G, \boxed{1})$, $(G, \boxed{2})$,...,$(G, \boxed{n})$ *are pairwise $\mathcal{P}$-related semigroups.*

An n-tuple semigroup which is free in the variety of n-tuple semigroups is called a free n-tuple semigroup [22]. The construction of the free n-tuple semigroup was first given in [22]. We recall it.

Let X be an arbitrary nonempty set, and let w be an arbitrary word in the alphabet X. The length of w will be denoted by l_w. Fix $n \in \mathbb{N}$ and let $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ be an arbitrary set consisting of n elements. Let further $F[X]$ be the free semigroup on X, let $F^\theta[Y]$ be the free monoid on Y, and let $\theta \in F^\theta[Y]$ be the empty word. By definition, the length l_θ of θ is equal to 0. Define n binary operations $\boxed{1}, \boxed{2}, ..., \boxed{n}$ on

$$XY_n = \{(w, u) \in F[X] \times F^\theta[Y] \mid l_w - l_u = 1\}$$

by

$$(w_1, u_1)\boxed{i}(w_2, u_2) = (w_1 w_2, u_1 y_i u_2)$$

for all $(w_1, u_1), (w_2, u_2) \in XY_n$ and $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. The algebra $(XY_n, \boxed{1}, \boxed{2}, ..., \boxed{n})$ is denoted by $F_nTS(X)$. By Theorem 2 of [22], $F_nTS(X)$ is the free n-tuple semigroup.

If $f : S_1 \to S_2$ is a homomorphism of n-tuple semigroups, the kernel of f will be denoted by Δ_f.

3. Main results

In this section, we construct the free rectangular n-tuple semigroup of an arbitrary rank, consider separately singly generated free rectangular n-tuple semigroups and characterize the least rectangular congruence on the free n-tuple semigroup. We also count the cardinality of the free rectangular n-tuple semigroup for a finite case, establish that the automorphism group of the free rectangular n-tuple semigroup is isomorphic to the symmetric group and the semigroups of the free rectangular n-tuple semigroup $(n > 1)$ are isomorphic.

Let X be an arbitrary nonempty set, $n \in \mathbb{N}$ and Y as above. Define n binary operations $\boxed{1}, \boxed{2}, ..., \boxed{n}$ on $X \cup (Y \times X \times X \times Y)$ by

$$(a_1, b_1, c_1, d_1)\boxed{i}(a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1, b_1, c_2, d_2),$$

$$x\boxed{i}(a_1, b_1, c_1, d_1) = (y_i, x, c_1, d_1), \quad (a_1, b_1, c_1, d_1)\boxed{i}x = (a_1, b_1, x, y_i),$$

$$x\boxed{i}y = (y_i, x, y, y_i)$$

for all $(a_1, b_1, c_1, d_1), (a_2, b_2, c_2, d_2) \in Y \times X \times X \times Y$, $x, y \in X$ and $i \in \{1, 2, ..., n\}$. The obtained algebra will be denoted by $FR_nS(X)$.

The main result of the paper is the following theorem.

Theorem 1. *$FR_nS(X)$ is the free rectangular n-tuple semigroup.*

Proof. The proof that $FR_nS(X)$ is a rectangular n-tuple semigroup follows from the proof of Theorem 3.1 in [35]. Let us show that $FR_nS(X)$ is free rectangular.

Note that $FR_nS(X)$ is generated by X. Indeed,

$$(y_i, b_1, c_1, y_j) \in \{b_1\boxed{i}c_1, b_1\boxed{j}c_1, (b_1\boxed{i}c_1)\boxed{i}(b_1\boxed{j}c_1)\}$$

for $(y_i, b_1, c_1, y_j) \in Y \times X \times X \times Y$, and hence any element of $Y \times X \times X \times Y$ can be expressed by elements from X.

Let $(S, \boxed{1}', \boxed{2}', ..., \boxed{\text{n}}')$ be an arbitrary rectangular n-tuple semigroup, and let $\gamma : X \to S$ be an arbitrary map. Fix $\varepsilon \in S$ and define a map

$$\pi : FR_nS(X) \to (S, \boxed{1}', \boxed{2}', ..., \boxed{\text{n}}')$$

as follows:

$$(y_i, b_1, c_1, y_j)\pi = \begin{cases} b_1\gamma \boxed{i}' c_1\gamma, & \text{if} \quad i = j, \\ b_1\gamma \boxed{i}' \varepsilon \boxed{j}' c_1\gamma, & \text{if} \quad i \neq j, \end{cases}$$

$$x\pi = x\gamma$$

for $(y_i, b_1, c_1, y_j) \in Y \times X \times X \times Y$ and $x \in X$. By Lemmas 1 and 2, π is well-defined. In order to show that π is a homomorphism, we will use Lemmas 1, 2 and the identities of a rectangular n-tuple semigroup.

Let (y_i, b_1, c_1, y_j), $(y_s, b_2, c_2, y_k) \in Y \times X \times X \times Y$, $x, y \in X$ and $m \in \{1, 2, \dots, n\}$. We have

$$((y_i, b_1, c_1, y_j)\boxed{m}(y_s, b_2, c_2, y_k))\pi$$

$$= (y_i, b_1, c_2, y_k)\pi = \begin{cases} b_1\gamma \boxed{i}' c_2\gamma, & \text{if} \quad i = k, \\ b_1\gamma \boxed{i}' \varepsilon \boxed{k}' c_2\gamma, & \text{if} \quad i \neq k, \end{cases}$$

$$(y_s, b_2, c_2, y_k)\pi = \begin{cases} b_2\gamma \boxed{s}' c_2\gamma, & \text{if} \quad s = k, \\ b_2\gamma \boxed{s}' \varepsilon \boxed{k}' c_2\gamma, & \text{if} \quad s \neq k. \end{cases}$$

Let $i = k$. Then

$$((y_i, b_1, c_1, y_j)\boxed{m}(y_s, b_2, c_2, y_k))\pi = b_1\gamma \boxed{i}' c_2\gamma$$

$$= (y_i, b_1, c_1, y_j)\pi \boxed{m}' (y_s, b_2, c_2, y_k)\pi.$$

In the case $i \neq k$ we get

$$((y_i, b_1, c_1, y_j)\boxed{m}(y_s, b_2, c_2, y_k))\pi = b_1\gamma \boxed{i}' \varepsilon \boxed{k}' c_2\gamma$$

$$= (y_i, b_1, c_1, y_j)\pi \boxed{m}' (y_s, b_2, c_2, y_k)\pi.$$

Moreover,

$$(x\boxed{m}y)\pi = (y_m, x, y, y_m)\pi = x\gamma \boxed{m}' y\gamma = x\pi \boxed{m}' y\pi.$$

Further,

$$((y_i, b_1, c_1, y_j)\boxed{m}x)\pi = (y_i, b_1, x, y_m)\pi = \begin{cases} b_1\gamma \boxed{i}' x\gamma, & \text{if} \quad i = m, \\ b_1\gamma \boxed{i}' \varepsilon \boxed{m}' x\gamma, & \text{if} \quad i \neq m. \end{cases}$$

Assume that $i = m$. In this case we obtain

$$((y_i, b_1, c_1, y_j)\boxed{m}x)\pi = b_1\gamma \boxed{i}' x\gamma = (y_i, b_1, c_1, y_j)\pi \boxed{m}' x\pi.$$

For $i \neq m$,

$$((y_i, b_1, c_1, y_j)\boxed{m}x)\pi = b_1\gamma \boxed{i}' \varepsilon \boxed{m}' x\gamma = (y_i, b_1, c_1, y_j)\pi \boxed{m}' x\pi.$$

Consider the remaining case:

$$(x\boxed{m}(y_i,b_1,c_1,y_j))\pi=(y_m,x,c_1,y_j)\pi=\begin{cases} x\gamma\boxed{m}'c_1\gamma, & \text{if} \quad m=j,\\ x\gamma\boxed{m}'\varepsilon\boxed{j}'c_1\gamma, & \text{if} \quad m\neq j.\end{cases}$$

If $m=j$, then

$$(x\boxed{m}(y_i,b_1,c_1,y_j))\pi=x\gamma\boxed{m}'c_1\gamma=x\pi\boxed{m}'(y_i,b_1,c_1,y_j)\pi.$$

For $m\neq j$,

$$(x\boxed{m}(y_i,b_1,c_1,y_j))\pi=x\gamma\boxed{m}'\varepsilon\boxed{j}'c_1\gamma=x\pi\boxed{m}'(y_i,b_1,c_1,y_j)\pi.$$

Consequently, π is a homomorphism of n-tuple semigroups.

Since $x\pi=x\gamma$ for all $x\in X$ and X generates $FR_nS(X)$, the uniqueness of the homomorphism π is obvious. Thus, $FR_nS(X)$ is free in the variety of rectangular n-tuple semigroups. □

Note that, for $n=2$, Theorem 1 yields Theorem 3.1 in [35]. It is also worth noting that some facts that ψ is a homomorphism in the proof of Lemma 3.8 from [35] were left for independent reader's verification, unlike Theorem 1 for which we present the complete proof that π is a homomorphism.

Corollary 1. *The free rectangular n-tuple semigroup $FR_nS(X)$ generated by a finite set X is finite. Specifically, if $|X|=k$, then $|FR_nS(X)|=k(1+n^2k)$.*

Now we construct an n-tuple semigroup which is isomorphic to the free rectangular n-tuple semigroup of rank 1.

Let e be an arbitrary symbol. Define n binary operations $\boxed{1},\boxed{2},...,\boxed{\text{n}}$ on

$$(Y\times Y)\cup\{e\} \quad \text{by}$$

$$(a_1,d_1)\boxed{i}(a_2,d_2)=(a_1,d_2), \quad e\boxed{i}(a_1,d_1)=(y_i,d_1),$$
$$(a_1,d_1)\boxed{i}e=(a_1,y_i), \quad e\boxed{i}e=(y_i,y_i)$$

for all $(a_1,d_1),(a_2,d_2)\in Y\times Y$ and $i\in\{1,2,...,n\}$. The algebra

$$((Y\times Y)\cup\{e\},\boxed{1},\boxed{2},...,\boxed{\text{n}})$$

will be denoted by FR_nS_1. It is immediate to show that FR_nS_1 is an n-tuple semigroup.

Theorem 1 implies the following statement which describes singly generated free rectangular n-tuple semigroups.

Corollary 2. *If $|X|=1$, then $FR_nS_1\cong FR_nS(X)$.*

Proof. Let $X=\{e\}$. We define a map $\sigma: FR_nS_1\to FR_nS(X)$ by the rule

$$e\sigma=e \text{ and } (a_1,d_1)\sigma=(a_1,e,e,d_1)$$

for all $(a_1,d_1)\in Y\times Y$. An immediate verification shows that σ is an isomorphism. □

The following statement establishes a relationship between the semigroups of the free rectangular n-tuple semigroup $(n>1)$.

Corollary 3. *Let $1<n\in\mathbb{N}$ and $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$. The semigroups*

$$(X\cup(Y\times X\times X\times Y),\boxed{i}) \text{ and } (X\cup(Y\times X\times X\times Y),\boxed{j})$$

of the free rectangular n-tuple semigroup $FR_nS(X)$ are isomorphic.

Proof. The proof is similar to the proof of Corollary 3.11 in [35]. □

It is not difficult to see that the free rectangular n-tuple semigroup $FR_nS(X)$ is determined uniquely up to isomorphism by cardinality of the set X. Hence the automorphism group of $FR_nS(X)$ is isomorphic to the symmetric group on X.

At the end of this section, we characterize the least rectangular congruence on the free n-tuple semigroup.

For every nonempty word w over an alphabet X, denote the first (respectively, last) letter of w by $w^{(0)}$ (respectively, $w^{(1)}$).

Theorem 2. *Let $F_nTS(X)$ be the free n-tuple semigroup, $(w_1, u_1), (w_2, u_2) \in F_nTS(X)$, and let $FR_nS(X)$ be the free rectangular n-tuple semigroup. Define a relation $\widetilde{\mu}$ on $F_nTS(X)$ by*

$$(w_1, u_1)\widetilde{\mu}(w_2, u_2)$$

if and only if

$$u_1 \neq \theta,\ u_2 \neq \theta \quad \text{and} \quad (u_1^{(0)}, w_1^{(0)}, w_1^{(1)}, u_1^{(1)}) = (u_2^{(0)}, w_2^{(0)}, w_2^{(1)}, u_2^{(1)}),$$

$$\text{or} \quad (w_1, u_1) = (w_2, u_2).$$

Then $\widetilde{\mu}$ is the least rectangular congruence on $F_nTS(X)$.

Proof. Define a map $\mu : F_nTS(X) \to FR_nS(X)$ by

$$(w, u) \mapsto (w, u)\mu = \begin{cases} (u^{(0)}, w^{(0)}, w^{(1)}, u^{(1)}), & \text{if} \quad u \neq \theta, \\ w, & \text{if} \quad u = \theta. \end{cases}$$

Using Theorem 1, similarly to the proof of Theorem 4.1 in [35], the facts that μ is an epimorphism and the least rectangular congruence Δ_μ on $F_nTS(X)$ coincides with $\widetilde{\mu}$ can be proved. □

Note that, for $n = 2$, Theorem 2 implies Theorem 4.1 in [35].

4. Conclusions

In this paper, we consider n-tuple semigroups which are sets with n binary associative operations satisfying additional axioms. $n > 1$ pairwise interassociative semigroups give rise to an n-tuple semigroup. The main result of this paper is the construction of the free rectangular n-tuple semigroup. We also present the least rectangular congruence on the free n-tuple semigroup.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bagherzadeha F., Bremnera M., Madariagab S. Jordan trialgebras and post-Jordan algebras // J. Algebra. 2017. Vol. 486. P. 360–395.

2. Bokut L. A., Chen Y.-Q., Liu C.-H. Gröbner–Shirshov bases for dialgebras // Int. J. Algebra Comput. 2010. Vol. 20, № 3. P. 391–415.

3. Boyd S. J., Gould M. Interassociativity and isomorphism // Pure Math. Appl. 1999. Vol. 10, № 1. P. 23–30.

4. Boyd S. J., Gould M., Nelson A. W. Interassociativity of semigroups // Proceedings of the Tennessee Topology Conference, Nashville, TN, USA, 1996. Singapore: World Scientific. 1997. P. 33–51.

5. Casas J. M. Trialgebras and Leibniz 3-algebras // Bol. Soc. Mat. Mex. 2006. Vol. 12, № 2. P. 165–178.

6. Drouzy M. La structuration des ensembles de semigroupes d'ordre 2, 3 et 4 par la relation d'interassociativité // Manuscript. 1986.

7. Evans T. The lattice of semigroup varieties // Semigroup Forum. 1971. Vol. 2. P. 1–43.

8. Givens B. N., Linton K., Rosin A., Dishman L. Interassociates of the free commutative semigroup on n generators // Semigroup Forum. 2007. Vol. 74. P. 370–378.

9. Gould M., Linton K. A., Nelson A. W. Interassociates of monogenic semigroups // Semigroup Forum. 2004. Vol. 68. P. 186–201.

10. Givens B. N., Rosin A., Linton K. Interassociates of the bicyclic semigroup // Semigroup Forum. 2017. Vol. 94. P. 104–122. doi:10.1007/s00233-016-9794-9.

11. Hewitt E., Zuckerman H. S. Ternary operations and semigroups // Semigroups: Proceedings 1968 Wayne State U. Symposium on Semigroups, K. W. Folley, ed., Academic Press (New York). 1969. P. 55–83.

12. Koreshkov N. A. n-Tuple algebras of associative type // Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika). 2008. Vol. 52, № 12. P. 28–35.

13. Koreshkov N. A. Nilpotency of n-tuple Lie algebras and associative n-tuple algebras // Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika). 2010. Vol. 54, № 2. P. 28–32.

14. Koreshkov N. A. Associative n-tuple algebras // Math. Notes. 2014. Vol. 96, № 1. P. 38–49.

15. Loday J.-L. Dialgebras // In: Dialgebras and related operads: Lect. Notes Math. Berlin: Springer-Verlag. 2001. Vol. 1763. P. 7–66.

16. Loday J.-L., Ronco M. O. Trialgebras and families of polytopes // Contemp. Math. 2004. Vol. 346. P. 369–398.

17. Pirashvili T. Sets with two associative operations // Centr. Eur. J. Math. 2003. Vol. 2. P. 169–183.

18. Richter B. Dialgebren, Doppelalgebren und ihre Homologie // Diplomarbeit, Universitat Bonn. 1997. Available at http://www.math.uni-hamburg.de/home/richter/publications.html.

19. Schein B. M. Restrictive bisemigroups // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 1965. Vol. 1, № 44. P. 168–179 (in Russian).

20. Zhuchok A. V. Free commutative trioids // Semigroup Forum. 2019. Vol. 98, № 2. P. 355–368. doi: 10.1007/s00233-019-09995-y.

21. Zhuchok A. V. Free left n-dinilpotent doppelsemigroups // Commun. Algebra. 2017. Vol. 45, № 11. P. 4960–4970 (2017). doi: 10.1080/00927872.2017.1287274.

22. Zhuchok A. V. Free n-tuple semigroups // Math. Notes. 2018. Vol. 103, № 5. P. 737–744. doi: 10.1134/S0001434618050061.

23. Zhuchok A. V. Free products of dimonoids // Quasigroups Relat. Syst. 2013. Vol. 21, № 2. P. 273–278.

24. Zhuchok A. V. Free products of doppelsemigroups // Algebra Univers. 2017. Vol. 77, № 3. P. 361–374. doi: 10.1007/s00012-017-0431-6.

25. Zhuchok A. V. Relatively free doppelsemigroups // Monograph series Lectures in Pure and Applied Mathematics. Germany, Potsdam: Potsdam University Press. 2018. Vol. 5. 86 p.

26. Zhuchok A. V. Semilatties of subdimonoids // Asian-Eur. J. Math. 2011. Vol. 4, № 2. P. 359–371. doi: 10.1142/S1793557111000290.

27. Zhuchok A. V. Structure of free strong doppelsemigroups // Commun. Algebra. 2018. Vol. 46, № 8. P. 3262–3279. doi: 10.1080/00927872.2017.1407422.

28. Zhuchok A. V. Structure of relatively free dimonoids // Commun. Algebra. 2017. Vol. 45, № 4. P. 1639–1656. doi: 10.1080/00927872.2016.1222404.

29. Zhuchok A. V. Trioids // Asian-Eur. J. Math. 2015. Vol. 8, № 4, 1550089 (23 p.). doi: 10.1142/S1793557115500898.

30. Zhuchok A. V., Demko M. Free n-dinilpotent doppelsemigroups // Algebra Discrete Math. 2016. Vol. 22, № 2. P. 304–316.

31. Zhuchok A. V., Knauer K. Abelian doppelsemigroups // Algebra Discrete Math. 2018. Vol. 26, № 2. P. 290–304.

32. Zhuchok A. V., Koppitz J. Free products of n-tuple semigroups // Ukrainian Math. J. 2019. Vol. 70, № 11. P. 1710–1726. doi: 10.1007/s11253-019-01601-2.

33. Жучок А. В., Жучок Юл. В. Свободные k-нильпотентные n-кратные полугруппы // Фундамент. и прикл. матем. 2019. Принята к печати.

34. Zhuchok A. V., Zhuchok Yul. V. Free left n-dinilpotent dimonoids // Semigroup Forum. 2016. Vol. 93, № 1. P. 161–179. doi: 10.1007/s00233-015-9743-z.

35. Zhuchok A. V., Zhuchok Yul. V., Koppitz J. Free rectangular doppelsemigroups // Journal of Algebra and its Applications. doi: 10.1142/S0219498820502059.

36. Zhuchok A. V., Zhuchok Yul. V., Zhuchok Y. V. Certain congruences on free trioids // Commun. Algebra. 2019. Vol. 47, № 12. P. 5471–5481. doi: 10.1080/00927872.2019.1631322.

37. Zhuchok Yul. V. On one class of algebras // Algebra Discrete Math. 2014. Vol. 18, № 2. P. 306-320.

REFERENCES

1. Bagherzadeha F., Bremnera M., Madariagab S., 2017, "Jordan trialgebras and post-Jordan algebras", J. Algebra, vol. 486, pp. 360–395.

2. Bokut L. A., Chen Y.-Q., Liu C.-H., 2010, "Gröbner–Shirshov bases for dialgebras", Int. J. Algebra Comput., vol. 20, no. 3. pp. 391–415.

3. Boyd S. J., Gould M., 1999, "Interassociativity and isomorphism", Pure Math. Appl., vol. 10, no. 1. pp. 23–30.

4. Boyd S. J., Gould M., Nelson A. W., 1996, "Interassociativity of semigroups", Proceedings of the Tennessee Topology Conference, Nashville, TN, USA, Singapore: World Scientific. pp. 33–51.

5. Casas J. M., 2006, "Trialgebras and Leibniz 3-algebras" , Bol. Soc. Mat. Mex., vol. 12, no. 2. pp. 165–178.

6. Drouzy M., 1986, "La structuration des ensembles de semigroupes d'ordre 2, 3 et 4 par la relation d'interassociativité" , Manuscript.

7. Evans T., 1971, "The lattice of semigroup varieties" , Semigroup Forum, vol. 2. pp. 1–43.

8. Givens B. N., Linton K., Rosin A., Dishman L., 2007, "Interassociates of the free commutative semigroup on n generators" , Semigroup Forum, vol. 74. pp. 370–378.

9. Gould M., Linton K. A., Nelson A. W., 2004, "Interassociates of monogenic semigroups" , Semigroup Forum, vol. 68. pp. 186–201.

10. Givens B. N., Rosin A., Linton K., 2017, "Interassociates of the bicyclic semigroup" , Semigroup Forum, vol. 94. pp. 104–122. doi:10.1007/s00233-016-9794-9.

11. Hewitt E., Zuckerman H. S., 1968–1969, "Ternary operations and semigroups" , Semigroups: Proceedings 1968 Wayne State U. Symposium on Semigroups, K. W. Folley, ed., Academic Press (New York), pp. 55–83.

12. Koreshkov N. A., 2008, "n-Tuple algebras of associative type" , Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), vol. 52, no. 12. pp. 28–35.

13. Koreshkov N. A., 2010, "Nilpotency of n-tuple Lie algebras and associative n-tuple algebras" , Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), vol. 54, no. 2. pp. 28–32.

14. Koreshkov N. A., 2014, "Associative n-tuple algebras" , Math. Notes, vol. 96, no. 1. pp. 38–49.

15. Loday J.-L., 2001, "Dialgebras" , In: Dialgebras and related operads: Lect. Notes Math. Berlin: Springer-Verlag, vol. 1763. pp. 7–66.

16. Loday J.-L., Ronco M. O., 2004, "Trialgebras and families of polytopes" , Contemp. Math., vol. 346. pp. 369–398.

17. Pirashvili T., 2003, "Sets with two associative operations" , Centr. Eur. J. Math., vol. 2, pp. 169–183.

18. Richter B., 1997, "Dialgebren, Doppelalgebren und ihre Homologie" , Diplomarbeit, Universitat Bonn, Available at http://www.math.uni-hamburg.de/home/richter/publications.html.

19. Schein B. M., 1965, "Restrictive bisemigroups" , Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., vol. 1, no. 44. pp. 168–179 (in Russian).

20. Zhuchok A. V., 2019, "Free commutative trioids" , Semigroup Forum, vol. 98, no. 2. pp. 355–368, doi: 10.1007/s00233-019-09995-y.

21. Zhuchok A. V., 2017, "Free left n-dinilpotent doppelsemigroups" , Commun. Algebra, vol. 45, no. 11. pp. 4960–4970, doi: 10.1080/00927872.2017.1287274.

22. Zhuchok A. V., 2018, "Free n-tuple semigroups" , Math. Notes, vol. 103, no. 5. pp. 737–744, doi: 10.1134/S0001434618050061.

23. Zhuchok A. V., 2013, "Free products of dimonoids" , Quasigroups Relat. Syst., vol. 21, no. 2. pp. 273–278.

24. Zhuchok A. V., 2017, "Free products of doppelsemigroups", Algebra Univers., vol. 77, no. 3. pp. 361–374, doi: 10.1007/s00012-017-0431-6.

25. Zhuchok A. V., 2018, "Relatively free doppelsemigroups", Monograph series Lectures in Pure and Applied Mathematics, Germany, Potsdam: Potsdam University Press, vol. 5, 86 p.

26. Zhuchok A. V., 2011, "Semilatties of subdimonoids", Asian-Eur. J. Math., vol. 4, no. 2. pp. 359–371, doi: 10.1142/S1793557111000290.

27. Zhuchok A. V., 2018, "Structure of free strong doppelsemigroups", Commun. Algebra, vol. 46, no. 8. pp. 3262–3279, doi: 10.1080/00927872.2017.1407422.

28. Zhuchok A. V., 2017, "Structure of relatively free dimonoids", Commun. Algebra, vol. 45, no. 4. pp. 1639–1656, doi: 10.1080/00927872.2016.1222404.

29. Zhuchok A. V., 2015, "Trioids", Asian-Eur. J. Math., vol. 8, no. 4, 1550089 (23 p.), doi: 10.1142/S1793557115500898.

30. Zhuchok A. V., Demko M., 2016, "Free n-dinilpotent doppelsemigroups", Algebra Discrete Math., vol. 22, no. 2, pp. 304–316.

31. Zhuchok A. V., Knauer K., 2018, "Abelian doppelsemigroups", Algebra Discrete Math., vol. 26, no. 2, pp. 290–304.

32. Zhuchok A. V., Koppitz J., 2019, "Free products of n-tuple semigroups", Ukrainian Math. J., vol. 70, no. 11, pp. 1710–1726, doi: 10.1007/s11253-019-01601-2.

33. Zhuchok A. V., Zhuchok Yul. V., 2019, "Free k-nilpotent n-tuple semigroups", Fundamental and Applied Mathematics (in Russian). Accepted.

34. Zhuchok A. V., Zhuchok Yul. V., 2016, "Free left n-dinilpotent dimonoids", Semigroup Forum, vol. 93, no. 1. pp. 161–179, doi: 10.1007/s00233-015-9743-z.

35. Zhuchok A. V., Zhuchok Yul. V., Koppitz J., "Free rectangular doppelsemigroups", Journal of Algebra and its Applications, doi: 10.1142/S0219498820502059.

36. Zhuchok A. V., Zhuchok Yul. V., Zhuchok Y. V., 2019, "Certain congruences on free trioids", Commun. Algebra, vol. 47, no. 12. pp. 5471–5481, doi: 10.1080/00927872.2019.1631322.

37. Zhuchok Yul. V., 2014, "On one class of algebras", Algebra Discrete Math., vol. 18, no. 2, pp. 306–320.

Получено 8.10.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 3.

УДК 511.361 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-271-280

О линейной независимости значений некоторых гипергеометрических функций над мнимым квадратичным полем

П. Л. Иванков

Иванков Павел Леонидович — доктор физико-математических наук, Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (г. Москва).
e-mail: ivankovpl@mail.ru

Аннотация

Основная трудность, с которой приходится иметь дело при исследовании арифметической природы значений обобщенных гипергеометрических функций с иррациональными параметрами, состоит в том, что общий наименьший знаменатель нескольких первых коэффициентов соответствующих степенных рядов растет слишком быстро с увеличением числа этих коэффициентов. Последнее обстоятельство делает невозможным использование известного в теории трансцендентных чисел метода Зигеля для проведения упомянутого исследования. Применение названного метода предполагает использование принципа Дирихле для построения функциональной линейной приближающей формы. Это построение является первым этапом длинного и сложного рассуждения, приводящего в конечном итоге к получению требуемого арифметического результата. Попытка применить принцип Дирихле в случае функций с иррациональными параметрами наталкивается на непреодолимые трудности из-за упомянутого выше слишком быстрого роста общего наименьшего знаменателя коэффициентов соответствующих рядов Тейлора. Вследствие этого в случае функций с иррациональными параметрами обычно применяют эффективное построение линейной приближающей формы (или совокупности таких форм при использовании совместных приближений). Коэффициенты построенной формы являются многочленами с алгебраическими коэффициентами. Для общего наименьшего знаменателя этих коэффициентов требуется затем получить приемлемую оценку сверху его абсолютной величины. Известные оценки такого рода нуждаются в некоторых случаях в уточнении. Это уточнение осуществляется с применением теории делимости в квадратичных полях; дополнительно используются сведения о распределении простых чисел в арифметической прогрессии.

В настоящей работе рассматривается один из вариантов эффективного построения совместных приближений для гипергеометрической функции общего вида и ее производных. Общий наименьший знаменатель коэффициентов многочленов, входящих в эти приближения, оценивается затем с помощью уточненного варианта соответствующей леммы. Все это позволяет получить новый результат об арифметической природе значений указанной функции в малой по абсолютной величине ненулевой точке мнимого квадратичного поля.

Ключевые слова: гипергеометрическая функция, эффективная конструкция, линейная независимость, мнимое квадратичное поле.

Библиография: 15 названий

Для цитирования:

П. Л. Иванков. О линейной независимости значений некоторых гипергеометрических функций над мнимым квадратичным полем // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 271–280.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 3.

UDC 511.361 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-271-280

On linear independence of the values of some hypergeometric functions over the imaginary quadratic field

P. L. Ivankov

Ivankov Pavel Leonidovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Bauman Moscow state technical University (Moscow).
e-mail: ivankovpl@mail.ru

Abstract

The main difficulty one has to deal with while investigating arithmetic nature of the values of the generalized hypergeometric functions with irrational parameters consists in the fact that the least common denominator of several first coefficients of the corresponding power series increases too fast with the growth of their number. The last circumstance makes it impossible to apply known in the theory of transcendental numbers Siegel's method for carrying out the above mentioned investigation. The application of this method implies usage of pigeon-hole principle for the construction of a functional linear approximating form. This construction is the first step in a long and complicated reasoning that leads ultimately to the required arithmetic result. The attempts to apply pigeon-hole principle in case of functions with irrational parameters encounters insurmountable obstacles because of the aforementioned fast growth of the least common denominator of the coefficients of the corresponding Taylor series. Owing to this difficulty one usually applies effective construction of the linear approximating form (or a system of such forms in case of simultaneous approximations) for the functions with irrational parameters. The effectively constructed form contains polynomials with algebraic coefficients and it is necessary for further reasoning to obtain a satisfactory upper estimate of the modulus of the least common denominator of these coefficients. The known estimates of this type should be in some cases improved. This improvement is carried out by means of the theory of divisibility in quadratic fields. Some facts concerning the distribution of the prime numbers in arithmetic progression are also made use of.

In the present paper we consider one of the versions of effective construction of the simultaneous approximations for the hypergeometric function of the general type and its derivatives. The least common denominator of the coefficients of the polynomials included in these approximations is estimated subsequently by means of the improved variant of the corresponding lemma. All this makes it possible to obtain a new result concerning the arithmetic values of the aforesaid function at a nonzero point of small modulus from some imaginary quadratic field.

Keywords: hypergeometric function, effective construction, linear independence, imaginary quadratic field.

Bibliography: 15 titles

For citation:

P. L. Ivankov, 2019, "On linear independence of the values of some hypergeometric functions over the imaginary quadratic field", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 271–280.

1. Введение

Пусть
$$\psi_j(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}\nu^{j-1}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{a(x)}{b(x)},\ j=1,\ldots,m, \tag{1}$$
где $a(x)=(x+\alpha_1)\ldots(x+\alpha_r)$, $b(x)=(x+\beta_1)\ldots(x+\beta_m)$, $1\leqslant r<m$, числа α_i,β_j отличны от $-1,-2,\ldots$; $\beta_1=0$. Известно, что для линейной независимости функций (1) над полем рациональных дробей $\mathbb{C}(z)$ достаточно потребовать, чтобы выполнялись условия
$$\alpha_i-\beta_j\notin\mathbb{Z},\ i=1,\ldots,r,\ j=1,\ldots,m. \tag{2}$$
Доказательство этого утверждения, а также необходимые и достаточные условия упомянутой линейной независимости см. в [1] и [2]. Мы будем изучать вопрос о линейной независимости значений функций (1) в отличной от нуля точке некоторого мнимого квадратичного поля.

2. Результаты

В нижеследующей теореме предполагается, что для функции (1) выполнены условия, о которых речь в предыдущем пункте; в частности, выполняется условие (2). Через $\mathbb{I}$ обозначим некоторое мнимое квадратичное поле.

Теорема 1. *Пусть m и r таковы, что $m_1=m-2r+1>0$, и пусть $\alpha_i\in\mathbb{Q}$, $i=1,\ldots,r-1$, $\beta_1=0$, $\beta_2,\ldots,\beta_{m-m_1}\in\mathbb{Q}$, а числа α_r и $\beta_{m-m_1+1},\ldots,\beta_m$ принадлежат множеству $\mathbb{I}\setminus\mathbb{Q}$. Пусть, далее, ω и q — ненулевые числа из кольца $\mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$. Тогда, если $|q|>q_0$, то числа*
$$\psi_1\left(\frac{\omega}{q}\right),\ldots,\psi_m\left(\frac{\omega}{q}\right) \tag{3}$$
линейно независимы над $\mathbb{I}$; при этом q_0 зависит от $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$, $\beta_1,\ldots,\beta_m$, ω и от поля $\mathbb{I}$.

Если при сохранении прочих условий этой теоремы увеличить количество рациональных корней многочлена $b(x)$, т.е. считать, например, что $m_1=m-2r$, то мы получим утверждение, являющееся следствием [3, с. 192, теорема 2], причем в этом случае значения функций (1) будут линейно независимыми над полем $\mathbb{I}$ в любой отличной от нуля точке этого поля. В упомянутой теореме из [3] не требуется, чтобы корни многочлена $b(x)$ лежали в поле $\mathbb{I}$; там предполагается лишь, что $b(x)\in\mathbb{I}[x]$. Для того, чтобы таким же образом усилить сформулированную выше теорему 1, пришлось бы предварительно уточнить оценку общего наименьшего знаменателя дробей специального вида, которая используется в работах [4]-[7], подобно тому, как это сделано в частном случае в [8, с. 68, лемма 4]. Конкретно, в правой части [4, неравенство (37), с. 1227] следует доказать возможность замены $n^{\epsilon n}$ на величину порядка $e^{O(n)}$. Метод доказательства теоремы 1 позволяет получить также и оценку снизу модуля соответствующей линейной формы; эта оценка здесь не приводится, т.к. она весьма далека от ожидаемого в рассматриваемой ситуации окончательного результата.

3. Эффективная конструкция

Лемма 1. *Пусть s — натуральное число, и пусть $S(\tau)$ — многочлен, степень которого меньше s. Тогда*
$$\sum_{\tau=0}^{s}\frac{(-1)^{\tau}}{\tau!(s-\tau)!}\,S(\tau)=0.$$

Доказательство. Пусть $\delta = z\frac{d}{dz}$. Тогда

$$\delta^k(z-1)^s|_{z=1} = \sum_{\tau=0}^{s} \binom{s}{\tau} (-1)^{s-\tau}\tau^k. \tag{4}$$

Левая часть здесь равна нулю при $k < s$, откуда и следует требуемое. Лемма доказана.

Пусть n — натуральное число, $N = [mn/(m-1)]$, и пусть $b_1(x) = b(x)/x$. Рассмотрим многочлены

$$P_j(z) = \sum_{s=0}^{n} p_{js}z^s,\ j = 1,\dots,m,$$

где

$$p_{js} = \sum_{\tau=0}^{s} \frac{(-1)^\tau}{\tau!(s-\tau)!}(s-\tau)^{j-1}\frac{\prod_{x=s+1}^{N-1} b_1(x-\tau)}{\prod_{x=s+1}^{n} a(x-\tau)}\,. \tag{5}$$

Нетрудно проверить, что ни один из этих многочленов не равен нулю тождественно.

Лемма 2. *Пусть функция $R_{ij}(z)$, $1 \leqslant i,j \leqslant m$, определяется равенством*

$$R_{ij}(z) = P_j(z)\psi_i(z) - P_i(z)\psi_j(z)\,. \tag{6}$$

Тогда если $i \neq j$, то $R_{ij}(z)$ имеет при $z = 0$ порядок нуля не меньше, чем N.

Доказательство. Пусть

$$P(z) = \sum_{s=0}^{N-1} p_s z^s.$$

— многочлен с неопределенными коэффициентами, и пусть

$$P(z)\psi_j(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \tilde{p}_{js}z^s,$$

$$\tilde{P}_j(z) = \sum_{s=0}^{N-1} \tilde{p}_{js}z^s,\ j = 1,\dots,m. \tag{7}$$

Очевидно, при таких многочленах $\tilde{P}_j(z)$ функции

$$\tilde{R}_{ij}(z) = \tilde{P}_j(z)\psi_i(z) - \tilde{P}_i(z)\psi_j(z)\,.$$

будут иметь при $z = 0$ требуемый порядок нуля. Подберем коэффициенты многочлена $P(z)$ так, чтобы степени многочленов (7) не превосходили n. Это условие эквивалентно выполнению равенств

$$\sum_{\tau=0}^{s} p_\tau(s-\tau)^{j-1}\prod_{x=1}^{s-\tau}\frac{a(x)}{b(x)} = 0,\ j = 1,\dots,m,\ s = n+1,\dots,N-1. \tag{8}$$

Положим

$$p_\tau = \frac{(-1)^\tau}{\tau!}\prod_{x=1}^{N-\tau-1} b_1(x)\frac{\prod_{x=0}^{\tau-1} a(-x)}{\prod_{x=1}^{n} a(x-\tau)}\,.$$

Заметим, что фигурирующие в правой части последнего равенства числа $a(-x)$ и $a(x-\tau)$ отличны от нуля, т.к. условие (2) выполняется, в частности, и при $j = 1$, а по условию теоремы $\beta_1 = 0$. При таком выборе коэффициентов левая часть (8) перепишется в виде

$$\sum_{\tau=0}^{s} \frac{(-1)^\tau}{\tau!(s-\tau)!}S(\tau), \tag{9}$$

где

$$S(\tau)=(s-\tau)^{j-1}\prod_{x=s+1}^{N-1}b_1(x-\tau)\prod_{x=n+1}^{s}a(x-\tau).$$

Поскольку степень многочлена $S(\tau)$ меньше s, то из леммы 1 следует, что сумма (9) равна нулю. Мы видим, что степени многочленов $\tilde{P}_j(z)$, $j=1,\dots,m$, не превосходят n. Непосредственно проверяется, что при $s=0,1,\dots,n$, и $j=1,\dots,m$, выполняется равенство $p_{js}=\tilde{p}_{js}$. Отсюда ясно, что порядок нуля функций (6) не меньше N, и лемма доказана.

В дальнейшем через $\gamma_1,\gamma_2,\dots$ будем обозначать положительные постоянные, которые не зависят от n, но могут зависеть от корней многочленов $a(x)$ и $b(x)$, от упоминаемого в условии теоремы числа ω и от поля $\mathbb{I}$ (а также, возможно, и от других параметров, возникающих по ходу дела).

Лемма 3. *Имеют место оценки*

$$|p_{js}|\leqslant\left(\frac{n!}{s!}\right)^{m-r}e^{\gamma_1 n},\ |P_j(\omega/q)|\leqslant(n!)^{m-r}e^{\gamma_1 n},\ |R_{ij}(\omega/q)|\leqslant(n!)^{-\frac{m-r}{m-1}}|q|^{-N}e^{\gamma_1 n}. \tag{10}$$

Доказательство леммы носит чисто технический характер. Все оценки без труда выводятся из (5) и (6); при выводе последней оценки учитывается порядок нуля функций (6). Отметим также, что при выводе оценок (10) может оказаться полезной формула Стирлинга для Γ-функции Эйлера (см., например, [9, с. 323, формула $(4.3:8'')$]).

4. Совокупность приближений

Без труда проверяется, что функция $\psi_1(z)$ удовлетворяет уравнению

$$b(\delta)y=a(\delta)zy,\ \delta=z\frac{d}{dz}. \tag{11}$$

Из (11) следует, что совокупность функций (1) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений $Y'=AY$, где $Y=(y_1,\dots,y_m)^{\mathsf T}$, а квадратная матрица m-го порядка A составлена из рациональных функций, общий наименьший знаменатель которых обозначим через $Q=Q(z)$. Пусть

$$P_j^{(1)}=P_j^{(1)}(z)=P_j(z),\ j=1,\dots,m,\ R_1=R_1(z)=\left(R_{ij}^{(1)}\right)_{i,j=1,\dots,m},$$

где

$$R_{ij}^{(1)}=R_{ij}^{(1)}(z)=R_{ij}(z).$$

Тогда

$$R_1=\Psi P_1-(\Psi P_1)^{\mathsf T},$$

$$\Psi=\Psi(z)=(\psi_1(z),\dots,\psi_m(z))^{\mathsf T}=(\psi_1,\dots,\psi_m)^{\mathsf T},\ P_1=(P_1^{(1)},\dots,P_m^{(1)}).$$

Определим матрицы

$$R_k=\left(R_{ij}^{(k)}\right)_{i,j=1,\dots,m},\ k=1,2,\dots,$$

по индукции равенством

$$R_k=Q(R_{k-1}'-AR_{k-1}+(AR_{k-1})^{\mathsf T}). \tag{12}$$

Непосредственно проверяется, что при этом выполняются равенства

$$R_k=\Psi P_k-(\Psi P_k)^{\mathsf T},\ P_k=(P_1^{(k)},\dots,P_m^{(k)})=Q(P_{k-1}'-P_{k-1}A^{\mathsf T}),\ k=2,3,\dots. \tag{13}$$

Лемма 4. *При всех достаточно больших n определитель*

$$\Delta(z) = \left| P_j^{(k)}(z) \right|_{k,j=1,\dots,m} \tag{14}$$

отличен от тождественного нуля.

Доказательство см. [10, с. 395, лемма 4]. При доказательстве важную роль играет линейная независимость функций (1) над $\mathbb{C}(z)$.

Дальнейшие рассуждения хорошо известны, см. [11]; они направлены на то, чтобы получить отличный от нуля числовой определитель типа (14), в котором z заменено на ω/q. С помощью этих рассуждений мы получим определитель

$$\left| P_j^{(k_i)}(\omega/q) \right|_{i,j=1,\dots,m}, \tag{15}$$

который отличен от нуля, и при этом индексы $k_1, \dots, k_m$ ограничены сверху константой γ_2.

5. Оценки знаменателей

Лемма 5. *Пусть $\lambda \in \mathbb{I}$, а натуральное число Λ таково, что $\Lambda\lambda \in \mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$, и пусть k_1 и k_2, $k_1 \leqslant k_2$, — произвольные целые рациональные числа. Тогда*

1) если $\lambda \in \mathbb{Q}$, то

$$\Lambda^{k_2-k_1+1} \prod_{x=k_1}^{k_2} (\lambda + x) \tag{16}$$

делится на $\Omega_1 = \prod_{p \nmid \Lambda} p^{\left[\frac{k_2-k_1+1}{p}\right]}$,

2) а если $\lambda \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{Q}$, то число (16) делится на $\Omega_2 = \prod^*_{p \nmid \Lambda D} p^{\left[\frac{k_2-k_1+1}{p}\right]}$, где D — дискриминант поля $\mathbb{I}$, а Π^* означает, что произведение распространено лишь на те простые числа (удовлетворяющие указанным условиям), которые в поле $\mathbb{I}$ разлагаются в произведение двух (различных) простых идеалов;

3) имеют место оценки

$$\Omega_i \geqslant ((k_2 - k_1 + 1)!)^{1/i} e^{\gamma_3(k_1-k_2)},\ i = 1, 2. \tag{17}$$

Доказательство первого утверждения и оценки (17) при $i = 1$ содержится в доказательстве [12, с. 186, лемма 2]. Доказательство второго утверждения и оценки (17) при $i = 2$ содержится в [8, с. 68, лемма 4].

Лемма 6. *Пусть числа λ_1 и λ_2 рациональны, и пусть $\lambda_2 \notin \{-1, \dots, -n\}$. Тогда общий наименьший знаменатель множества чисел*

$$\prod_{x=k_1}^{k_2} \frac{\lambda_1 + x}{\lambda_2 + x},\ 1 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant n. \tag{18}$$

оценивается сверху величиной $e^{\gamma_4 n}$.

Доказательство. В качестве общего знаменателя чисел (18) можно взять число

$$\Omega = \Lambda^n \prod_{x=1}^{n} (\lambda_2 + x) \prod_{p \nmid \Lambda,\, p \leqslant n} p^{3-\left[\frac{n}{p}\right]},$$

где натуральное число Λ таково, что числа $\Lambda\lambda_1$ и $\Lambda\lambda_2$ лежат в $\mathbb{Z}$. В самом деле, после умножения (18) на Ω мы получим

$$\frac{\Lambda^{n+k_1-k_2-1}\prod_{x=1}^{k_1-1}(\lambda_2+x)\prod_{x=k_2+1}^{n}(\lambda_2+x)}{\prod_{p\nmid\Lambda}p^{\left[\frac{k_1-1}{p}\right]}\prod_{p\nmid\Lambda}p^{\left[\frac{n-k_2}{p}\right]}}\cdot\frac{\Lambda^{k_2-k_1+1}\prod_{x=k_1}^{k_2}(\lambda_1+x)}{\prod_{p\nmid\Lambda}p^{\left[\frac{k_2-k_1+1}{p}\right]}}\cdot\prod_{p\nmid\Lambda\, p\leqslant n}p^3\times$$
$$\times\prod_{p\nmid\Lambda}p^{\left[\frac{k_1-1}{p}\right]+\left[\frac{n-k_2}{p}\right]+\left[\frac{k_2-k_1+1}{p}\right]-\left[\frac{n}{p}\right]},$$

т.е., как легко видеть, целое число. Используя (17) при $i=1$, легко получить и оценку сверху для Ω. Лемма доказана.

Заметим, что эту лемму можно доказать, следуя рассуждениям из [12, с. 186, доказательство леммы 2].

6. Доказательство теоремы

Рассмотрим теорему 1. В условиях этой теоремы количество рациональных корней многочлена $b_1(x)$ равно $m-m_1-1=2r-2\geqslant r-1$. Выделим в каждом слагаемом в правой части равенства (5) дробь

$$\frac{\prod_{x=s+1}^{n}b_1(x-\tau)}{\prod_{x=s+1}^{n}\prod_{i=1}^{r-1}(\alpha_i+x-\tau)},\ 0\leqslant\tau\leqslant s,\ 0\leqslant s\leqslant n. \tag{19}$$

Из леммы 6 следует, что общий наименьший знаменатель всех таких дробей оценивается сверху величиной $e^{\gamma_5 n}$. Далее, в правой части равенства (5) можно выделить множитель

$$\frac{1}{\tau!(s-\tau)!\prod_{x=s+1}^{n}(\alpha_r+x-\tau)},\ 0\leqslant\tau\leqslant s\leqslant n. \tag{20}$$

Через Λ обозначим такое натуральное число, что все корни многочленов $a(x)$ и $b(x)$ становятся целыми после умножения на это число; такое соглашение вполне соответствует использованию символа Λ в леммах 5 и 6.

Заметим, что если умножить любое из чисел (20) на

$$\Lambda^n n!\prod_{x=1}^{n}(\alpha_r+x)\prod_{p\nmid\Lambda D,\,p\leqslant n}^{*}p^{3-\left[\frac{n}{p}\right]},$$

то мы получим после очевидных преобразований такую дробь

$$\frac{n!}{\tau!(s-\tau)!\prod_{p\nmid\Lambda D}^{*}p^{\left[\frac{n-s}{p}\right]}}\cdot\frac{\Lambda^{n-\tau}\prod_{x=1}^{s-\tau}(\alpha_1+x)}{\prod_{p\nmid\Lambda D}^{*}p^{\left[\frac{s-\tau}{p}\right]}}\times$$
$$\times\frac{\Lambda^{\tau}\prod_{x=n-\tau+1}^{n}(\alpha_1+x)}{\prod_{p\nmid\Lambda D}^{*}p^{\left[\frac{\tau}{p}\right]}}\cdot\frac{\prod_{p\nmid\Lambda D,\,p\leqslant n}^{*}p^{\left[\frac{n-s}{p}\right]+\left[\frac{s-\tau}{p}\right]+\left[\frac{\tau}{p}\right]+3}}{\prod_{p\nmid\Lambda D}^{*}p^{\left[\frac{n}{p}\right]}}. \tag{21}$$

В силу леммы 5 последнее выражение является целым числом в поле $\mathbb{I}$. Общим наименьшим знаменателем некоторого множества чисел из мнимого квадратичного поля $\mathbb{I}$ называется наименьшее по модулю ненулевое целое число из этого поля, после умножения на которое все числа данного множества становятся целыми в этом поле. Суммируя вышесказанное, получаем с помощью (17) при $i=2$, формулы Стирлинга, а также известного соотношения $\prod_{p\leqslant n}p=e^{O(n)}$, см., например [13, с. 24, теорема 3.1], что общий наименьший знаменатель дробей (20) оценивается сверху величиной $(n!)^{3/2}e^{\gamma_6 n}$. В состав дроби (5) входит также множитель

$$\prod_{x=n+1}^{N-1} b_1(x-\tau). \tag{22}$$

Используя лемму 5, получим, что множитель (22) после домножения на Λ^n делится на натуральное число, которое оценивается снизу величиной

$$(n!)^{\frac{2m-m_1-2}{2(m-1)}}e^{-\gamma_7 n}.$$

Теперь мы можем доказать теорему 1. Заметим сначала, что не все числа $\psi_1(\xi), \ldots, \psi_m(\xi)$, где через ξ обозначено фигурирующее в формулировке теоремы 1 число ω/q, равны нулю — это следует из того, что функция $\psi(z)$ удовлетворяет уравнению (11). Будем считать для определенности, что $\psi_1(\xi) \neq 0$. Поскольку определитель (15) отличен от нуля, то при любом нетривиальном наборе целых в поле $\mathbb{I}$ чисел $h_1, \ldots, h_m$ найдется строка этого определителя, для которой

$$\sum_{j=1}^{m} h_j P_j^{(k)}(\xi) \neq 0, \tag{23}$$

где $1 \leqslant k \leqslant \gamma_2$. Оценим модуль выражения (23) снизу, считая, что $k=1$. Суммируя изложенные выше соображения, касающиеся знаменателей дробей (19) и (20) и делителя произведения (23), получим такую оценку (с учетом того, что $\xi = \omega/q$)

$$\left|\sum_{j=1}^{m} h_j P_j^{(1)}(\xi)\right| \geqslant |q|^{-n} e^{-\gamma_8 n}(n!)^{-\frac{m+m_1-1}{2(m-1)}}.$$

Если $1 < k \leqslant \gamma_3$, то, используя рекуррентные соотношения (13), мы можем написать такую оценку

$$\left|\sum_{j=1}^{m} h_j P_j^{(k)}(\xi)\right| \geqslant |q|^{-n-\gamma_9} e^{-\gamma_9 n}(n!)^{-\frac{m+m_1-1}{2(m-1)}}, \tag{24}$$

причем последние две оценки справедливы, если сумма в левой части отлична от нуля. Для получения оценки сверху перепишем выражение из левой части (23) следующим образом

$$\sum_{j=1}^{m} h_j P_j^{(k)}(\xi) =$$

$$= \frac{1}{\psi_1(\xi)}\left(P_1^{(k)}(\xi)\sum_{j=1}^{m} h_j\psi_j(\xi) + \sum_{j=2}^{m} h_j(P_j^{(k)}(\xi)\psi_1(\xi) - P_1^{(k)}(\xi)\psi_j(\xi))\right). \tag{25}$$

Если здесь предположить, что

$$\sum_{j=1}^{m} h_j\psi_j(\xi) = 0,$$

то, с учетом (10) и (12)получим такое неравенство

$$\left|\sum_{j=1}^{m} h_j\psi_j(\xi)\right| \leqslant H(n!)^{-\frac{m-r}{m-1}}|q|^{-n-\frac{n}{m-1}+\gamma_9}e^{\gamma_{10} n}, \tag{26}$$

где $H = \max(|h_1|, \ldots, |h_m|)$. Вспоминая, что $m_1 = m - 2r + 1$, мы видим, что оценки (24) и (26) противоречивы при достаточно большом $|q|$, что и доказывает теорему 1.

7. Заключение

Обычно арифметическую природу значений гипергеометрических функций рассматривают в малых точках, когда в правой части (1) степени многочленов $a(x)$ и $b(x)$ равны. Однако, в ряде случаев можно получить новые результаты, ограничиваясь лишь малыми точками, и для целых гипергеометрических функций. При этом в случае иррациональных параметров приходится иметь дело с техническими трудностями, вызванными недостаточной точностью оценок общего наименьшего знаменателя некоторых дробей специального вида, см. [4, лемма 6]. Примеры таких результатов см. в работах [14] и [15].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Galochkin A. I. On effective bounds for certain linear forms // New Advances in Transcendence theory. Cambridge, New Rochell, Melbourne, Sydney. 1988. P. 207–215.

2. Galochkin A. I. Linear independence and transcendence of values of hypergeometric functions // Moscow journal of combinatorics and number theory. 2011. Vol. 1, iss. 2. P. 27–32.

3. Иванков П. Л. О линейной независимости значений некоторых функций // Фундаментальная и прикладная математика. Т. 1, № 1. 1995. С. 191–206.

4. Галочкин А. И. Об арифметических свойствах некоторых целых гипергеометрических функций // Сибирский математический журнал. Т. XVII, № 6. 1976. С. 1220–1235.

5. Галочкин А. И. О диофантовых приближениях значений некоторых целых функций с алгебраическими коэффициентами. I // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. 1978. № 6. С. 25–32.

6. Галочкин А. И. О диофантовых приближениях значений некоторых целых функций с алгебраическими коэффициентами. II // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. 1979. № 1. С. 26–30.

7. Галочкин А. И. О некотором аналоге метода Зигеля // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. 1986. № 2. С. 30–34.

8. Иванков П. Л. О значениях гипергеометрических функций с различными иррациональными параметрами // Фундаментальная и прикладная математика. Т. 11, № 6. 2005. С. 65–72.

9. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций, том 2. М.: Наука, 1968.

10. Иванков П. Л. О совместных приближениях, учитывающих специфику однородного случая // Математические заметки. Т. 71, вып. 3. 2002. С. 390–397.

11. Chudnovsky D. V., Chudnovsky G. V. Applications of Pade approximations to diophantine inequalities in values of G-functions // Lecture Notes in Math. 1985. V. 1135. P. 9–51.

12. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа М.: Наука, 1987.

13. Прахар К. Распределение простых чисел М.: Мир, 1967.

14. Иванков П. Л. О значениях функций с различными иррациональными параметрами в малых точках // Наука и образование. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электронный журнал. 2014, № 9. С. 65–74.

15. Иванков П. Л. О значениях продифференцированных по параметру гипергеометрических функций // Чебышевский сборник. Т. 13, вып. 2. 2012. С. 64–70.

REFERENCES

1. Galochkin, A. I. 1988, "On effective bounds for certain linear forms", *New Advances in Transcendence theory.* Cambridge, New Rochell, Melbourne, Sydney, pp. 207–215.

2. Galochkin, A. I. 2011, "Linear independence and transcendence of values of hypergeometric functions", *Moscow journal of combinatorics and number theory*, v. 1, iss. 2, pp. 27–32.

3. Ivankov, P. L. 1995, "On linear independence of the values of some functions", *Fundamentalnaja i Prikladnaja Matematika*, v. 1, no. 1, pp. 191–206. (Russian).

4. Galochkin, A. I. 1976, "On arithmetic properties of the values of some entire hypergeometric functions", *Sibirsk. Mat. Zh.*, vol. 17, no. 6, pp. 1220–1235. (Russian)

5. Galochkin, A. I. 1978, "On diophantine approximations of the values of some entire functions with algebraic coefficients. I", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh.*, no. 6, pp. 25–32. (Russian).

6. Galochkin, A. I. 1979, "On diophantine approximations of the values of some entire functions with algebraic coefficients. II", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh.*, no. 1, pp. 26–30. (Russian).

7. Galochkin, A. I. 1986, "On some analog of Siegel's method", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh.*, no. 2, pp. 30–34. (Russian).

8. Ivankov, P. L. 2005 "On the values of hypergeometric functions with different irrational parameters", *Fundamentalnaja i Prikladnaja Matematika*, v. 11, no. 6, pp. 65–72. (Russian).

9. Markushevich, A. I. 1967, "Teorija analiticheskikh funktsii, v. II"[Theory of analytic functions], Nauka, Moscow, 486 pp. (Russian)

10. Ivankov, P. L. 2002, "On simultaneous approximations taking into account a specific character of a homogeneous case", *Mat. Zametki*, v. 71, no. 3, pp. 390–397. (Russian).

11. Chudnovsky, D. V., Chudnovsky, G. V. 1985, "Applications of Padé approximations to diophantine inequalities in values of G-functions", *Lecture Notes in Math.*, v. 1135. pp. 9–51.

12. Shidlovskii, A. B. 1987, "*Transtsendentnye chisla* [Transcendental numbers], Nauka, Moscow, 448 pp. (Russian)

13. Prachar, K. 1967, "*Raspredelenije prostych chisel* [Distribution of prime numbers], Mir, Moscow, 511 pp. (Russian)

14. Ivankov, P. L. 2014, "On the values of hypergeometric functions with different irrational parameters at small points", *Science and education of the Bauman MSTU*, no. 9, pp. 65–74. (Russian)

15. Ivankov, P. L. 2012, "On the values of differentiated with respect to parameter hypergeometric functions", *Chebyshevsky sbornik*, v. 13, no. 2, pp. 64–70. (Russian)

Получено 23.09.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-3-281-294

Об одном варианте метода Адамара в теории L-функций Дирихле[1]

О. В. Колпакова, О. В. Попов, В. Н. Чубариков

Колпакова Ольга Викторовна — кандидат физико-математических наук, механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: olja_k@list.ru
Попов О. В. — кандидат физико-математических наук, доцент, механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: ovlpopov@yandex.ru
Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: chubarik2009@live.ru

Аннотация

В статье дан новый вариант метода Адамара в теории L-функций Дирихле. Доказано этим методом отсутствие нулей L-функций на единичной прямой. Показано, что метод Адамара позволяет получить результаты, которые по точности соответствуют результатам Валле-Пуссена в асимптотическом законе распределения простых чисел. Тем самым расширены возможности метода Адамара. Получены новые оценки дзетовой суммы, скрученной с характером Дирихле по модулю, равному степени нечётного простого числа, что позволяет получить современную границу нулей для соответствующей L-функции Дирихле.

Ключевые слова: характеры Дирихле, метод Адамара, асимптотический закон распределения простых чисел с остатком Валле Пуссена, функции Дирихле, дзетовая сумма, скрученная с характером Дирихле.

Библиография: 28 названий.

Для цитирования:
О. В. Колпакова, О. В. Попов, В. Н. Чубариков. Об одном варианте метода Адамара в теории L-функций Дирихле // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 3, с. 281–294.

[1]Работа выполнена на механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 3.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-3-281-294

On a version of Hadamard's method in the theory of Dirichlet's L-functions[2]

O. V. Kolpakova, O. V. Popov, V. N. Chubarikov

Kolpakova Olga Viktorovna — candidate of physical and mathematical Sciences, faculty of mechanics and mathematics, Lomonosov Moscow state University (Moscow).
e-mail: olja_k@list.ru
Popov O. V. — candidate of physical and mathematical Sciences, associate Professor, faculty of mechanics and mathematics, Lomonosov Moscow state University (Moscow).
e-mail: ovlpopov@yandex.ru
Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, faculty of mechanics and mathematics, Lomonosov Moscow state University (Moscow).
e-mail: chubarik2009@live.ru

Abstract

In the paper a new version of the Hadamard's method in the theory of Dirichlet's L-functions is given. We prove of this method of the absence of the L-functions zeroes on the unit line. We show that the Hadamard's method allow to get results, which on the accuracy correspond to the Vallee Poussin results in the asymptotical law of the distribution of primes. Of this we extend possibilities of the Hadamard's method. New estimations of the zeta-sum twisted together with the Dirichlet's character by modulo, equals to the degree of an odd prime number are obtained that permits to get the modern limit of zeroes for the corresponding Dirichlet's L-function.

Keywords: Dirichlet's characters, the Hadamard's method, the asymptotical law of the distribution of primes with the Vallee Poussin remainder, Dirichlet's functions, the zeta-sum twisted together with the Dirichlet's character.

Bibliography: 28 titles.

For citation:
O. V. Kolpakova, O. V. Popov, V. N. Chubarikov, 2019, "On a version of Hadamard's method in the theory of Dirichlet's L-functions" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 281–294.

1. Введение

В настоящей статье дан вывод современной границы нулей L — функций Дирихле на основе метода, представляющего собой вариант метода Адамара [3] для дзета-функции Римана (см. [22, 23]).

В изложении Титчмарша [9] метод Адамара состоит в следующем. Простой полюс функции $\zeta(s), s=\sigma+it$, в точке $s=1$ при $\sigma\to 1+0$ даёт асимптотическое равенство

$$\ln\zeta(\sigma)\sim\sum_p\frac{1}{p^\sigma}\sim\ln\frac{1}{\sigma-1},$$

[2]The work was performed at the faculty of Mechanics and mathematics of Lomonosov Moscow state University.

где p пробегает все простые числа натурального ряда чисел.

Допущение наличия нуля $s = 1 + it_0$ дзета-функции Римана на единичной прямой при $s = \sigma + it_0, \sigma \to 1 + 0$, приводит к соотношению

$$\sum_p \frac{\cos(t_0 \ln p)}{p^\sigma} \sim \ln|\zeta(s)| \sim \ln(\sigma - 1) \sim \sum_p \frac{-1}{p^\sigma}.$$

Далее имеем

$$\ln|\zeta(\sigma + 2it_0)| \sim \sum_p \frac{\cos(2t_0 \ln p)}{p^\sigma} \sim \sum_p \frac{1}{p^\sigma} \sim \ln \frac{1}{\sigma - 1}.$$

Это означает, что точка $s = 1 + 2it_0$ является полюсом функции $\zeta(s)$, но это не так. Следовательно, допущение, что $\zeta(1 + it_0) = 0$ не имеет места.

Другой вариант метода Адамара дал Аткинсон (см.[9]). Допустим, как и прежде, что $s = 1 + it_0$ — нуль функции $\zeta(s)$, и пусть

$$P = \sum_p \frac{1}{p^\sigma}, S = \sum_p \frac{\cos(t_0 \ln p)}{p^\sigma}, Q = \sum_p \frac{\cos(2t_0 \ln p)}{p^\sigma}.$$

Тогда при $s = \sigma + it_0, \sigma \to 1 + 0$, имеем

$$P \sim \ln(\sigma - 1), S \sim \ln(1/(\sigma - 1)).$$

Используя неравенство Коши, находим

$$P^2 = \left(\sum_p \frac{\cos(t_0 \ln p)}{p^\sigma}\right)^2 = \left(\sum_p \frac{\cos(t_0 \ln p)}{p^{\sigma/2}} \frac{1}{p^{\sigma/2}}\right)^2 \le$$

$$\le \sum_p \frac{\cos^2(t_0 \ln p)}{p^\sigma} \sum_p \frac{1}{p^\sigma} = \frac{1}{2} \sum_p \frac{1 + \cos(2t_0 \ln p)}{p^\sigma} \sum_p \frac{1}{p^\sigma} = \frac{1}{2}(S + Q)S,$$

т.е.

$$Q \ge \frac{2P^2}{S} - S \sim \ln \frac{1}{\sigma - 1}.$$

Правая часть последнего выражения стремится к бесконечности при $\sigma \to 1 + 0$. Это означает, что точка $s = 1 + 2it_0$ является полюсом функции $\zeta(s)$, но это не так.

2. §1. Отсутствие нулей L-функции Дирихле на единичной прямой

Здесь мы даём новый вариант метода Адамара в применении к L-функциям Дирихле.

Теорема 1. *Пусть $q > 1$ — натуральное число, χ — комплексный характер Дирихле по модулю q. Тогда L-функция Дирихле $L(s, \chi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}$ не обращается в нуль на прямой* $\mathrm{Re}s = 1$.

Доказательство. Пусть $\rho = 1 + it_0$ — нуль $L(s, \chi)$, т.е. $L(\rho, \chi) = 0$, тогда он простой. Предположим противное. Пусть кратность нуля равна $k \ge 2$. Возьмём точку $s = \sigma + it_0, \sigma > 1$. Тогда при $\sigma \to 1 + 0$ имеем

$$-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{k}{\sigma - 1} + O(1),$$

и для главного характера χ_0 по модулю q при $\sigma > 1$ получим

$$L(s,\chi_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_0(n)n^{-s} = \zeta(s)\prod_{p|q}(1-p^{-s}), \quad -\frac{L'(\sigma,\chi_0)}{L(\sigma,\chi_0)} = \frac{1}{\sigma-1} + O(1).$$

Далее находим

$$\delta = \sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}} \left(1+\mathrm{Re}(\chi(n)n^{it_0})\right) \geq 0,$$

и при $\sigma \to 1+0$ получим

$$\delta = -\frac{L'(\sigma,\chi_0)}{L(\sigma,\chi_0)} + \mathrm{Re}\left\{-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right\} = \frac{1-k}{\sigma-1} + O(1) \to -\infty.$$

Это противоречие показывает, что $k \leq 1$.

Предположим, как и раньше, что $L(1+it_0,\chi)=0$, и пусть $\chi(n)n^{it_0} = e^{i\varphi}$. Тогда находим

$$\Delta = -\frac{L'(\sigma,\chi_0)}{L(\sigma,\chi_0)} + \mathrm{Re}\left\{\frac{L'(\sigma+2it_0,\chi^2)}{L(\sigma+2it_0,\chi^2)}\right\} = \sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}}\,(1-\cos 2\varphi) \geq 0,$$

Оценим Δ при $\sigma \to 1+0$. Получим

$$\Delta = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}}\,(1-\cos\varphi)\,(1+\cos\varphi) \leq$$

$$\leq 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}}\,(1+\cos\varphi) = 4\delta = O(1).$$

Это означает, что $L(s,\chi)$ имеет полюс в точке $1+2it_0$. Данное утверждение противоречит тому факту, что $L(s,\chi)$ является аналитической функцией при $\mathrm{Re}s > 0$.

Теорема доказана. □

3. §2. Отсутствие нулей L-функции Дирихле в окрестности единичной прямой

Итак, для любого $\sigma > 1$ и для любого $t \in \mathbf{R}$ установлено неравенство $\Delta \leq 4\delta$, где $s = \sigma + it$,

$$\delta = -\frac{L'(\sigma,\chi_0)}{L(\sigma,\chi_0)} + \mathrm{Re}\left\{-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right\},$$

$$\Delta = -\frac{L'(\sigma,\chi_0)}{L(\sigma,\chi_0)} + \mathrm{Re}\left\{\frac{L'(\sigma+2it,\chi^2)}{L(\sigma+2it,\chi^2)}\right\}.$$

Отсюда находим

$$0 \leq 4\delta - \Delta = 3\left\{-\frac{L'(\sigma,\chi_0)}{L(\sigma,\chi_0)}\right\} + 4\mathrm{Re}\left\{-\frac{L'(\sigma+it,\chi_0)}{L(\sigma+it,\chi_0)}\right\} + \mathrm{Re}\left\{-\frac{L'(\sigma+2it,\chi^2)}{L(\sigma+2it,\chi^2)}\right\}.$$

Стандартным образом из последнего неравенства выводим следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть χ — примитивный комплексный характер по модулю q и $\rho = \beta + i\gamma$, $\gamma \neq 0$, — нуль $L(s, \chi)$. Тогда*

$$\mathrm{Re}\rho = \beta \geq 1 - \frac{c}{\log\{q(|\gamma| + 2)\}},$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная.

Пусть χ — примитивный действительный характер по модулю q и $\rho = \beta + i\gamma, \gamma \neq 0$, — нуль $L(s, \chi)$. Тогда найдется абсолютная положительная постоянная c' такая, что при $|\gamma| \geq 1/(c'\mathcal{L})$ имеем

$$\beta \leq \frac{1}{21c'\mathcal{L}}.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай комплексного характера χ, т.е. $\chi^2 \neq \chi_0$. Находим

$$-\frac{L'(\sigma, \chi_0)}{L(\sigma, \chi_0)} = -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} + \sum_{p|q} \frac{p^{-s}\log p}{1 - p^{-s}} = \frac{1}{s-1} + R_1, |R_1| \leq \log(eq),$$

$$\mathrm{Re}\left\{-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)}\right\} = -\mathrm{Re}\frac{1}{s - \rho} + R_2, |R_2| \leq c_1 \log\{q(|t| + 2)\},$$

где $\rho = \beta + i\gamma$ — нуль $L(s, \chi)$,

$$\mathrm{Re}\left\{-\frac{L'(\sigma + 2it, \chi^2)}{L(\sigma + 2it, \chi^2)}\right\} = R_3, |R_3| \leq c_2 \log\{q(|t| + 2)\}.$$

Далее получим

$$0 \leq 4\delta - \Delta \leq \frac{3}{\sigma - 1} - \mathrm{Re}\frac{4}{s - \rho} + c_3 \log\{q(|t| + 2)\}.$$

Положим $|t| = \gamma, \sigma = 1 + \frac{1}{2\mathcal{L}}, \mathcal{L} = \log\{q(\gamma + 2)\}$. Тогда для границы нулей $L(s, \chi)$ находим

$$\beta \leq 1 - \frac{1}{14c_3\mathcal{L}}.$$

Пусть теперь χ — действительный примитивный характер по модулю q, т.е. $\chi^2 = \chi_0$. Тогда, взяв $s = \sigma + it, \rho = \beta + i\gamma$ — нуль $L(s, \chi)$ и положив $t = \gamma$, имеем

$$\Delta = -\frac{L'(\sigma, \chi_0)}{L(\sigma, \chi_0)} + \mathrm{Re}\left\{\frac{L'(\sigma + 2it, \chi_0)}{L(\sigma + 2it, \chi_0)}\right\} =$$

$$= -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} + \mathrm{Re}\frac{\zeta'(\sigma + 2it)}{\zeta(\sigma + 2it)} + \sum_{p|q} \frac{p^{-\sigma}\log p}{1 - p^{-\sigma}} - \mathrm{Re}\sum_{p|q} \frac{p^{-\sigma - 2it}\log p}{1 - p^{-\sigma - 2it}} =$$

$$= \frac{1}{\sigma - 1} - \mathrm{Re}\frac{1}{\sigma - 1 + 2it} + 2\theta_2 \log(eq), |\theta_2| \leq 1,$$

$$\delta = -\frac{L'(\sigma, \chi_0)}{L(\sigma, \chi_0)} + \mathrm{Re}\left\{-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sigma - 1} + \frac{1}{\sigma - \beta} + R_4, |R_4| \leq c_4 \log(q(\gamma + 2)).$$

Следовательно,

$$0 \leq 4\delta - \Delta \leq \frac{3}{\sigma - 1} - \frac{4}{\sigma - \beta} + \mathrm{Re}\frac{1}{\sigma - 1 + 2i\gamma} + c_5 \log\{q(\gamma + 2)\}.$$

Отсюда находим

$$\frac{3}{\sigma-1}-\frac{4}{\sigma-\beta}+\frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+4\gamma^2}+c_5\log\{q(\gamma+2)\}\geq 0.$$

Положим $\sigma=1+\frac{1}{c_5\mathcal{L}}$ и предположим, что $\gamma\geq\frac{1}{c_5\mathcal{L}}$. Тогда из предыдущего неравенства имеем

$$\frac{4}{\sigma-\beta}\leq 3c_5\mathcal{L}+\frac{c_5\mathcal{L}}{5}+c_5\mathcal{L}=\frac{21c_5\mathcal{L}}{5}.$$

Стало быть,

$$\beta\leq 1-\frac{1}{21c_5\mathcal{L}}.$$

Теорема 2 доказана. □

4. §3. Дзетовая сумма, скрученная с характером Дирихле по модулю, равному степени простого числа

Пусть $n,N\geq 2$ — натуральные числа, p — нечётное простое число, $q=p^n$, $\tau=|t|+2$, $N^r=q\tau$, $1\leq r\leq n/2$, χ — примитивный характер Дирихле по модулю q.

Дзетовой суммой, скрученной с характером Дирихле по модулю $q=p^n$, равному степени нечётного простого числа, назовём сумму вида

$$S=S(N;t,\chi)=\sum_{m\leq N}\chi(m)m^{it}.$$

Теорема 3. *Пусть S — дзетовая сумма, скрученная с характером Дирихле по модулю $q=p^n$, равному степени нечётного простого числа. Тогда*

$$|S|\ll N^{1-\frac{\gamma}{r^2}},$$

где постоянные γ и в знаке $\ll$ — абсолютные.

Лемма 1. *Пусть $n,s\leq n-1$ — натуральные числа, χ — примитивный характер по модулю p^n. Тогда при некотором $(\lambda,p)=1$ справедливо равенство*

$$\chi(1+p^{s+1}m^*xy)=\exp\left(\frac{2\pi i\lambda\Phi(p^{s+1}m^*xy)}{p^{n-s-1}}\right),$$

где

$$\Phi(p^{s+1}m^*xy)=xy+\sum_{\mu=2}^{\infty}a_\mu p^{(s+1)(\mu-1)}(m^*xy)^\mu,$$

причём

$$a_\mu=(-1)^{\mu-1}p^{-\tau}\mu_1^*,\mu=p^\tau\mu_1,(\mu_1,p)=1,\mu_1\mu_1^*\equiv 1\pmod{p^{n-s-1}}.$$

Доказательство. см. [24],[27].

Лемма 2. *Пусть $l\geq 0$ — целое число, $n\geq 2$ — натуральное число, $P>1$. Тогда при $k\geq nl$ для величины*

$$J=J(P;k,n)=\int_0^1\cdots\int_0^1|T(\alpha_n,\ldots,\alpha_1)|^{2k}\,d\alpha_n\ldots d\alpha_1,$$

где

$$T(\bar{\alpha}) = T(\alpha_n \dots, \alpha_1) = \sum_{x \le P} e^{2\pi i(\alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x)},$$

справедлива оценка

$$J \le D(l) P^{2k - 0,5n(n+1) + \delta(l)},$$

где

$$\delta(l) = 0,5n(n+1)\left(1 - \frac{1}{n}\right)^l, D(l) = k^{nl} n^{2n^3(n+1)\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^l\right)} 2^{4n^2(n+1)l}.$$

Лемма 3. *Пусть $\Pi_n \subset \mathbf{R}^n$ — параллелепипед, со сторонами параллельными соответствующим осям координат, и длины этих сторон равны*

$$d_s = c_s^{-1} n^{-1} P^{-s-\kappa}, c_s > 4\pi, s = 1, \dots, n.$$

Пусть, также, найдётся точка $\bar{\alpha} = (\alpha_n, \dots, \alpha_1)$ такая, что

$$|T(\bar{\alpha})| > P^{1-\kappa}. \qquad (*)$$

Тогда для любой точки $\bar{\beta} \in \Pi_n$ имеем

$$|T(\bar{\beta})| > 0,5P^{1-\kappa}.$$

Выберем постоянные c_s в условии леммы 3, принадлежащими промежутку $(4\pi, 4\pi + 0,5]$, так, чтобы при $s = 1, \dots, n$ все числа d_s^{-1} были целыми. Разобьём все точки единичного куба $E = \{\bar{\alpha} | 0 \le \alpha_n, \dots, \alpha_1 < 1\}$ на равные параллелепипеды Π_n.

Лемма 4. *Пусть $k \ge nl$. Тогда количество M параллелепипедов Π_n с условием $(*)$ удовлетворяет неравенству*

$$M \le 2^{2k} (c_n \dots c_1)^{-1} n^n D(l) P^{\kappa(2k+n) + \delta(l)}.$$

Доказательство теоремы 3. Разобьём промежуток суммирования $[1, N]$ на промежутки вида $(K, eK]$ так, что $e^r \le N < e^{r+1}$, т.е. $r = [\ln N], K = e^s, 0 \le s \le r$ и $(e^r, N]$. Количество таких промежутков не превосходит $\ln N + 1$. Следовательно, достаточно оценить сумму

$$S(K) = \sum_{K < k \le K_1} \chi(k) k^{it}, K < K_1 \le eK.$$

В сумме $S(K)$ произведём сдвиг промежутка суммирования на величину u. В понятных обозначениях получим

$$S(K) = \sum_{K+u < k \le K_1 + u} \dots + \sum_{K < k \le K + u} \dots - \sum_{K_1 < k \le K_1 + u} \dots .$$

Отсюда находим

$$S(K) = \sum_{K < k \le K_1} \chi(k+u)(k+u)^{it} + 2\theta u, |\theta| \le 1.$$

Возьмём $u = p^{s+1} xy, s = [0,25 \log_p K] - 1, a = [K^{1/4}], 1 \le x, y \le a$, и просуммируем предыдущее равенство по переменным x, y в пределах от 1 до a. Имеем

$$|S(K)| \le a^{-2} \sum_{\substack{K < l \le K_1 \\ (k,p)=1}} |W(k)| + 2p^{s+1} a^2,$$

где
$$W(k)=\sum_{x=1}^{a}\sum_{y=1}^{a}\chi(1+p^{s+1}k^*xy)\exp\left(it\ln\left(1+p^{s+1}k^{-1}xy\right)\right),$$
причём $kk^*\equiv 1 \pmod{p^n}$, если $(k,p)=1$.

Далее воспользуемся разложением функции логарифм по формуле Тейлора до $r = \left[\frac{4\ln(q\tau)}{\ln K}\right]+1$ члена. Получим
$$\ln\left(1+\frac{p^{s+1}xy}{k}\right)=F_r(p^{s+1}xy)+\theta_1\left(\frac{p^{s+1}a^2}{k}\right)^{r+1}, |\theta_1|\le 1,$$
где
$$F_r(p^{s+1}xyk^{-1})=\sum_{\nu=1}^{r}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\left(\frac{p^{s+1}xy}{k}\right)^{\nu}$$

По формуле А. Г. Постникова (лемма 1) примитивный характер χ по модулю p^n при некотором $(\lambda,p)=1$ можно представить в виде
$$\chi(1+p^{s+1}k^*xy)=\exp\left(\frac{2\pi i\lambda\Phi(p^{s+1}k^*xy)}{p^{n-s-1}}\right),$$
где
$$\Phi(p^{s+1}k^*xy)=xy+\sum_{\mu=2}^{\infty}a_\mu p^{(s+1)(\mu-1)}(k^*xy)^{\mu},$$
причём
$$a_\mu=(-1)^{\mu-1}p^{-\tau}\mu_1^*, \mu=p^{\tau}\mu_1, (\mu_1,p)=1, \mu_1\mu_1^*\equiv 1 \pmod{p^{n-s-1}}.$$
Следовательно,
$$W=W(k)=W_1+R,\quad R\le\tau\sum_{x=1}^{a}\sum_{y=1}^{a}\left(\frac{p^{s+1}a^2}{k}\right)^{r+1}\le a^2\tau\left(\frac{p^{s+1}a^2}{k}\right)^{r+1},$$
где
$$W_1=\sum_{x=1}^{a}\sum_{y=1}^{a}\exp\left(\frac{2\pi i\lambda\Phi(p^{s+1}k^*xy)}{p^{n-s-1}}+itF_r(p^{s+1}xyk^{-1})\right)=\sum_{x=1}^{a}\sum_{y=1}^{a}\exp G(x,y),$$
причём
$$G(x,y)=\sum_{\nu}b_\nu(xy)^{\nu},$$
$$b_\nu=(-1)^{\nu}p^{(s+1)\nu-\tau_\nu}\left(\frac{\lambda\nu_1^*k^{*\nu}}{p^{n-s-1}}+\frac{t}{2\pi\nu_1k^{\nu}}\right).$$
Возведём сумму W_1 в степень $2l, l=r\tau, l=5\tau$, и воспользуемся неравенством Гёльдера. Получим
$$|W_1|^{2l}\le a^{2l-1}\sum_{y_1,\dots,y_{2l}}T(\mathbf{b},\mathbf{Y}),\quad T(\mathbf{b},\mathbf{Y})=\left|\sum_{x=1}^{a}\exp 2\pi i(b_1Y_1x+\dots+b_rY_rx^r)\right|,$$
где
$$Y_s=y_1^s+\dots+y_l^s-y_{l+1}^s-\dots-y_{2l}^s,\quad s=1,\dots,r;\quad (\mathbf{b},\mathbf{Y})=(b_1Y_1,\dots,b_rY_r).$$
Разобьём все точки $\mathbf{Y}$ из $\mathbf{R}^r$ на два класса. К первому классу E_1 отнесём те из них, для которых
$$|T(\mathbf{b},\mathbf{Y})|\le a^{1-\kappa}.$$

Остальные точки отнесём ко второму классу E_2.

Тогда при $k = rl, l = 5r$, имеем

$$|W_1|^{2k} \le a^{2k-1}(\Sigma_1 + \Sigma_2), \Sigma_1 = \sum_{\mathbf{Y}\in E_1} T(\mathbf{b}, \mathbf{Y}), \Sigma_2 = \sum_{\mathbf{Y}\in E_2} T(\mathbf{b}, \mathbf{Y}).$$

Оценим Σ_1. Количество наборов $\mathbf{Y}$ не превосходит числа всех наборов вида $(y_1, \dots, y_{2k})$, т.е. a^{2k}. Следовательно,

$$a^{2k-1}\Sigma_1 \le a^{4k-\kappa}.$$

Перейдём теперь к оценке Σ_2. Имеем, что $\mathbf{Y} \in E_2$, если

$$a^{1-\kappa} < |T(\mathbf{b}, \mathbf{Y})| \le a,$$

и, кроме того, координаты $Y_s, s = 1, \dots, r$, вектора $\mathbf{Y}$ принимают целые значения z_s, удовлетворяющие условиям $|z_s| < ka^s$.

Далее, для любого фиксированного набора $z_s, s = 1, \dots, r$, число решений системы уравнений $Y_s = z_s$ (лемма 4) не превосходит величины

$$V = D(l)a^{2k - \frac{r(r+1)}{2} + \frac{r(r+1)}{2}(1-\frac{1}{r})^l}.$$

Оценим сверху общее число I точек $\{\mathbf{b}, \mathbf{Y}\} = \{b_1Y_1, \dots, b_rY_r\}$, попадающих в заданный малый параллелепипед со сторонами $d_s = c_s r^{-1}a^{-s-\kappa}, s = 1, \dots, r$. С этой целью разобьём все координаты $b_s z_s$ на три случая: первый — при $r/2 < s \le r-4$; второй — при $r/3 < s \le r/2 - 2$; и к третьему случаю отнесём все оставшиеся точки.

Так как значения $|z_s| \le ka^s, |b_s| \le \frac{|t|}{2\pi s K^s}, a = [K^{1/4}]$, то

$$|b_s z_s| \le \frac{|t|}{2\pi s K^s} ka^s \le \frac{ka^{r+s}}{2\pi s K^s}.$$

В третьем случае воспользуемся тривиальной оценкой вида: $< 2ka^s$.

Отсюда находим, что общее число I точек $(\mathbf{b}, \mathbf{Y}) = (b_1Y_1, \dots, b_rY_r)$, попадающих в заданный малый параллелепипед со сторонами $d_s = c_s r^{-1}a^{-s-\kappa}, s = 1, \dots, r$, не превосходит

$$I \le a^{\frac{r(r+1)}{2}0{,}75}.$$

Таким образом,

$$a^{2k-1}\Sigma_2 \le VIMa^{2k} \le a^{4k-100}.$$

Собирая вместе найденные выше оценки Σ_1 и Σ_2, получим утверждение теоремы. □

5. §4. Современная граница нулей L-функции Дирихле по модулю, равному степени простого числа

Лемма 5. *Пусть $M \ge 1, r > 0, s, s_0 \in \mathbf{C}$, функция $F(s)$ — аналитическая в круге $|s - s_0| \le r, F(s_0) \ne 0$, для любого s, принадлежащего этому кругу имеем $|F(s)/F(s_0)| \le M$, и пусть $F(s) \ne 0$ в полукруге $|s - s_0| \le r/2, \quad \mathrm{Re}(s - s_0) \ge 0$. Тогда для любого нуля ρ функции $F(s)$ из полукруга $|s - s_0| \le r/2, \quad \mathrm{Re}(s - s_0) < 0$ справедливы неравенства*

$$\alpha) \quad \mathrm{Re}\frac{F'(s_0)}{F(s_0)} \ge -\frac{4}{r}\log M;$$

$$\beta) \quad \mathrm{Re}\frac{F'(s_0)}{F(s_0)} \ge -\frac{4}{r}\log M + \mathrm{Re}\frac{1}{s_0 - \rho}.$$

Теорема 4. *Пусть* $s=\sigma+it$ *и при* $1-2\cdot 10^{-4}\leq\sigma\leq 1, t\geq 2$ *справедлива оценка*

$$|L(s,\chi)|\ll (qt)^{a(1-\sigma)^{3/2}}(\log{(qt)})^{2/3}.$$

Тогда при некотором $t_0\geq 1$, L*-функция Дирихле не имеет нулей в следующей области комплексной* s*-плоскости*

$$t\geq t_0,\quad \sigma\geq 1-ca^{-2/3}(\log{(qt)})^{-2/3}(\log\log qt)^{-1/3}.$$

Доказательство. Возьмём любой нуль $\rho=\beta+i\gamma$ в критической полосе функции $L(s,\chi)$. Положим

$$s_0=\sigma_0+i\gamma, \mathcal{K}=(\log{(qt)})^{-2/3}(\log\log qt)^{-1/3}, \sigma_0=1+A\mathcal{K}.$$

В лемме 1 возьмём

$$r=(3a)^{-2/3}\mathcal{K}\log\log{(q\gamma)}, M_0=\max_{|s-s_0|\leq r}\left|\frac{L(s,\chi)}{L(s_0,\chi)}\right|.$$

Тогда имеем

$$-\mathrm{Re}\frac{L'(s_0,\chi)}{L(s_0,\chi)}\leq\frac{4}{r}\log M_0-\frac{1}{\sigma_0-\beta},$$

$$-\frac{L'(s_0,\chi_0)}{L(s_0,\chi_0)}=\frac{1}{\sigma_0-1}+R_1, |R_1|\leq\log{(eq)}.$$

Отсюда находим

$$\delta=-\frac{L'(\sigma_0,\chi_0)}{L(\sigma_0,\chi_0)}-\mathrm{Re}\frac{L'(s_0,\chi)}{L(s_0,\chi)}\leq\frac{1}{\sigma_0-1}+\frac{4}{r}\log M_0-\frac{1}{\sigma_0-\beta}+\log{(eq)}.$$

Теперь возьмём круг радиуса r с центром в точке $s_1=\sigma_0+2i\gamma$. Положим

$$M_1=\max_{|s-s_1|\leq r}\left|\frac{L(s,\chi)}{L(s_1,\chi)}\right|.$$

Тогда из леммы 1 имеем

$$\Delta=-\frac{L'(\sigma_0,\chi_0)}{L(\sigma_0,\chi_0)}+\mathrm{Re}\frac{L'(s_1,\chi)}{L(s_1,\chi)}\geq\frac{1}{\sigma_0-1}-\frac{4}{r}\log M_1-\log{((eq)}.$$

Из последних оценок получим

$$0\leq 4\delta-\Delta\leq\frac{3}{\sigma_0-1}-\frac{4}{\sigma_0-\beta}+\frac{16}{r}\log M_0+\frac{4}{r}\log M_1+5\log{(eq)}.$$

Найдем верхние границы величин M_0 и M_1. Очевидно,

$$|L(s_0,\chi)|^{-1}\leq\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma_0}}=\zeta(\sigma_0)\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^{\sigma_0}}\right)\leq$$

$$\leq 1+\int\limits_1^{+\infty}u^{-\sigma_0}\,du=1+(\sigma_0-1)^{-1}=1+\frac{1}{A\mathcal{K}};\quad |L(s_1,\chi)|^{-1}\leq 1+\frac{1}{A\mathcal{K}}.$$

□

6. Заключение

Проблемы распределения нулей и оценки сверху модулей дзета-функции Римана и L — функций Дирихле в критической полосе тесно связаны между собой. Важность их решения обусловлена в первую очередь выводом асимптотического закона распределения простых чисел в натуральном ряду и в арифметических прогрессиях.

Нам представляется интересным продолжение исследований дзетовой суммы, скрученной с характерами Дирихле по модулю, равному степени простого числа, и вообще, по произвольному модулю.

Более чем красноречиво о трудностях оценки остатка R в асимптотической формуле для числа простых чисел, не превосходящих N,

$$\pi(N)=\int\limits_{2}^{N}\frac{dx}{\ln x}+R, R\ll N\exp\left(-c_1(\ln N)^{0{,}6}(\ln\ln N)^{-0{,}2}\right), c_1>0,$$

И. М. Виноградов во введении к своей монографии [13] писал: "Однако если допустить справедливость гипотезы Римана, следствием которой явилось бы $R\ll\sqrt{N}\ln N$, то и этот результат крайне далёк от окончательного, и в этом отношении он не очень далеко ушёл от первоначального результата Валле Пуссена. Более того, если бы даже в лемме 9, главы 4 [13] было

$$|S|<2a^{1-c_2/n}\quad\text{вместо}\quad|S|<2a^{1-\frac{1}{30000n^2}},$$

то и тогда мы могли бы получить (сохраняя в остальном прежнее доказательство) лишь результат

$$R\ll N\exp\left(-c_3(\ln N)^{\frac{2}{3}}(\ln\ln N)^{-\frac{1}{5}}\right),$$

опять-таки принципиально немногим лучший предыдущего. По-видимому, добиться существенных сдвигов в решении вопроса о порядке R (хотя бы найти $R\ll N^{1-c}$, пусть даже с $c=0{,}000001$) с помощью только улучшения оценок сумм Г. Вейля без дополнительных существенных сдвигов в теории функции $\zeta(s)$ трудно."

В настоящей статье мы использовали идеи и соображения работ [1]–[28].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечно малых. М.: ОНТИ, 1936.

2. Риман Б. О числе простых, не превышающих данной величины. Сочинения. М.: ОГИЗ, 1948. С. 216–224.

3. Hadamard J. Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et conséquencies arithmetiques // Bull. Soc. Math. France, 1896, **24.**

4. de la Valleé Poussin C. J. Recherches analytiques sur la theorie des nombres. Premiere partie: La fonction $\zeta(s)$ de Riemann et les nombres premiers general // Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 1896, bf 20, 183–256.

5. de la Valleé Poussin C. J. Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée // Memories couronnes de l'Acad. Roy. des Sci. Belgique, 1899–1900, **59,** № 1.

6. Weyl H. Zur Abschätzung von $\zeta(1+it)$ // Math. Zs., 1921, bf 10, 88–101.

7. Littlewood J. E. Researches in the theory of Riemann ζ-function // Proc. London Math. Soc., 1922, **(2)20,** XXII–XXVIII.

8. Landau E. Uber die ζ-Funktion und die L-Funktion // Math.Zs., 1924, **20,** 105–125.

9. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953.

10. Чудаков Н. Г. О нулях L-функций Дирихле // Матем. сб., 1936, **1(43),** 591–602.

11. Чудаков Н. Г. О нулях функции $\zeta(s)$ // Докл. АН СССР, 1936, 187–201.

12. Виноградов И. М. Новая оценка функции $\zeta(1+it)$ // Изв. АН СССР, сер. матем., 1958, **22,** № 2, 161–164.

13. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел / 2-е изд., исправленное и дополненное. М.: Физматлит, 1980. 144 с.

14. Коробов Н. М. О нулях функции $\zeta(s)$ // Докл. АН СССР, 1958, **118,** 231–232.

15. Коробов Н. М. Оценки тригонометрических сумм и их приложения // Усп. матем. наук, 1958, **13,** вып. 4, 185–192.

16. Richert H.-E. Zur Abschätzung der Riemannschen Zeta-funktion in der Nahe der Vertikalen $\sigma = 1$ // Math. Ann., 1967, **169,** № 2, 97–101.

17. Карацуба А. А. Оценки тригонометрических сумм методом И. М. Виноградова и их приложения // Тр. МИАН СССР, 1971, **112,** 241–255.

18. Arkhipov G., Buriev K. Refinement of estimates for the Riemann zeta-function in a neibourhood of the line $\mathrm{Re}(s) = 1$ // Integral Transforms and Special Functions, 1993, v. 1, № 1, 1–7.

19. Дэвенпорт Г. Мультипликатиная теория чисел. М.: Физматлит, 1971. 200 с.

20. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994, 376 с.

21. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983. 240 с.

22. Popov O. V. On Hadamard's method concerning zeros of the Riemann zeta-function // Integral Transforms and Special Functions, 1993, v. 1, № 2, pp. 143–144.

23. Попов О. В. Вывод современной границы нулей дзета-функции Римана по методу Адамара // Вестник МГУ, сер. 1, мат., мех., 1994, № 1, 51–54.

24. Постников А. Г. О сумме характеров по модулю, равному степени простого числа // Изв. АН СССР, сер. мат., 1955, т. 19, 11–16.

25. Розин С. М. О нулях L-рядов Дирихле // Изв. АН СССР, сер. мат., 1959, т. 23, 503–508.

26. Карацуба А. А. Тригонометрические суммы специального вида и их приложения // Изв. АН СССР, сер. мат., 1964, т. 28, 237–248.

27. Чудаков Н. Г. О нулях L-функций Дирихле для модулей, равных степеням нечетного простого // Вестник ЛГУ, сер. мат., мех., 1966, № 1, 93–98.

28. Чубариков В. Н. Уточнение границы нулей L-рядов Дирихле по модулю, равному степени простого числа // Вестник МГУ, сер. 1, мат., мех., 1973, № 2, 46–52.

REFERENCES

1. Euler, L. 1936, "Introduction to the infinitesimal analysis", *Moscow*, in Russian.
2. Riemann, B. 1948, "Works ", *Moscow*, pp. 216–224.
3. Hadamard, J. 1896, "Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et conséquencies arithmetiques", *Bull. Soc. Math. France*, **24.**
4. de la Valleé Poussin C. J. 1896, "Recherches analytiques sur la theorie des nombres. Premiere partie: La fonction $\zeta(s)$ de Riemann et les nombres premiers general", *Ann. Soc. Sci. Bruxelles,* bf 20, pp. 183–256.
5. de la Valleé Poussin, C. J. 1899–1900, "Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée", *Memories couronnes de l'Acad. Roy. des Sci. Belgique,* **59,** № 1.
6. Weyl, H. 1921, "Zur Abschätzung von $\zeta(1+it)$", *Math. Zs.* bf 10, pp. 88–101.
7. Littlewood, J. E. 1922, "Researches in the theory of Riemann ζ-function", *Proc. London Math. Soc.,* **(2)20,** XXII–XXVIII.
8. Landau, E. 1924, "Über die ζ-Funktion und die L-Funktion", *Math. Zs.,* **20,** pp. 105–125.
9. Titchmarsch, E. C. 1953, "The theory of the Riemann zeta-function", *Moscow.*
10. Chudakov, N. G. 1936, "On zeros of the Dirichlet L-functions", *Matem. Sb.,* **1(43),** pp. 591–602.
11. Chudakov, N. G., 1936, "On zeros of the $\zeta(s)$ function", *Doklady AN SSSR,* pp. 187–201.
12. Vinogradov, I. M., 1958, "A new estimation of the function $\zeta(1+it)$", *Izv. AN SSSR, Ser.matem.,* **22,** № 2, pp. 161–164.
13. Vinogradov, I. M. 1980, "The method of trigonometrical sums in the theory of numbers", *2nd ed., correct. and supplement: Moscow,* pp. 144.
14. Korobov, N. M. 1958, "On zeros of the $\zeta(s)$ function", *Doklady AN SSSR,* **118,** pp. 231–232.
15. Korobov, N. M. 1958, "Estimations of trigonometric sums and their applications", *Uspehi matem. nauk,* **13,** issue 4, pp. 185–192.
16. Richert, H.-E. 1967, "Zur Abschätzung der Riemannschen Zeta-funktion in der Nahe der Vertikalen $\sigma = 1$", *Math. Ann.,* **169,** № 2, pp. 97–101.
17. Karatsuba, A. A. 1971, "Estimations of trigonometric sums by the Vinogradov method and their applications", *Trudy MIAN SSSR,* **112,** pp. 241–255.
18. Arkhipov, G., Buriev, K. 1993, "Refinement of estimates for the Riemann zeta-function in a neibourhood of the line $\mathrm{Re}(s) = 1$", *Integral Transforms and Special Functions,* v. 1, № 1, pp. 1–7.
19. Davenport, H. 1971, "Multiplicative number theory", *Moscow,* pp. 200.
20. Voronin, S. M., Karatsuba, A. A. 1994, "The Riemann zeta-function", *Moscow,* pp. 376.
21. Karatsuba, A. A. 1983, "The foundation of the analytic number theory", *Moscow,* pp. 240.

22. Popov, O. V. 1993 “On Hadamard’s method concerning zeros of the Riemann zeta-function”, *Integral Transforms and Special Functions,* v. 1, № 2, pp. 143–144.

23. Popov, O. V. 1994, “The deduction of the modern limit of zeros of the Riemann zeta-function by the Hadamard method”, *Vestnik MSU, ser. 1,mat.,mech.,* № 1, pp. 51–54.

24. Postnikov, A. G. 1955, “On the character sum by modulo, equil to a degree of prime”, *Izv. AN SSSR, ser. mat.,* v. 19, pp. 11–16.

25. Rozin, S. M. 1959, “On zeros of the Dirichlet L-series”, *Izv. AN SSSR, ser. mat.,* v. 23, pp. 503–508.

26. Karatsuba, A. A. 1964, “Trigonometric sums of the special form and their aplications”, *Izv. AN SSSR, ser. mat.,* v. 28, pp. 237–248.

27. Chudakov, N. G. 1966, “On zeros of the Dirichlet L-functions for modulo, equal to degrees of an odd prime”, *Vest. LSU, ser. mat.,mech.,* № 1, pp. 93–98.

28. Chubarikov, V. N. 1973, “ A more precise boundary of zeros of the Dirichlet L-series by modulo, equal to degree of an prime”, *Vest. MSU, ser. mat.,mech.,* № 2, pp. 46–52.

Получено 24.09.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 519.713 DOI 10.22405/2226-8383-2019–20-3-295-314

Вероятностные методы обхода лабиринта с использованием камней и датчика случайных чисел[1]

Е. Г. Кондакова, А. Я. Канель-Белов

Кондакова Елизавета Григорьевна — аспирант, Московский физико-технический институт (г. Москва).
e-mail: likogra@gmail.com
Канель-Белов Алексей Яковлевич — доктор физико-математических наук, федеральный профессор математики, профессор, университет Бар-Илана (г. Рамат-Ган, Израиль), Колледж математики и статистики, Шэньчжэньский университет, Шэньчжэнь, 518061, Китай.
e-mail: Kanelster@gmail.com

Аннотация

Существует широкий спектр задач посвященных возможности обхода лабиринта конечными автоматами. Они могут отличаться как типом лабиринта(это может быть любой граф, даже бесконечный), так и самими автоматами или их количеством. В частности у конечного автомата может быть память(магазин) или генератор случайных битов. В дальнейшем будем считать, что робот — это конечный автомат с генератором случайных битов, если не сказано иное. Кроме того в этой системе могут быть камни-объект, который конечный автомат может переносить по графу, и флажки- объект, наличие которого конечный автомат может только "наблюдать". Эта тема представляет интерес в связи с тем, что некоторые из этих задач тесно связаны с задачами из теории вероятности и сложности вычислений.

В данной работе продолжают решаться некоторые открытые вопросы, поставленные в диссертации Аджанса: обход роботом с генератором случайных битов целочисленных пространств при наличии камня и подпространства флажков [4]. Подобные задачи помогают развить математический аппарат в данной области, кроме того в этой работе мы исследуем практически не изученное поведение робота с генератором случайных чисел. Представляется чрезвычайно важным перенос комбинаторных методов, разработанных А. М. Райгородским в задачах этой тематики.

Данная работа посвящена обходу лабиринта конечным автоматом с генератором случайных битов. Эта задача является частью активно развивающейся темы обхода лабиринта различными конечными автоматами или их коллективами, которая тесно связана с задачами из теории сложности вычислений и теории вероятности. В данной работе показано, при каких размерностях робот с генератором случайных битов и камнем может обойти целочисленное пространство с подпостранством флажков. В данной работе будет изучено поведение конечного автомата с генератором случайных битов на целочисленных пространствах. В частности доказано, что робот обходит $\mathbb{Z}^2$ и не может обойти $\mathbb{Z}^3$; робот с камнем обходит $\mathbb{Z}^4$ и не может обойти $\mathbb{Z}^5$; робот с камнем и флажком обходит $\mathbb{Z}^6$ и не может обойти $\mathbb{Z}^7$; робот с камнем и плоскостью флажков обходит $\mathbb{Z}^8$ и не может обойти $\mathbb{Z}^9$.

Ключевые слова: обход лабиринта, конечный автомат.

Библиография: 8 названий.

[1]Работа поддержана Российским Научным Фондом (грант № 17-11-01377).

Для цитирования:
Е. Г. Кондакова, А. Я. Канель-Белов. Вероятностные методы обхода лабиринта с использованием камней и датчика случайных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 295–314.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 3.

UDC 519.713 DOI 10.22405/2226-8383-2019–20-3-295-314

Probabilistic methods of bypass of the labyrinth using stones and random number generator[2]

E. G. Kondakova, A. Ya. Kanel-Belov

Kondakova Elizabeth Grigorievna — post-graduate student, Moscow Institute of physics and technology (Moscow).
e-mail: likogra@gmail.com
Kanel-Belov Alexey Yakovlevich — doctor of physical and mathematical sciences, federal professor, professor, Bar-Ilan University (Ramat Gan, Israel), College of Mathematics and Statistics, Shenzhen University, Shenzhen, 518061, China.
e-mail: Kanelster@gmail.com

Abstract

There is a wide range of problems devoted to the possibility of traversing the maze by finite automatons. They can differ as the type of maze(it can be any graph, even infinite), and the automata themselves or their number. In particular, a finite state machine can have a memory (store) or a random bit generator. In the future, we will assume that the robot — is a finite automaton with a random bit generator, unless otherwise stated. In addition, in this system, there can be stones-an object that the finite state machine can carry over the graph, and flags-an object whose presence the finite state machine can only "observe". This topic is of interest due to the fact that some of these problems are closely related to problems from probability theory and computational complexity.

This paper continues to address some of the open questions posed in Ajans's thesis: traversal by a robot with a random bit generator of integer spaces in the presence of a stone and a subspace of [4] flags. Such problems help to develop the mathematical apparatus in this area, in addition, in this work we investigate the almost unexplored behavior of a robot with a random number generator. It is extremely important to transfer combinatorial methods developed by A. M. Raigorodsky in the problems of this topic.

This work is devoted to the maze traversal by a finite automaton with a random bit generator. This problem is part of the actively developing theme of traversing the maze by various finite automata or their teams, which is closely related to problems from the theory of complexity of calculations and probability theory. In this work it is shown what dimensions a robot with a generator of random bits, and you can get around stone integer space with flag subspace. In this paper, we will study the behavior of a finite automaton with a random bit generator on integer spaces. In particular, it is proved that the robot bypasses $\mathbb{Z}^2$ and cannot bypass $\mathbb{Z}^3$; the c ++ robot bypasses $\mathbb{Z}^4$ and cannot bypass $\mathbb{Z}^5$; a robot with a stone and a flag bypasses $\mathbb{Z}^6$ and cannot bypass $\mathbb{Z}^7$; a robot with a stone and a flag plane bypasses $\mathbb{Z}^8$ and cannot bypass $\mathbb{Z}^9$.

Keywords: maze traversal, finite state machine.

Bibliography: 8 titles.

[2]The work is supported By the Russian Scientific Foundation (grant № 17-11-01377).

For citation:
E. G. Kondakova, A. Ya. Kanel-Belov, 2019, "Probabilistic methods of bypass of the labyrinth using stones and random number generator" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 295–314.

Введение

Данная работа связана с задачей о поведении роботов в лабиринтах. Вопросы этой темы представляют большой интерес. Это связано с тем, что продвижения в некоторых важных задачах теоретической Computer Scince могут быть получены из области поведения роботов в лабиринтах. Такое положение дел делает актуальными задачи данной тематики. Роботы в лабиринтах очень важны, в частности, им посвящено много литературы [1, 2, 3]. В данной работе продолжают решаться некоторые открытые вопросы, поставленные в диссертации Аджанса: обход роботом с генератором случайных битов целочисленных пространств при наличии камня и подпространства флажков [4]. Подобные задачи помогают развить математический аппарат в данной области, кроме того в этой работе мы исследуем практически не изученное поведение робота с генератором случайных чисел. Представляется чрезвычайно важным перенос комбинаторных методов, разработанных А. М. Райгородским в задачах этой тематики.

Задачи этой темы могут принимать разные виды, но есть несколько общих частей. Основным элементом является робот или коллектив роботов [5]. Робот — это некоторый конечный автомат, но у него может быть генератор случайных битов или память в какой-то форме. Он перемещается в некоторой среде [6]. Её называют лабиринтом. В этой среде могут быть камни, которые робот может переносить, кроме того эта среда может быть раскрашена. Множество флагов в лабиринте, которые робот может увидеть, но не может переносить, по сути является двухцветной раскраской. В дальнейшем будем рассматривать n-цветные раскраски пространств как (n-1)-цветную раскраску подмножества флажков. Робот решает разные задачи такие как: встречи двух роботов, распознавание типа лабиринта и его обход, что фактически является решением нахождения клетки выхода из него.

Имеющиеся результаты для робота

В задачах ниже робот считается обходящим пространство, если для любой клетки пространства вероятность в ней побывать равна единице.

В моей бакалаврской работе были доказаны простейшие случаи возможности обхода роботом с генератором случайных чисел целочисленного пространства:

- Робот обходит $\mathbb{Z}^2$ и не может обойти $\mathbb{Z}^3$,
- Робот с камнем обходит $\mathbb{Z}^4$ и не может обойти $\mathbb{Z}^5$,
- Робот с камнем и флажком обходит $\mathbb{Z}^6$ и не может обойти $\mathbb{Z}^7$,
- Робот с камнем и плоскостью флажков обходит $\mathbb{Z}^8$ и не может обойти $\mathbb{Z}^9$.

Аналогично решенным задачам можно показать, что робот с камнем и подпространством флажков размерности $\mathbb{Z}^n$ не может обойти $\mathbb{Z}^n + 7$

Увеличение количества камней также не представляет интереса, так как робот с двумя камнями может работать, как машина Минского (это будет показано в данной работе). А машина Минского может обойти любое $\mathbb{Z}^n$.

1. Базовые определения нашей модели

1.1. Базовые определения системы робот-лабиринт

Сначала дадим основные определения, которые нам понадобятся для понимания теоретической основы разбираемой темы. В рамках данной работы средой, в которой движется робот, будем считать некоторую группу. Тогда нашу модель можно описать с помощью следующих определений. Часть из этих терминов даны в урезанном варианте и рассматривается только с точки зрения решаемых задач.

Определение 1. Системой лабиринт-робот *называется* $L = (G, R, n, D, M)$, *где* G — *некоторая группа,* R — *конечный автомат специального вида,* n — *неотрицательное целое число,* D — *подмножество* G, M — *подмножество* G. *([7]).*

Определение 2. *Конечный автомат с генератором случайных битов*

$$R = (Q, q_0, \delta, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_k, \dots))$$

называется автоматом робота, где Q — *множество состояний автомата,* $q_0 \in Q$ — *начальное состояние автомата,* $\delta \subset Q \times 0, 1^{(n+2)} \to Q$ — *функция переходов в автомате,* $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k, \dots)$ —*последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин,* $P(\xi_i = 0) = P(\xi_i = 1) = \frac{1}{2}$.

Замечание 1. *Переходы в автомат* $R = (Q, q_0, \delta, \xi)$ *осуществляются по битовым векторам длины* $(n + 2)$

Определение 3. *Состоянием системы лабиринт-робот называется набор*

$$(a, s_1, \dots, s_n, k, q),$$

где $a \in Q$, $s_i \in Q$, $q \in Q$, $k \in \mathbb{N}$. *Будем называть* a — *расположением робота,* s_i — *расположениями камней,* k — *номером хода робота, соответствующим случайной величине* ξ_k, *которая дает случайный бит. Начальным состоянием системы лабиринт-робот будет* $(e, e, e, \dots, e, 1, q_0)$, *где* e — *нейтральный элемент группы* G.

Определение 4. $(d_1, d_2, \dots, d_m) = D$ *называются* переходными элементами *системы лабиринт-робот.*

Определение 5. *Ходом в состоянии* $q \in Q$ *называется пара (d,p), где* $d \in D$, $p \in \{0, 1\}^n$.

По сути ход соответствует перемещению робота в G и множеству камней, которые он перенесёт с собой. Каждому элементу $Q \times \{0, 1\}^{n+2}$ соответствует свой ход.

Определение 6. Результатом хода робота *в состоянии системы* $(a, s_l, s_2, \dots, s_n, k, q)$ *будет состояние* $(a', s_i, s'_2, \dots, s'_n, k+l, q')$ *со следующими свойствами. Обозначим через* (d, p) *ход соответствующий состоянию* q, *тогда*

- $a' = ad$;
- $s'_i = s_i d$ *если* i*-ый бит* p *равен 1 и* $s_i = a$, *иначе* $s'_i = s_i$;
- $w \in \{0, 1\}^{n+2}$, *где:*
  - i*-ый бит* w *равен 1 если* $s_i = a$, *иначе 0;*
  - $n + 1$*-ый бит равен 1, если* $a \in M$, *иначе 0;*

– *$n+2$-ой бит получается из ξ_k*

- *q' получается из состояния q в автомате R по вектору w.*

В целом, система лабиринт-робот L работает так. Начинаем с начального состояния, и поочерёдно изменяем состояние согласно ходам робота. То есть, можно сказать, что данная система генерирует последовательность состояний l_k согласно вышеописанным правилам. Расположение робота на k-ом ходу обозначим через a_k. Важно отметить, что вероятности перемещений не зависят от номера хода.

Лемма 1. *Для задач обхода G равносильно рассматривать существование конечного автомата с генератором случайных чисел и существование недетерминированного автомата с рациональными вероятностями перехода (мы действуем в предположении, что существует $d_i d_j = e$).*

Доказательство. Если существует автомат с генератором случайных чисел, то существует недетерминированный автомат с рациональными вероятностями перехода, так как, по сути, автомат с генератором случайных чисел — частный случай недетерминированного автомата с рациональными вероятностями перехода.

Теперь покажем, что утверждение верно и в обратную сторону. Построим автомат с генератором случайных чисел. Там будут состояния, аналогичные состояниям недетерминированного автомата. Если переходы из вершины имели вероятности $(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_k}{q_k})$, тогда приведём их к общему знаменателю

$$(\frac{p'_1}{q}, \frac{p'_2}{q}, \ldots, \frac{p'_k}{q}).$$

Построим переходы с промежуточным состояниями таким образом, чтобы были аналогичные переходы с вероятностью

$$(\frac{p'_1}{2^{2q}}, \frac{p'_2}{2^{2q}}, \ldots, \frac{p'_k}{2^{2q}})$$

и возврат в исходную вершину с тем же состоянием с вероятностью

$$\frac{2^{2q} - \sum p'_i}{2^{2q}}.$$

Для этого возьмём сбалансированное бинарное дерево из исходной вершины с 2^{2q} листами. Ход между ними имеет вид (d_i, p) из вершины нечётного уровня и (d_j, p) из вершины чётного уровня, где $p = \{0\}^n$, а переходы зависят только от случайного бита. Из ${p'}_i$ листовых вершин переход в вершину аналогичной той, в которую был переход с вероятностью $\frac{p_i}{q_i}$ с таким же ходом. Из оставшихся листов однозначные переходы в ещё одну добавленную вершину с ходом (d_i, p), а из нее переход в исходную вершину с ходом (d_j, p). Так как $\frac{2^{2q} - \sum p'_i}{2^{2q}} < 1$, то с вероятностью 1 робот в какой-то момент перейдёт в одно из состояний соответствующих переходам недетерминированного автомата из рассматриваемой вершины. □

Общий смысл этих определений в том, что у нас есть робот, который является недетерминированным конечным автоматом R, n камней, лабиринт G и множество флагов на нем M, Робот итерационно переходит по своим состояниям и в соответствии этим переходам ходит по лабиринту. Кроме того, он может носить с собой камни, если находится с ними в одной клетке. По сути, робот является программой с конечной памятью и с возможностью получать случайные биты, что мы используем далее для более удобной демонстрации возможности обхода некоторых лабиринтов. Равносильность этих утверждений расписывать не будем, но задача написать программу по роботу или построить робота по программе не составляет особого труда.

1.2. Случайные блуждания

1.2.1. Базовые понятия случайных блужданий

Рассмотрим некоторые необходимые понятия случайных блужданий:

Определение 7. *Простое дискретное случайное блуждание в $\mathbb{Z}^k$ — это случайный процесс $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ с дискретным временем, имеющий вид*

- $Y_n = Y_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, где Y_0 — начальное состояние $\{0\}^k$;
- $P(X_i = e_j) = (X_i = -e_j) = \frac{1}{2k}$, где $e_1, \dots e_k$ -вектора естественного ортогонального базиса
- Случайные величины $X_i,\ i = 1, 2, \dots$ совместно независимы.

Утверждение 1. *Для случайного блуждания в $\mathbb{Z}^k$ равносильны следующие свойства:*

- P ($Y_i = \{0\}^k$ бесконечное число раз) $= 1$, иначе говоря
$$\forall l\ P(x : \exists i_1, i_2, \dots, i_l :\ i_1 < i_2 < \dots < i_l, \forall j\ Y_{i_j}(x) = \{0\}^k) = 1. \tag{1}$$
Будем писать $P(x : \exists i_1, i_2, \dots, i_l :\ i_1 < i_2 < \dots < i_l, \forall j\ Y_{i_j}(x) = \{0\}^k) = 1)$, как $P(Y_i = \{0\}^k$ хотя бы k раз),
- $P(x : \exists i > 0 :\ Y_i(x) = \{0\}^k) = 1$. Где x элемент вероятностного пространства, на котором задано случайное блуждание). Назовём это свойство *возвратностью* случайного блуждания.
- $\forall \vec{x}$ Если $\exists i : P(Y_i = \vec{x}) > 0$, то $P(Y_i = \vec{x}) = 1; P(\exists i > 0 : Y_i = \{O\}^k)$

Доказательство. Покажем несколько следствий между этими свойствами,

- $1 \Rightarrow 2$

  Очевидно, так как получается подставлением $l = 1$
- $2 \Rightarrow 1$

  Продемонстрируем верность этого факта индукцией по l. В качестве базы будет свойство 2.

  Переход. Пусть верно для l, докажем для $l + 1$.
$$Q(l, m_1) = P(\exists i_1, \dots, i_l :\ i_1 < i_2 < \dots < i_l < m_1, \forall j\ Y_{i_j}(x) = \{0\}^k) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 1 \tag{2}$$
$$Q(1, m_2) = P(\exists i :\ i < m_2,\ Y_i(x) = \{0\}^k) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 1 \tag{3}$$
  Из независимости случайных величин можно вывести, что
$$Q(l + 1, m_1 + m_2) \geq Q(l, m_1) Q(1, m_2) \tag{4}$$
  Значит, он тоже стремится к 1.

- $3 \Rightarrow 2$ Берём $\vec{x} = \{0\}^k$
- $1 \Rightarrow 3$

$$P(Y_i = \{0\}^k \text{ бесконечное число раз}) = 1 \tag{5}$$

Тогда, если $\exists i: \ P(Y_i = \vec{x}) > 0$, то $P(y : \exists i > 0 : Y_i(y) = \overrightarrow{-x}) = 1$ Аналогичные для $\overrightarrow{-x}$ получаем $P(y : \exists i > 0 : Y_i(y) = \vec{x}) = 1$.

□

Замечание 2. *Из этого следует, что возвратность для простого случайного блуждания эквивалентна гарантированному обходу достижимого пространства [8].*

Замечание 3. $P(x : \exists i > 0 : \ Y_i(x) = \{0\}^k) = 1$ *эквивалентно расходимости ряда* $\sum_{i=1}^{\infty} P(Y_i = \{0\}^k)$.

Определение 8. *Взаимно однозначное отображение $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots)$ множества (1, 2,...) в себя назовём конечной перестановкой, если $pi_n = n$ для всех n, за исключением, быть может, конечного числа.*

Определение 9. *Если $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ — некоторая последовательность случайных величин, то через $\pi(\xi)$ будем обозначать последовательность $\xi = (\xi_{\pi_1}, \xi_{\pi_2}, \dots)$. Обозначим $\mathscr{F}_n^{\infty} = \sigma(\xi_n, \xi_{n+1}, \dots)$ — σ-алгебру, порожденную случайными величинами $\xi_1, \xi_2, \dots$. И пусть $\mathscr{F}' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_n^{\infty}$. Поскольку пересечение σ-алгебр есть σ-алгебра, то $\mathscr{F}'$ — это σ-алгебра. Она называется «хвостовой» или «остаточной».*

Определение 10. *Событие $A = \{\xi \in B\}, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{\infty})$, то через $\pi(A)$ обозначим событие*

$$\{\pi(\xi \in B)\}, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{\infty}). \tag{6}$$

Определение 11. *Событие $A = \{\xi \in B\}, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{\infty})$, называется* перестановочным, *если для любой конечной перестановки π событие $\pi(A)$ совпадает с A.*

Теорема 1. *Закон «0 или 1» Хьюитта и Сэвиджа [9].*
Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и $A = \{\xi \in B\}$-перестановочное событие. Тогда вероятность $P(A)$ может принимать лишь два значения: нуль или единица.

Замечание 4. *Заметим, что свойство блуждания Y_i с шагом X_i $A = (Y_i = \{o\}^k)$ бесконечное число раз является перестановочным событием случайных величин X_y. Значит по Теореме 1 $P(A)$ принимает значение* 0 *или* 1,

1.2.2. Невозвратность случайного блуждания с тремя некомпланарными векторами на $\mathbb{Z}^k$

Доказательство невозвратности случайного блуждания с тремя некомпланарными векторами на $\mathbb{Z}^k$ разобьём на три части:

- Невозвратность простого случайного блуждания на $\mathbb{Z}^3$;
- Смесь двух случайных блужданий, одно из которых эквивалентно простому случайному блужданию на $\mathbb{Z}^3$ невозвратно;
- Невозвратность случайного блуждания с тремя некомпланарными векторами на $\mathbb{Z}^k$.

Невозвратность простого случайного блуждания на $\mathbb{Z}^3$. Докажем, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(Y_i = \{0\}^3)$$

конечна, так как из этого следует, что

$$P(\exists i > 0:\ Y_i(x) = \{0\}^3) = \varepsilon < 1. \tag{7}$$

$P(Y_{2n+1} = \{0\}^k) = 0$, потому что мы не можем вернуться в исходную клетку за нечётное число шагов.

$$P(Y_{2n} = \{0\}^3) = \sum_{\substack{0\le i_1,i_2,i_3\le n\\ i_1+i_2+i_3=n}} \Big(\frac{(2n)!}{(i_1!i_2!i_3!)^2}\big(\frac{1}{6}\big)^{2n}\Big) = \tag{8}$$

$$= 2^{-2n}\cdot C_{2n}^n \cdot \sum_{\substack{0\le i_1,i_2,i_3\le n\\ i_1+i_2+i_3=n}} \Big(\frac{n!}{i_1!i_2!i_3!}\big(\frac{1}{3}\big)^n\Big)^2 \le \tag{9}$$

$$\le 2^{-2n}\cdot C_{2n}^n \cdot C_n \cdot \sum_{\substack{0\le i_1,i_2,i_3\le n\\ i_1+i_2+i_3=n}} \frac{n!}{i_1!i_2!i_3!}\big(\frac{1}{3}\big)^{2n} \tag{10}$$

где $C_n = \max\limits_{\substack{0\le i_1,i_2,i_3\le n\\ i_1+i_2+i_3=n}} \frac{n!}{i_1!i_2!i_3!}$, тогда

$$P(Y_{2n} = \{0\}^3) \le 2^{-2n}\cdot C_{2n}^n \cdot C_n \cdot 3^{-n}\cdot \sum_{\substack{0\le i_1,i_2,i_3\le n\\ i_1+i_2+i_3=n}} \frac{n!}{i_1!i_2!i_3!}\big(\frac{1}{3}\big)^n = 2^{-2n}\cdot C_{2n}^n \cdot C_n\cdot 3^{-n} \tag{11}$$

Покажем, что

$$C_n \sim \frac{n!}{\lceil \frac{n}{3}+1\rceil !^3} \sim \frac{n!}{\lfloor \frac{n}{3}!\rfloor^3}.$$

Ясно, что

$$C_n \ge \frac{n!}{\lfloor \frac{n}{3}!\rfloor^3}$$

(возьмём $i_j \ge \lfloor \frac{n}{3}\rfloor$). Кроме того, при $i_1 > \lfloor \frac{n}{3}\rfloor > i_2$ верно, что $i_1!\cdot i_2! > (i-1)!\cdot(j+1)!$. Увеличивая подобным образом $\frac{n!}{i_1!i_2!i_3!}$ мы остановимся, когда все i_j будут равны $\lfloor \frac{n}{3}\rfloor$ или $\lceil \frac{n}{3}\rceil$.

Применив к

$$2^{-2n}\cdot C_{2n}^n\cdot C_n\cdot 3^{-n} \tag{12}$$

формулу Стирлинга, получим $\frac{3\sqrt{3}}{2\cdot\pi^{1.5}\cdot n^{1.5}}$.

Сумма $\sum \frac{3\sqrt{3}}{2\cdot\pi^{1.5}\cdot n^{1.5}}$ сходится, значит $P(Y_{2n} = \{0\}^3)$ ограничена функцией, сумма ряда которой сходится. Но, тогда она сама сходится, и блуждание является невозвратным.

Утверждение 2.

$$P(Y_n(\vec{x}) \le 6^3\cdot (P(Y_n = \{0\}^3) + P(Y_{n+1} = \{0\}^3) + P(Y_{n+2} = \{0\}^3) + P(Y_{n+3} = \{0\}^3))$$

Доказательство. Обозначим координаты $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $x'_i = x_i mod 2$, $x' = \sum_{i=1}^{3} x'_i$. Без ограничения общности можно считать, что $x_i \geq 0$. Тогда

$$P(Y_{2n+x_1+x_2+x_3} = \vec{x}) = \tag{13}$$

$$= \sum\nolimits_{\substack{0 \leq i_1, i_2, i_3 \leq n \\ i_1+i_2+i_3=n}} \Big(\frac{(2n + \sum_{j=1}^{j\leq 3} x_j)!}{\prod_{j=1}^{j\leq 3} (i_j! \cdot (i_j + x_j)!)} \big(\frac{1}{6}\big)^{2n+\sum_{j=1}^{j\leq 3} x_j} \Big) \leq \tag{14}$$

$$\leq 6^3 \cdot \sum\nolimits_{\substack{0 \leq i_1, i_2, i_3 \leq n \\ i_1+i_2+i_3=n}} \Big(\frac{(2n + x' + \sum_{j=1}^{j\leq 3} x_j)!}{\prod_{j=1}^{j\leq 3} (i_j! \cdot (i_j + x_j + x'_j)!)} \big(\frac{1}{6}\big)^{2n+x'+\sum_{j=1}^{j\leq 3} x_j} \Big) \leq \tag{15}$$

$$\leq 6^3 \cdot \sum\nolimits_{\substack{0 \leq i_1, i_2, i_3 \leq n \\ i_1+i_2+i_3=n}} \Big(\frac{(2n + x' + \sum_{j=1}^{j\leq 3} x_j)!}{(\prod_{j=1}^{j\leq 3} (i_j + (x_j + x'_j)/2)!)^2} \big(\frac{1}{6}\big)^{2n+x'+\sum_{j=1}^{j\leq 3} x_j} \Big) \leq \tag{16}$$

$$\leq 6^3 \cdot \sum\nolimits_{\substack{0 \leq i_1, i_2, i_3 \leq n' \\ i_1+i_2+i_3=n'}} \Big(\frac{(2n')!}{(i_1! i_2! i_3!)^2} \big(\frac{1}{6}\big)^{2n'} \Big) = 6^3 \cdot P(Y_{n'} = \{0\}^3) \tag{17}$$

Где $n' = n + (\sum_{j=1}^{j\leq 3} (x_j + x'j))/2$. Тогда $2n' - 2n - (x_1 + x_2 + x_3) = 0$, 1,2 или 3. □

Замечание 5. *Из этого следует, что $P(Y_n = \overrightarrow{-x}) < \frac{c}{n\sqrt{n}}$, где c — некоторая константа, одинаковая для всех $\vec{x}$.*

Смесь двух блужданий, одно из которых эквивалентно случайному блужданию на $\mathbb{Z}^3$ невозвратно.

Смесь блужданий X и Y, с вероятностями p, q $(p + q = 1; p, q > 0)$, где X – эквивалентен простому случайному блужданию, обозначим через Z, Тогда

$$P(Z_n = \vec{z}) = \sum_{\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}} \sum_{i=0}^{n} P(X_i = \vec{x}) \cdot P(Y_{n-i} = \vec{y}) \cdot p^i \cdot q^{n-i} \cdot C_n^i. \tag{18}$$

Мы хотим доказать, что $P(Z_n = \vec{z}) < \frac{b}{n\sqrt{n}}$ для некоторого b. Обозначим за $\varepsilon = \min(p, q)^2$ и докажем, что такие константы b есть для

$$\sum_{\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}} \sum_{i=0}^{i<\varepsilon n} P(X_i = \vec{x}) \cdot P(Y_{n-i} = \vec{y}) \cdot p^i \cdot q^{n-i} \cdot C_n^i \tag{19}$$

и

$$\sum_{\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}} \sum_{i\geq\varepsilon n}^{n} P(X_i = \vec{x}) \cdot P(Y_{n-i} = \vec{y}) \cdot p^i \cdot q^{n-i} \cdot C_n^i. \tag{20}$$

Начнём со второго случая

$$\sum_{\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}} \sum_{i\geq\varepsilon n}^{n} P(X_i = \vec{x}) \cdot P(Y_{n-i} = \vec{y}) \cdot p^i \cdot q^{n-i} \cdot C_n^i \leq \tag{21}$$

$$\leq \max_{i\geq \varepsilon n,\vec{x}}(P(X_i=\vec{x}))\sum_{\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}}\sum_{i\geq\varepsilon n}^{n}\cdot P(Y_{n-i}=\vec{y})\cdot p^i\cdot q^{n-i}\cdot C_n^i = \tag{22}$$

$$= \max_{i\geq \varepsilon n,\vec{x}}(P(X_i=\vec{x}))\sum_{i\geq\varepsilon n}^{n}\sum_{\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}} P(Y_{n-i}=\vec{y})\cdot p^i\cdot q^{n-i}\cdot C_n^i = \tag{23}$$

$$= \max_{i\geq \varepsilon n,\vec{x}}(P(X_i=\vec{x}))\sum_{i\geq\varepsilon n}^{n} p^i\cdot q^{n-i}\cdot C_n^i\cdot \sum_{\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}} P(Y_{n-i}=\vec{y}) \leq \tag{24}$$

$$\leq \max_{i\geq \varepsilon n,\vec{x}}(P(X_i=\vec{x}))\sum_{i\geq\varepsilon n}^{n} p^i\cdot q^{n-i}\cdot C_n^i \leq \tag{25}$$

$$\leq \max_{i\geq \varepsilon n,\vec{x}}(P(X_i=\vec{x}))\cdot p+q^n = \max_{i\geq \varepsilon n,\vec{x}}(P(X_i=\vec{x})) \leq \frac{c}{\varepsilon n\sqrt{\varepsilon n}} = \frac{c_2}{n\sqrt{n}}. \tag{26}$$

Теперь разберём первый случай

$$\sum_{\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}}\sum_{i=0}^{i<\varepsilon n} P(X_i=\vec{x})\cdot P(Y_{n-i}=\vec{y})\cdot p^i\cdot q^{n-i}\cdot C_n^i. \tag{27}$$

Обозначим через $p'=\min(p,q), q'=1-p'$. Тогда, так как $\varepsilon\leq\frac{1}{4}$, то

$$\sum_{\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}}\sum_{i=0}^{i<\varepsilon n} P(X_i=\vec{x})\cdot P(Y_{n-i}=\vec{y})\cdot p^i\cdot q^{n-i}\cdot C_n^i \leq \tag{28}$$

$$\leq \sum_{\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}}\sum_{i=0}^{i<\varepsilon n} P(X_i=\vec{x})\cdot P(Y_{n-i}=\vec{y})\cdot p'^i\cdot q'^{n-i}\cdot C_n^i \tag{29}$$

Зададим $f(i)=p'^i\cdot q'^{n-i}\cdot c_i^n$. Тогда $f(i)$ возрастает на $(0,\varepsilon n)$.

$$\frac{f(i+1)}{f(i)} = \frac{p'}{q'}\cdot\frac{n-i}{i+1} \geq \frac{p'}{q'}\cdot\frac{n-\varepsilon n}{\varepsilon n+1} \geq \frac{p'\cdot(1-p'^2)}{p'^2\cdot(1-p')} = 1+\frac{1}{p'} \tag{30}$$

Значит, с какого-то n можно сказать, что $f(i)$ возрастает на $(0,\varepsilon n)$. Тогда

$$\sum_{\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}}\sum_{i=0}^{i<\varepsilon n} P(X_i=\vec{x})\cdot P(Y_{n-i}=\vec{y})\cdot p'^i\cdot q'^{n-i}\cdot C_n^i \leq \tag{31}$$

$$\leq f(\lfloor\varepsilon n\rfloor)\cdot\sum_{i=0}^{i<\varepsilon n}\sum_{\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}} P(X_i=\vec{x})\cdot P(Y_{n-i}=\vec{y}) \leq \tag{32}$$

$$\leq f(\lfloor\varepsilon n\rfloor)\cdot\varepsilon n \tag{33}$$

Так как

$$\sum_{\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}} P(X_i=\vec{x})\cdot P(Y_{n-i}=\vec{y}) \leq \sum_{\vec{x}} P(X_i=\vec{x})\cdot\sum_{\vec{y}} P(Y_i=\vec{y}) = 1.$$

$$f(\lfloor\varepsilon n\rfloor)\cdot\varepsilon n = p'^2\cdot n\cdot C_n^{n\cdot p'^2}\cdot p'^{np'^2}\cdot(1-p')^{n(1-p'^2)} \tag{34}$$

Применив сюда формулу Стирлинга, получим

$$f(\lfloor \varepsilon n \rfloor) \cdot \varepsilon n \sim const \cdot \frac{n}{\sqrt{n}} \cdot \Big(\frac{p'^{p'^2} \cdot (1-p')^{1-p'^2}}{(p'^2)^{p'^2} \cdot (1-p'^2)^{1-p'^2}} \Big)^n \tag{35}$$

Если мы докажем, что $d = \frac{p'^{p'^2} \cdot (1-p')^{1-p'^2}}{(p'^2)^{p'^2} \cdot (1-p'^2)^{1-p'^2}} < 1$, тогда так как верно, что

$$\forall c \, \forall d' < 0 \, \exists n_0 \forall n > n_0 \quad const\sqrt{n} \cdot d'^n \le c \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}} \tag{36}$$

Мы получим, что $\exists n_0, c' : \forall n > n_0$

$$\sum_{\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}} \sum_{i=0}^{i<\varepsilon n} P(X_i = \vec{x}) \cdot P(Y_{n-i} = \vec{y}) \cdot p^i \cdot q^{n-i} \cdot C_n^i \le \frac{c'}{n\sqrt{n}} \tag{37}$$

Так как эта сумма сама по себе не превосходит единицу, то $\exists n_0, c_1 : \forall n > 0$

$$\sum_{\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}} \sum_{i=0}^{i<\varepsilon n} P(X_i = \vec{x}) \cdot P(Y_{n-i} = \vec{y}) \cdot p^i \cdot q^{n-i} \cdot C_n^i \le \frac{c_1 + n_0\sqrt{n_0}}{n\sqrt{n}} \tag{38}$$

Осталось проверить утверждение про d:

$$d < 1 \Leftrightarrow \frac{p'^{p'^2} \cdot (1-p')^{1-p'^2}}{(p'^2)^{p'^2} \cdot (1-p'^2)^{1-p'^2}} < 1 \Leftrightarrow \tag{39}$$

$$\Leftrightarrow p'^{p'^2} \cdot (1-p')^{1-p'^2} < (p'^2)^{p'^2} \cdot (1-p'^2)^{1-p'^2} \Leftrightarrow p'^{(-p'^2)} < (1+p')^{1-p'^2} \Leftrightarrow \tag{40}$$

$$\Leftrightarrow \big(1 + \frac{1}{p'}\big)^{(p'^2)} < 1 + p' \Leftrightarrow p'^2 \cdot \ln\big(1 + \frac{1}{p'}\big) < \ln(1+p') \Leftrightarrow \tag{41}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(1+p')}{p'} < p' \cdot \ln\big(1 + \frac{1}{p'}\big) \tag{42}$$

Заметим, что последнее это $g(1+p') > g\big(1+\frac{1}{p'}\big)$, где $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$. Нам достаточно показать, что $g(x)$ убывающая функция при $x > 0$.

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(x+1)}{x^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} - \ln(x+1) < 0 \Leftrightarrow \tag{43}$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < \ln(x+1) - 1 + \frac{1}{1+x} = h(x) \tag{44}$$

$h(0) = 0$ и $h'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$, что больше нуля при $x > 0$, тогда $h(x) > 0$.

Из разбора этих двух случаев становится ясно, что $P(Z_n = \vec{z}) \le \frac{c_1 + c_2 + n_0\vec{n_0}}{n\sqrt{n}}$.

Невозвратность случайного блуждания с тремя некомпланарными векторами. Докажем это утверждение на $\mathbb{Z}^k$.

Замечание 6. *Если бы это было не так, то из любой достижимой клетки можно было бы вернуться в стартовую с положительной вероятностью.*

Замечание 7. *Если блуждание Y_i построенное на шагах X_i возвратное, то Y_i^0 которое строится на нем с шагами равным n обычных ходов $X_i' = \sum_{j=n\cdot(i-1)+1}^{n\cdot i} X_i$, то есть $Y_i^0 = Y_{ni}$ тоже возвратное.*

Доказательство. Если бы это было не так, то $P(Y_i^0 = \{0\}^k)$ бесконечное число раз$) = 0$ (по закону 0 и 1), кроме того, рассмотрим блуждания $Y_i^l = Y_{ni+l}$, при $l < n$. Какое-то из них посещает $\{0\}^k$ бесконечное число раз, но тогда рассмотрим его после первого посещения $\{0\}^k$. Оно будет эквивалентно $P(Y_i^0 = \{0\}^k$ бесконечное число раз). Противоречие. □

Пусть случайное блуждания Y_i с тремя некомпланарными векторами на $\mathbb{Z}^k$ возвратно (обозначим эти вектора $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$). Тогда $\exists n_1 > 1 : P(Y_{n_1 - 1} = -\vec{a}_1) > 0$, кроме того $P(Y_{n_1-1} = (n_1 - 1) \cdot \vec{a_1}) > 0$ ($n_1 - 1$ шаг по $-\vec{a}$). Из этого следует, что для $m_1 = n_1 \cdot (n_1 - 1)^2$, $l_1 = (n_1 - 1) \cdot n_1$ верно, что $P(Y_{m_1} = -l_1 \cdot \vec{a_1}) > 0$ (делаем $n_1 \cdot (n_1 - 1)$ раз шаг за $n_1 - 1$ ходов дающий $\overrightarrow{-a}$) и $P(Y_{m_1} = l_1 \cdot \vec{a_1}) > 0$ (делаем $(n_1 - 2) \cdot (n_1 - 1)$ раз шаг за $n_1 - 1$ ходов дающий $\overrightarrow{-a_1}$ и $2(n_1 - 1)^2$ шагов по вектору $\vec{a_1}$). Проведя аналогичные действия получим $Y_i' = Y_{m_1 \cdot m_2 \cdot m_3}$ с положительными вероятностями переходов по векторам

$$l_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \vec{a_1}, -l_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \vec{a_1}, m_1 \cdot l_2 \cdot m_3 \cdot \vec{a_2}, -m_1 \cdot l_2 \cdot m_3 \cdot \vec{a_2}, m_1 \cdot m_2 \cdot l_3 \cdot \vec{a_3}, -m_1 \cdot m_2 \cdot l_3 \cdot \vec{a_3}.$$

Но тогда Y_i' — смесь блуждания эквивалентного простому в $\mathbb{Z}^3$ с коэффициентом минимальной вероятности одного из этих 6 шагов(а она положительная) умноженным на 6 и еще некоторого блуждания. Значит оно невозвратно. Противоречие.

Замечание 8. *Для случайного блуждания с тремя некомпланарными векторами (и ненулевой вероятностью вернуться в стартовую клетку из любой достигаемой)* Y_i $\forall\varepsilon > 0 \exists$ *конечное число* $\vec{x} : P(\exists i : Y_i = \vec{x}) > \varepsilon$.

Это легко доказать, показав, что для

$$Y_i \ \exists c \ \forall \vec{x} \ \forall n \ P(Y_n = \vec{x}) < \frac{c}{n\sqrt{n}}.$$

Из этого следует, что

$$\exists n_0 \ \forall \vec{x} : P(\exists n > n_0 : Y_n = \vec{x}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

но количество $\vec{x} : P(\exists n \leq n_0 : Y_n = \vec{x}) >= \frac{\varepsilon}{2}$ не больше $\frac{2n_0}{\varepsilon}$. Значит, количество клеток, которые будут посещены с вероятностью хотя бы ε не больше $\frac{2n_0}{\varepsilon}$.

2. Обход пространства размерностью меньше 10.

2.1. Робот с генератором случайных битов.

Разберём для начала случай, когда есть только робот, и покажем, что он может обойти $\mathbb{Z}^2$ и не может $\mathbb{Z}^3$. В этом случае $M = \{\varnothing\}, n = 0$. Множество D в пространстве $\mathbb{Z}^k$ имеет вид $(\vec{e_1}, -\vec{e_1}, \vec{e_2}, -\vec{e_2}, \ldots, \vec{e_k}, -\vec{e_k})$. Робот считается обходящим пространство, если для любой ее клетки он посещает её с вероятностью один.

2.1.1. Обход роботом $\mathbb{Z}^2$.

Написать программу для такого робота довольно легко. Он просто должен эмулировать случайное блуждание. А так как оно обходит плоскость, то и робот ее обойдёт [10].

2.1.2. Невозможность обойти $\mathbb{Z}^3$.

Докажем это для любого робота. Рассмотрим граф, соответствующий недетерминированному конечному автомату. Обозначим его размер через m. Будем считать, что вероятность каждого ребра больше нуля и все вершины достижимы из начальной (кроме, возможно, её самой). Иначе их можно просто выкинуть и это никак не повлияет на поведение робота. Возьмём компоненты сильной связности графа. Назовём компоненту листовой, если из неё нет рёбер в другие компоненты (такая обязательно есть). Клетками будем называть элементы лабиринта (в данном случае элементы пространства $\mathbb{Z}^k$), вершинами состояния робота. Расстояние между клетками будет считать по метрике расстояния городских кварталов. Плоскостями будем называть множество клеток вида $\vec{x_0} + a_1\vec{x_1} + a_2\vec{x_2}$ при фиксированных $\vec{x_0}$, $\vec{x_1}$, $\vec{x_2}$ и целых a_1, a_2. Предположим, что есть робот, обходящий пространство.

Утверждение 3. *Робот с недетерминированным графом, соответствующим листовой компоненте сильной связанности робота, обходящего пространство, тоже должен обходить пространство.*

Доказательство. Обозначим какую-то из его вершин за новое начальное состояние q_0', а новый автомат, построенный на этой листовой компоненте за $R_0'(q_0')$, размер компоненты обозначим через m'. Тогда новый робот должен обходить все пространство, кроме не более чем m клеток. Это связано с тем, что от q_0 до q_0' есть путь не более, чем за m шагов (обозначим за $\vec{x_1}(q_0')$ клетку в пространстве в которой мы оказались дойдя до (q_0')). Тогда продолжение этого пути с вероятностью 1 должно побывать во всех клетках пространства, кроме тех, в которой он уже был, а их не более m. Так как они последовательны, то эти клетки помещаются в сферу с центром в $\{0\}^k$ (где k — размерность пространства, в котором мы работаем) и радиусом m, и в сферу с центром $\vec{x_1}(q_0')$ и радиусом m. Это верно при выборе любого q_0' из нашей листовой компоненты. С вероятностью один мы когда-нибудь попадём в клетку $\vec{x_2}$ на расстоянии $2m+1$ от $\{0\}^k$. Обозначим состояние, в котором мы оказались в этой клетке за q_1' (Это состояние принадлежит нашей листовой компоненте). С этого момента робот ведёт себя как робот $R'(q_1')$, находящийся в клетке $\vec{x_2}$ в изначальном состоянии, а он обходит все пространство, кроме сферы с центром в $\vec{x_2}$ и радиусом m. Значит $R'(q_0')$ обходит с одной стороны все клетки кроме сферы с центром в $\{0\}^k$ и радиусом m, с другой стороны все клетки кроме сферы с центром в $\vec{x_2}$ и радиусом m. Эти сферы не пересекаются, поэтому $R_0'(q_0')$ обходит все пространство. Кроме того, перемещения этого робота являются возвратными. □

Теперь разберёмся, почему недетерминированный автомат, ориентированный граф которого является компонентой сильной связности, не может обходить пространство (начальная вершина — q_0, размер графа m). Обозначим за $p_{i,j}$ вероятность попасть в состояние q_j из состояния q_i за количество шагов, не превосходящее m (при $i = j$ считаем, что нужен хотя бы один шаг). Так как это компонента сильной связности с m вершинами $p_{i,j} > 0$. Обозначим за p $= \min\limits_{i,j} p_{i,j}$. Тогда вероятность не попасть в течение $l \cdot m$ шагов в j-ую вершину меньше $(1-p)^l$. А оно стремится к нулю при $l \to \infty$. Значит, с вероятностью 1 мы побываем в состоянии q_j из чего следует, что мы побываем там бесконечное число раз.

Мы уже получили, что перемещения такого робота возвратны, то есть он побывает в клетке $\{0\}^k$ бесконечное число раз. Рассмотрим вероятности попасть в клетку в состояние q_j, если прошлый раз мы были в ней в состояние q_i. Обозначим эту вероятность через $p_{i,j}$ ($p_{i,j}$ не зависит от клетки в которой мы начинаем). $\forall i \sum_{j=1}^{m} p_{i,j} = 1$. Рассмотрим эти переходы по состояниям, как некоторый другой ориентированный граф, по которому мы гуляем бесконечно долго. В нем можно выбрать несколько состояний $q_{i,1}, q_{i,2}, \ldots, q_{i,l}$ таких, что мы гарантировано побываем хотя бы в одном из них, они все достижимы из q_0 и q_{i,j_1} не достижимо из q_{i,j_2} (будем брать по одной вершине из листовых компонент сильной связности нового ориентированного графа). Мы побываем в одном из этих состояний бесконечное число раз. Обозначим его через q'.

Замечание 9. *Для любой клетки, где робот был в состояние q', он побывал там бесконечное число раз.*

Теперь рассмотрим случайное блуждание в пространстве с векторами переходов и их вероятностями такими, что пара (вектор, вероятность) соответствуют паре (вектор, вероятность) перемещения робота между двумя состояниями q'. Как сказано выше, это случайное блуждание возвратно, значит оно не может содержать некомпланарных векторов. Тогда после первого попадания в q' множество клеток, где мы можем быть в состояние q' является элементом какой-то плоскости. Но мы гарантировано побываем в любой клетке, а в сфере с центром в ней и радиусом m есть вероятность побывать в состояние q'. Тогда если мы возьмём клетку на расстояние больше $m+1$ от этой плоскости, то мы не сможем в неё попасть. Противоречие.

2.2. Робот с генератором случайных чисел и камнем

Теперь рассмотрим случай робота с камнем. Изначальное положение его и камня в клетке с нулевыми координатами.

2.2.1. Обход $\mathbb{Z}^4$

Довольно легко описать программу, в соответствии с которой будет перемещаться робот. Он отходит от камня, случайно блуждает вдоль координат x_1, x_2, пока не вернётся к камню, а потом делает шаг в случайном направлении вдоль x_3, x_4 вместе с камнем. Повторяет. Так как случайное блуждание на плоскости возвратно, робот все время возвращается к камню. Тогда, ходя вместе с камнем, робот обходит всю плоскость x_3, x_4. так как перемещения с камнем в случайном направлении тоже является случайным блужданием. Оно возвратно, поэтому робот побывает с камнем во всех клетках плоскости x_3, x_4 бесконечное число раз. Тогда для любой из этих клеток мы бесконечное число раз блуждали от камня вдоль x_1, x_2. Рассмотрев только эти ходы получим простое случайное блуждания из клетки плоскости x_3, x_4 вдоль x_1, x_2, а таким образом можно получить все клетки пространства.

2.2.2. Невозможность обойти $\mathbb{Z}^5$

Разберёмся, как ходит робот. Разделим его перемещения на два типа:

- Перемещение с камнем,
- Перемещение без камня.

Перемещение без камня.

Утверждение 4. *Если робот, обходящий пространство, уходит от камня, то он должен к нему вернуться с вероятностью один*

Доказательство. Робот, который с какого-то момента имеет вероятность не вернуться, с этого момента соответствует какому-то роботу без камня. А про них уже доказано, что они обходят в лучшем случае плоскость и клетки, удалённые от неё не более, чем на m(где m-количество состояний робота). А это — явно не всё пространство. □

Покажем, что если робот возвращается к камню с вероятностью один, то множество клеток, которые он может посетить, отойдя от камня, является конечным объединением плоскостей. Пусть мы отходим от камня в состоянии q_1. Тогда возьмём недетерминированный конечный автомат R' с состояниями, аналогичными R и новым начальным состоянием q_1'; вероятностям перехода между состояниями, соответствующими R совпадают с аналогичными в R при условии отсутствия камней в клетке; переход из q_1' соответствуют переходам из q_1 при условие наличия камня в клетке. Обозначим количество состояний в R' через m. Новый робот имеет те же вероятности положения в пространстве, начиная с отхода от камня в состояние q_1' до возвращения к нему.

Рассмотрим его ориентированный граф компонент сильной связности. Если какой-нибудь лист не достижим при блуждании в пространстве до первого возвращения в изначальную клетку, то мы можем его выкинуть из графа, так как мы все равно в него не попадаем. Выкинув таким образом все недостижимые компоненты, возьмём какое-нибудь состояние $q \neq q_1'$.

Утверждение 5. *Множество клеток, в которых мы можем оказаться в состоянии q, будет подмножеством объединения конечного числа плоскостей с одинаковыми образующими векторами.*

Этот факт очевиден для случая, когда таких клеток конечно, так как их можно покрыть конечным количеством плоскостей (по плоскости на каждую клетку), так что будем рассматривать только q, для которых существует сколь угодно далёкая клетка с вероятностью её посетить в состоянии q.

Докажем это сначала для случая, где q находится в листовой компоненте. Возьмём случайное блуждание, построенное на переходах в пространстве робота между двумя состояниями q (между ними могут быть только состояния отличные от q).

Если в нём нет трёх некомпланарных векторов, то все клетки, куда робот может попасть в этом состоянии лежат в какой-то одной плоскости (даже без условия остановки на камне). Кроме того, от остальных состояний он может дойти до этого за не более, чем m ходов. Тогда множество клеток, где робот может оказаться в состояние q удалено от стартовой клетки не больше, чем на m. Значит, состояние q достижимо роботом только в клетках являющимися параллельными плоскостями, удалёнными от стартовой клетки не больше, чем на m, а таких конечно.

Для блуждания с тремя некомпланарными векторами $\forall \varepsilon > 0$ существует конечное число клеток, достижимых с вероятностью хотя бы ε. Тогда $\exists r(\varepsilon)$: для клеток удалённых от места нынешнего нахождения хотя бы на $r(\varepsilon)$ вероятность в них оказаться меньше ε. Обозначим за p минимальную вероятность дойти из состояния того же листа q' до q за не более, чем m шагов. Значит, есть клетка($\vec{x_1}$), достижимая блужданием на расстоянии не больше m от изначальной клетки с вероятностью хотя бы p, но тогда она достижима из любой клетки в состоянии q с вероятностью хотя бы p. Кроме того, есть клетка($\vec{x_2}$), в которой робот может оказаться в состоянии q на расстоянии от изначальной клетки($\vec{x_0}$) большем, чем $m + r(p)$. Тогда расстояние между ($\vec{x_2}$) и ($\vec{x_1}$) хотя бы $r(p)$, но в этом случае вероятность попасть в ($\vec{x_1}$) из ($\vec{x_2}$) меньше p. Противоречие.

Замечание 10. *Если компонента с состоянием q не листовая, то из неё за не более, чем m шагов можно дойти до состояния q'. Тогда клетки, где мы можем оказаться в состоянии q находятся на расстоянии не больше m от подмножества клеток объединения конечного числа плоскостей, что тоже является подмножеством клеток объединения конечного числа плоскостей.*

Возьмём множество плоскостей L_i, соответствующих плоскостям состояний q. Кроме того, разрешим L_i совпадать, чтобы плоскость учитывалась отдельно для каждого промежуточного состояния q и q_1 из которого мы стартовали от камня. Их количество обозначим за l.

Перемещения с камнем. Осталось разобраться, как устроены перемещения с камнем. Построим автомат, соответствующий тасканию камня изначального робота. Для этого состояние в котором мы уходим из клетки оставив камень будем рассматривать, как переход из этого состояния в состояния, в которых мы могли бы вернуться к камню, с вероятностями, с которыми это могло бы произойти. Чтобы мы не оставляли камень, добавим по одному состоянию на каждый такой переход, чтобы сделать шаг вверх с камнем и шаг вниз с ним же. Так как этот автомат все время таскает камень, то он ведёт себя, как просто робот без камня.

Обозначим множество клеток, где побывает этот робот за B. Рассмотрим какую-нибудь из его листовых компонент связности. Мы можем в неё попасть за какое-то конечное число ходов робота. Обозначим B' множество клеток, где побывает листовой робот. Рассмотрим вероятности побывать в клетках $\mathbb{Z}^5$ в состояние q на плоскости L_i.

Утверждение 6. *Покажем, что* $\forall \varepsilon > 0$ *множество клеток* x_j *для которых* $P(\exists i :$*листовой робот попал в* $L_i(x_j)$ *в состояние* $q) > \varepsilon$ *имеет вид конечного объединения подпространств размерности четыре, где за подпространство размерности четыре берём множество клеток представимых в виде* $\vec{x_0}+a_1\vec{x_1}+a_2\vec{x_2}+a_3\vec{x_3}+a_4\vec{x_4}$ *при фиксированных линейных независимых* $\vec{x_0},\ \vec{x_1},\ \vec{x_2},\ \vec{x_3},\ \vec{x_4}$ *и целых* $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$.

Доказательство. Давайте посмотрим на множество клеток, в которые он попадёт при блуждание по плоскостям L_i с вероятностью хотя бы $\frac{\varepsilon}{l}$. Для этого введём на $\mathbb{Z}^5$ отношение эквивалентности $\vec{x_1} \sim \vec{x_2}$, которое верно при $L_i(\vec{x_1}) = L_i(\vec{x_2})$. Посмотрим, что произойдёт с блужданием на склейке. Обозначим новый лабиринт через Z', а его случайное блуждание через X'. Если X' возвратное, то достижимые клетки задаются не более чем двумя векторами, но тогда $L_i(B)$ уже подпространство размерности четыре. Из невозвратности X' следует, что в Z' конечное число клеток с вероятностью попадания хотя бы $\frac{\varepsilon}{l}$. Развернув отображение обратно получим, что множество клеток $\mathbb{Z}^5$, в которые робот попадёт при блуждание от камня соответствущее плоскости L_i с вероятностью хотя бы $\frac{\varepsilon}{l}$ будет конечным объединением плоскостей. Так как вероятность робота попасть способом, соответствующим L_i, в прообраз не превосходит вероятности из образа. □

Чтобы $P(\exists i :$листовой робот попал в $L_i(x_j)$ в состоянии $q) > \varepsilon$ надо, чтобы $\sum\limits_i P($листовой робот попал в $L_i(x_j)$ в состоянии $q) > \varepsilon$, но тогда верно, что $\exists i : P($листовой робот попал в $L_i(x_j)$ в состоянии $q) > \frac{\varepsilon}{l}$. А множество таких x_j конечно. Значит клеток, которые гарантированно посетит робот с вероятностью хотя бы ε не больше конечного объединения подпространств четвёртой степени. Проведя аналогичные рассуждения для других состояний этой листовой компоненты получим, что множество клеток, в которые попадает листовой робот с вероятностью хотя бы $m \cdot \varepsilon$ конечно. Тогда взяв $\varepsilon < \frac{1}{m}$ получим, что листовой робот гарантировано побывает в множестве клеток, покрываемым конечным объединением подпространств четвёртой степени, то есть изначальный робот не может обойти $\mathbb{Z}^5$

2.3. Робот с генератором случайных чисел, камнем и флажком.

Перейдём к случаю робота с камнем и флажком. Изначальное положение камня и робота в клетке с нулевыми координатами, там же находится единственный элемент из M.

2.3.1. Обход $\mathbb{Z}^6$

Для начала опишем, как, имея флажок и камень, побывать камнем на $\mathbb{Z}^4$, Робот ходит от камня без него по случайным векторам из множества $(\vec{e_1},\ -\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ -\vec{e_2})$. Если он возвращается к камню не попав в процессе на клетку с флажком, то он перемещается с камнем по случайному вектору из $(\vec{e_3},\ -\vec{e_3},\ \vec{e_4},\ -\vec{e_4})$, иначе он перемещается с камнем по случайному вектору из $(\vec{e_1},\ -\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ -\vec{e_2})$, а потом вместе с камнем переходит по случайному вектору из $(\vec{e_3},\ -\vec{e_3},\ \vec{e_4},\ -\vec{e_4})$. Из-за того, что случайное блуждание возвратно и обходит всю плоскость, робот с камнем гарантировано вернётся на плоскость $\vec{e_1},\ \vec{e_2}$. Так как он окажется там бесконечное число раз, то с вероятностью один робот в какой-то момент дойдёт до флага и обратно. Тогда камень гарантированно побывает во всех клетках плоскости $\vec{e_1},\ \vec{e_2}$ бесконечное число раз и из каждой клетки плоскости проблуждает вдоль $\vec{e_3},\ \vec{e_4}$. Добавив случайное блуждание от камня и обратно по векторам из множества $(\vec{e_5},\ -\vec{e_5},\ \vec{e_6},\ -\vec{e_6})$ после каждого перемещения камня получим обход $\mathbb{Z}^6$.

2.3.2. Невозможность обхода $\mathbb{Z}^7$

Рассмотрим блуждания робота. Они могут иметь следующие виды:

- Перемещение с камнем,
- Перемещение от камня и обратно,
- Перемещение от флага до камня или от камня до флага.
- Перемещение от флага до флага; этот вид можно не рассматривать, как отдельный тип, т.к. оно может обойти только множество клеток, являющихся подмножеством конечного числа плоскостей.

Заметим, что чтобы обходить $\mathbb{Z}^7$ мы всегда должны с вероятностью один возвращаться к флагу, иначе мы и $\mathbb{Z}^5$ не сможем обойти, и с вероятностью один возвращаться к камню, так как флаг — это камень, который мы не можем таскать, а робот с камнем не может обойти даже $\mathbb{Z}^5$.

Посмотрим на множество клеток, где может располагаться камень, чтобы от него можно было дойти до флага.

Оно совпадает с множеством клеток до которых можно дойти от камня, а это множество является подмножеством объединения конечного числа плоскостей(из-за того, что блуждание робота без камня возвратное).

Обозначим его через $L = \bigcup\limits_i L_i$, где L_i-плоскости покрывающие перемещения робота от камня до камня или флага, мощность этого множества обозначим за l. Так как мы возвращаемся к флагу, то камень в какой-то момент должен возвращаться в $L(\{0\}^k)$. Посмотрим, как себя может вести робот с камнем между встречами с флажком. Пусть мы в первый раз подойдём к камню в состоянии q_1. Тогда покажем, какой робот без камня соответствует перемещениям робота с камнем с момента первой встречи камня после флага, до последнего отхода перед флагом. Недетерминированный конечный автомат $R'(q_1')$:

- Состояния аналогичны R,
- Начальное состояние соответствует состоянию q_1,
- Вероятностям перехода между состояниями, соответствующими R, совпадают с реализуемыми вероятностями перехода между изначальными состояния с камнем до следующего состояния с камнем. В случае, если при этом камень оставался на месте, к состояниям R' добавляется дополнительные для прохода с камнем вверх и вниз (вероятность посещения клеток новым роботом от этого может только увеличиться),
- Обозначим количество состояний в R' через m.

Новый робот имеет те же вероятности положения в пространстве с камнем, начиная с отхода от камня в состояние q_1' до возвращения к нему. Кроме того для клеток, где может оказаться R с камнем верно, что блуждая из этой клетки R' попадёт в множество клеток $L(\{0\}^7)$ с вероятностью 1. Покажем, что тогда множество клеток, которые он может посетить является конечным объединением подпространств размерности четыре. Рассмотрим его ориентированный граф компонент сильной связности. Возьмём какое-нибудь из состояние q'.м Этот факт очевиден для случая, когда таких клеток конечно, так их можно покрыть конечным количеством подпространств, так что будем рассматривать только q' для которых существует сколь угодно далёкая клетка с вероятностью её посетить в состояние q'.

Докажем это сначала для случая, где q' находится в листовой компоненте. Возьмём случайное блуждание, построенное на переходах в пространстве робота между двумя состояниями q' (между ними могут быть только состояния отличные от q').

Обозначим за p минимальную вероятность дойти из состояния того же листа q'_2 до q' за не более, чем m шагов. Так как на блуждание не наложены ограничения остановки, то из любой клетки, где R' может побывать в состояние q'(обозначим их через B) можно с вероятностью хотя бы p попасть в клетку из $L' = \bigcup\limits_{d(\vec{x},\{0\}^7)\leq m} L(\vec{x})$ в состояние q'. Возьмём конечное множество подпространств размерности четыре $L'_i : L' = \bigcup\limits_i L'_i$, их количество l'. Обозначим за $B_i \subset B$: блуждая из них можно с вероятностью хотя бы $\frac{p}{l'}$ попасть в клетку из L'_i. Тогда $B = \bigcup\limits_{i=1}^{l'} B_i$.

Докажем, что множество клеток, из которых случайным блужданием можно попасть в L'_i с вероятностью хотя бы $\frac{p}{l'}$ является подмножеством конечного объединения подпространств размерности четыре, тогда будет верно и то, что B является подмножеством конечного объединения подпространств размерности четыре. Для этого введём на $\mathbb{Z}^7$ отношение эквивалентности $\vec{x_1} \sim \vec{x_2}$, которое верно при $L'_i(\vec{x_1}) = L'_i(\vec{x_2})$. Посмотрим, что произойдёт с блужданием на склейке. Обозначим новый лабиринт через Z', а его случайное блуждание через X'. Если X' возвратное, то достижимые клетки задаются не более чем двумя векторами, но тогда $L'_i(B_i)$ уже подпространство размерности четыре. Из невозвратности X' следует, что в Z' конечное число клеток с вероятностью попадания хотя бы $\frac{p}{l'}$. Развернув отображение обратно получим, что множество клеток $\mathbb{Z}^7$, в которые робот попадёт при блуждание от камня соответствущее плоскости L'_i с вероятностью хотя бы $\frac{p}{l'}$ будет подмножеством конечного объединения плоскостей. Так как вероятность робота попасть способом, соответствующим L'_i, в прообраз не превосходит вероятности из образа.

Замечание 11. *Если компонента с состоянием q не листовая, то из неё за не более, чем m шагов можно бы было дойти до состояния q'. Тогда клетки, где мы можем оказаться в состояние q находятся на расстояние не больше m от подмножества клеток объединения конечного числа подпространств размерности четыре, что тоже является подмножеством клеток объединения конечного числа подпространств размерности четыре.*

Количество разных R' конечно, в каждом из них конечное число состояний для каждого из которых верно, что множество клеток в котором он побывает является подмножеством объединения конечного числа подпространств размерности четыре. Значит робот R побывает с камнем в множестве клеток, являющемся подмножеством объединения конечного числа подпространств размерности четыре. Но так как от камня робот уходит не дальше L, то множество клеток, где он побывает является подмножеством объединения конечного числа подпространств размерности шесть. Но тогда он не обходит $\mathbb{Z}^7$.

2.4. Робот с генератором случайных чисел, камнем и плоскостью флажком

Осталось рассмотреть случай робота с камнем и плоскостью флажков. Изначальное положение камня и робота в клетке с нулевыми координатами. Из неё же выходит плоскость флажков с координатами $(0, 0, 0, 0, 0, 0, a, b)$.

2.4.1. Обход $\mathbb{Z}^8$

Чтобы построить обход $\mathbb{Z}^8$ просто слегка модернизируем программу робота, обходящего $\mathbb{Z}^8$ с камнем и флажком. Оказавшись на флаге робот должен сделать случайный, равновероятный ход по одному из векторов $(\vec{e_7}, -\vec{e}_7, \vec{e_8}, -\vec{e}_8, 0)$. Переход на $\vec{0}$ делаем ходом по вектору $\vec{e_7}$, а потом обратно. Из-за того, что это блуждание побывает во всех клетках плоскости бесконечное число раз, а изначальный робот был во всех клетках $\mathbb{Z}^6$ (и находился на клетке с флагом и камнем бесконечное число раз), то теперь робот побывает в каждой клетке пространстве $\mathbb{Z}^8$,

2.4.2. Невозможность обхода $\mathbb{Z}^9$

Этот случай не требует долгих доказательств, так как может быть доказан по аналогии со случаем одного флажка. Множество клеток, где может оказаться камень будет являться объединением конечного числа “подпространств” размерности 6. То есть клетки, которые гарантировано посетит робот, являются объединением конечного числа "подпространств" размерности 8. Значит робот не обойдёт $\mathbb{Z}^9$.

3. Заключение

Мы исследовали поведение роботов на целочисленной решетке, снабженных одним камешком и датчиком случайных чисел. При отсутствии камней но наличия датчика случайных чисел можно обойти плоскую решетку, но нельзя решетку более высокой размерности. При наличии одного камешка (и датчика случайных чисел) можно обойти решетку размерности 3 и 4, но нельзя решетку более высокой размерности.

При наличии двух камешков (и датчика случайных чисел) можно обойти решетку любой размерности. Для этого можно имитировать машину Минского следующим образом. Расположим камешки на плоскости. Теорема о возвращении для плоского случайного блуждания позволяет их двигать и преобразовывать слой, важно однако, определять из взаимное расположение. Встретив первый камешек, осуществим случайное блуждание ко второму, но при этом будем фиксировать МОНОТОННОСТЬ пути - отсутствия движения в двух противоположных направлениях а также направления, в которых осуществлялось смещение. Рано или поздно камешки соединяться монотонным путем и мы определим их взаимное расположение, что позволяет построить машину Минского.

Удивительно, что наличия Кирпича - т.е. отмеченной клетки - позволяет обойти с помощью камешка и датчика случайных чисел 5-и и 6-и мерную решетки, а наличие афинного подмногообразия коразмерности 6 из кирпичей – решетки размерностей 7 и 8. Если многообразие кирпичей имеет коразмерность больше нуля но меньше 6 - то обойти можно, а если больше 6 – то нельзя.

С коразмерностью 6 ситуация весьма интересна. Пусть есть датчик случайных чисел, 1 камешек и подмногообразие размерности 6 из кирпичей (которые можно распознавать, но нельзя двигать). Если размерность решетки больше 8 то ее не обойти, но можно обойти, если в ее клетки случайным образом расставить символы конечного алфавита, состоящего более чем из одной буквы.

Таким образом, наличие датчиков случайных чисел и расстановок случайных символов может приводить к весьма нетривиальным последствиям.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Килибарда Г., Кудрявцев В. Б., Ушчумлич Ш. М. Независимые системы автоматов в лабиринтах // Дискрет. матем. 1987.

2. Килибарда Г. О сложности автоматного обхода лабиринтов // Дискрет. матем. 1993.

3. Килибарда Г., Кудрявцев В. Б., Ушчумлич Ш. М. Независимые системы автоматов в лабиринтах // Дискрет. матем. 2003.

4. Анджанс А. В. Поведение детерминированных и вероятностных автоматов в лабиринтах: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Рига, 1987.

5. Килибарда Г., Кудрявцев В. Б., Ушчумлич Ш. М. Коллективы автоматов в лабиринтах // Дискрет. матем. 2003.

6. Килибарда Г., Ушчумлич Ш. М. О лабиринтах-ловушках для коллективов автоматов // Дискрет. матем. 1993.

7. Килибарда Г., Кудрявцев В. Б., Ушчумлич Ш. М. Системы автоматов в лабиринтах // Дискрет. матем. 2006.

8. Spitzer F. Principles of Random Walks. Van Nostrand, 1964.

9. Ширяев А. Н. Вероятность: В 2 кн. Вероятность-1, Вероятность-2. М.: МЦНМО, 2004.

10. Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А. Теоремы и задачи о процессах Маркова. М.: Наука, 1967.

REFERENCES

1. Kilibarda G., Kudryavtsev V.B., Ushchumlich Sh.M. 1987, “Dependent systems of automatic machines in labyrinths”, Discrete Mathematics and Applications.

2. Kilibarda G. 1993, “About the difficulty of automatically navigating of labyrinths”, Discrete Mathematics and Applications.

3. Kilibarda G., Kudryavtsev V.B., Ushchumlich Sh.M. 2003, “Dependent systems of automatic machines in labyrinths”, Discrete Mathematics and Applications.

4. Anjans A.V. 1987, “The behavior of deterministic and probabilistic automatic machines in labyrinths”, PhD Thesis, Riga.

5. Kilibarda G., Kudryavtsev V.B., Ushchumlich Sh.M. 2003, “Collectives of automatic machines in labyrinths”, Discrete Mathematics and Applications.

6. Kilibarda G., Kudryavtsev V.B, Ushchumlich Sh.M. 1993, “About labyrinths-trap for collectives of automatic machines”, Discrete Mathematics and Applications.

7. Kilibarda G., Kudryavtsev V.B, Ushchumlich Sh.M. 2006, “Systems of automatic machines in labyrinths”, Discrete Mathematics and Applications.

8. Spitzer F. 1964, Principles of Random Walks, Van Nostrand.

9. Shiryaev A.N. 2004, “Probability”. MCCNMO, Moscow.

10. Dynkin E.B., Yushkevich A.A. 1967, Theorems and problems about processes of Markov, Nauka, Moscow.

Получено 5.10.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 519.145 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-3-315-331

О некоторых 3-примитивных полуполевых плоскостях[1]

О. В. Кравцова, И. В. Шевелева

Кравцова Ольга Вадимовна — кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики № 2, Институт математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета (г. Красноярск).
e-mail: ol71@bk.ru
Шевелева Ирина Викторовна — кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики № 2, Институт математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета (г. Красноярск).
e-mail: sheveliv@gmail.com

Аннотация

Развивается подход к построению и классификации полуполевых проективных плоскостей с использованием линейного пространства и регулярного множества. Решается задача построения проективной плоскости с фиксированными ограничениями на группу коллинеаций (автоморфизмов).

Проективная плоскость называется полуполевой, если ее координатизирующее множество есть полуполе, или кольцо с делением. Это алгебраическая система с двумя бинарными операциями, удовлетворяющая всем аксиомам тела, за исключением, возможно, ассоциативности умножения. Коллинеация конечной проективной плоскости порядка p^{2n} ($p > 2$ простое) называется бэровской, если она фиксирует поточечно подплоскость порядка p^n. Если порядок бэровской коллинеации делит $p^n - 1$, но не делит $p^i - 1$ при $i < n$, то коллинеация называется p-примитивной. Полуполевая плоскость, допускающая такую коллинеацию, также называется p-примитивной.

М. Кордеро в 1997 г. построила четыре примера 3-примитивных полуполевых плоскостей порядка 81 с ядром порядка 9, используя регулярное множество, образованное 2×2-матрицами. В статье рассмотрен общий случай 3-примитивных полуполевых плоскостей порядка 81 с ядром порядка ≤ 9 и регулярным множеством в кольце 4×4-матриц. Полученные авторами ранее независимо теоретические результаты применены для построения матричного представления регулярного множества и группы автотопизмов. Выделено восемь классов изоморфизма 3-примитивных полуполевых плоскостей порядка 81, включающих примеры М. Кордеро. Разработан алгоритм, оптимизирующий проверку попарной изоморфности полуполевых плоскостей, и его программная реализация. Показана разрешимость полной группы коллинеаций 3-примитивных полуполевых плоскостей порядка 81, вычислены порядки автотопизмов, в том числе бэровских.

Описано строение попарно неизотопных полуполей порядка 81, координатизирующих восемь попарно неизоморфных 3-примитивных полуполевых плоскостей порядка 81. Найдены спектры мультипликативных луп ненулевых элементов, лево- и правосторонние спектры, максимальные подполя и автоморфизмы. Полученные результаты иллюстрируют гипотезу Г. Венэ о лево- или правопримитивности конечного полуполя и демонстрируют некоторые аномальные свойства конечных полуполей.

Методы и алгоритмы, представленные в статье, могут быть использованы для построения и исследования полуполей и полуполевых проективных плоскостей нечетного порядка p^n также для $p \geq 3$ и $n \geq 4$.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-01-00707).

Ключевые слова: полуполевая плоскость, коллинеация, автотопизм, бэровская подплоскость.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:
О. В. Кравцова, И. В. Шевелева. О некоторых 3-примитивных полуполевых плоскостях // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 3, с. 315–331.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 3.

UDC 519.145 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-3-315-331

On some 3-primitive projective planes[2]

O. V. Kravtsova, I. V. Sheveleva

Kravtsova Olga Vadimovna — candidate of physico-mathematical Sciences, associate Professor, Department of mathematics № 2, Institute of mathematics and computer sciences of Siberian Federal University (Krasnoyarsk).
e-mail: ol71@bk.ru
Sheveleva Irina Viktorovna — candidate of physico-mathematical Sciences, associate Professor, Department of mathematics № 2, Institute of mathematics and computer sciences of Siberian Federal University (Krasnoyarsk).
e-mail: sheveliv@gmail.com

Abstract

We evolve an approach to construction and classification of semifield projective planes with the use of the linear space and spread set. This approach is applied to the problem of existance for a projective plane with the fixed restrictions on collineation group.

A projective plane is said to be semifield plane if its coordinatizing set is a semifield, or division ring. It is an algebraic structure with two binary operation which satisfies all the axioms for a skewfield except (possibly) associativity of multiplication. A collineation of a projective plane of order p^{2n} ($p > 2$ be prime) is called Baer collineation if it fixes a subplane of order p^n pointwise. If the order of a Baer collineation divides $p^n - 1$ but does not divide $p^i - 1$ for $i < n$ then such a collineation is called p-primitive. A semifield plane that admit such collineation is a p-primitive plane.

M. Cordero in 1997 construct 4 examples of 3-primitive semifield planes of order 81 with the nucleus of order 9, using a spread set formed by 2×2-matrices. In the paper we consider the general case of 3-primitive semifield plane of order 81 with the nucleus of order ≤ 9 and a spread set in the ring of 4×4-matrices. We use the earlier theoretical results obtained independently to construct the matrix representation of the spread set and autotopism group. We determine 8 isomorphism classes of 3-primitive semifield planes of order 81 including M. Cordero examples.

We obtain the algorithm to optimize the identification of pair-isomorphic semifield planes, and computer realization of this algorithm. It is proved that full collineation group of any semifield plane of order 81 is solvable, the orders of all autotopisms are calculated.

We describe the structure of 8 non-isotopic semifields of order 81 that coordinatize 8 non-isomorphic 3-primitive semifield planes of order 81. The spectra of its multiplicative loops of non-zero elements are calculated, the left-, right-ordered spectra, the maximal subfields and

[2]The study was carried out with a grant from the Russian Foundation for Basic Research (project 16-01-00707).

automorphisms are found. The results obtained illustrate G. Wene hypothesis on left or right primitivity for any finite semifield and demonstrate some anomalous properties.

The methods and algorithsm demonstrated can be used for construction and investigation of semifield planes of odd order p^n for $p \geq 3$ and $n \geq 4$.

Keywords: semifield plane, collineation, autotopism, Baer subplane.

Bibliography: 20 titles.

For citation:
O. V. Kravtsova, I. V. Sheveleva, 2019, "On some 3-primitive projective planes", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 315–331.

1. Введение

Геометрические свойства конечной проективной плоскости существенно зависят от свойств алгебраических операций, задаваемых на координатизирующем множестве. Дезарговы плоскости, имеющие наиболее богатую группу коллинеаций, координатизируются полем. Если плоскость координатизируется квазиполем, то она является плоскостью трансляций. Плоскости, координатизируемые полуполем (полуполевые плоскости), являются плоскостями трансляций и дуальные к ним плоскости также – плоскости трансляций.

Связь геометрических свойств плоскости и алгебраических свойств координатизирующего множества настолько тесная, что даже на первый взгляд незначительные различия свойств координатизирующих множеств дают существенные различия геометрических свойств плоскостей. Известно, что группа коллинеаций дезарговой плоскости неразрешима, однако все существующие примеры полуполевых плоскостей имеют разрешимую группу коллинеаций. Более того, существует гипотеза, что группа коллинеаций всякой конечной недезарговой полуполевой плоскости разрешима (см. [1], вопрос 11.76, 1990 г.). В ряде работ (см. [2, 3]) устанавливается справедливость данной гипотезы для отдельных классов плоскостей.

Известен способ построения и исследования полуполевых плоскостей, как и других плоскостей трансляций, с использованием линейного пространства четной размерности и специального семейства линейных преобразований, называемого регулярным множеством. Матричное представление регулярного множества тесно связано с геометрическими свойствами плоскости. Так, в работах [4, 5, 6] изучены полуполевые плоскости ранга 2 над своим ядром, группа автоморфизмов которых содержит бэровские коллинеации определенного порядка. Результаты были обобщены для произвольного ранга авторами настоящей статьи в [7, 8, 9].

Целью представленного исследования является применение полученных теоретических результатов для построения p-примитивных полуполевых плоскостей ранга более 2. Пакет разработанных авторами компьютерных программ протестирован на примере 3-примитивных полуполевых плоскостей порядка 81 – минимальном недезарговом примере. Построено матричное представление регулярного множества и группы автотопизмов, выделены все попарно неизоморфные плоскости, описано строение координатизирующих полуполей. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Существует ровно восемь, с точностью до изоморфизма, 3-примитивных недезарговых полуполевых плоскостей порядка 81. Каждая из них имеет 2-ранг группы автотопизмов, равный трем, и разрешимую полную группу коллинеаций.*

2. Основные определения и обозначения

Приведем некоторые основные определения и обозначения, в соответствии с [2, 10].

Полуполем (semifield) называют множество S, на котором определены две бинарные алгебраические операции $+$ и $*$, при выполнении условий:

1) $\langle S,+\rangle$ – абелева группа с нейтральным элементом 0;

2) $\langle S^*,*\rangle$ – лупа ($S^*=S\setminus\{0\}$);

3) выполняются дистрибутивные законы $a*(b+c)=a*b+a*c$, $(b+c)*a=b*a+c*a$ для любых $a,b,c\in S$.

Ослабление двусторонней дистрибутивности до односторонней приводит к понятию квазиполя – правого либо левого.

Полуполе S содержит подмножества N_r, N_m, N_l, называемые *правым, средним и левым ядрами* соответственно:

$$\begin{aligned} N_r &= \{n\in S \mid (a*b)*n=a*(b*n)\ \forall a,b\in S\},\\ N_m &= \{n\in S \mid (a*n)*b=a*(n*b)\ \forall a,b\in S\},\\ N_l &= \{n\in S \mid (n*a)*b=n*(a*b)\ \forall a,b\in S\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Пересечение $N=N_l\cap N_m\cap N_r$ назвают *ядром* полуполя, множество

$$Z=\{z\in N \mid z*a=a*z\ \forall a\in S\}$$

– *центром* полуполя. Ядра и центр конечного полуполя являются подполями, и полуполе можно рассматривать как линейное пространство над каждым из них. Следовательно, порядок конечного полуполя равен степени простого числа p^n.

Рассмотрим линейное пространство W размерности n над полем $GF(p^s)$ и подмножество линейных преобразований

$$R\subset GL_n(p^s)\cup\{0\},$$

удовлетворяющее условиям:

1) R состоит из p^{ns} квадратных $(n\times n)$-матриц над $GF(p^s)$;

2) R содержит нулевую и единичную матрицы (0 и E);

3) для любых двух различных матриц $A,B\in R$, $A\neq B$, разность $A-B$ является невырожденной матрицей.

Такое множество R называют *регулярным множеством* (spread set, [2]).

Из перечисленных условий следует, что матрица регулярного множества однозначно определяется выбором любой своей строки (или столбца). Будем считать, что элементы матрицы определяются выбором, для определенности, последней строки. Введем биективное отображение θ из W на R и запишем регулярное множество в виде:

$$R=\{\theta(y)\mid y\in W\},$$

тогда последняя строка матрицы $\theta(y)$ совпадает с вектором y,

$$\theta(0,0,\dots 0)=0,\quad \theta(0,0,\dots,1)=E.$$

Введем умножение на множестве W правилом

$$x*y=x\cdot\theta(y),\qquad x,y\in W.$$

Тогда $\langle W,+,*\rangle$ – правое квазиполе [10, 3], и при дополнительном условии замкнутости R по сложению – полуполе.

Отметим, что для построения и исследования конечных полуполей в качестве основного поля $GF(p^s)$ используют обычно центр Z полуполя, регулярное множество является тогда n-мерным линейным пространством над Z. Однако удобнее рассматривать векторное пространство W и матрицы регулярного множества над полем простого порядка $\mathbb{Z}_p$. В этом случае отображение θ записывается с использованием только линейных функций, что значительно упрощает рассуждения и вычисления (в том числе компьютерные).

Пусть W – линейное пространство размерности n над $\mathbb{Z}_p$,

$$R = \{\theta(y) \mid y \in W\} \subset GL_n(p) \cup \{0\}$$

– регулярное множество, замкнутое по сложению, $\langle W, +, *\rangle$ – полуполе с умножением $x * y = x\theta(y)$. Рассмотрим внешнюю прямую сумму $V = W \oplus W$ и определим проективную плоскость π порядка p^n следующим образом:

1) элементы (x, y), $x, y \in W$ пространства V назовем аффинными точками плоскости π;

2) аффинными прямыми назовем смежные классы по подгруппам

$$V(m) = \{(x, x\theta(m)) \mid x \in W\}, \quad m \in W,$$
$$V(\infty) = \{(0, y) \mid y \in W\};$$

3) множество всех смежных классов по одной подгруппе $V(m)$ или $V(\infty)$ назовем особой точкой (m) или (∞) соответственно;

4) множество особых точек назовем особой прямой $[\infty]$;

5) инцидентность определим теоретико-множественным способом.

Построенная так проективная плоскость является полуполевой плоскостью, ее полная группа коллинеаций (автоморфизмов) имеет вид $Aut\,\pi = T \leftthreetimes G$, где $T = \{\tau_{a,b} | a, b \in W\}$ – группа трансляций,

$$\tau_{a,b} : (x, y) \to (x + a, y + b), \quad x, y \in W,$$

G – трансляционное дополнение, стабилизатор точки $(0, 0)$. Автоморфизмы из G задаются линейными преобразованиями пространства V:

$$\alpha : (x, y) \to (x, y) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Здесь A, B, C, D – матрицы над $\mathbb{Z}_p$ размерности $n \times n$ (можно показать, что для любой полуполевой плоскости $C = 0$). Заметим, что запись коллинеаций из G при помощи только линейных преобразований становится возможной за счет матричного представления регулярного множества над полем простого порядка. Если в качестве основного поля используется ядро полуполя $GF(p^s)$, то такие коллинеации задаются полулинейными преобразованиями, что ведет к усложнению расчетов и рассуждений.

Подгруппа $\Lambda < G$, образованная коллинеациями, фиксирующими треугольник $(0, 0)$, (0), (∞), $[0, 0]$, $[0]$, $[\infty]$, называется *группой автотопизмов*. Матрицы, соответствующие линейным автотопизмам – блочно-диагональные,

$$\lambda : (x, y) \to (x, y) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Особыми свойствами обладают коллинеации, фиксирующие замкнутую конфигурацию. Так, известно [2], что всякая коллинеация порядка два является либо центральной, либо бэровской коллинеацией.

Коллинеация проективной плоскости называется *центральной*, если она фиксирует поточечно некоторую прямую (*ось*), некоторую точку (*центр*) и все прямые, проходящие через центр (не поточечно). Если центр инцидентен оси, то коллинеация называется *элацией*, в противном случае – *гомологией*.

В частности, трансляции $\tau_{a,b}$ – это элации с осью $[\infty]$. Трансляционное дополнение G представимо как $G = \Omega \leftthreetimes \Lambda$, где Ω – группа элаций с осью $[0]$ и центром (∞). Эта группа элементарная абелева, ее порядок равен порядку плоскости. Следовательно, изучение полной группы коллинеаций полуполевой плоскости сводится к описанию ее автотопизмов.

Центральные коллинеации образуют в группе автотопизмов следующие циклические подгруппы [11]:

1) $H_r \simeq N_r^*$ – группа гомологий с осью $[0, 0]$ и центром (∞);

2) $H_l \simeq N_l^*$ – группа гомологий с осью $[\infty]$ и центром $(0, 0)$;

3) $H_m \simeq N_m^*$ – группа гомологий с осью $[0]$ и центром (0).

Коллинеация проективной плоскости π порядка m называется *бэровской*, если она фиксирует поточечно максимальную подплоскость порядка $\sqrt{|\pi|} = \sqrt{m}$ (*бэровскую подплоскость*).

Пусть π — полуполевая плоскость порядка p^{2n} с (левым) ядром $K \simeq GF(p^s)$, где p – простое число. Коллинеация β плоскости π называется *p-примитивной бэровской коллинеацией*, если она фиксирует бэровскую подплоскость поточечно и ее порядок есть p-примитивный делитель $p^n - 1$ (то есть $|\beta| \mid (p^n - 1)$, но $|\beta| \nmid (p^i - 1)$, $i < n$). Полуполевая плоскость порядка p^{2n} называется *p-примитивной полуполевой плоскостью*, если она допускает p-примитивную бэровскую коллинеацию.

3. Теоретические результаты

Первая работа, посвященная изучению p-примитивных полуполевых плоскостей, была опубликована в 1987 году. В этой работе Й. Хирамин, М. Мацумото и Т. Ойама начали изучение плоскостей ранга 2. Они предложили идею построения регулярного множества и получили некоторые свойства группы коллинеаций таких плоскостей [12]. Изучение p-примитивных полуполевых плоскостей было продолжено Н. Л. Джонсоном в статьях [13, 14]. В частности, в [14] он доказал, что порядок p-примитивной полуполевой плоскости π ранга 2 равен q^4 $(q = p^r)$ и определил вид регулярного множества плоскости. В работах [15, 16] М. Кордеро изучила и выписала вид всех автотопизмов и доказала разрешимость группы автотопизмов в частном случае при $q = p$. М. Кордеро построила [6] матричное представление регулярного множества p-примитивной полуполевой плоскости порядка p^{2n} с ядром порядка p^n и привела примеры четырех попарно неизоморфных 3-примитивных полуполевых плоскостей порядка 81 с ядром $GF(9)$. Если π – p-примитивная полуполевая плоскость порядка $q^4 = p^{2n}$ с ядром $GF(q^2)$, то базис 4-мерного линейного пространства над $GF(q^2)$ может быть выбран так, что регулярное множество плоскости π в $GL_2(q^2) \cup \{0\}$ имеет вид

$$\Sigma_0 = \left\{ \begin{pmatrix} u^q & f(v) \\ v & u \end{pmatrix} \;\middle|\; u, v \in GF(q^2) \right\}. \tag{2}$$

Здесь и далее при ссылках на разные источники выбраны единообразные обозначения.

В работе [8] автором настоящей статьи описан общий случай p-примитивной полуполевой плоскости с ядром произвольного порядка p^s: построено матричное представление регулярного множества, доказана разрешимость группы коллинеаций, описано ее строение. Перечислим некоторые из результатов.

Теорема 2. *Пусть π – полуполевая плоскость порядка q^4 с ядром $K \simeq GF(p^s)$ $(q = p^r$, $q^4 = (p^s)^{2n}$, $p > 2$ – простое число$)$, допускающая линейную бэровскую коллинеацию σ порядка $q+1$. Тогда π может быть представлена $4n$-мерным векторным пространством над K так, что ее регулярное множество $\Sigma \subset GL_{2n}(K) \cup \{0\}$ имеет вид*

$$\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} U^q & f(V) \\ V & U \end{pmatrix} \;\middle|\; U, V \in F \right\}, \tag{3}$$

где $F \subset GL_n(K) \cup \{0\}$, $F \simeq GF(q^2)$, f *– аддитивная взаимно однозначная функция из* F *в* $GL_n(K) \cup \{0\}$. *Подгруппа бэровских коллинеаций* $\langle\sigma\rangle$ *в этом случае записывается как*

$$Q = \langle\sigma\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} \;\middle|\; C \in F,\ |C| = q+1,\ m = 1, 2, \ldots, q+1 \right\}. \tag{4}$$

Элементы матриц здесь и всюду далее представляют собой квадратные блоки-подматрицы одинаковой размерности, E – единичная матрица.

Далее, в [9] рассмотрен следующий частный случай.

Пусть π – полуполевая плоскость порядка q^4 с ядром $K \simeq GF(p^s)$ ($q = p^r$, $q^4 = (p^s)^{2n}$, $p > 2$ – простое число), регулярное множество которой в $GL_{2n}(K) \cup \{0\}$ имеет вид

$$\Sigma_1 = \left\{ \begin{pmatrix} U^q & \tau\varphi(V) \\ V & U \end{pmatrix} \;\middle|\; U, V \in F \right\}, \tag{5}$$

где φ – аддитивная взаимно однозначная функция из F в F, $\tau \notin F$ нормализует F.

Теорема 3. *2-ранг группы линейных автотопизмов* Λ_0 *плоскости* π *с регулярным множеством* Σ_1 *равен трем или четырем.*

Теорема 4. *Нормализатор подгруппы* Q *(4) в группе линейных автотопизмов* Λ_0 *содержит ровно 7 инволюций:*

$$h_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad h_3 = \begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix},$$

$$h_4 = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}, \quad h_5 = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & -L \end{pmatrix}, \quad h_6 = \begin{pmatrix} -L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}, \quad h_7 = \begin{pmatrix} -L & 0 \\ 0 & -L \end{pmatrix},$$

где $L = \begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \in GL_{2n}(K)$, *причем* h_1, h_2, h_3 *– гомологии,* h_4, h_5, h_6, h_7 *– бэровские инволюции.*

Теорема 5. *Пусть* π *– полуполевая плоскость порядка* q^4 *с регулярным множеством* Σ_1. *Тогда полная группа коллинеаций плоскости* π *разрешима.*

Далее, в [7] автором рассмотрен случай, когда группа автотопизмов полуполевой плоскости нечетного порядка содержит бэровскую инволюцию.

Теорема 6. *Пусть* π *– полуполевая плоскость порядка* p^N, $p > 2$ *– простое число, допускающая бэровскую инволюцию* β *в трансляционном дополнении. Тогда* $N = 2n$ *и плоскость* π *может быть задана* $4n$*-мерным векторным пространством над* $\mathbb{Z}_p$ *так, что* β *определяется* $(4n \times 4n)$*-матрицей*

$$\beta = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}.$$

Плоскость π *имеет регулярное множество* $\Sigma_2 \subset GL_{2n}(p) \cup \{0\}$,

$$\Sigma_2 = \left\{ \theta(V, U) = \begin{pmatrix} m(U) & f(V) \\ V & U \end{pmatrix} \;\middle|\; U \in K_1,\ V \in K_2 \right\}, \tag{6}$$

где K_1 *и* K_2 *– регулярные множества в* $GL_n(p) \cup \{0\}$, K_1 *– регулярное множество бэровской подплоскости* π_0, *фиксируемой инволюцией* β, m, f *– инъективные линейные отображения из* K_1 *и* K_2 *соответственно в* $GL_n(p) \cup \{0\}$, *причем* $m(E) = E$, $f(E) \neq E$.

Заметим, что для плоскости ранга 4 множества матриц K_1 и K_2 состоят из p^2 элементов и, следовательно, являются полями [17]. Кроме того, в этом случае можно считать $K_1 = K_2$.

4. Построение попарно неизоморфных полуполевых плоскостей порядка 81

Если полуполевая плоскость является p-примитивной, то некоторая степень p-примитивной бэровской коллинеации является бэровской инволюцией.

В работе [7] описан алгоритм построения полуполевой плоскости, допускающей бэровскую инволюцию, на примере $|\pi| = 81$. Применим его для построения 3-примитивных полуполевых плоскостей порядка 81.

Применяя теорему 6, зададим плоскость π 8-мерным линейным пространством над полем $\mathbb{Z}_3$ и регулярным множеством $\Sigma_2 \subset GL_4(3) \cup \{0\}$. Тогда регулярное множество $F \subset GL_2(3) \cup \{0\}$ бэровской подплоскости π_0 является 2-мерным линейным пространством,

$$F = \{U = u_1 D + u_2 E \mid u_1, u_2 \in \mathbb{Z}_3\}, \tag{7}$$

$\{D, E\}$ – базис F. Очевидно, подплоскость π_0 – дезаргова, F – поле порядка 9. В качестве D можно выбрать, без потери общности, матрицу $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Линейные функции m и f представимы в виде

$$m(u_1 D + u_2 E) = u_1 M + u_2 E, \qquad f(u_1 D + u_2 E) = u_1 F_1 + u_2 F_2$$

для каждого $U = u_1 D + u_2 E \in F$. Здесь $M, F_1, F_2 \in GL_2(3)$, $m(E) = E$, $F_2 = f(E) \neq E$. Регулярное множество Σ_2 является 4-мерным линейным пространством над $\mathbb{Z}_3$ с базисом, например,

$$\theta(D,0) = \begin{pmatrix} 0 & F_1 \\ D & 0 \end{pmatrix}, \ \theta(E,0) = \begin{pmatrix} 0 & F_2 \\ E & 0 \end{pmatrix}, \ \theta(0,D) = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \ \theta(0,E) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Если матрицы M, F_1, F_2 выбраны так, что для всех $x, y, z, t \in \mathbb{Z}_3$ матрица

$$\begin{aligned} \theta(xD + yE, zD + tE) = &\begin{pmatrix} zM + tE & xF_1 + yF_2 \\ xD + yE & zD + tE \end{pmatrix} = \\ &= x \begin{pmatrix} 0 & F_1 \\ D & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & F_2 \\ E & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \end{aligned}$$

является либо нулевой (при $x = y = z = t = 0$), либо невырожденной, то тройка матриц M, F_1, F_2 задает полуполевую плоскость π, удовлетворяющую указанным условиям.

С использованием компьютера получено 106 наборов матриц M, F_1, F_2, т.е. построено 106 полуполевых плоскостей порядка 81, допускающих бэровскую инволюцию в трансляционном дополнении. Для каждой из построенных плоскостей были найдены левое, правое и среднее ядра (1) координатизирующих полуполей. Выделены следующие случаи:

1) $|N_l| = |N_m| = 3, \ |N_r| = 9;$
2) $|N_l| = |N_r| = 3, \ |N_m| = 9;$
3) $|N_m| = |N_r| = 3, \ |N_l| = 9;$
4) $|N_l| = |N_m| = |N_r| = 9;$
5) $|N_l| = |N_m| = |N_r| = 81.$

В случае 5, очевидно, построенная плоскость является дезарговой.

Каждому из ядер полуполя соответствует множество матриц [11], определяющее подгруппу гомологий плоскости с регулярным множеством R, обозначим эти множества соответственно R_l, R_m, R_r, все они являются подполями в $GL_n(p) \cup \{0\}$:

$$\begin{aligned} R_l &= \{M \in GL_n(p) \cup \{0\} \mid MT = TM \ \forall T \in R\}, \\ R_m &= \{M \in R \mid MT \in R \ \forall T \in R\}, \\ R_r &= \{M \in R \mid TM \in R \ \forall T \in R\}. \end{aligned}$$

Тогда подгруппы гомологий в группе автотопизмов представимы как:

$$\begin{aligned} H_r &= \left\{ \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \;\middle|\; M \in R_r^* \right\} \simeq N_r^*, \\ H_m &= \left\{ \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \;\middle|\; M \in R_m^* \right\} \simeq N_m^*, \\ H_l &= \left\{ \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \;\middle|\; M \in R_l^* \right\} \simeq N_l^*. \end{aligned}$$

Разобьем построенные плоскости на классы изоморфизма, используя замену базиса 8-мерного линейного пространства, сохраняющую бэровскую инволюцию β. Замена базиса с матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$$

задает изоморфизм полуполевых плоскостей с регулярными множествами R и R' в том и только в том случае, когда для всех матриц $T \in R$ произведение $P_1^{-1}TP_2$ принадлежит множеству R' [18]. Условие сохранения бэровской инволюции приводит к блочно-диагональной структуре матриц P_1 и P_2. Использование такой матрицы перехода выделило 16 классов попарно изоморфных плоскостей порядка 81, считая дезаргову.

Следующий этап расчетов должен установить наличие изоморфизма между плоскостями из разных выделенных классов, без требования сохранения бэровской инволюции β. Непосредственный перебор всех возможных матриц перехода требует расчетов для

$$|GL_4(3)|^2 = ((81-1)(81-3)(81-9)(81-27))^2 = 24261120^2$$

вариантов матриц P_1 и P_2, что нерационально. Количество вариантов легко сократимо до $24261120 \cdot 80$ за счет следующих рассуждений.

Пусть $T = E \in R$, тогда $P_1^{-1}TP_2 = P_1^{-1}P_2 = T' \in R'$, тогда $P_2 = P_1T'$. Таким образом, достаточно рассматривать все возможные матрицы $P_1 \in GL_4(3)$ и все ненулевые матрицы T' из регулярного множества второй плоскости.

Поскольку количество вариантов все равно представляется малообозримым, продолжим рассуждения. Учитывая нормальность подгрупп гомологий H_l, H_m, H_r в группе автотопизмов, получаем условия:

$$P_1^{-1}MP_1 \in R'_m \quad \forall M \in R_m^*;$$

$$P_2^{-1}MP_2 \in R'_r \quad \forall M \in R_r^*;$$

$$P_1^{-1}MP_1 = P_2^{-1}MP_2 \in R'_l \quad \forall M \in R_l^*.$$

Рассмотрим, например, плоскости с большим средним ядром (порядка 9). Выберем матрицы M и M' так, что $\langle M \rangle = R_m^*$ и $\langle M' \rangle = R'^*_m$ и перепишем условие $P_1^{-1}MP_1 \in R'_m$ как равенство $XM = M'X$, где $X = P_1^{-1}$ – искомая матрица. Это равенство представляет систему из 16 линейных однородных уравнений на 16 неизвестных. Написана программа для отыскания общего решения такой системы. Ранг основной матрицы равен 8, получаем множество из 5760 вариантов матрицы $X = P_1^{-1}$. Далее вычисляем для каждого варианта матрицы P_1 все матрицы $P_2 = P_1 T'$ и проверяем основное условие изоморфизма только для базисных элементов регулярного множества R:

$$P_1^{-1}\theta(D,0)P_2 \in R', \quad P_1^{-1}\theta(E,0)P_2 \in R', \quad P_1^{-1}\theta(0,D)P_2 \in R', \quad P_1^{-1}\theta(0,E)P_2 \in R'.$$

Таким образом, количество вариантов сокращается с $24261120 \cdot 80$ до $5760 \cdot 80 = 460800$, т.е. в 4212 раз.

Для случаев большого правого либо большого левого ядра рассуждения аналогичные. С помощью компьютерных программ в каждом из случаев найдены все матрицы, задающие изоморфизмы построенных плоскостей, и, для $R' = R$ – автотопизмы каждой плоскости. Окончательно имеем восемь попарно неизоморфных недезарговых плоскостей порядка 81, т.е. восемь классов изоморфизма.

Эти расчеты показали, что группа автотопизмов Λ в каждом случае является 2-группой порядка 2^m, $8 \leqslant m \leqslant 11$, откуда немедленно следует ее разрешимость и, следовательно, разрешимость полной группы коллинеаций.

Матрицы, задающие регулярные множества неизоморфных плоскостей, приведены ниже в Табл. 2. Перечислять элементы групп автотопизмов не представляется целесообразным.

5. 3-примитивные плоскости порядка 81

Вычисление порядков автотопизмов для каждой из восьми неизоморфных плоскостей показывает, что каждая плоскость допускает ровно 7 автотопизмов порядка 2, в соответствии со списком теоремы 4. Кроме того, порядок любого автотопизма не превышает 16. Из общего списка выделены бэровские коллинеации, информация об элементах группы Λ представлена в табл. 1.

Таблица 1

Плоскость	$\lvert N_l\rvert$, $\lvert N_m\rvert$, $\lvert N_r\rvert$	$\lvert\Lambda\rvert$	n_2	B_2	n_4	B_4	n_8	n_{16}
A1	3,3,9	256	7	4	88	4	32	128
A2	3,3,9	512	7	4	216	4	160	128
B1	3,9,3	256	7	4	88	4	32	128
B2	3,9,3	512	7	4	216	4	160	128
C1	9,3,3	256	7	4	88	4	32	128
C2	9,3,3	512	7	4	216	4	160	128
D1	9,9,9	1024	7	4	56	8	192	768
D2	9,9,9	2048	103	100	600	8	576	768

Здесь n_k – число автотопизмов порядка k; B_k – число бэровских коллинеаций порядка k, причем $B_k = 0$ для $k > 4$, $n_k = 0$ для $k > 16$. Так как $B_4 \neq 0$ для каждой из восьми плоскостей, то все они являются 3-примитивными, причем случай $N_l \simeq \mathbb{Z}_3$ представляет четыре новых примера, в сравнении с работой [6] М. Кордеро.

Так как плоскости 3-примитивны, перепишем их регулярное множество в виде Σ. Для этого должно выполняться условие $m(U) = U^3$ для всех $U \in F$, поэтому отберем в каждом классе изоморфизма плоскость с $M = D^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Табл. 2 представляет матрицы F_1 и F_2, задающие функцию $f(V)$ для выбранных плоскостей.

Выделим далее в общем списке полуполевые плоскости с регулярным множеством вида Σ_1. Для этого перепишем аддитивную функцию $f(V)$ в другом виде.

Теорема 7. *Пусть p – простое число, $F \simeq GF(p^n)$, $\mathcal{R}$ – ассоциативное кольцо с единицей, содержащее подполе F. Произвольную аддитивную функцию $f : F \to \mathcal{R}$ можно представить, причем однозначно, в виде*

$$f(x) = A_0x + A_1x^p + A_2x^{p^2} + \cdots + A_{n-1}x^{p^{n-1}}, \quad x \in F, \tag{8}$$

где $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1} \in \mathcal{R}$.

Доказательство. Пусть u – порождающий элемент мультипликативной группы поля F, тогда минимальный многочлен u над $\mathbb{Z}_p$ является неприводимым многочленом степени n. Поэтому $1, u, u^2, \ldots, u^{n-1}$ линейно независимы как элементы n-мерного линейного пространства F над $\mathbb{Z}_p$.

Так как функция f аддитивна, то она является линейным отображением из линейного пространства F над $\mathbb{Z}_p$ в $\mathcal{R}$. Следовательно, f однозначно определяется образами базисных элементов $1, u, u^2, \ldots, u^{n-1}$. Используя (8), составим систему линейных уравнений относительно неизвестных A_i:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1} = f(1), \\ A_0u + A_1u^p + A_2u^{p^2} + \cdots + A_{n-1}u^{p^{n-1}} = f(u), \\ A_0u^2 + A_1u^{2p} + A_2u^{2p^2} + \cdots + A_{n-1}u^{2p^{n-1}} = f(u^2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_0u^{n-1} + A_1u^{(n-1)p} + A_2u^{(n-1)p^2} + \cdots + A_{n-1}u^{(n-1)p^{n-1}} = f(u^{n-1}). \end{cases} \tag{9}$$

Основной определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ u & u^p & u^{p^2} & \ldots & u^{p^{n-1}} \\ u^2 & u^{2p} & u^{2p^2} & \ldots & u^{2p^{n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u^{n-1} & u^{(n-1)p} & u^{(n-1)p^2} & \ldots & u^{(n-1)p^{n-1}} \end{vmatrix}$$

является определителем Вандермонда и равен $\Delta = \prod\limits_{0 \leqslant j < i \leqslant n-1} (u^{p^i} - u^{p^j})$. По выбору u, определитель отличен от нуля, поэтому система имеет единственное решение в $\mathcal{R}$. Теорема доказана.

Замечание. В частности, утверждение справедливо для кольца $(n \times n)$-матриц над $\mathbb{Z}_p$ и его подполя $F \subset GL_n(p) \cup \{0\}$.

Запишем для построенных полуполевых плоскостей функцию $f(V)$ в виде (8). Для наших построений

$$f(V) = f(xD + yE) = xF_1 + yF_2 = A_0V + A_1V^3.$$

Система (9) в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = F_2, \\ A_0D + A_1D^3 = F_1, \end{cases}$$

откуда имеем $A_0 = F_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - F_2 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_1 = F_2 - A_0$. Вычисления по этим формулам приводят к результатам, приведенным в табл. 2.

Таблица 2

Плоскость	F_1	F_2	$f(V)$	Тип
A1	$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&2\\1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&2\\1&2\end{pmatrix}V^3$	Σ
A2	$\begin{pmatrix}1&0\\2&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&2\\2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&2\\2&1\end{pmatrix}V^3$	Σ_1
B1	$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2\\2&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&2\\2&1\end{pmatrix}V+2V^3$	Σ
B2	$\begin{pmatrix}1&0\\2&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}V$	Σ_1
C1	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2\\2&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&2\\2&0\end{pmatrix}V+2V^3$	Σ_0
C2	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}V$	Σ_0
D1	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&2\\2&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&2\\2&0\end{pmatrix}V^3$	Σ_0
D2	$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2\\2&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2\\2&2\end{pmatrix}V^3$	Σ_0

Если коэффициенты A_0, A_1 принадлежат полю F (плоскости C1, C2, D1, D2), то плоскость имеет регулярное множество вида Σ_0 (2), т.е. относится к типу Кордеро. Для плоскостей A2 и B2 ненулевой коэффициент функции $f(V)$ нормализует поле F (7), поэтому плоскости имеют регулярное множество вида Σ_1 (5). Плоскости A1 и B1 не допускают представления регулярного множества в виде Σ_1, они относятся к существенно новому типу.

Обозначим $C = D + E$ и выпишем подгруппы бэровских коллинеаций, порожденные 3-примитивными элементами. Каждая из плоскостей A1–D2 допускает подгруппу

$$Q = \left\langle \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} \right\rangle$$

порядка 4 вида (4). Кроме Q, плоскости A1 и A2 допускают подгруппу

$$Q_1 = \left\langle \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{pmatrix} \right\rangle,$$

плоскости B1 и B2 – подгруппу

$$Q_2 = \left\langle \begin{pmatrix} C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} \right\rangle,$$

плоскости C1 и C2 – подгруппу

$$Q_3 = \left\langle \begin{pmatrix} C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{pmatrix} \right\rangle,$$

плоскости D1 и D2 – подгруппы Q_1, Q_2, Q_3.

Таким образом, заключаем, что построены все попарно неизоморфные собственно полуполевые плоскости порядка 81, допускающие бэровскую инволюцию. Все они являются 3-примитивными, только четыре из построенных восьми плоскостей имеют левое ядро порядка 9 и изоморфны примерам М. Кордеро. Из оставшихся четырех новых плоскостей две плоскости обладают регулярным множеством вида Σ_1, две другие демонстрируют существование p-примитивных полуполевых плоскостей другого типа. Отметим, что особенности строения группы автотопизмов согласуются с доказанными в [8, 9, 7, 19] теоретическими результатами. Программное обеспечение, разработанное для построения представленных примеров, несложно адаптировать для другого основного поля $\mathbb{Z}_p$ или другой размерности пространства.

6. О строении координатизирующих полуполей

Дополним перечень результатов информацией о строении полуполей $\mathcal{A}1$–$\mathcal{D}2$ порядка 81, координатизирующих плоскости A1–D2.

Напомним, что изоморфные полуполевые плоскости координатизируются изотопными полуполями (теорема Алберта, [20]). Некоторые свойства полуполей (подполя, порядки элементов) не являются инвариантами относительно изотопизмов, поэтому будут упомянуты кратко.

В работе [19] доказаны результаты о строении полуполей нечетного порядка, допускающих автоморфизм порядка 2. Эти свойства являются общими для полуполей $\mathcal{A}1$–$\mathcal{D}2$.

Свойство 1. Каждое полуполе содержит подполе порядка 3:

$$K = \{(0,0,0,0),(0,0,0,1),(0,0,0,2)\},$$

подполе порядка 9:

$$S_0 = \{(0,0,x,y) \mid x,y \in \mathbb{Z}_3\}.$$

Свойство 2. Мультипликативная лупа каждого полуполя содержит подгруппу порядка 2

$$K^* = \{(0,0,0,1),(0,0,0,2)\},$$

циклическую подгруппу порядка 4:

$$H_0 = \{(0,0,0,1),(0,0,0,2),(0,0,1,1),(0,0,2,2)\},$$

подлупу порядка 16:

$$L_0 = S_0^* \cup \{(x,y,0,0) \mid x,y \in \mathbb{Z}_3,\ (x,y) \neq (0,0)\}.$$

Для дальнейших исследований разработаны компьютерные программы, вычисляющие степени всех ненулевых элементов, в том числе лево- и правоупорядоченные. Напомним, что *n-й степенью* элемента v мультипликативной лупы называется произведение n множителей, каждый из которых равен v. *Левоупорядоченная n-я степень* элемента v определяется индуктивно:

$$v^{(1} = v,\ v^{(i+1} = v \cdot v^{(i},\ i = 1,2,\ldots.$$

Левым порядком $|v|_l$ элемента $v \neq 1$ называется наименьшее число n с условием $v^{(n} = 1$, множество всех левых порядков называется *левым спектром* лупы. Правоупорядоченная степень, правый порядок и правый спектр определяются аналогично. Г. Венэ выдвинул в 1992 г. гипотезу: всякое конечное полуполе является левопримитивным либо правопримитивным, т.е. мультипликативная лупа ненулевых элементов является множеством всех левоупорядоченных (правоупорядоченных) степеней одного элемента. Эта гипотеза опровергнута И. Ру́а, предложившим два примера непримитивных полуполей порядков 32 и 64, однако все полуполя порядка 81 лево- и правопримитивны (подробнее см. [17]).

Свойство 3. Полуполя $\mathcal{A}1$–$\mathcal{D}2$ не являются коммутативными, но для всякого ненулевого элемента левый порядок равен правому порядку.

Табл. 3 содержит информацию о спектре, левом (правом) спектре и группе автоморфизмов. Отметим, что левый спектр содержит число 80, что говорит о левопримитивности полуполя.

Таблица 3

Полуполе	Левый спектр	Спектр	Порядок группы автоморфизмов
$\mathcal{A}1$	{1,2,4,8,16,40,80}	{1,2,4,5,6,7,8}	2
$\mathcal{A}2$	{1,2,4,8,16,40,80}	{1,2,4,6,7,8}	4 (циклическая)
$\mathcal{B}1$	{1,2,4,8,16,40,80}	{1,2,4,6,7,8}	4 (циклическая)
$\mathcal{B}2$	{1,2,4,8,16,80}	{1,2,4,5,6,7,8}	4 (циклическая)
$\mathcal{C}1$	{1,2,4,8,16,40,80}	{1,2,4,5,6,7,8}	2
$\mathcal{C}2$	{1,2,4,8,16,80}	{1,2,4,6,7,8}	4 (циклическая)
$\mathcal{D}1$	{1,2,4,8,16,40,80}	{1,2,4,6,8,9,13}	4 (циклическая)
$\mathcal{D}2$	{1,2,4,8,16,40,80}	{1,2,4,6,7,8}	8 (группа кватернионов)

Полуполе $\mathcal{D}2$, в отличие от остальных семи полуполей, содержит три подполя порядка 9: S_0, S_1, S_2,

$$\begin{aligned}S_1 = \{&(0,0,0,0),(0,0,0,1),(0,0,0,2),(1,1,1,0),(1,1,1,1),\\&(1,1,1,2),(2,2,2,0),(2,2,2,1),(2,2,2,2)\},\\S_2 = \{&(0,0,0,0),(0,0,0,1),(0,0,0,2),(1,1,2,0),(1,1,2,1),\\&(1,1,2,2),(2,2,1,0),(2,2,1,1),(2,2,1,2)\},\end{aligned}$$

причем левое, правое и среднее ядра полуполя совпадают с S_0, мультипликативная лупа этого полуполя содержит три циклических подгруппы порядка 4: H_0, H_1, H_2,

$$H_1 = \{(0,0,0,1),(0,0,0,2),(1,1,1,0),(2,2,2,0)\},$$
$$H_2 = \{(0,0,0,1),(0,0,0,2),(1,1,2,0),(2,2,1,0)\}.$$

Группа автоморфизмов полуполя $\mathcal{D}2$ некоммутативна: группа кватернионов Q_8. Отметим, что эти свойства не сохраняются при изотопизме: для одной из плоскостей, изоморфных $\mathcal{D}2$, координатизирующее полуполе имеет только одно подполе порядка 9 и допускает только один нетривиальный автоморфизм порядка 2.

7. Заключение

На основе результатов [9] и [7] мы доказали, что существует ровно 8, с точностью до изоморфизма, недезарговых 3-примитивных полуполевых плоскостей порядка 81 (включая примеры М. Кордеро). Вычислены порядки левого, среднего и правого ядер построенных плоскостей, порядок группы автотопизмов, количество 3-примитивных коллинеаций. Для координатизирующих полуполей найдены подполя и спектры мультипликативных луп. Разработан алгоритм проверки изоморфизма двух полуполевых плоскостей и пакет компьютерных программ, реализующий этот алгоритм. Расчетные согласуются с доказанными ранее теоретическими результатами.

Представленные результаты частично анонсированы в докладе на XV Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия», посвященной столетию со дня рождения профессора Н. М. Коробова, проходившей в г. Тула 28-31 мая 2018 г.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мазуров В. Д., Хухро Е. И. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь // Российская академия наук. Сибирское отделение. Институт математики. Новосибирск. 2006.

2. Hughes D. R., Piper F. C. Projective planes // Springer-Verlag, New-York. 1973.

3. Luneburg H. Translation planes // Springer-Verlag, New-York. 1980.

4. Biliotti M., Jha V., Johnson N. L., Menichetti G. A structure theory for two-dimensional translation planes of order q^2 that admit collineation group of order q^2 // Geom. Dedicata. 1989. Vol. 29, P. 7–43.

5. Huang H., Johnson N. L. 8 semifield planes of order 8^2 // Discrete Math. 1990. Vol. 80, № 1, P. 69–79.

6. Cordero M. Matrix spread sets of p-primitive semifield planes // Internat. J. Math. & Math. Sci. 1997. Vol. 20, № 2, P. 293–298.

7. Кравцова О. В. Полуполевые плоскости нечетного порядка, допускающие подгруппу автотопизмов, изоморфную A_4 // Известия вузов. Математика. 2016. № 9, с. 10–25.

8. Подуфалов Н. Д., Бусаркина И. В. Группа автотопизмов полуполевой p-примитивной плоскости порядка q^4// Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 3, с. 334–344.

9. Подуфалов Н. Д., Бусаркина И. В., Дураков Б. К. О группе автотопизмов полуполевой p-примитивной плоскости // в сб. Материалы межрегиональной научной конференции "Исследования по анализу и алгебре" ТГУ, Томск. 1998. с. 190–195.

10. Podufalov N. D. On spread sets and collineations of projective planes // Contem. Math. 1992. Vol. 131, № 1, P. 697–705.

11. Подуфалов Н. Д., Дураков Б. К., Кравцова О. В., Дураков Е. Б. О полуполевых плоскостях порядка 16^2 // Сиб. Мат. Журн. 1996. Том 37, № 3, с. 616–623.

12. Hiramine Y., Matsumoto M., Oyama T. On some extension of 1-sread sets // Osaka J. Math. 1987. Vol. 24, P. 123–137.

13. Johnson N. L. Sequences of derivable translation plans // Osaka J. Math. 1988. Vol. 25. P. 519–530.

14. Johnson N. L. Semifield plans of characteristic p admiting p-primitive Baer collineation // Osaka J. Math. 1989. Vol. 26. P. 281–285.

15. Cordero M. Semifield plans of order p^4 that admit a p-primitive Baer collineation // Osaka J. Math. 1991. Vol. 28. P. 305–321.

16. Cordero-Vourtsanis M. The autotopizm group of p-primitive semifield plans of order p^4 // ARS Combinatoria. 1991. Vol. 32. P. 57–64.

17. Levchuk V. M., Kravtsova O. V. Problems on structure of finite quasifelds and projective translation planes // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. Vol. 38, № 4, P. 688–698.

18. Кравцова О. В., Куршакова П. К. К вопросу об изоморфизме полуполевых плоскостей // Вестник КГТУ. Математические методы и моделирование. 2006. № 42, с. 13–19.

19. Kravtsova O. V. On automorphisms of semifields and semifield planes // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2016. Vol. 13, P. 1300–1313.

20. Albert A. A. Finite division algebras and finite planes // Proc. Sympos. Appl. Math., AMS, Provid. R.I. 1960. Vol. 10, P. 53–70.

REFERENCES

1. Mazurov V. D. & Khukhro E. I. 2006, *Unsolved problems in group theory: the Kourovka notebook*, Russian Academy of Sciences, Siberian Branch, Institute of Mathematics.

2. Hughes D. R. & Piper F. C. 1973, *Projective planes*, Springer-Verlag, New-York.

3. Luneburg H. 1980, *Translation planes*, Springer-Verlag, New-York.

4. Biliotti M., Jha V., Johnson N. L. & Menichetti G. 1989, "A structure theory for two-dimensional translation planes of order q^2 that admit collineation group of order q^2", *Geom. Dedicata*, vol. 29, pp. 7–43.

5. Huang H. & Johnson N. L. 1990, "8 semifield planes of order 8^2", *Discrete Math.*, vol. 80, no. 1, pp. 69–79.

6. Cordero M. 1997. "Matrix spread sets of p-primitive semifield planes", *Internat. J. Math. & Math. Sci.*, vol. 20, no 2, pp. 293–298.

7. Kravtsova O. V. 2016. "Semifield planes of odd order that admit the autotopism subgroup isomorphic to A_4", *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, no. 9, pp.10–25.

8. Podufalov N. D. & Busarkina I. V. 1996. "The autotopism groups of a p-primitive plane of order q^4", *Algebra and Logic*, vol. 35, is. 3, pp. 188–195.

9. Podufalov N. D., Busarkina I. V. & Durakov B. K. 1998, "On the autotopism group of a semifield p-primitive plane", *Ann. of Interregional scientific conference "Research on Analysis and Algebra"*, TSU, Tomsk, pp. 190–195.

10. Podufalov N. D. 1992, "On spread sets and collineations of projective planes", *Contem. Math.*, vol. 131, no 1, pp. 697–705.

11. Podufalov N. D., Durakov B. K., Kravtsova O. V. & Durakov E. B. 1996, "On the semifield planes of order 16^2", *Siberian Mathematical Journal*, vol. 37, no. 3, pp. 616–623.

12. Hiramine Y., Matsumoto M. & Oyama T. 1987, "On some extension of 1-sread sets", *Osaka J. Math.*, vol. 24, pp. 123–137.

13. Johnson N. L. 1988, "Sequences of derivable translation plans", *Osaka J. Math.*, vol. 25, pp. 519–530.

14. Johnson N. L. 1989, "Semifield plans of characteristic p admiting p-primitive Baer collineation", *Osaka J. Math.*, vol. 26, pp. 281–285.

15. Cordero M. 1991, "Semifield plans of order p^4 that admit a p-primitive Baer collineation", *Osaka J. Math.*, vol. 28, pp. 305–321.

16. Cordero-Vourtsanis M. 1991, "The autotopizm group of p-primitive semifield plans of order p^4", *ARS Combinatoria*, vol. 32, pp. 57–64.

17. Levchuk V. M. & Kravtsova O. V. 2017, "Problems on structure of finite quasifelds and projective translation planes", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, vol. 38, no 4, pp. 688–698.

18. Kravtsova O. V. & Kurshakova P. K. 2006, "On the problem of isomorphism of semifield planes", *Vestnik Krasnoyarskogo Gos. Techn. Univ.*, Krasnoyarsk, vol. 42, pp. 13–19.

19. Kravtsova O. V. 2016, "On automorphisms of semifields and semifield planes", *Siberian Electronic Mathematical Reports*, vol. 13, pp. 1300–1313.

20. Albert A. A. 1960, "Finite division algebras and finite planes", *Proc. Sympos. Appl. Math., AMS, Provid. R.I.*, vol. 10, pp. 53–70.

Получено 14.06.2018 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 517.925 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-3-332-347

Механизмы возникновения скрытой синхронизации динамических систем

С. С. Мамонов, И. В. Ионова, А. О. Харламова

Мамонов Сергей Станиславович — доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин, Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина (г. Рязань).
e-mail: s.mamonov@365.rsu.edu.ru
Ионова Ирина Викторовна — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин, Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина (г. Рязань).
e-mail: i.ionova@365.rsu.edu.ru
Харламова Анастасия Олеговна — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин, Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина (г. Рязань).
e-mail: a.harlamova@365.rsu.edu.ru

Аннотация

В работе рассматривается одна из разновидностей радиотехнических систем, а именно — система частотно-фазовой автоподстройки частоты (ЧФАПЧ). Математическая модель такой системы описывается системой дифференциальных уравнений с цилиндрическим фазовым пространством. Для системы ЧФАПЧ определены условия формирования режимов скрытой синхронизации. Не смотря, на многочисленные работы, посвященные системам ЧФАПЧ, открытыми остаются вопросы нахождения скрытой синхронизации, определение механизмов ее возникновения, нахождение условий бифуркаций циклов и изучение их сценариев, возникновения сложно модулированных колебаний. Условиями формирования срытой синхронизации являются наличие в системе фазовой автоподстройки частоты режимов биения, колебательно-вращательных циклов, наличие мультистабильности. Под мультистабильностью понимают сосуществование в фазовом пространстве нескольких аттракторов, в частности аттракторами могут являться предельные циклы. Один из случаев мультистабильности – фазовая мультистабильность, когда аттракторы отличаются друг от друга значениями разности фаз между колебаниями системы. Фазовое пространство в системах с фазовой мультистабильностью оказывается более сложно устроенным, чем в системах с единственным устойчивым предельным циклом. В формировании мультистабильности определяющую роль играют неустойчивые предельные множества соответствующие ненаблюдаемым в эксперименте колебаниям. В связи с этим актуальным является разработка методов определения мультистабильности и определения механизмов ее появления. В связи свыше изложенным актуальной является задача разработки численных алгоритмов, позволяющих находить в радиотехнических системах сложномодулированные колебания и определять механизмы их возникновения. Предложены аналитические методы определения скрытой синхронизации системы ЧФАПЧ, позволяющие разработать эффективные вычислительные методы изучения математических моделей радиотехнических систем с применением компьютерных технологий.

Ключевые слова: скрытая синхронизация, система частотно-фазовой автоподстройки частоты, квазисинхронный режим, режим биений, колебательные циклы, вращательные

циклы, положительно инвариантное множество, вращение векторного поля, мультипликаторы, кривизна, показатели Ляпунова.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:
С. С. Мамонов, И. В. Ионова, А. О. Харламова. Механизмы возникновения скрытой синхронизации динамических систем // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 3, с. 332–347.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 3.

UDC 517.925 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-3-332-347

Mechanisms for the origin of hidden synchronization of dynamic systems

S. S. Mamonov, I. V. Ionova, A. O. Kharlamova

Mamonov Sergey Stanislavovich — doctor of physical and mathematical Sciences, associate Professor, professor, department of mathematic and technique of teaching of mathematical disciplines, S. Yesenin Ryazan State University (Ryazan).
e-mail: s.mamonov@365.rsu.edu.ru
Ionova Irina Viktorovna — candidate of physical and mathematical Sciences, senior lecturer, department of mathematic and technique of teaching of mathematical disciplines, S. Yesenin Ryazan State University (Ryazan).
e-mail: i.ionova@365.rsu.edu.ru
Kharlamova Anastassiya Olegovna — candidate of physical and mathematical Sciences, senior lecturer, department of mathematic and technique of teaching of mathematical disciplines, S. Yesenin Ryazan State University (Ryazan).
e-mail: a.harlamova@365.rsu.edu.ru

Abstract

One of the varieties of radio engineering systems is considered in the work, namely, a frequency-phase locked loop system FPLL. The mathematical model of such a system is described by a system of differential equations with a cylindrical phase space. For the FPLL system, the conditions for the formation of latent synchronization modes are defined. Despite the numerous works devoted to FPLL systems, the questions of finding hidden synchronization, determining the mechanisms of its occurrence, finding the conditions of bifurcation of cycles and studying their scenarios, the occurrence of complex modulated oscillations remain open. The conditions for the formation of hidden synchronization are the presence in the phase-locked loop system of the frequency of the beating modes, vibrational-rotational cycles, and the presence of multistability. By multistability we understand the coexistence of several attractors in the phase space, in particular, limit cycles can be attractors. One of the cases of multistability is phase multistability, when the attractors differ from each other by the values of the phase difference between the oscillations of the system. The phase space in systems with phase multistability is more complicated than in systems with a single stable limit cycle. In the formation of multistability, the decisive role is played by unstable limit sets corresponding to oscillations not observed in the experiment. In this regard, the development of methods for determining multistability and determining the mechanisms of its appearance is relevant.In connection with the above, the urgent task is to develop numerical algorithms that allow one to find complex modulated oscillations in radio engineering systems and determine the mechanisms of their occurrence.Analytical methods for determining the latent synchronization of the PLL system are proposed, which allow developing effective computational methods for studying mathematical models of radio engineering systems using computer technologies.

Keywords: hidden synchronization, frequency-phase locked loop, quasi-synchronous mode, beat mode, vibrational cycles, rotational cycles, positively invariant set, vector field rotation, multipliers, curvature, Lyapunov exponents.

Bibliography: 20 titles.

For citation:
S. S. Mamonov, I. V. Ionova, A. O. Kharlamova, 2019, "Mechanisms for the origin of hidden synchronization of dynamic systems" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 332–347.

1. Введение

В работе рассматриваются системы дифференциальных уравнений, описывающие динамику работы систем фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ). Так математическая модель системы частотно-фазовой автоподстройки частоты имеет вид [1-14],

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma) + d\frac{2\alpha\beta c^T x}{1 + \beta^2 (c^T x)^2}, \dot{\sigma} = c^T x, \tag{1}$$

где A — квадратная матрица размерности $n \times n$, $x, b, c, d \in \mathbb{R}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\varphi(\sigma)$ — Δ-периодическая функция.

Теория систем фазовой синхронизации регулярных сигналов достаточно хорошо развита. В фазовом пространстве системы режиму синхронизации соответствует устойчивое состояние равновесия. Для систем фазовой автоподстройки (ФАП) в работах В. В. Матросова, В. Д. Шалфеева [1, 13–15], показано, что при разных видах фильтра нижних частот может произойти нарушение устойчивости состояния равновесия и возникновение около него устойчивого предельного цикла. В этом случае в системе устанавливается квазисинхронный режим, для которого усредненная частота колебаний генератора совпадает с частотой внешнего сигнала, что определяет существование режима фазовой синхронизации.

Скрытая синхронизации основывается на понятии «скрытые колебания» сформулированного в работах Г. А. Леонова, Н. В. Кузнецова, И. М. Буркина. Характерной особенностью скрытых колебаний является невозможность попадания на него по траектории с начальными значениями из окрестности состояния равновесия. В данной работе под скрытой синхронизацией понимается наличие в системе устойчивого колебательного цикла, для которого усредненная частота колебаний генератора совпадает с частотой внешнего сигнала, при этом цикл не является «глобально устойчивым».

Определение 1. *Пусть для системы (1) существует колебательный цикл $z_*(t) = colon(x_*(t), \sigma(t))$ с периодом T, для которого*

$$\langle\dot{\sigma}\rangle = T^{-1}\int_0^T \dot{\sigma}(t)dt = 0,$$

тогда цикл $z_*(t)$ определяет квазисинхронный режим системы фазовой синхронизации [13, 14].

С квазисинхронными режимами связано явление джиттера, которое определяется как отклонение временного положения информационных сигналов в трактах вычислительных и телекоммуникационных устройств от заданных значений. Джиттер является следствием совокупного действия множества дестабилизирующих факторов, специфичных для разных классов устройств хранения и передачи данных. Одним из факторов появления джиттера является фазовая модуляция сигнала, при этом частота отклонения фазы называется частотой джиттера. Проблема выделения компонент джиттера представляет собой сложную техническую задачу, требующую разработку математического аппарата определения фазовой синхронизации.

Определение 2. Пусть у системы (1) существует колебательный цикл $z_*(t)$, определяющий режим квазисинхронизма системы фазовой автоподстройки, который не является «глобально» устойчивым, тогда система ФАП обладает скрытой синхронизацией.

В работе рассматриваются механизмы возникновения скрытой синхронизации динамических систем.

2. Поиск скрытой синхронизации

Один из механизмов возникновения скрытой синхронизации связан с использованием частотного управления радиотехнической модели (1). На базе принципа тора [2] разработаны аналитические методы определения квазисинхронных режимов [5, 7, 9, 10], которые позволяют использовать численные методы анализа частотно-амплитудных характеристик квазисинхронных режимов для системы ЧФАПЧ с фильтрами второго порядка.

В работах [5, 7–10] предлагаются новые конструкции для построения положительно-инвариантных тороидальных множеств, используемых для нахождения начальных условий колебательных циклов системы (1). Установлено, что устранение частотного кольца приводит к сохранению квазисинхронных режимов системы ФАПЧ, что позволяет определить численный метод обнаружения скрытой синхронизации системы ФАПЧ при отсутствии частотного кольца [7].

В настоящее время известны многочисленные результаты, связанные с бифуркацией колебательного цикла [2, 13–17]. Однако малоизученным является вопрос о количестве и методах обнаружения неустойчивых циклов, возникающих в результате бифуркации. Бифуркации циклов приводят к изменению характеристики $\dot{\sigma}$ квазисинхронного режима. Для оценки качества скрытой синхронизации предлагается использовать мультипликаторы циклов.

В системе (1) при заданных параметрах происходит бифуркация устойчивого однооборотного цикла $z_1^+(t)$ в устойчивый двухоборотный цикл $z_{2,2}^+(t)$, при этом наблюдается неустойчивый однооборотный цикл $z_{2,1}^-(t)$ [5]. В дальнейшем появляется один однооборотный неустойчивый цикл $z_{3,1}^-(t)$, один двухоборотный неустойчивый цикл $z_{3,2}^-(t)$ и один четырёхоборотный устойчивый цикл $z_{3,4}^+(t)$, при этом неустойчивый цикл $z_{2,1}^-(t)$ трансформируется в неустойчивый цикл $z_{3,1}^-(t)$. На рисунке 1 изображены циклы $z_{2,1}^-(t)$, $z_{2,2}^+(t)$, на рисунке 2 изображены циклы $z_{3,1}^-(t)$, $z_{3,2}^-(t)$, $z_{3,4}^+(t)$.

Численный анализ показал, что при бифуркации цикла происходит изменение значений $\left\langle \dot{\sigma}_{z_1^+(t)} \right\rangle = 0.008$, $\left\langle \dot{\sigma}_{z_{2,2}^+(t)} \right\rangle = 0.0589$, $\left\langle \dot{\sigma}_{z_{3,4}^+(t)} \right\rangle = 0.003$, для качества синхронизации получены мультипликаторы циклов $\mu_1(z_1^+(t)) = -0.81125$, $\mu_2(z_1^+(t)) = -0.01725$, $\mu_1(z_{2,2}^+(t)) = -0.14303$, $\mu_2(z_{2,2}^+(t)) = -0.00032$, $\mu_1(z_{3,4}^+(t)) = 0.19763$, $\mu_2(z_{3,4}^+(t)) = 1.7402 \cdot 10^{-7}$.

Следующий механизм появления скрытой синхронизации связан с появлением в системе (1) вращательных циклов или режимов биения в системе ФАПЧ.

Определение 3. [2] Решение $z(t,z_0) = \begin{pmatrix} x(t,x_0) \\ \sigma(t,\sigma_0) \end{pmatrix}$ системы (1) называется вращательным циклом, если существует $\tau > 0$, целое число $j \neq 0$, такие, что для любого t выполняются равенства $x(t+\tau,x_0) = x(t,x_0), \sigma(t+\tau,\sigma_0) = \sigma(t,\sigma_0) + \Delta j$.

В случае реализации в системе вращательного цикла средняя частота колебаний генератора и частота внешнего сигнала не совпадают, что приводит к появлению у системы асинхронного режима [13, 14, 18, 19]. Вращательные режимы предшествуют режиму синхронизации,

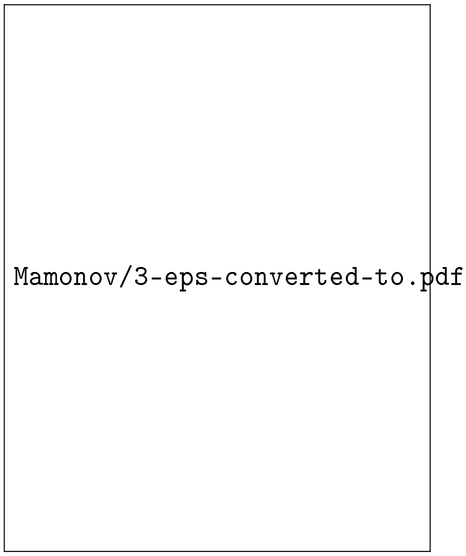


Рис. 1

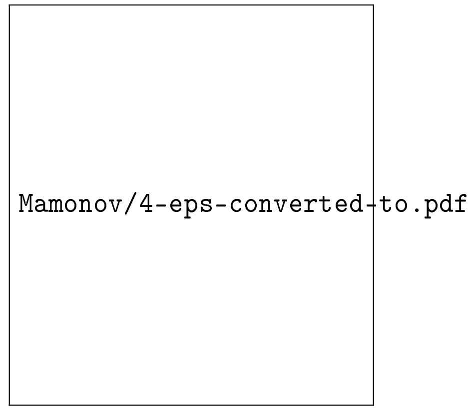


Рис. 2

что позволяет рассматривать их как генератор модулированных колебаний. Реализация в системе нескольких вращательных режимов позволяет выделить в системе область притяжения, которая определяет начальные условия режимов скрытой синхронизации системы ЧФАПЧ.

На рисунке 3 изображены области Ω_{10} и Ω_{20}, определяющие положительно инвариантные множества, содержащие начальные условия двух вращательных циклов системы (1). На рисунке 4 изображена область Ω_3, определяющая гиперболически инвариантное множество, содержащее начальные условия неустойчивого вращательного цикла [6].

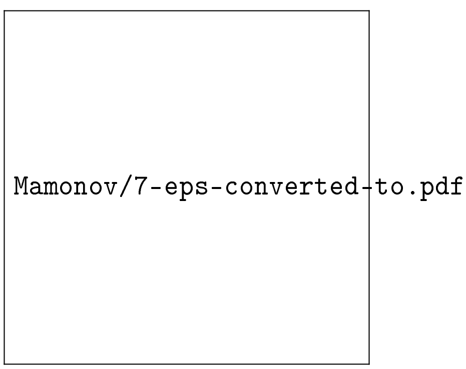


Рис. 3

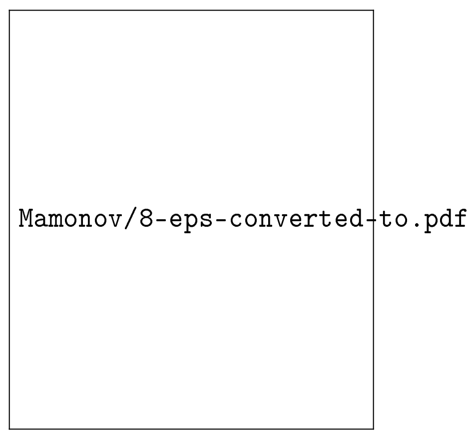


Рис. 4

Существование в системе ЧФАПЧ одновременно колебательных и вращательных режимов обеспечивает наличие скрытой синхронизации.

В случае отсутствия частотного кольца в системе ФАПЧ, для математической модели системы ФАПЧ рассматривается вспомогательная нефазовая система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + b\varphi\left(\sigma\right), \dot{\sigma} = c^T x + u\psi(\sigma), \tag{2}$$

где $x, b, c \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}$, $c^T b = -\Gamma < 0$, $c^T A = l^T$, $l^T b = -\nu_1 < 0$, $c^T A^{-1} \neq 0$, $rang||c, l|| = 2$, $l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T$, $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, $\psi(\sigma) = \nu_1 \beta_1^{-1} \varphi(\sigma) - \alpha_1 \sigma$, $\varphi(\sigma)$ – Δ-периодическая функция, имеющая два нуля на периоде $\varphi(\sigma_1) = \varphi(\sigma_2) = 0$, $0 = \sigma_1 < \sigma_2 < \Delta$, $\dot{\varphi}(0) > 0$, $\dot{\varphi}(\sigma_2) < 0$, $\dot{\varphi}(\sigma)$

– ограничена на сегменте $[0;\Delta]$. Аналитически определяются условия существования циклов первого рода многомерной нефазовой системы дифференциальных уравнений (2)[9].

Теорема 1. *Пусть для системы (2) выполнены условия:*

1) $c^Tb=-\Gamma<0, c^TA=l^T, l^Tb=-\nu_1<0, rang\,\|c,l\|=2, l^TA=-\alpha_1l^T-\beta_1c^T, \alpha_1>0, \quad \beta_1>$ $>0, c^TA^{-1}b\neq 0;$

2) $\varphi(\sigma)=\beta_1\nu_1^{-1}(\psi(\sigma)+\alpha_1\sigma)$ – Δ*-периодическая функция, имеющая два нуля на периоде* $\varphi(\sigma_1)=\varphi(\sigma_2)=0, 0=\sigma_1<\sigma_2<\Delta$, $\dot\varphi(0)>0, \dot\varphi(\sigma_2)<0, \dot\varphi(\sigma)$ *– ограничена на сегменте* $[0;\Delta]$;

3) существует $r_2>0$ *такое, что система дифференциальных уравнений второго порядка*

$$\dot y=-\beta_1\sigma-\Gamma\varphi(\sigma)-\varepsilon, \dot\sigma=y+u\psi(\sigma), \tag{3}$$

при $\varepsilon=\varepsilon_1^+>r_2$ *имеет решение, определяющее функцию* $f_1^+(\sigma), f_1^+(-\bar\sigma_1)=f_1^+(\bar\sigma_3)=0, -\bar\sigma_1<$ $<0, \bar\sigma_3>0, f_1^+(\sigma)>0$ *для любого* $\sigma\in(-\bar\sigma_1;\bar\sigma_3)$;

4) существует $r_1>0$, *что система (3) при* $\varepsilon=\varepsilon_2^+>r_1$ *имеет решение, определяющее функцию* $f_2^+(\sigma), f_2^+(-\bar\sigma_6)=f_2^+(\bar\sigma_5)=0, -\bar\sigma_6<-\bar\sigma_1<0, \bar\sigma_5>\bar\sigma_3>0, f_2^+(\sigma)>0$ *для любого* $\sigma\in(-\bar\sigma_6;\bar\sigma_5)$;

5) система (3) при $\varepsilon=\varepsilon_1^->r_1$ *имеет решение, определяющее функцию* $f_1^-(\sigma), f_1^-(-\bar\sigma_1)=$ $=f_1^-(\bar\sigma_2), \bar\sigma_3>\bar\sigma_2>0, f_1^-(\sigma)<0$ *для любого* $\sigma\in(-\bar\sigma_1;\bar\sigma_2)$;

6)система (3) при $\varepsilon=\varepsilon_2^->r_2$ *имеет решение, определяющее функцию* $f_2^-(\sigma), f_2^-(-\bar\sigma_4)=$ $=f_2^-(\bar\sigma_5)=0, -\bar\sigma_6<-\bar\sigma_4<-\bar\sigma_1<0, f_2^-(\sigma)<0$ *для любого* $\sigma\in(-\bar\sigma_4;\bar\sigma_5)$;

7) функции $f_1^+(\sigma), f_2^+(\sigma), f_1^-(\sigma), f_2^-(\sigma)$ *удовлетворяют неравенствам* $f_1^+(\sigma)<f_2^+(\sigma)$ *при* $\sigma\in(-\bar\sigma_6;\bar\sigma_5)$, $f_2^-(\sigma)<f_1^-(\sigma)$ *при* $\sigma\in(-\bar\sigma_4;\bar\sigma_5)$;

8) для любого $\sigma\in[-\bar\sigma_6;-\bar\sigma_4]$ *выполняется соотношение* $-\beta_1\sigma-r_2-\Gamma\varphi(\sigma)>0$;

9) справедливо неравенство $r_1-\beta_1\sigma-\Gamma\varphi(\sigma)<0$ *для любого* $\sigma\in[\bar\sigma_2;\bar\sigma_3]$;

10) при $(-m_1)=\min\limits_{\sigma\in[-\bar\sigma_6,\bar\sigma_5]}\psi(\sigma)$ *выполняется неравенство* $\alpha_1r_1>\beta_1m_1(1-u)$ *и для* $(M_1)==\max\limits_{\sigma\in[-\bar\sigma_6,\bar\sigma_5]}\psi(\sigma)$ *верно соотношение* $\alpha_1r_2>\beta_1M_1(1-u)$

Тогда система (2) имеет колебательный цикл.

С использование пакета прикладных программ Maple разработаны численные методы анализа трансформации цикла нефазовой системы (2) в цикл фазовой системы дифференциальных уравнений. Предложены критерии близости циклов двух систем, основанные на метрических характеристиках циклов и мультипликаторном анализе [9]. Для системы (2) проведена классификация сложных колебательно-вращательных режимов системы ФАПЧ, сопровождающих скрытую синхронизацию.

Определение 4. Вращательный цикл $\omega(t,z_0)=colon(x(t,z_0),\sigma(t,z_0)$ называется циклом колебательно-вращательным структуры $(k_1,k_2,...,k_m)$, если для него существует $T>0$, и для любого $t\geq 0$ выполняются равенства $x(t+T,z_0)=x(t,z_0)$, $\sigma(t+T,z_0)=\sigma(t,z_0)+m\Delta$, Δ –период функции $\varphi(\sigma)$ системы (2), функция $\dot\sigma(t)=c^Tx$ имеет $2k_i$ нулей на промежутке $\sigma\in[(i-1)\Delta;i\Delta], i=\overline{1,m}$.

В частности, если цикл второго рода $\omega(1,0,2)$ имеет структуру $(1,0,2)$, то для него $m=$ $=3$, существует $T>0$, и для любого $t\geq 0$ выполняются равенства $x(t+T,z_0)=x(t,z_0)$, $\sigma(t+T,z_0)=\sigma(t,x_0)+6\pi$, $\Delta=2\pi$. Функция $\dot\sigma(t)=c^Tx$ имеет 2 нуля на промежутке $\sigma\in[0;2\pi]$, не имеет нулей на сегменте $\sigma\in[2\pi;4\pi]$ и имеет 4 нуля на промежутке $\sigma\in[4\pi;6\pi]$. Значения $2k_i, i=\overline{1,m}$ определяют колебательные характеристики цикла $\omega(t,z_0)$, а именно число оборотов проекции цикла на плоскость (x_1,x_2).

У системы (2) наряду с устойчивым колебательным циклом при изменении параметра α_1 могут появляться как вращательные, так и колебательно-вращательные предельные циклы [11]. На рисунке 5 изображены два устойчивых колебательно-вращательных цикла $z^+_{4\pi,(1;0)}(t)$,

$z^+_{4\pi,(0;1)}(t)$, неустойчивый цикл второго рода $z^-_{2\pi,\text{в}}(t)$ и устойчивые циклы первого рода $z^+_k(t)$. На рисунке 6 изображены проекции циклов $z^+_k(t)$, $z^-_{2\pi,\text{в}}(t)$, $z^+_{4\pi,(1;0)}(t)$, $z^+_{4\pi,(0;1)}(t)$ на плоскость (x_1, x_2) при этом проекции колебательно-вращательных циклов $z^+_{4\pi,(1;0)}(t)$, $z^+_{4\pi,(0;1)}(t)$ на плоскость (x_1, x_2) совпадают.

Mamonov/5-eps-converted-to.pdf

Рис. 5

Mamonov/6-eps-converted-to.pdf

Рис. 6

3. Мультистабильность квазисинхронных режимов

Условиями формирования скрытой синхронизации являются наличие в системе фазовой автоподстройки мультистабильности. Под мультистабильностью понимают сосуществование в фазовом пространстве нескольких аттракторов, в частности аттракторами могут являтся предельные циклы. Одним из условий появления мультистабильности в системе ФАПЧ является использование запаздывания. Динамика рассматриваемой системы фазовой автоподстройки с запаздыванием описывается операторным уравнением [13],

$$p\sigma + K_\varphi(p)K_\tau(p)\Omega_y F(\sigma) = \Omega_H, \tag{4}$$

где $K_\varphi(p)$ — коэффициент передачи фильтров нижних частот в фазовой цепи управления, $K_\tau(p) = e^{-\tau p} \approx (1-\tau p)$ — операторный коэффициент запаздывания, τ — время запаздывания.

Для математической модели система ФАПЧ с запаздыванием рассматривается вспомогательная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \dot{\sigma} = c^T x + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma, \tag{5}$$

где $x, b, c \in \mathbb{R}^2$, $u \in [0;1]$, α_1, ρ_1, $\rho_0 \in \mathbb{R}$. Запаздывание в системе автоподстройки определяет значение параметра $\rho = \rho_1 + \rho_0 > 0$, при отсутствии запаздывания выполняется равенство $\rho = 0$. При $u = 0$ система (5) примет вид

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \dot{\sigma} = c^T x + \rho\varphi(\sigma). \tag{6}$$

Аналитическими методами определяются условия для параметра $u = u^*$ при котором существует цикл многомерной нефазовой системы дифференциальных уравнений (5) [8]. Численными методами определяется трансформация цикла системы (5) в цикл системы (6) при $u = 0$. Показано, что запаздывание может быть использовано для подавления хаотически модулированных режимов биений и формирования на их базе квазисинхронных режимов обеспечивающих фазовую синхронизацию.

Показывается, что система (5) при $u = 0.918$ имеет устойчивый цикл первого рода $z_1(t)$ с начальными условиями $x_1 = -0.047922$, $x_2 = 6.207151$, $\sigma = 0.1$, $\langle\dot{\sigma}\rangle = 0.0044$[8]. Мультипликаторы цикла $z_1(t)$ определяются значениями $\mu_1 = 1.0$, $\mu_2 = 0.102437$, $\mu_3 = 0.956714$. Численно показывается, что при уменьшении значения u до $u = 0$, цикл $z_1(t)$ системы (5) трансформируется в цикл $z_{1_0}(t)$ фазовой системы (6) с начальными условиями $x_1 = -0.866482$, $x_2 = 5.913351$, $\sigma = 0.1$, $\langle\dot{\sigma}\rangle = 0.00061$ и мультипликаторами $\mu_1 = 1.0, \mu_2 = 0.1065, \mu_3 = 0.9744$. При этом мультипликаторный коэффициент аппроксимации циклов $A_\rho = 2.83\%$, следовательно, цикл системы (5) является порождающим для цикла системы (6) [8].

Аналогично образом можно выяснить, что система (6) имеет устойчивый цикл $z_{2_0}(t)$ с начальными условиями $x_1 = -1.2813$, $x_2 = 14.3064$, $\sigma = 0.1$, $\langle\dot{\sigma}\rangle = 0.0014$, $\mu_1 = 1.0$, $\mu_2 = 0.2861$, $\mu_3 = 0.9857$; неустойчивый цикл $z_0^-(t)$ с начальными условиями $x_1 = -0.339472$, $x_2 = 9.911372$, $\sigma = 0.1$, $\langle\dot{\sigma}\rangle = 0.0009$, $\mu_1 = 1.0$, $\mu_2 = 3.9$, $\mu_3 = 1.0159$ [8]. Взаимное расположение циклов $z_{1_0}(t)$, $z_{2_0}(t)$, $z_0^-(t)$ фазовой системы (6) в случае запаздывания изображено на рисунке 7. Для обнаружения неустойчивого цикла предложены численные методы, основанные на использовании вращения веторного поля [4, 5, 7, 9, 20]. На рисунке 8 изображены режим биения при отсуствии затухания $\rho = 0$ и квазисинхронные режимы при наличии затухания $\rho = 1, 16$.

Mamonov/7-eps-converted-to.pdf

Рис. 7

Mamonov/8-eps-converted-to.pdf

Рис. 8

Показано, что механизмом возникновения скрытой синхронизации является формирование мультистабильности, связанной с характеристиками запаздывания. Мультипликаторы циклов являются показателями устойчивости цикла или быстроты стремления траектории к циклу, поэтому предложено использовать мультипликаторы цикла как критерий выбора квазисинхронных режимов в случае мультистабильности. Запаздывания может быть использовано для подавления хаотически модулированнных режимов биения и формированию на их базе квазисинхронных режимов, обеспечивающих фазовую синхронизацию рисунок 8. Полученные результаты позволяют получить практические рекомендации для определения параметров фильров второго порядка с запаздыванием, при которых в системе ФАП наблюдается мультистабильность, то есть одноврменное наличие квазисинхронных режимов с разными частотными характеристиками, что позволяет использовать систему ФАП как генератор многочастотных колебаний.

4. Характеристики кривизны циклов при мультистабильности

Рассматриваются системы дифференциальных уравнений (5), (6). Для систем дифференциальных уравнений актуальным является вопрос реализации бифуркационных процессов, определение нелинейных колебаний и их анализ [1, 2, 13, 14, 15, 18, 19]. Предлагается изучать близость циклов систем (5) и (6) с использованием понятия кривизны цикла, а так же использовать кривизну цикла для выбора скрытой синхронизации в случае мультистабильности [12].

Пусть функция $z(t) = colon(x_1(t), x_2(t), \sigma(t))$ — определяет цикл системы (5), тогда под кривизной цикла будем понимать величину

$$K\left(t\right)=\frac{\sqrt{\left[z'\left(t\right)\times z''\left(t\right)\right]^{2}}}{\left(z'^{2}\left(t\right)\right)^{3/2}}, \tag{7}$$

где $z'(t)=colon(x_1'(t),x_2'(t),\sigma'(t))$, $z'^2=z'^T\cdot z'$, $z''(t)=colon\,(x_1''(t),x_2''(t),\sigma''(t))$, а символ «$\times$» — обозначает векторное произведение. В данной работе предлагается рассмотреть зависимость кривизны циклов от координат фазовой и нефазовой систем и использовать кривизну циклов для анализа мультистабильности. Для нахождения зависимости кривизны цикла системы (5) от ее координат определим расширенную систему вида

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+b\varphi(\sigma),\\ \dot{\sigma}=c^Tx+\rho_1\varphi(\sigma)+\rho_0(1-u)\varphi(\sigma)-\alpha_1u\sigma,\\ \dot{K}(t)=\psi(\sigma,x)\end{cases} \tag{8}$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (8), где $A=\begin{pmatrix}-\alpha_1 & -\beta_1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $b=$ $=\begin{pmatrix}-\nu_1\\ -\Gamma\end{pmatrix}$, $c=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$, $\alpha_1>0$, $\beta_1>0, \varphi(\sigma)=-\gamma+sin\left(\sigma+arcsin\gamma\right)$, $\varphi(0)=0$, найдем $c^Tb=-\Gamma$, $c^TA=l^T$, $l^Tb=-\nu_1<0$, $\nu=-\nu_1$, $rang||c,l||=2, l^TA=-\alpha_1l^T-\beta_1c^T, c^TA^{-1}b\neq$ $\neq 0, \rho=\rho_1+\rho_0>0$. Функция $\psi(x)$ определяется равенством $\psi(x)=\dfrac{g'f-3gf'}{2g^{1/2}f^{5/2}}$, где

$$g(x;\sigma)=(x_1'x_2''-x_1''x_2')^2+(x_2'\sigma''-x_2''\sigma')^2+(\sigma'x_1''-\sigma''x_1')^2,$$

$$g'(x;\sigma)=2\left(x_1'x_2''-x_1''x_2'\right)\left(x_1'x_2'''-x_1'''x_2'\right)+2\left(x_2'\sigma''-x_2''\sigma'\right)\left(x_2'\sigma'''-x_2'''\sigma'\right)+$$
$$+2\left(x_1''\sigma'-x_1'\sigma''\right)\left(x_1'''\sigma'-x_1'\sigma'''\right),$$

$$f(x;\sigma)={x_1'}^2+{x_2'}^2+\sigma'^2,$$

$$f'(x;\sigma)=2x_1'x_1''+2x_2'x_2''+2\sigma'\sigma''.$$

Основываясь на исследованиях, проведенных в работе [12] показывается, что при $\alpha_1=$ $=0.01, \beta_1=1.98,\quad \Gamma=1.2,\quad \nu=-2.26, \gamma=0.1, u=0.918, \rho_1=\nu_1\beta_1^{-1}=1.14, \rho_0=0.02$ система (8) имеет пять колебательных циклов, где $z_1(t), z_2(t), z_3(t)$ — устойчивые, а $z_4^-(t)$ и $z_5^-(t)$ — неустойчивые циклы. При $u=0$ система (8) становится фазовой системой, у которой также существует пять колебательных циклов $z_{10}(t), z_{20}(t), z_{30}(t)$ — устойчивые, а $z_{40}^-(t)$ и $z_{50}^-(t)$ — неустойчивые циклы. Основные характеристики всех колебательных циклов приведены в таблице 1, где $z(t)$ — цикл системы, x_1, x_2, σ — начальные условия цикла, T_z — период цикла, $\langle K(t)\rangle$ — среднее значение кривизны цикла на периоде.

На рисунке 9 представлены проекции циклов $z_{10}(t), z_{20}(t), z_{30}(t)$ фазовой системы (8) на плоскость $(x_2;\sigma)$. На рисунке 10 в пространстве $(x_1;x_2;K(t))$ изображены линии L_1, L_2, L_3, определяющие решениями системы (8), с начальными условиями циклов $z_{10}(t), z_{20}(t), z_{30}(t)$ системы (8).

Таблица 1: Циклы фазовой системы.

Циклы фазовой системы (8) $u = 0, \sigma = 0$					
$z(t)$	$z_{10}(t)$	$z_{20}(t)$	$z_{30}(t)$	$z_{40}^{-}(t)$	$z_{50}^{-}(t)$
x_1	-0.866482	-1.2813	-1.6773	0.339472	0.52238
x_2	5.913351	14.3064	22.7464	9.911372	19.06786
T_z	4.5866	4.4741	4.4618	4.49677402	4.46586352
$\langle K(t) \rangle$	0.1513	0.0582	0.0363	0.0831	0.0432

Mamonov/9-eps-converted-to.pdf

Рис. 9

Mamonov/10-eps-converted-to.pdf

Рис. 10

На рисунке 11 изображены линии L_{z10}^{1} и L_{z1}^{1}, показывающие зависимость кривизны $K(t)$ циклов $z_{10}(t)$ и $z_1(t)$ фазовой и нефазовой систем от координаты $x_1(t)$. На рисунке 12 представлены зависимости кривизны от координат $x_2(t)$ (Линии: L_{z10}^{2}, L_{z1}^{2}).

Mamonov/11-eps-converted-to.pdf

Рис. 11

Mamonov/12-eps-converted-to.pdf

Рис. 12

Корреляционный анализ метрических характеристик циклов систем (5),(6), (8) позволяет сделать вывод о том, что отличия характеристик кривизны циклов фазовой системы (6) и нефазовой системы (5) не являются значимыми. Использование понятия кривизны цикла позволяет проводить анализ близости циклов фазовой и нефазовой систем и сравнительный анализ частотно-амплитудных характеристик кривизны полученных циклов [8].

Рассмотрим устойчивый цикл $z_{10}(0) = colon(x_{11}, x_{12}, 0)$, для которого выполняются условия $x_{11} = -0.866$, $x_{12} = 5.913$, $T_1 = 4.5866$ – период цикла $z_{10}(t)$. Для цикла $z_{10}(t)$ определим окрестность $\Omega_{10} = \{(x,t) : (x_1 - x_{11})^2 + (x_2 - x_{12})^2 = R^2, t = 0, R = 0.5\}$. Используя оператор сдвига по траекториям системы (8) найдем отображение множества Ω_{10} через время T_1 в координатах (x_1, K, t). С использованием Ω_{10} численными методами определим кривизну $K(x_1, x_2, \sigma)$на границе множества Ω_{10}, и построим множество

$$\Omega_{x_1,k,0} = \{(x_1, K, t) : t = 0, K = K(x_1, x_2, \sigma_0), \sigma_0(0) = 0, x = colon(x_1, x_2) \in \Omega_{10}\}.$$

Пусть $U_{x_1,k,0} = P_{T_1} \circ T_{x_1,k}$, где $T_{x_1,k}$ – оператор сдвига по траекториям системы (8), P_{T_1}– параллельный перенос, $P_{T_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ K \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ K \\ t - T_1 \end{pmatrix}$, $U_{x_1,k,0}(\Omega_{x_1,k,0}) = \Omega_{x_1,k,T_1}$. Обозначим $Q_{x_1,k,0}(x_1, K)$– вращение векторное поле оператора $U_{x_1,k,0}$ на границе $\partial\Omega_{x_1,k,0}$ множества $\Omega_{x_1,k,0}$.

Численно показывается, что вращение векторного поля $Q_{x_1,k,0}$ на границе $\partial\Omega_{x_1,k,0}$ множества $\Omega_{x_1,k,0}$ отлично от нуля, $\gamma(Q_{x_1,k,0}, \partial\Omega_{x_1,k,0}) \neq 0$. Отображение $U_{x_1,k,0}$ содержит неподвижную точку оператора, определяющую начальные условия цикла первого рода фазовой системы (8). Для дальнейших исследований кривизны цикла $z_{10}(t)$ переместим центр множества $\Omega_{x_1,k,0}$ в начало координат. Обозначим $P_{z_{10}}$– параллельный перенос, $P_{z_{10}}\begin{pmatrix} x_1 \\ K \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_{11} \\ K - K_{10} \\ t \end{pmatrix}$, $K_{10} = 0.1035$ – кривизна цикла $z_{10}(t)$ в момент времени $t = 0$, $P_{z_{10}}(\Omega_{x_1,k,0}) = \overline{\Omega}_{x_1,k,0}$, $P_{z_{10}}(\Omega_{x_1,k,T_1}) = \overline{\Omega}_{x_1,k,T_1}$. Аналогично $\Omega_{x_1,k,0}$ находится множество

$$\Omega_{x_2,k,0} = \{(x_2, K, t) : t = 0, K = K(x_1, x_2, \sigma_0), \sigma_0(0) = 0, x = colon(x_1, x_2) \in \Omega_{10}\},$$

которое является отображением множества Ω_{10} оператором сдвига по траекториям системы (8) через время T_1.

Пусть $U_{x_2,k,0} = P_{T_1} \circ T_{x_2,k}$, где $T_{x_2,k}$ — оператор сдвига по траекториям системы (8), P_{T_1} — параллельный перенос, тогда $U_{x_2,k,0}(\Omega_{x_2,k,0}) = \Omega_{x_2,k,T_1}$, $\overline{P}_{z_{10}}(\Omega_{x_2,k,0}) = \overline{\Omega}_{x_2,k,0}$, $\overline{P}_{z_{10}}(\Omega_{x_2,k,T_1}) = \overline{\Omega}_{x_2,k,T_1}$, $\overline{P}_{z_{10}}$ — параллельный перенос, $\overline{P}_{z_{10}}\begin{pmatrix} x_2 \\ K \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_{12} \\ K - K_{10} \\ t \end{pmatrix}$. Для геометрической интерпретации полученных множеств выберем систему координат с совмещенными осями OX_1, OX_2 и вертикальной осью OK_z для кривизны. На рис. 13 изображены множества $\overline{\Omega}_{x_1,k,0}$, $\overline{\Omega}_{x_1,k,T_1}$, $\overline{\Omega}_{x_2,k,0}$, $\overline{\Omega}_{x_2,k,T_1}$. Численными методами показывается, что $\overline{\Omega}_{x_1,k,T_1} \cap \overline{\Omega}_{x_2,k,T_1} \subset \overline{\Omega}_{x_1,k,0}$. Предложенные отображения $U_{x_1,k,0}$, $U_{x_2,k,0}$ дают возможность их использования для численного определения начальных условий и периода цикла системы (8) [12].

На рис. 14 представлены множества $\overline{\Omega}^-_{x_1,k,0}$ $\overline{\Omega}^-_{x_1,k,T_4}$, $\overline{\Omega}^-_{x_2,k,0}$, $\overline{\Omega}^-_{x_2,k,T_4}$ полученные для неустойчивого цикла z^-_{40}, и множества $\Omega_{40} = \{(x,t) : (x_1 - x_{41})^2 + (x_2 - x_{42})^2 = R^2, t = 0\}$ где $R = 0.1$, а x_{41}, x_{42} — начальные условия неустойчивого цикла z^-_{40}. Численными методами показываются включения $\overline{\Omega}^-_{x_1,k,T_4} \cap \overline{\Omega}^-_{x_2,k,T_4} \subset \overline{\Omega}^-_{x_1,k,0}$, $\overline{\Omega}^-_{x_1,k,T_4} \cap \overline{\Omega}^-_{x_2,k,T_4} \subset \overline{\Omega}^-_{x_2,k,0}$, это дает возможность для неустойчивого цикла определить отображения переводящие окрестности цикла

Mamonov/13-eps-converted-to.pdf

Рис. 13

Mamonov/14-eps-converted-to.pdf

Рис. 14

в себя, что позволяет предложить численный подход определения начальных условий неустойчивого цикла [6, 9, 12].

Включение в систему (6) уравнения содержащего кривизну дает возможность использовать характеристики устойчивости кривизны циклов в качестве критерия выбора режимов скрытой синхронизации для системы фазовой автоподстройки частоты [8]. Для определения характеристик устойчивости кривизны предлагается использовать показатели Ляпунова [12].

$$\lambda_N = \frac{1}{t_N - t_0} \sum_{i=1}^{N} \log_2 \frac{d(\Omega_{x_1,k,t_i})}{d(\Omega_{x_1,k,t_{i-1}})}, \tag{9}$$

где $d(\Omega_{x_1,k,t_i})$ — площадь множества Ω_{x_1,k,t_i}, $d(\Omega_{x_1,k,t_{i-1}})$ — площадь множества $\Omega_{x_1,k,t_{i-1}}$, множество Ω_{x_1,k,t_i} является отображением множества $\Omega_{x_1,k,t_{i-1}}$ оператором сдвига $T_{x_1,k}$ по траекториям системы (8) в координатах (x_1, K, t) через время $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Найдем для устойчивого цикла $z_{10}(t)$ показатели Ляпунова в координатах (x_1, K, t), в качестве t_i возьмем $t_i = (i-1)T_1$, $i = \overline{1,7}$, $T_1 = 4.5866$ – период цикла $z_{10}(t)$. Численными методами найдем площади множеств Ω_{x_1,k,t_i}, $i = \overline{1,7}$.

В таблице 2 приведены значения показателей Ляпунова для всех устойчивых циклов фазовой системы (2), с использованием окрестностей циклов в координатах (x_1, K, t), (x_2, K, t).

Таблица 2

$z_i(t)$	$x_1(t), K_{z_i}(t)$	λ_i					
		λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
$z_{10}(t)$	$x_1(t), K_{z_1}(t)$	-0.3211	-0.1128	-0.0747	-0.0577	-0.0476	-0.0410
$z_{20}(t)$	$x_1(t), K_{z_2}(t)$	-0.8026	-0.2871	-0.1554	-0.1113	-0.0885	-0.0742
$z_{30}(t)$	$x_1(t), K_{z_3}(t)$	-0.4754	-0.3934	-0.1647	-0.1062	-0.0296	-0.0657

Показатели Ляпунова для устойчивых циклов являются отрицательными величинами, при этом наименьшее значение $\lambda_6 = -0.0743$ определено для устойчивого цикла $z_{20}(t)$ в координатах (x_2, K, t) . Полученные результаты позволяют использовать показатели Ляпунова в качестве критерия качества режимов скрытой синхронизации для систем фазовой автоподстройки частоты.

5. Заключение

В работе, определены основные механизмы реализации режимов скрытой синхронизации в системах фазовой автоподстройки. Численными методами проведен мультипликаторный анализ бифуркации колебательных циклов и колебательно-вращательных циклов. Предложено расширение исходной системы дифференциальных уравнений за счет включения в нее уравнения производной кривизны решения. С использованием понятия кривизны цикла проведен анализ близости циклов фазовой и нефазовой систем. Предложено использование вращения векторного поля расширенной системы для определения начальных значений и периодов устойчивых и неустойчивых циклов. Определены показатели Ляпунова для кривизны циклов в случае мультистабильности. Практическая значимость полученных результатов заключается в использовании кривизны при выборе режимов скрытой синхронизации в случае мультистабильности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бакунов Г. М., Матросов В. В., Шалфеев В. Д. О квазисинхронных режимах в системе фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка при приближенном учете запаздывания // Изв. вузов "ПНД". — 2011. — Т. 19. — № 3. — С. 171–178.

2. Леонов Г. А., Буркин И. М., Шепелявый А. И. Частотные методы в теории колебаний. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992.

3. Мамонов С. С. Динамика системы частотно-фазовой автоподстройки частоты с фильтрами первого порядка // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Математика, механика, информатика. — 2011. — Т. 11. — вып. 1. — С. 70–81.

4. Мамонов С. С., Ионова И. В. Применение вращения векторного поля для определения циклов второго рода // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 14. — № 5. — С. 46–54.

5. Мамонов С. С., Харламова А. О. Квазисинхронные режимы фазовой системы // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. — 2016. — № 56. — С. 45–51.

6. Мамонов С. С., Харламова А. О. Отделение циклов второго рода системы частотно-фазовой автоподстройки частоты // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 15. — № 3. — С. 97–102.

7. Мамонов С. С., Харламова А. О. Определение условий существования предельных циклов первого рода систем с цилиндрическим фазовым пространством // Журнал Средневолжского математического общества. — 2017. — Т. 19. — № 1. — С. 67-–76.

8. Мамонов С. С., Харламова А. О. Вынужденная синхронизация систем фазовой автоподстройки с запаздыванием // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. — 2017. — № 62. — С. 26–35.

9. Мамонов С. С., Харламова А. О. Численно-аналитическое определение циклов первого рода фазовой системы дифференциальных уравнений // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 17. — № 4.— С. 48–56.

10. Мамонов С. С., Харламова А. О. Циклы первого рода систем с цилиндрическим фазовым пространством // ВИНИТИ РАН. Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. — 2018. — Т. 148. — С. 83–92.

11. Мамонов С. С., Харламова А. О., Ионова И. В. Колебательно-вращательные циклы фазовой системы дифференциальных уравнений // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. — Москва, 2018. — Т. 18. — № 4. — С. 51–57.

12. Мамонов С. С., Харламова А. О., Ионова И. В. Кривизна колебательных циклов фазовых систем // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. — 2019. — Т. 19, — № 2. — С. 105–110.

13. Шалфеев В. Д., Матросов В. В. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2013.

14. Матросов В. В. Вынужденная синхронизация: Учеб.-метод. пособие. — Н. Новгород, 2013. — 40 с.

15. Бакунов Г. М., Матросов В. В., Шалфеев В. Д. О регулярных квазисинхронных режимах в системе фазовой автоподстройки частоты // Вестник ННГУ. — 2010. — № 6. — С. 43–47.

16. Абрамов В. В. Условия существования периодического решения дифференциального уравнения второго порядка с квадратичной нелинейной частью // Вестник РАЕН. — 2018. — Т. 18. — № 4. — С. 3–7.

17. Лискина Е. Ю. Условия существования ненулевых периодических решений нелинейной автономной динамической системы второго порядка в случае пары нулевых собственных значений матрицы системы линейного приближения // Вестник РАЕН. — 2017. — Т. 17. — № 4. — С. 38–43.

18. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1972. — 768 с.

19. Капранов М. В., Кулешов В. Н., Уткин Г. М. Теория колебаний в радиотехнике. — М.: Наука, 1984. — 320 с.

20. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966. — 332 с.

REFERENCES

1. Bakunov, G. M. & Matrosov, V. V. & Shalfeev, V. D. 2011, "On quasisynchronous modes in a phase-locked loop with a second-order filter with approximate consideration of delay"// Izv. vuzov "PND". vol. 19. no. 3. pp. 171–178.

2. Leonov, G. A. & Burkin, I. M. & Shepelyavy, A. I. 1992, "Frequency methods in the theory of oscillations"// SPb., Science Publ. of St. Petersburg State University.

3. Mamonov, S. S. 2011, "Dynamics of a frequency-phase locked loop with first-order filters"// Bulletin of the Novosib. State University. Series: Mathematics, Mechanics, Computer Science. vol. 11. no. 1. pp. 70–81.

4. Mamonov, S. S. & Ionova, I. V. 2014,"Application of rotation of a vector field to determine cycles of the second kind"// Bulletin of the Russian Academy of Natural Sciences. Differential equations. vol. 14. no. 5. pp. 46–54.

5. Mamonov, S. S. & Kharlamova, A. O. 2016, "Quasisynchronous regimes of the phase system"// Bulletin of the Ryazan State Radio Engineering University. no. 56. pp. 45–51.

6. Mamonov, S. S. & Kharlamova, A. O. 2015, "Separation of cycles of the second kind of frequency-phase locked loop"// Bulletin of the Russian Academy of Natural Sciences. Differential equations. vol. 15. no. 3. pp. 97–102.

7. Mamonov, S. S. & Kharlamova, A. O. 2017, "Determination of the conditions for the existence of limit cycles of the first kind of systems with cylindrical phase space"// Journal of the Srednevolzhsky Mathematical Society. vol. 19. no. 1. pp. 67–76.

8. Mamonov, S. S. & Kharlamova, A. O. 2017, "Forced synchronization of phase-locked loop systems with delay"// Bulletin of the Ryazan State Radio Engineering University. no. 62. pp. 26–35.

9. Mamonov, S. S. & Kharlamova, A. O. 2017, "Numerical and analytical definition of cycles of the first kind of a phase system of differential equations"// Bulletin of the Russian Academy of Natural Sciences. Differential equations. vol. 17. no. 4. pp. 48–56.

10. Mamonov, S. S. & Kharlamova, A. O. 2018, "Cycles of the first kind of systems with a cylindrical phase space"// VINITI. Results of science and technology. Series: Contemporary Mathematics and its Applications. vol. 148. no. 4. pp. 83–92.

11. Mamonov, S. S. & Kharlamova, A. O. & Ionova I. V. 2018, "Oscillatory-rotational cycles of the phase system of differential equations"// Bulletin of the Russian Academy of Natural Sciences. Differential equations. vol. 18. no. 4. pp. 51–57.

12. Mamonov, S. S. & Kharlamova, A. O. & Ionova I. V. 2019, "The curvature of the oscillatory cycles of phase systems"// Bulletin of the Russian Academy of Natural Sciences. Differential equations. vol. 19. no. 2. pp. 105–110.

13. Shalfeev, V. D. & Matrosov, V. V. 2013, "Nonlinear dynamics of phase synchronization systems". N. Novgorod Publ. of the UNN.

14. Matrosov, V. V. 2013, "Forced synchronization"// Textbook. Allowance. Nizhny Novgorod.

15. Bakunov, G. M. & Matrosov, V. V. & Shalfeev, V. D. 2010, "About regular quasysynchronous modes in the phase-locked loop"// Bulletin of Nizhny Novgorod State University. no. 6. pp. 43–47.

16. Abramov, V. V. 2018, "Conditions for the existence of a periodic solution of a second-order differential equation with a quadratic nonlinear part"// Bulletin of the Russian Academy of Natural Sciences. Differential equations. vol. 18. no. 4. pp. 3–7.

17. Liskina, E. Yu. 2017, "Conditions for the existence of nonzero periodic solutions of a second-order nonlinear autonomous dynamical system in the case of a pair of zero eigenvalues of the matrix of the linear approximation system"// Bulletin of the Russian Academy of Natural Sciences. Differential equations. vol. 17. no. 4. pp. 38–43.

18. Besekersky , V. A. & Popov E. P. 1972, "Theory of automatic control systems". Moscow: Nauka.

19. Kapranov, M. V. & Kuleshov, V. N. & Utkin, G. M. 1984, "The theory of oscillations in radio engineering". Moscow: Nauka.

20. Krasnoselsky, M. A. 1966, "The shift operator along the trajectories of differential equations". Moscow: Nauka.

Получено 18.08.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 3.

УДК 517.444, 517.588 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-348-359

Об одной сумме интегральных преобразований Ганкеля–Клиффорда функций Уиттекера

Джунесанг Чой, А. И. Нижников, И. А. Шилин

Джунесанг Чой — доктор наук, заслуженный профессор Данггукского университета (г. Кёнджу, Республика Корея).
e-mail: junesang@dongguk.ac.kr
Нижников Александр Иванович — кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики, информатики и ИТ, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: ainizhnikov@mail.ru
Шилин Илья Анатольевич — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики НИУ МЭИ и кафедры алгебры, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: ilyashilin@li.ru

Аннотация

В статье [11] авторами рассматривалась реализация T представления группы $SO(2,2)$ в одном пространстве однородных функций, заданных на 2×4-матрицах. Настоящее продолжение этой статьи посвящено вычислению матричных элементов тождественного оператора $T(e)$ и операторов представления $T(g)$ для подходящих элементов g группы относительно смешанного базиса, соответствующего двум различным базисам пространства представления, и вычислению некоторых несобственных интегралов, содержащих произведение функций Бесселя–Клиффорда и Уиттекера. Полученные результаты могут быть переписаны на языке интегральных преобразований Ганкеля–Клиффорда и их аналога. Первое и второе преобразования Ганкеля–Клиффорда, введенные сооответственно Хайеком и Перезом–Робайной, играют важную роль в теории дифференциальных операторов дробного порядка (см., например, [6, 8]). Близкий результат получен авторами недавно [12] для регулярной кулоновской функции.

Ключевые слова: группа $SO(2,2)$, матричные элементы представления, интегральные преобразования Ганкеля–Клиффорда, интегральное преобразование Макдональда–Клиффорда, функции Уиттекера, функции Бесселя–Клиффорда.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Джунесанг Чой, А. И. Нижников, И. А. Шилин. Об одной сумме интегральных преобразований Ганкеля–Клиффорда функций Уиттекера // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 3, с. 348–359.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 3.

UDC 517.444, 517.588 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-348-359

On one sum of Hankel–Clifford integral transforms of Whittaker functions

J. Choi, A. I. Nizhnikov, I. A. Shilin

Junesang Choi — Doctor of Sciences, Emeritus Professor of Dangguo University (Gyeongju, Republic of Korea).
e-mail: junesang@dongguk.ac.kr
Nizhnikov Alexander Ivanovich — candidate of physical and mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Applied Mathematics, Computer Science and IT, Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: ainizhnikov@mail.ru
Shilin Ilya Anatolevich — candidate of physical and mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, NRU MEI and the Department of Algebra, Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: ilyashilin@li.ru

Abstract

In [11], the authors considered the realization T of $SO(2,2)$-representation in a space of homogeneous functions on 2×4-matrices. In this sequel, we aim to compute matrix elements of the identical operator $T(e)$ and representation operator $T(g)$ for an appropriate g with respect to the mixed basis related to two different bases in the $SO(2,2)$-carrier space and evaluate some improper integrals involving a product of Bessel-Clifford and Whittaker functions. The obtained result can be rewritten in terms of Hankel-Clifford integral transforms and their analogue. The first and the second Hankel-Clifford transforms introduced by Hayek and Pérez–Robayna, respectively, play an important role in the theory of fractional order differential operators (see, e.g., [6, 8]). The similar result have been derived recently by the authors for the regular Coulomb function in [12].

Keywords: group $SO(2,2)$, matrix elements of representation, Hankel-Clifford integral transform, Macdonald-Clifford integral transform, Whittaker functions, Bessel-Clifford functions.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
J. Choi, A. I. Nizhnikov, I. A. Shilin, 2019, "On one sum of Hankel–Clifford integral transforms of Whittaker functions", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 348–359.

1. Introduction and preliminaries

We recall the definitions and notations in [11]. The group $SO(2,2)$, which preserves the quadratic form $\mathcal{E}$ defined in $\mathbb{R}^4$ whose matrix with respect to the canonical basis is a diagonal matrix $e_{2,2} = \operatorname{diag}(1,1,-1,-1)$, which is called the split orthogonal group and consists of real 4×4 matrices g satisfying the equality $g\,e_{2,2}\,g^{\mathrm{t}} = e_{2,2}$. Here and throughout, let $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{Z}$ and $\mathbb{N}$ be the sets of complex numbers, real numbers, positive real numbers, negative real numbers, integers and positive integers, respectively, and let $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N}\cup\{0\}$. Let L be a real linear space consisting of real 2×4 matrices. We define the cone Λ in L by the subset of matrices of rank 2 satisfying the equation $x\, e_{2,2}\, x^{\mathrm{t}} = \mathrm{diag}(0,0)$. Let $\mathfrak{L}$ be the complex linear space consisting of infinitely differentiable functions defined on Λ and satisfying the equality $f(bx) = |b_{11}|^{\sigma_1}\, |b_{22}|^{\sigma_2}\, f(x)$ for a fixed pair $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{C}^2$ and arbitrary non-degenerate matrix $b = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. We consider the $SO(2,2)$-representation T in $\mathfrak{L}$ defined by formula $T(g)[f(x)] = f(xg)$. In [14], with a view to investigating some special functions of matrix argument, this construction has been used.

Shilin and Choi [11] dealt with the spherical section ω_1 of Λ consisting of matrices

$$\tilde{x}(\alpha_1, \beta_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 & \cos\beta_1 & -\sin\beta_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & \sin\beta_1 & \cos\beta_1 \end{pmatrix} \quad (\alpha_1,\, \beta_1 \in [0, 2\pi)). \tag{1}$$

In particular, they [11] showed that for any $x \in \Lambda$ there are a low triangular non-degenerate 2×2-matrix b and $\tilde{x} \in \omega_1$ such that $x = b\tilde{x}$. If $\mathfrak{L}_1$ is the linear space of restrictions of functions $f \in \mathfrak{L}$ on ω_1, we can realize the representations T as the same representation in $\mathfrak{L}_1$. They also showed that the function $f = \exp(\mathbf{i}p_1\alpha_1)\exp(\mathbf{i}q_1\beta_1)$ defined on ω_1 does not belong to $f = \exp(\mathbf{i}p_1\alpha_1)\exp(\mathbf{i}q_1\beta_1)$ if and only if the sum $p_1 + q_1$ is not divisible by 2, and defined the canonical basis

$$\tilde{B}_1 = \{\tilde{f}_{p_1,q_1}(\alpha_1, \beta_1) = \exp(\mathbf{i}p_1\alpha_1)\exp(\mathbf{i}q_1\beta_1) \;|\; p_1,\, q_1 \in \mathbb{Z},\, p_1 + q_1 \equiv 0 \pmod 2\},$$

which is orthonormal with respect to the scalar product

$$f * g = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha_1, \beta_1)\, \overline{g(\alpha_1, \beta_1)}\, \mathrm{d}\alpha_1\, \mathrm{d}\beta_1$$

in $\mathfrak{L}_1$. Writing Cartan decomposition $g = g_1 g_2 g_3$ for an arbitrary element g of the group $SO(2,2)$, where $g_1, g_3 \in SO(2) \times SO(2)$ and

$$g_2 \in \exp\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{diag}(\mu, \nu) \\ \mathrm{diag}(\mu, \nu) & 0 \end{pmatrix},$$

they showed that in case $|\nu| \neq |\mu|$ the matrix elements of the linear operator $T(g)$ with respect to $\tilde{B}_1$ can be written as a product of four exponential functions, depending respectively on four parameters of the rotations g_1 and g_3, and two Gaussian hypergeometric functions depending (respectively) on $\left(\tanh\frac{\mu\pm\nu}{2}\right)^2$.

The parabolic section ω_2 of Λ has been defined as the subset consisting of matrices

$$\tilde{x}(\alpha_2, \beta_2) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 & \cos\beta_2 - \alpha_2\sin\beta_2 & \sin\beta_2 + \alpha_2\cos\beta_2 \\ 0 & 1 & -\sin\beta_2 & \cos\beta_2 \end{pmatrix},$$

where $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ and $\beta_2 \in [0, 2\pi)$. If $\mathfrak{L}_2$ is the linear space of restrictions of functions $f \in \mathfrak{L}$ on ω_2, then the canonical basis in $\mathfrak{L}_2$ can be defined as follows:

$$\tilde{B}_2 = \{\tilde{f}_{p_2,q_2}(\alpha_2, \beta_2) = \exp(\mathbf{i}p_2\alpha_2)\exp(\mathbf{i}q_2\beta_2) \;|\; p_2 \in \mathbb{R},\, q_2 \in [0, 2\pi)\}.$$

They [11] established the one-to-one correspondence between the restrictions of $T(g)$ to $\mathfrak{L}_2$ and integral operators whose kernels can be described in terms of some Bessel functions.

2. Two bases in $\mathfrak{L}$ and our purpose

Let us denote the determinant $\det\begin{pmatrix} x_{1m} & x_{1n} \\ x_{2m} & x_{2n} \end{pmatrix}$ inside the matrix $x \in \Lambda$ by $\Delta_{m,n}$ and introduce the basis

$$B_1 = \{f_{p_1,q_1}(x) \;|\; p_1, q_1 \in \mathbb{Z}, p_1 + q_1 \equiv 0 \pmod 2\}$$

in $\mathfrak{L}$, consisting of functions

$$f_{p_1,q_1}(x) = (x_{11}^2 + x_{12}^2)^{\frac{\sigma_1-\sigma_2+q_1-p_1}{2}} \, |\Delta_{1,2}|^{\sigma_2-q_1} \, (x_{11} - \mathbf{i}x_{12})^{p_1-q_1} \, (\Delta_{1,3} + \mathbf{i}\Delta_{1,4})^{q_1}.$$

Obviously the restriction of f_{p_1,q_1} to ω_1 coincides with $\mathbf{i}^{q_1}\tilde{f}_{p_1,-q_1}$:

$$f_{p_1,q_1}|_{\omega_1} = \mathbf{i}^{q_1}\tilde{f}_{p_1,-q_1}. \tag{2}$$

In this paper, we also use the basis

$$B_2 = \{f_{p_2,q_2}(x) \mid p_2 \in \mathbb{R},\, q_2 \in \mathbb{Z}\},$$

where

$$f_{p_2,q_2}(x) = |x_{11}|^{\sigma_1-\sigma_2} \, |\Delta_{1,2}|^{\sigma_2-q_2} \, (\Delta_{1,3} + \mathbf{i}\Delta_{1,4})^{q_2} \, \exp\frac{\mathbf{i}p_2x_{12}}{x_{11}}.$$

It is easy to see that f_{p_2,q_2} is an extension of the function $\mathbf{i}^{q_2}\tilde{f}_{p_2,q_2}$ to Λ.

Let $\mathrm{span}(f_{p_1,q_1},\, f_{\hat{p}_1,\hat{q}_1})$ be the subspace in $\mathfrak{L}_1$. It is invariant with respect to the linear operator $T(g)$ (for some fixed g) and its basis vectors f_{p_1,q_1} and $f_{\hat{p}_1,\hat{q}_1}$ which are not eigenfunctions of this operator. In this paper, we aim to establish dependence between the matrix elements of the operator $T(g)$ with respect to the *ordinary* basis B_2 and the *mixed* basis $B_2|B_1$ and matrix elements of the operator $\mathrm{id} \equiv T(e)$ with respect to $B_2|B_1$. Choosing here the group element as follows:

$$h^* = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{diag}(1,1)\right),$$

we will show that the above dependence can be rewritten as a representation of Whittaker function of the second kind in the form of integral involving Whittaker and Bessel-Clifford functions. The Bessel-Clifford functions are used, for example, for solution of wave equation [1] and are a particular case of more generalized so-called Bessel-Maitland functions (see [8]).

The above-described approach, together with other methods, was used by Shilin and Choi [10] who considered another realization of the representation of the group $SO(2,2)$ and representation operators corresponding to some diagonal and block-diagonal matrices which belong to the split orthogonal group.

3. Transitive subgroups and invariant measures

It is obvious that ω_1 is an orbit of the subgroup $H_1 \simeq SO(2)\times SO(2)$, consisting of the matrices

$$h_1(\varphi_1,\psi_1) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\psi_1 & -\sin\psi_1 \\ 0 & 0 & \sin\psi_1 & \cos\psi_1 \end{pmatrix}.$$

Let us consider the matrices

$$h(\varrho) = \begin{pmatrix} 2 & \varrho & 0 & \varrho \\ -\varrho & 2 & \varrho & 0 \\ 0 & \varrho & 2 & \varrho \\ \varrho & 0 & -\varrho & 2 \end{pmatrix}$$

and the points $\tilde{x}(\alpha_2,\beta_2)$ and $\tilde{x}(\hat{\alpha}_2,\hat{\beta}_2)$ belong to the subset ω_2 of Λ. Since the matrix elements $h_{ij}(\varrho)$ of the matrix $h(\varrho)$ satisfy the equalities

$$h_{i1}(\varrho) + h_{i2}(\varrho) - h_{i3}(\varrho) - h_{i4}(\varrho) = 4\,\mathrm{sign}(2.5 - i),$$

we get $\frac{1}{2}h(\varrho) \in SO(2,2)$. It is easy to see that

$$\tilde{x}(\alpha_2,\beta_2)h_1(0,-\beta_2) = \tilde{x}(\alpha_2,0) \equiv \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 & 1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\frac{1}{2}\tilde{x}(\alpha_2,0)h(\hat{\alpha}_2-\alpha_2) = \tilde{x}(\hat{\alpha}_2,0)$$

and

$$\tilde{x}(\hat{\alpha}_2,0)h_1(0,\hat{\beta}_2) = \tilde{x}(\hat{\alpha}_2,\hat{\beta}_2).$$

Thus the matrix

$$h_2(\hat{\alpha}_2-\alpha_2,\hat{\beta}_2-\beta_2) = \frac{1}{2}h_1(0,-\beta_2)h(\hat{\alpha}_2-\alpha_2)h_1(0,\hat{\beta}_2)$$

transforms the point $\tilde{x}(\alpha_2,\beta_2)$ into the point $\tilde{x}(\hat{\alpha}_2,\hat{\beta}_2)$. It means that the subgroup

$$H_2 = \{h_2(\varphi_2,\psi_2) \mid \varphi_2 \in \mathbb{R},\, \psi_2 \in [0;2\pi)\}$$

acts transitively on ω_2. Also we find that $\mathrm{d}\omega_2 = \mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\beta_2$ is an H_2-invariant measure on ω_2. It is found that f_{p_2,q_2} is an eigenfunction of the linear operator $T(h_2(\varphi_2,\psi_2))$, more exactly,

$$T(h_2(\varphi_2,\psi_2))[f_{p_2,q_2}] = \exp(\mathbf{i})f_{p_2,q_2}.$$

Similarly $\mathrm{d}\omega_1 = \mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\beta_1$ is an H_1-invariant measure on the spherical section ω_1 and f_{p_1,q_1} is an eigenfunction of the operator $T(h_1(\varphi_1,\psi_1))$, namely

$$T(h_1(\varphi_1,\psi_1))[f_{p_1,q_1}] = \exp(\mathbf{i}p_1\varphi_1)\exp(\mathbf{i}q_1\psi_1)f_{p_1,q_1}.$$

4. Functionals F_1 and F_2 and assorted spaces

Let us introduce the following bilinear functionals defined on the direct product $\mathfrak{L}\times\mathfrak{L}^\bullet$ of two representation spaces:

$$\mathsf{F}_i:\ (u,v^\bullet) \longmapsto \iint\limits_{\omega_i} u(\alpha_i,\beta_i)\,v^\bullet(\alpha_i,\beta_i)\,\mathrm{d}\omega_i \quad (i=1,\,2),$$

where the functions on $\mathfrak{L}^\bullet$ are $(\sigma_1^\bullet,\sigma_2^\bullet)$-homogeneous.

Lemma 1. *The functional F_1 coincides with F_2 if and only if*

$$\sigma_1^\bullet - \sigma_2^\bullet = \sigma_2 - \sigma_1 - 4. \tag{3}$$

Доказательство. It was shown in [11] that for any point $x \in \Lambda$ there are a low triangular non-degenerate 2×2-matrix b_x and the point $\tilde{x}(\alpha_2,\beta_2)_x \in \omega_2$ such that $x = b_x\tilde{x}(\alpha_2,\beta_2)_x$, and $b_{11}=x_{11}$, $b_{21}=x_{21}$, $\alpha_2 = \frac{x_{12}}{x_{11}}$. In particular, for an arbitrary point (1) belonging to ω_1, we have

$$b_{\tilde{x}(\alpha_1,\beta_1)} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & 0 \\ \sin\alpha_1 & \sec\alpha_1 \end{pmatrix},$$

and, therefore, the correspondence $\tilde{x}(\alpha_1,\beta_1) \mapsto \tilde{x}(\alpha_2,\beta_2)_{\tilde{x}(\alpha_1,\beta_1)}$ is one-to-one. Since the operands $u\in\mathfrak{L}$ and $v^\bullet \in \mathfrak{L}^\bullet$ of the functional F_1 are (σ_1,σ_2)- and $(\sigma_1^\bullet,\sigma_2^\bullet)$-homogeneous, respectively, we have

$$u(\alpha_1,\beta_1)\,v^\bullet(\alpha_1,\beta_1) = (\cos\alpha_1)^{\sigma_1+\sigma_1^\bullet-\sigma_2-\sigma_2^\bullet}\,u(\alpha_2,\beta_2)\,v^\bullet(\alpha_2,\beta_2).$$

Considering that ω_1-coordinates depend on ω_2-coordinates according to the formulae

$$\alpha_1 = \arccos\left(\pm\frac{1}{\sqrt{1+\alpha_2^2}}\right), \quad \beta_1 = \arctan\frac{\alpha_2\cos\beta_2+\sin\beta_2}{\alpha_2\sin\beta_2-\cos\beta_2}, \quad \left|\frac{\partial(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial(\alpha_2,\alpha_2)}\right| = (1+\alpha_2^2)^{-1},$$

we get

$$\mathsf{F}_1(u,v^\bullet) = \iint\limits_{\omega_1} u(\alpha_1,\beta_1)\,v^\bullet(\alpha_1,\beta_1)\,\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\beta_1 = \iint\limits_{\omega_2} \frac{u(\alpha_2,\beta_2)\,v^\bullet(\alpha_2,\beta_2)\,\mathrm{d}\alpha_2\,\mathrm{d}\beta_2}{(1+\alpha_2^2)^{\sigma_1+\sigma_1^\bullet-\sigma_2-\sigma_2^\bullet+4}}.$$

It is clear that the equality $\mathsf{F}_1=\mathsf{F}_2$ is equivalent to $\sigma_1+\sigma_1^\bullet-\sigma_2-\sigma_2^\bullet+4=0$. □

Further we assume that representation spaces $\mathfrak{L}$ and $\mathfrak{L}^\bullet$ are *mutually assorted*, i.e., the pair $(\sigma_1^\bullet,\sigma_2^\bullet)$ for the representation space $\mathfrak{L}^\bullet$ is connected with the pair (σ_1,σ_2) for $\mathfrak{L}$ by the equality (3).

5. Matrix elements of the $B_1^\bullet \longrightarrow B_2^\bullet$ basis transformation

Let us express the function f_{p_2,q_2} as a linear combination of the functions belonging to the basis $B_2^\bullet$:

$$f^\bullet_{p_2,q_2}(x) = \sum_{p_1,q_1\in\mathbb{Z}} c_{p_1,q_1,p_2,q_2}\, f^\bullet_{p_1,q_1}(x). \tag{4}$$

In view of Lemma 1, we have

$$\mathsf{F}_2(f^\bullet_{p_2,q_2}, f_{\hat p_1,\hat q_1}) = \sum_{p_1,q_1\in\mathbb{Z}} c_{p_1,q_1,p_2,q_2}\,\mathsf{F}_1(f^\bullet_{p_1,q_1}, f_{\hat p_1,\hat q_1}).$$

Since

$$\mathsf{F}_1(f^\bullet_{p_1,q_1}, f_{\hat p_1,\hat q_1}) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(\mathbf{i}[p_1+\hat p_1]\alpha_1)\,\exp(\mathbf{i}[q_1+\hat q_1]\beta_1)\,\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\beta_1,$$

we obtain

$$c_{p_1,q_1,p_2,q_2} = \frac{1}{4\pi^2}\,\mathsf{F}_2(f^\bullet_{p_2,q_2}, f_{-p_1,-q_1}).$$

We compute the matrix elements of the linear operator acting in $\mathfrak{L}^\bullet$ and transforming the basis $B_1^\bullet$ into $B_2^\bullet$, asserted by the following theorem.

Теорема 1. *Let* p_1, q_1, $q_2\in\mathbb{Z}$, $p_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, *and* $\operatorname{Re}(\sigma_1-\sigma_2)>-3$. *Then*

$$\begin{aligned} c_{p_1,q_1,p_2,q_2} &= 2^{\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}-3}\,\pi^{-1}\delta_{q_1,-q_2}\,|p_2|^{\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}+1} \\ &\times\left[\Gamma\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2+(q_1-p_1)\operatorname{sign}p_2}{2}\right)\right]^{-1} W_{\frac{(q_1-p_1)\operatorname{sign}p_2}{2},\,\frac{\sigma_2-\sigma_1-3}{2}}\left(2|p_2|\right), \end{aligned} \tag{5}$$

where Γ *is the gamma function,* $W_{\mu,\nu}$ *is the Whittaker function of the second kind, and* $\delta_{s,t}$ *is the Kronecker symbol.*

Доказательство. Using iterated integrals for

$$\begin{aligned} \mathsf{F}_2(f_{p_2,q_2}, f^\bullet_{-p_1,-q_1}) = \mathbf{i}^{q_1+q_2} &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} (1+\alpha_2^2)^{\frac{\sigma_2-\sigma_1-p_1+q_1}{2}-2}\,(1-\mathbf{i}\alpha_2)^{p_1-q_1} \\ &\times\exp\left(\mathbf{i}[p_2\alpha_2+(q_1+q_2)\beta_2]\right)\mathrm{d}\alpha_2\,\mathrm{d}\beta_2, \end{aligned}$$

we find that c_{p_1,q_1,p_2,q_2} can be expressed as an exponential Fourier transform:

$$\begin{aligned}\mathsf{F}_2(f_{p_2,q_2}, f^{\bullet}_{-p_1,-q_1}) =& 2\pi\,\delta_{q_1,-q_2}\int_{-\infty}^{\infty}(1+\mathbf{i}\alpha_2)^{\frac{\sigma_2-\sigma_1+q_1-p_1}{2}-2}\\ &\times(1-\mathbf{i}\alpha_2)^{\frac{\sigma_2-\sigma_1+p_1-q_1}{2}-2}\exp(\mathbf{i}p_2\alpha_2)\,\mathrm{d}\alpha_2.\end{aligned} \tag{6}$$

The integral in (6) can be evaluated by the following known formulae (see, e.g., [4, Entry 3.2.(12)])

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}(\alpha+\mathbf{i}x)^{-2\mu}(\beta-\mathbf{i}x)^{-2\nu}\exp(-\mathbf{i}xy)\,\mathrm{d}x &= 2\pi(\alpha+\beta)^{-\nu-\mu}\,[\Gamma(2\nu)]^{-1}\\ &\times\exp\left(\frac{(\beta-\alpha)y}{2}\right)y^{\nu+\mu-1}\,W_{\nu-\mu,\frac{1}{2}-\nu-\mu}([\alpha+\beta]y)\\ &\left(\mathrm{Re}(\mu+\nu)>\frac{1}{2},\ \min\{\mathrm{Re}(\alpha),\mathrm{Re}(\beta)\}>0;\ y\in\mathbb{R}^+\right)\end{aligned} \tag{7}$$

and

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}(\alpha+\mathbf{i}x)^{-2\mu}(\beta-\mathbf{i}x)^{-2\nu}\exp(-\mathbf{i}xy)\,\mathrm{d}x &= 2\pi(\alpha+\beta)^{-\mu-\nu}\,[\Gamma(2\mu)]^{-1}\\ &\times\exp\left(\frac{(\alpha-\beta)y}{2}\right)(-y)^{\nu+\mu-1}\,W_{\mu-\nu,\frac{1}{2}-\nu-\mu}(-[\alpha+\beta]y)\\ &\left(\mathrm{Re}(\mu+\nu)>\frac{1}{2},\ \min\{\mathrm{Re}(\alpha),\mathrm{Re}(\beta)\}>0;\ y\in\mathbb{R}^-\right).\end{aligned} \tag{8}$$

□

6. Matrix elements of the operator $T^{\bullet}(h^*)$ with respect to $B_2^{\bullet}$

For any $g\in SO(2,2)$, let $t^{\bullet}_{p_2,q_2,\hat{p}_2,\hat{q}_2}(g)$ be a matrix element of the linear operator $T^{\bullet}(g)$ with respect to the basis $B_2^{\bullet}$, that is,

$$T^{\bullet}(g)[f^{\bullet}_{p_2,q_2}] = \sum_{\hat{q}_2\in\mathbb{Z}}\int_0^{\infty} t^{\bullet}_{p_2,q_2,\hat{p}_2,\hat{q}_2}(g)\,f^{\bullet}_{\hat{p}_2,\hat{q}_2}\,\mathrm{d}\hat{p}_2. \tag{9}$$

In view of Lemma 1, we get

$$\begin{aligned}\mathsf{F}_i(T^{\bullet}(g)[f^{\bullet}_{p_2,q_2}], f_{\tilde{p}_2,\tilde{q}_2}) &= \sum_{\hat{q}_2\in\mathbb{Z}}\int_0^{\infty} t^{\bullet}_{p_2,q_2,\hat{p}_2,\hat{q}_2}(g)\,\mathsf{F}_2(f^{\bullet}_{\hat{p}_2,\hat{q}_2}, f_{\tilde{p}_2,\tilde{q}_2})\,\mathrm{d}\hat{p}_2\\ &= 4\pi^2\int_0^{\infty} t^{\bullet}_{p_2,q_2,\hat{p}_2,-\tilde{q}_2}(g)\,\delta(\hat{p}_2+\tilde{p}_2)\,\mathrm{d}\hat{p}_2,\end{aligned}$$

where $\delta(\hat{p}_2+\tilde{p}_2)$ is the $(-\tilde{p}_2)$-delayed Dirac delta function. We therefore have

$$t^{\bullet}_{p_2,q_2,\hat{p}_2,\hat{q}_2}(g) = \frac{1}{4\pi^2}\mathsf{F}_i(T^{\bullet}(g)[f^{\bullet}_{p_2,q_2}], f_{-\hat{p}_2,-\hat{q}_2}).$$

In Theorem 2, we show that the matrix elements $t^{\bullet}_{p_2,q_2,\hat{p}_2,\hat{q}_2}(h^*)$ can be described in terms of either Bessel–Clifford functions of the first kind

$$\mathcal{C}_{\nu}(z) = z^{-\frac{\nu}{2}}\,J_{\nu}\left(2\sqrt{z}\right) \tag{10}$$

or modified Bessel-Clifford functions of the second kind

$$\mathcal{K}_{\nu}(z) = z^{-\frac{\nu}{2}}\,K_{\nu}\left(2\sqrt{z}\right) \tag{11}$$

depending on $\mathrm{sign}(p_2\hat{p}_2)$ in both cases (see [2]). Here J_ν and K_ν are Bessel functions of the first kind and modified Bessel functions of the second kind, respectively, (see, e.g., [13, Chapter 9]).

Теорема 2. *Let* $p_2, \hat{p}_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $q_2, \hat{q}_2 \in [0, 2\pi)$, *and* $2 < \mathrm{Re}(\sigma_2 - \sigma_1) < 4$. *Then*

$$t^{\bullet}_{p_2,q_2,\hat{p}_2,\hat{q}_2}(h^*) = -\frac{2\,\mathbf{i}^{q_2}\,\delta_{q_2,\hat{q}_2}}{\pi}\,|p_2|^{\sigma_2-\sigma_1-3}\,\sin\frac{(\sigma_2-\sigma_1)\pi}{2}\,\mathcal{K}_{\sigma_2-\sigma_1-3}(-p_2\hat{p}_2) \tag{12}$$

$$\big(p_2\,\hat{p}_2 \in \mathbb{R}^-\big)$$

and

$$\begin{aligned} t^{\bullet}_{p_2,q_2,\hat{p}_2,\hat{q}_2}(h^*) &= \frac{\mathbf{i}^{q_2}\,\delta_{q_2,\hat{q}_2}}{2}\,\cos\frac{(\sigma_2-\sigma_1)\pi}{2} \\ &\times \big[|\hat{p}_2|^{\sigma_1-\sigma_2+3}\mathcal{C}_{\sigma_1-\sigma_2+3}(p_2\hat{p}_2) - |p_2|^{\sigma_2-\sigma_1-3}\mathcal{C}_{\sigma_2-\sigma_1-3}(p_2\hat{p}_2)\big] \end{aligned} \tag{13}$$

$$\big(p_2\,\hat{p}_2 \in \mathbb{R}^+\big)\,.$$

Доказательство. Since the right shift of the subset ω_2 by the matrix h^* permutates the first and the second columns of any point belonging to ω_2, we have

$$T(h^*)[f_{p_2,q_2}(x)] = |x_{12}|^{\sigma_1-\sigma_2}\,|\Delta_{1,2}|^{\sigma_2-q_2}\,(\Delta_{2,3}+\mathbf{i}\Delta_{2,4})^{q_2}\,\exp\left(-\frac{\mathbf{i}p_2x_{11}}{x_{12}}\right).$$

In view of Lemma 1, the $T^{\bullet}(h^*)$-image of the restriction of $f^{\bullet}_{p_2,q_2}$ to ω_2 is given as follows:

$$T^{\bullet}(h^*)[\tilde{f}_{p_2,q_2}](\alpha_2,\beta_2) = (-1)^{q_2}\,|\alpha_2|^{\sigma_2-\sigma_1-4}\,\exp(\mathbf{i}q_2\beta_2)\,\exp\left(-\frac{\mathbf{i}p_2}{\alpha_2}\right).$$

We obtain

$$\begin{aligned} t^{\bullet}_{p_2,q_2,\hat{p}_2,\hat{q}_2}(h^*) &= \frac{1}{4\pi^2}\mathsf{F}_2(T^{\bullet}(h^*)[f^{\bullet}_{p_2,q_2}], f_{-\hat{p}_2,-\hat{q}_2}) \\ &= \frac{\mathbf{i}^{2q_2-\hat{q}_2}}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(\mathbf{i}[q_2-\hat{q}_2]\beta_2)\,\mathrm{d}\beta_2\int_{-\infty}^{+\infty}|\alpha_2|^{\sigma_2-\sigma_1-4}\,\exp\left(-\mathbf{i}\left[\hat{p}_2\alpha_2+\frac{p_2}{\alpha_2}\right]\right)\,\mathrm{d}\alpha_2. \end{aligned}$$

Considering here the principle value of the last integral and using the following known formulae (see, e.g., [9, Entires 2.5.24.4 and 2.5.24.7])

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}\,\cos\left(ax+\frac{b}{x}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\,\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\,\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\,\left[J_{-\alpha}(2\sqrt{ab}) - J_{\alpha}(2\sqrt{ab})\right]$$

and

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}\,\cos\left(ax-\frac{b}{x}\right)\,\mathrm{d}x = 2\,\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\,\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\,K_{\alpha}(2\sqrt{ab})$$

$$\big(a,\,b \in \mathbb{R}^+;\ |\mathrm{Re}(\alpha)| < 1\big)\,,$$

with the aid of (10) and (11), we complete the proof. □

7. Matrix elements of the operator $T^{\bullet}(h^*)$ with respect to the mixed basis $f_{p_2,q_2}|f_{p_1,q_1}$

From (2) and (9), we find

$$T^{\bullet}(g)[f^{\bullet}_{p_2,q_2}] = \sum_{p_1,q_1\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{\hat{q}_2\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty} t^{\bullet}_{p_2,q_2,\hat{p}_2,\hat{q}_2}(g)\,c_{p_1,q_1,\hat{p}_2,\hat{q}_2}\,\mathrm{d}\hat{p}_2\right) f^{\bullet}_{p_1,q_1}. \tag{14}$$

The expression in the brackets in (14) can be characterised as a matrix element of the operator $T^{\bullet}(h^*)$ with respect to the so-called mixed basis $f_{p_2,q_2}|f_{p_1,q_1}$ (see, e.g., [3, p. 204]).

On the other hand, these matrix elements may be obtained in the following way. It is not hard to check that the linear subspace $\mathrm{span}(\tilde{f}_{p_1,q_1}, \tilde{f}_{2q_1-p_1,q_1})$ in $\mathfrak{L}_1$ is invariant with respect to the linear operator $T^{\bullet}(h^*)$, namely, in view of (2),

$$T^{\bullet}(h^*)[f^{\bullet}_{p_1,q_1}|_{\omega_1}] = T(h^*)[\tilde{f}_{p_1,q_1}] = \mathbf{i}^{p_1+q_1}\ \exp(\mathbf{i}[p_1\alpha_1 - q_1\beta_1) = \mathbf{i}^{p_1}\ f^{\bullet}_{p_1,q_1}|_{\omega_1}. \tag{15}$$

Теорема 3. *Let $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}$ such that $p_1 + q_1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$, $p_2 \in \mathbb{R}^+$, and $1 < \mathrm{Re}(\theta) < 2$. Then*

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \Big[& \frac{1}{2}\cos(\theta\pi)\, p_2^{\theta-1}\, \hat{p}_2^{4-3\theta}\, \mathcal{C}_{3-2\theta}(p_2\hat{p}_2)\, W_{\frac{q_1-p_1}{2},\theta-\frac{3}{2}}(2\hat{p}_2) \\
& - \frac{1}{2}\cos(\theta\pi)\, p_2^{3\theta-4}\, \hat{p}_2^{1-\theta}\, \mathcal{C}_{2\theta-3}(p_2\hat{p}_2)\, W_{\frac{q_1-p_1}{2},\theta-\frac{3}{2}}(2\hat{p}_2) \\
& + (-1)^{\theta}\, \frac{2\,\Gamma\left(\frac{q_1-p_1}{2}-\theta\right)}{\pi\,\Gamma\left(\frac{p_1-q_1}{2}-\theta\right)}\, \sin(\theta\pi)\, p_2^{3\theta-4}\, \hat{p}_2^{1-\theta}\, \mathcal{K}_{2\theta-3}(p_2\hat{p}_2)\, W_{\frac{p_1-q_1}{2},\theta-\frac{3}{2}}(2\hat{p}_2)\Big]\, \mathrm{d}\hat{p}_2 \\
= {} & (-1)^{\frac{p_1+q_1}{2}}\, W_{\frac{q_1-p_1}{2},\theta-\frac{3}{2}}(2p_2).
\end{aligned}$$

Доказательство. From (14) and (15) we have

$$T^{\bullet}(h^*)[f^{\bullet}_{p_2,q_2}] = \sum_{p_1,q_1\in\mathbb{Z}} c_{p_1,q_1,p_2,q_2}\, T^{\bullet}(g)[f^{\bullet}_{p_1,q_1}] = \sum_{p_1,q_1\in\mathbb{Z}} \mathbf{i}^{p_1}\, c_{p_1,q_1,p_2,q_2}\, f^{\bullet}_{p_1,q_1}. \tag{16}$$

Since the matrix element c_{p_1,q_1,p_2,q_2} is equal to zero in case $q_1 \neq -q_2$ and the matrix element $t^{\bullet}_{p_2,q_2,\hat{p}_2,\hat{q}_2}(h^*)$ is equal to zero in case $q_2 \neq \hat{q}_2$, considering (14) and (16), we have

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{\bullet}_{p_2,-q_1,\hat{p}_2,-q_1}(h^*)\, c_{p_1,q_1,\hat{p}_2,-q_1}\, \mathrm{d}\hat{p}_2 = \mathbf{i}^{p_1}\, c_{p_1,q_1,p_2,-q_1}. \tag{17}$$

Using, for (16), the results from Theorems 1 and 2, and letting $\theta = \frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}$, we complete the proof. □

8. Concluding Remarks

Setting $p_1 = q_1 = 0$ in (14) and considering the following relation between Macdonald functions K_ν and Whittaker functions $W_{0,\nu}$ (see, e.g., Entry [15, 7.8.8]):

$$K_\nu\left(\frac{z}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{z}\right)^{\frac{1}{2}}\, W_{0,\nu}(z), \tag{18}$$

from the result in Theorem 3, we obtain the following integral formula for the K-transform (see [4]) of the linear combination of the Bessel–Clifford functions:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \Big[& \frac{1}{2}\cos(\theta\pi)\, p_2^{\theta-\frac{3}{2}}\, \hat{p}_2^{4.5-3\theta}\, \mathcal{C}_{3-2\theta}(p_2\hat{p}_2) - \frac{1}{2}\cos(\theta\pi)\, p_2^{3\theta-4.5}\, \hat{p}_2^{\frac{3}{2}-\theta}\, \mathcal{C}_{2\theta-3}(p_2\hat{p}_2) \\
& - \frac{2\,(-1)^{\theta}}{\pi}\, \sin(\theta\pi)\, p_2^{3\theta-4.5}\, \hat{p}_2^{\frac{3}{2}-\theta}\, \mathcal{K}_{2\theta-3}(p_2\hat{p}_2)\Big]\, K_{\theta-\frac{3}{2}}(\hat{p}_2)\, \mathrm{d}p_2 = K_{\theta-\frac{3}{2}}(p_2) \\
& \left(p_2 \in \mathbb{R}^+,\ 1 < \mathrm{Re}(\theta) < 2\right).
\end{aligned} \tag{19}$$

Some similar results to those in Theorem 3 and formula (19) can be obtained from (17) in case $p_2 \in \mathbb{R}^-$.

Using the following three integral transformations:

(i) The first Hankel-Clifford integral transform (see, e.g., [7, Eq. (2.7)])

$$\mathrm{H}_\sigma^{(1)}[f](\lambda) = \lambda^\sigma \int_0^\infty \mathcal{C}_\sigma(\lambda\,\hat{\lambda})\, f(\hat{\lambda})\,\mathrm{d}\hat{\lambda} \quad \left(\lambda \in \mathbb{R}^+\right);$$

(ii) The second Hankel-Clifford integral transform (see, e.g., [5]; see also [7, Eq. (2.9)])

$$\mathrm{H}_\sigma^{(2)}[f](\lambda) = \int_0^\infty \hat{\lambda}^\sigma\, \mathcal{C}_\sigma(\lambda\,\hat{\lambda})\, f(\hat{\lambda})\,\mathrm{d}\hat{\lambda} \quad \left(\lambda \in \mathbb{R}^+\right);$$

(iii) The Macdonald-Clifford transform (see [12])

$$\mathrm{K}_\sigma[f](\lambda) = \int_0^\infty \hat{\lambda}^\sigma\, \mathcal{K}_\sigma(\lambda\,\hat{\lambda})\, f(\hat{\lambda})\,\mathrm{d}\hat{\lambda} \quad \left(\lambda \in \mathbb{R}^+\right),$$

we can rewrite the identity in Theorem 3 in the following form:

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos(\theta\pi)}{2}\left[\mathrm{H}_{3-2\theta}^{(1)}\left[\hat{p}_2^{4-3\theta}\, W_{\frac{q_1-p_1}{2},\theta-\frac{3}{2}}(2\hat{p}_2)\right](p_2) - \mathrm{H}_{2\theta-3}^{(2)}\left[\hat{p}_2^{4-3\theta}\, W_{\frac{q_1-p_1}{2},\theta-\frac{3}{2}}(2\hat{p}_2)\right](p_2)\right]\\
&\qquad + \frac{2\,(-1)^\theta\,\Gamma\left(\frac{q_1-p_1}{2}-\theta\right)}{\pi\,\Gamma\left(\frac{p_1-q_1}{2}-\theta\right)}\,\mathrm{K}_{2\theta-3}\left[\hat{p}_2^{4-3\theta}\, W_{\frac{p_1-q_1}{2},\theta-\frac{3}{2}}(2\hat{p}_2)\right](p_2)\\
&\qquad = (-1)^{\frac{p_1+q_1}{2}}\, p_2^{4-3\theta}\, W_{\frac{p_1-q_1}{2},\theta-\frac{3}{2}}(2p_2).
\end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abramowitz M. Coulomb wave functions expressed in terms of Bessel-Clifford and Bessel functions //Stud. Appl. Math. 1950. Vl. 29, №1-4. P. 303-308.

2. Clifford W. K. On Bessel's functions // In: Mathematical Papers, 1882, Oxford University Press, London, pp. 346–349.

3. Gilmore R. Group theory // In: Mathematical Tools for Physicists, 2015, Wiley-VCH, Weinheim, pp. 159-210.

4. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Tables of Intefral Transforms*, Vol. **I**, 1954 McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto and London.

5. Hayek N. Sobre la transformación de Hankel // Actas de la VIII Reunión Anual de Matemáticos Epañoles, 1967, P. 47-60.

6. Kiryakova, V. & Hernanden Suarez, V. Bessel–Clifford third order differential operator and corresponding Laplace type integral transform // Dissertationes Mathematicae. 1995. Vol. 340. P. 143-161.

7. Méndez Pérez J. M. R., Socas Robayna M. M. A pair of generalized Hankel-Clifford transformations and their applications // J. Math. Anal. Appl. 1991. Vol. 154, №2, P. 543-557.

8. Paneva-Konovska J. Bessel type functions: Relations with integrals and derivatives of arbitrary orders // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 2048. 050015. doi: 10.1063/1.5082114.

9. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. Integrals and Series, Vol. **1**: Elementary Functions. OPA (Overseas Publishers Association), Amsterdam, 1986.

10. Shilin I. A., Choi J. Integral and series representations of special functions related to the group $SO(2,2)$ // Ramanujan J. 2017. Vol. 44. №1. P. 133-153.

11. Shilin I. A., Choi J. On matrix elements of the $SO(2,2)$-representation in a space of functions on 2×4-matrices // Integral Transforms Spec. Funct. 2018. Vol. 29. №10. P. 761-770.

12. Shilin I. A., Choi J. Some integrals involving Coulomb functions related to three-dimensional proper Lorentz group. (Submitted.)

13. Temme N. M. Special Functions: An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics. John Wiley and Sons, New York, 1996.

14. Vilenkin N. Ya., Pavlyuk A. P. Representations of some semisimple Lie groups and special functions of the matrix argument // In: Group Theoretical Methods in Physics, vol. 1. Harwood Academic Publishers, Chur, London, Paris, New York, 1985.

15. Wang Z. X., Guo D. R. Special functions. World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1989.

REFERENCES

1. Abramowitz, M. 1950, "Coulomb wave functions expressed in terms of Bessel-Clifford and Bessel functions", *Stud. Appl. Math.*, vol. 29, no. 1–4, pp. 303–308.

2. Clifford, W. K. 1882, "On Bessel's functions", In: *Mathematical Papers*. Oxford University Press, London, pp. 346–349.

3. Gilmore, R 2015, "Group theory", In: *Mathematical Tools for Physicists*. Wiley-VCH, Weinheim, pp. 159–210.

4. Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger F. & Tricomi, F. G 1954. *Tables of Intefral Transforms*, Vol. **I**. McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto and London.

5. Hayek, N. 1967, "Sobre la transformación de Hankel", *Actas de la VIII Reunión Anual de Matemáticos Españoles*, pp. 47–60.

6. Kiryakova, V. & Hernanden Suarez, V. 1995, "Bessel–Clifford third order differential operator and corresponding Laplace type integral transform", *Dissertationes Mathematicae*, vol. 340, pp. 143–161.

7. Méndez Pérez, J. M. R. & Socas Robayna, M. M. 1991, "A pair of generalized Hankel-Clifford transformations and their applications", *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 154, no. 2, pp. 543–557.

8. Paneva-Konovska, J. 2018, "Bessel type functions: Relations with integrals and derivatives of arbitrary orders", *AIP Conference Proceedings*, vol. 2048, 050015, doi: 10.1063/1.5082114.

9. Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A. & Marichev, O. I 1986. *Integrals and Series*, Vol. **1**: *Elementary Functions*. OPA (Overseas Publishers Association), Amsterdam.

10. Shilin, I. A. & Choi, J. 2017, "Integral and series representations of special functions related to the group $SO(2,2)$", *Ramanujan J.*, vol. 44, no. 1, pp. 133–153.

11. Shilin, I. A. & Choi, J. 2018, "On matrix elements of the $SO(2,2)$-representation in a space of functions on 2×4-matrices", *Integral Transforms Spec. Funct.*, vol. 29, no. 10, pp. 761–770.

12. Shilin, I. A. & Choi, J. 2019, “Some integrals involving Coulomb functions related to three-dimensional proper Lorentz group“, submitted.

13. Temme, N. M 1996. *Special Functions*: *An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics*. John Wiley & Sons, New York.

14. Vilenkin, N. Ya. &Pavlyuk, A. P. 1985, “Representations of some semisimple Lie groups and special functions of the matrix argument“, In: *Group Theoretical Methods in Physics*, vol. 1. Harwood Academic Publishers, Chur, London, Paris & New York.

15. Wang, Z. X. & Guo, D. R. 1989, *Special functions*. World Scientific, Singapore, New Jersey, London & Hong Kong.

Получено 4.09.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 511.223 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-3-360-370

Кольмановские операторы нормы и следа для многочленных формальных групп[1]

П. Н. Питаль, В. М. Поляков

Питаль Петр Николаевич — ассистент кафедры высшей алгебры и теории чисел, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: pital.petya@yandex.ru
Поляков Владимир Михайлович — студент на кафедре высшей алгебры и теории чисел, математико-механический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: vovtai71@yandex.ru

Аннотация

В статье исследуются аналоги для случая многочленной формальной группы операторов введенных Кольманом для формальных группа Любина–Тэйта и мультипликативной формальной группы. Даны явные конструкции операторов нормы и следа для рядов Лорана, проверены их основные свойства. Также изучены собственные и корневые значения этих операторов и построен гомоморфизм связывающий аддитивную структуру и структуру формального модуля на множестве формальных степенных рядов.

Ключевые слова: Локальные поля, Кольмановские операторы, формальные группы

Библиография: 9 названий.

Для цитирования:
П. Н. Питаль, В. М. Поляков. Кольмановские операторы нормы и следа для многочленных формальных групп // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 3, с. 360–370.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 3.

UDC 511.223 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-3-360-370

Coleman norm and trace operators for polynomial formal groups[2]

P. N. Pital, V. M. Polyakov

Pital Petr Nikolaevich — assistant of the Department of higher algebra and number theory, St. Petersburg State University (St. Petersburg).
e-mail: pital.petya@yandex.ru
Polyakov Vladimir Mikhailovich — student at the Department of higher algebra and number theory, faculty of mathematics and mechanics, St. Petersburg State University (St. Petersburg).
e-mail: vovtai71@yandex.ru

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 16-11-10200.
[2]Research is supported by the Russian Science Foundation grant 16-11-10200.

Abstract

In this paper are investigated a polynomial formal group analogues of the operators introduced by Coleman for the Lubin Tate formal group and the multiplicative formal group. Explicit constructions of the norm and trace operators for Laurent series are given, their main propirtes are checked. The eigenvalues and root values of these operators are also studied, and a homomorphism is constructed that connects the additive structure and the structure of the formal module on the set of formal power series.

Keywords: Local fields, Coleman operators, formal group

Bibliography: 9 titles.

For citation:
P. N. Pital, V. M. Polyakov, 2019, "Coleman norm and trace operators for polynomial formal groups" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 360–370.

1. Введение

Зафиксируем простое число p и положим $K = \mathbb{Q}_p$. Пусть H его произвольное неразветвлённое полное расширение. Обозначим $\mathcal{O}_K$ кольцо целых поля K и возьмём в качестве униформизующей p. Также зафиксируем какое-нибудь его алгебраическое замыкание Ω.

Через $\mathfrak{F}(X,Y) = X +_F Y = X + Y + aXY$ будем обозначать многочленный формальный групповой закон с параметром $a \in \mathcal{O}_H^\times$. Как известно ([1], [2], [3]), кольцо $\mathbb{Z}_p$ вкладывается в кольцо эндоморфизмов формальной группы $\mathfrak{F}$ следующим образом:

$$\forall b \in \mathbb{Z}_p \ \ [b](T) \equiv bT \bmod T^2$$

Более того для многочленной формальной группы известен (например см. [4]) явный вид:

$$[b](T) = \frac{1}{a}((1 + aT)^b - 1)$$

Ядро эндоморфизма умножения на p^n, $\mathrm{Ker}[p^{n+1}](T)$ обозначим $\mathfrak{F}_n$. Хорошо известно ([5]), что $\mathfrak{F}_n$ имеет естественным образом определенную структуру $\mathcal{O}_K$-модуля.

Определим башню расширений полей $H_n = H(\mathfrak{F}_n)$, $n = 0, 1, ...$ с соответствующими им кольцами целых $\mathcal{O}_n$. Пусть $\mathfrak{F}_\infty = \bigcup_{n\ge 0} \mathfrak{F}_n$, $H_\infty = \bigcup_{n\ge 0} H_n$ и $\mathfrak{F}'_\infty = \mathfrak{F}_n \setminus \{0\}$. Обозначим за $v = (v_n)$ порождающую $\varprojlim \mathfrak{F}_n$ как $\mathcal{O}_K-$модуля. Через $T_{m,n}$ и $N_{m,n}$ будем обозначать обычные след и норму из H_m в H_n. Также обозначим $I = \mathcal{O}_H[[T]]$ и $\mathcal{M} = \mathcal{O}_H((T))^\times$.

В статье [6] доказана следующая лемма

Лемма 1. *Пусть $\{a\}_{i=1}^\infty$ последовательность различных элементов единичного шара B', такая что $\prod_{i=1}^{\infty} a_i = 0$, и пусть $\{g_n\}_{i=1}^\infty$ последовательность элементов $\mathcal{O}[[T]]$. Тогда, если $\lim_{n\to\infty} g_n(a_i) = 0$ для всех $i \ge 1$, то $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$ в $\Omega((T))_1$.*

И из этой леммы непосредственно следует, так называемый, принцип единственности:

Предложение 1. *Если $f,g \in \mathcal{O}_H((T))$ и $f(u) = g(u)$ для всех $u \in \mathfrak{F}'_\infty$, то $f = g$.*

Доказательство. Это верно, поскольку $\prod_{u\in\mathfrak{F}'_\infty} u = 0$. □

Далее будем обозначать $f_{p^n} = f \circ [p^n]$ и ${}_uf = f(T +_F u)$ для $u \in \mathfrak{F}_\infty$, $f \in \mathcal{O}_H((T))$.

Замечание 1. *Следующие факты о многочленных формальных группах считаются известными, (см. например[4], [7]) :*

i $[p^n](T) = \frac{1}{a}((1+aT)^{p^n} - 1) = C^1_{p^n}T + C^2_{p^n}aT^2 + \ldots + a^{p^n-1}T^{p^n}$

ii $u_n \in \mathfrak{F}_n$, *тогда* $u_n = \frac{\zeta_{n+1}-1}{a} \in \mathfrak{p}_n$

iii Логарифм формальной группы $\log(T) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{a^iT^i}{ai} = \frac{1}{a}Log(1-aT)$

2. Основная часть

2.1. Оператор следа

В этом разделе мы определим Кольмановский оператор следа для нашего группового закона и проверим, что построенная конструкция будет обладать аналогичными свойствами, что и классический оператор Кольмана, введённый в [6].

Лемма 2. *Пусть* $f \in \mathcal{O}_H[[T]]$ *и* ${}_uf = f$ *для всех* $u \in \mathfrak{F}_0$. *Тогда найдется единственный* $g \in \mathcal{O}_H[[T]]$, *такой что* $g_p = f$.

Доказательство. Доказательство леммы полностью аналогично доказательству леммы 3 из [6] если в качестве униформизующей π выбрать нашу p. □

Определим оператор следа как отображение $\mathscr{S} : H((T)) \to H((T))$, удовлетворяющее тождеству $(\mathscr{S}(f))_p = \sum\limits_{u\in\mathfrak{F}_0} {}_uf$.

Замечание 2. *Доказательство следующей теоремы тоже не отличается от доказательства в классическом случае* $(a = 1)$, *но для порядка мы приведём его здесь*

Теорема 1. *Оператор следа существует и единственен.*

Доказательство. Единственность следует из того, что $[p]$ является обратимым рядом в $H[[T]]$.[]

Докажем существование: 1 шаг. $f \in \mathcal{O}_H[[T]]$. Положим $\mathfrak{S}(f) = \sum\limits_{u\in\mathfrak{F}_0} {}_uf$. Тогда ясно, что ${}_u\mathfrak{S}(f) = \mathfrak{S}(f)$. Воспользовавшись предыдущей леммой, получаем $g \in \mathcal{O}_H[[T]]$, такой что $g_p = \mathfrak{S}(f)$. Это и есть искомый $\mathscr{S}(f)$.

2 шаг. $f \in H[[T]]$. По построению видно, что $\mathscr{S}$ $\mathcal{O}_H$−линеен. Следовательно мы можем расширить его H-линейно на $H \otimes \mathcal{O}_H[[T]]$, которое плотно в $H[[T]]$ и поэтому $\mathscr{S}$ H-линейно расширяется так же и на $H[[T]]$.

3 шаг. $f \in H((T))$. Пусть n наименьшее, такое что $T^nf \in H[[T]]$. Тогда, очевидно, нужно положить $\mathscr{S}(f) = T^{-n}\mathscr{S}([p]^nf)$. □

Из доказательства ясно, что оператор $\mathscr{S}$ H-линеен и оставляет инвариантными $H((T))$, $\mathcal{O}_H[[T]]$, $\mathcal{O}_H((T))$. Также необходимо отметить следующее важное свойство построенного оператора, которое связывает обычный оператор следа с новым:

$$\mathscr{S}(f)(v_n) = T_{n+1,n}(f(v_{n+1}))$$

для $f \in H((T))$.

n-кратное применение оператора к $f \in I$ и композиция его с $[p^n]$ дает нам:

$$\mathscr{S}^n(f)_{p^n} = \sum_{u\in\mathfrak{F}_{n-1}} {}_uf$$

Теорема 2. *Пусть* $f \in \mathcal{O}_H((T))$, *тогда*

$$\mathscr{S}^n(f) \equiv 0 \bmod p^n\mathcal{O}_H((T))$$

Доказательство. Будем доказывать по индукции, докажем базу $n = 1$, индукционный переход очевиден.
1 шаг. $f \in \mathcal{O}_H[[T]]$. В этом случае легко видеть, что

$$\mathscr{S}(f)_p(T) = \mathscr{S}(f)(\frac{1}{a}((1+aT)^p - 1)) \equiv \mathscr{S}(f)(a^{p-1}T^p) \bmod pI$$

поскольку аргумент это многочлен, все коэффициенты которого, за исключением последнего, делятся на p. Далее заметим, что

$${}_u f(T) = f(T +_F u) \equiv f(T) \bmod \mathfrak{p}_0 I$$

где $\mathfrak{p}_0$ это максимальный идеал в $\mathcal{O}_0$ $(u \in \mathfrak{p}_0)$. Из этих сравнений можем заключить, что

$$\mathscr{S}(f)(a^{p-1}T^p) \equiv pf(T) \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}_0 I$$

Следовательно $\mathscr{S}(f)(T) \equiv 0 \bmod pI$, поскольку a - обратимый элемент кольца, и коэффициенты ряда в левой части равенства лежат в $\mathcal{O}_H$.
2 шаг. $f \in \mathcal{O}_H((T))$. Как и в теореме выше найдем такое n, что $T^n f \in \mathcal{O}_H[[T]]$. Тогда

$$T^n \mathscr{S}(f) = \mathscr{S}([p]^n f) \equiv 0 \bmod pI$$

поделив на T^n получаем

$$\mathscr{S}(f) \equiv 0 \bmod p\mathcal{O}_H((T)).$$

□

2.2. Оператор нормы

Будем обозначать автоморфизм Фробениуса H_∞ над K как φ. Зададим действие φ на рядах $f \in H((T))$ покоэффициентно. Тогда очевидно, что $\mathscr{S}(\varphi f) = \varphi \mathscr{S}(f)$.

Теперь по аналогии с оператором следа введем оператор нормы. Будем называть оператором нормы отображение $\mathscr{N} : \mathcal{O}_H((T)) \to \mathcal{O}_H((T))$, удовлетворяющее тождеству

$$\mathscr{N}(f)_p = \prod_{u \in \mathfrak{F}_0} {}_u f$$

Теорема 3. *Оператор нормы $\mathscr{N}$ существует и единственен.*

Доказательство. Доказательство полностью аналогично доказательству того-же факта для оператора следа. □ Отметим важные свойства оператора нормы. Из определения можем видеть, что отображение $\mathscr{N}$ мультипликативно: $\mathscr{N}(fg) = \mathscr{N}(f)\mathscr{N}(g)$. $\mathscr{N}$ оставляет инвариантным $\mathscr{M} = \mathcal{O}_H((T))^\times$, а также I. Оператор нормы связан с обычной нормой следующим тождеством: $\mathscr{N}(f)(v_n) = N_{n+1,n}(f(v_{n+1}))$ для $f \in \mathcal{O}_H((T))$. Для дальнейших рассуждений важно будет отметить, что порядки полюса (или корня) в точке 0 у рядов $f \in \mathcal{O}_H((T))$ и $\mathscr{N}(f)$ совпадают, и что действие φ коммутирует с $\mathscr{N}$: $\mathscr{N}(\varphi f) = \varphi \mathscr{N}(f)$.
Теперь мы докажем техническую лемму, которая будет нам полезна в дальнейшем.

Лемма 3. *Пусть $f \in I$ и предположим, что $f_p \in p^n I$, тогда $f \in p^n I$*

Доказательство. Докажем по индукции. База $n = 0$ очевидна.
Индукционный переход: пусть утверждение верно для $n-1$. Положим $g = \frac{1}{p^{n-1}} f$. Тогда по предположению индукции, так как $f_p \in p^n I \subset p^{n-1} I$, то $f \in p^{n-1} I$, следовательно $g \in I$.

Заметим также, что $[p](T) \equiv a^{p-1}T^p \bmod pI$ и следовательно $g(a^{p-1}T^p) \equiv g_p(T) \equiv 0 \bmod pI$. То есть $g \in pI$, а следовательно $f \in p^n I$

□

В следующей теореме будет важно какой мы выбрали параметр a нашей формальной группы. Обозначим группу всех единиц кольца целых $U = \mathcal{O}_H^\times$ и группу n-ых главных единиц $U_n = 1 + p^n\mathcal{O}_H$.

Теорема 4. *i Пусть $f \in 1 + p^i I$, где $i \geq 1$, и параметр формальной группы $a \in U$, тогда*

$$\mathscr{N}(f) \equiv 1 \bmod p^{i+1}I$$

ii Пусть $g \in \mathscr{M}$ и параметр формальной группы $a \in U$, тогда

$$\frac{\mathscr{N}(g)(a^{p-1}T)}{\varphi g(T)} \equiv 1 \bmod pI$$

iii Пусть $g \in \mathscr{M}$ и параметр формальной группы $a \in U_1$, тогда

$$\frac{\mathscr{N}^i(g)}{\varphi\mathscr{N}^{i-1}(g)} \equiv 1 \bmod p^i I$$

Доказательство.

i Заметим, что

$$_u f = f(T +_F u) = f(T + u + aTu) \equiv f(T) \bmod p^i\mathfrak{p}_0 I$$

для $u \in \mathfrak{F}_0$, и следовательно $\prod\limits_{u\in\mathfrak{F}_0} {}_u f \equiv f^p \equiv 1 \bmod p^{i+1}I$, поскольку $f \in 1 + p^i I$. Тогда имеем

$$\mathscr{N}(f)_p = \prod_{u\in\mathfrak{F}_0} {}_u f \equiv 1 \bmod p^{i+1}I$$

И остается воспользоваться леммой 3.

ii Сначала докажем для $f \in I \cap \mathscr{M}$. Для начала заметим, что

$$\mathscr{N}(f)_p(T) \equiv \mathscr{N}(f)(a^{p-1}T^p) \bmod pI$$

а также $_u f \equiv f \bmod pI$, поэтому

$$\mathscr{N}(f)(a^{p-1}T^p) \equiv \mathscr{N}(f)(T)_p \equiv f(T)^p \equiv \varphi f(T^p) \bmod pI$$

теперь поделим на φf, сделаем замену переменной и получим

$$\frac{\mathscr{N}(f)(a^{p-1}T)}{\varphi f(T)} \equiv 1 \bmod pI$$

Теперь несложно доказать это для любого $f \in \mathscr{M}$, поскольку либо f, либо f^{-1} лежат в I, а также $\mathscr{N}(f)$ имеет в нуле тот же порядок полюса, что и f, поэтому дробь будет всегда элементом I.

iii Тут мы предполагаем, что параметр многочленной формальной группы a лежит в группе первых главных единиц. То есть $a = 1 + p\epsilon$, где $\epsilon \in \mathcal{O}_H$. Тогда

$$\mathscr{N}(f)(a^{p-1}T^p) \equiv \mathscr{N}(f)((1 + p\epsilon)^{p-1}T^p) \equiv \mathscr{N}(f)(T^p)$$

Дальше как и в пункте (ii) поделим на φf и проведём те же рассуждения. В итоге получим:

$$\frac{\mathscr{N}(f)}{\varphi f} \equiv 1 \bmod pI$$

Теперь применим $i-1$ раз тождество из пункта (i), воспользуемся мультипликативностью $\mathscr{N}$ и тем самым получим требуемое утверждение.

□

2.3. Собственные числа и функции операторов $\mathscr{N}$ и $\mathscr{S}$

Интересно заняться задачей поиска собственных значений и функций только что построенных нами операторов, а также операторов $\varphi^{-1}\mathscr{N}$ и $\varphi^{-1}\mathscr{S}$.
Будем считать что наши операторы действуют из I в I, если не оговорено противное. Для начала введём некоторые обозначения. $\mathscr{M}^{\varphi}_{\mathscr{N}}$ и $\mathscr{M}^{\varphi}_{\mathscr{S}}$ будем обозначать собственные функции операторов $\varphi^{-1}\mathscr{N}$ и $\varphi^{-1}\mathscr{S}$ соответственно.
Сначала будем работать с операторами $\varphi^{-1}\mathscr{N}$ и $\varphi^{-1}\mathscr{S}$ и покажем как можно строить для них собственные функции. Начнем с оператора $\varphi^{-1}\mathscr{N}$.
Обозначим $c = a^{1-p}$ и возьмем $f \in \mathscr{M}$ и воспользуемся вторым пунктом теоремы 4:

$$\varphi^{-1}\mathscr{N}(f)(T) = f(cT)(1 + pk_1)$$

для некоторого $k_1 \in I$
Далее применим оператор $\mathscr{N}$ и φ^{-1} к обеим частям равенства и воспользуемся первым и вторым утверждениями теоремы 4:

$$\varphi^{-2}\mathscr{N}^2(f)(T) = f(c^2T)(1 + pk_1')(1 + p^2k_2)$$

для некоторых $k_1', k_2 \in I$
Продолжим этот процесс и перейдем к пределу, тогда бесконечное произведение в правой части сойдется, а также существует $\lim\limits_{n\to\infty} c^n = s$, потому что c- единица.
Обозначим этот предел

$$\mathscr{N}_\infty(f) = \lim_{n\to\infty} \varphi^{-n}\mathscr{N}^n(f)$$

Ясно что построеноое отображение является мультипликативным:

$$\mathscr{N}_\infty(fg) = \mathscr{N}_\infty(f)\mathscr{N}_\infty(g)$$

Как видно из построения $\mathscr{N}_\infty(f)$ обладает следующими замечательными свойствами, во первых:

$$\mathscr{N}(\mathscr{N}_\infty(f)) = \varphi\mathscr{N}_\infty(f)$$

и во вторых

$$\frac{\mathscr{N}_\infty(f)}{f(sT)} \equiv 1 \bmod pI$$

Тем самым мы получили

Предложение 2. *$\mathscr{N}_\infty(f) \in \mathscr{M}^{\varphi}_{\mathscr{N}}$, то есть $\mathscr{N}_\infty(f)$ является собственной функцией оператора $\varphi^{-1}\mathscr{N}$ с собственным числом 1.*

Множества собственных функций с собственным числом 1 для операторов $\varphi^{-1}\mathscr{N}$ и $\varphi^{-1}\mathscr{S}$ тесным образом связаны, а именно:

Предложение 3. *$\mathscr{M}^{1\varphi}_{\mathscr{S}} = Log(\mathscr{M}^{1\varphi}_{\mathscr{N}})$, где Log - это обычный логарифмический ряд (не логарифм формальной группы), и ряды берутся из $H((T))$*

Доказательство. Для начала заметим, что оператор нормы и следа связаны следующим соотношением:

$$Log(\mathscr{N}(f)) = \mathscr{S}(Log(f))$$

Докажем включение в одну сторону:
Пусть

$$\mathscr{N}(f) = \varphi f$$

Подействуем логарифмом и получим:

$$\mathscr{S}(Log(f)) = Log(\mathscr{N}(f)) = Log(\varphi f) = \varphi Log(f)$$

Для доказательство включения в другую сторону достаточно подействавать Log^{-1} на соответствующее тождество для оператора $\mathscr{S}$ □ Более того легко увидеть, что Log устанавливает гомоморфизм между этими множествами.
Теперь выясним какие собственные числа и корневые значения могут быть у операторов $\mathscr{S}$ и $\varphi^{-1}\mathscr{N}$. И будем рассматривать их только из H, но если нас заинтересуют с.ч. и корневые значения из H_∞, то утверждение и доказательство следующей теоремы практически не поменяются, только $\mathcal{O}_H$ заменится на $\mathcal{O}_{H_\infty}$ и в доказательствах последних двух пункотв придется более аккуратно оценивать нормирования.

Теорема 5. *i Собственные числа оператора $\mathscr{S} : \mathcal{O}_H((T)) \to \mathcal{O}_H((T))$ лежат в $p\mathcal{O}_H$.*

ii Пусть $a \in U_1$, тогда собственные числа оператора $\varphi^{-1}\mathscr{N} : I \to I$ лежат в $1 + p\mathcal{O}_H$.

iii n-ые корневые значения оператора $\mathscr{S} : \mathcal{O}_H((T)) \to \mathcal{O}_H((T))$ лежат в $p\mathcal{O}_H$

iv Пусть $a \in U_1$, тогда n-ые корневые значения оператора $\varphi^{-1}\mathscr{N} : I \to I$ лежат в $1+p\mathcal{O}_H$

Доказательство.

i Пусть

$$\mathscr{S}(f) = bf$$

где $b \in H$, тогда применим к этому равенству n раз оператор $\mathscr{S}$ и воспользуемся теоремой 2:

$$b^n f = \mathscr{S}^n(f) \equiv 0 \bmod p^n\mathcal{O}_H((T))$$

Тогда если $b \notin p\mathcal{O}_H$, то левая часть равенства с ростом n убывает медленнее чем правая, чего не может быть, поэтому $b \in p\mathcal{O}_H$

ii Пусть

$$\mathscr{N}(f) = b\varphi f$$

где $b \in \mathcal{O}_H$, тогда по пункту (iii) теоремы 4 при $i = 1$ имеем:

$$b\varphi f = \mathscr{N}(f) = \varphi f(1 + pk)$$

где $k \in I$. Следовательно $1 + pk = b$, то есть k является константой, причем из $\mathcal{O}_H$ что и доказывает наше утверждение.

iii Пусть b является корневым значением нашего оператора, тогда для некоторой

$$f \in \mathcal{O}_H((T))$$

можем записать

$$(\mathscr{S} - b\mathcal{I})^n f = 0$$

где $\mathcal{I}$ тождественный оператор. Тогда распишем это равенство по биному Ньютона:

$$\mathscr{S}^n - nb\mathscr{S}^{n-1} f + ... \pm nb^{n-1}\mathscr{S} f \mp b^n f = 0$$

Тогда все слагаемые кроме последнего лежат в $p\mathcal{O}_H((T))$. Как и в предыдущих пунктах по линейности наших операторов не умаляя общности можем считать что $f \notin p\mathcal{O}_H((T))$. Поэтому $b^n \in p\mathcal{O}_H$ а из этого уже следует, что и $b \in p\mathcal{O}_H$.

iv Аналогично как в предыдущем пункте запишем всё то же самое для оператора $\varphi^{-1}\mathscr{N}$:

$$(\varphi^{-1}\mathscr{N} - b\mathcal{I})^n f = 0$$

Снова распишем это через бином Ньютона

$$\varphi^{-n}\mathscr{N}^n f - nb\varphi^{n-1}\mathscr{N}^{n-1} f + ... \pm nb^{n-1}\varphi^{-1}\mathscr{N} f \mp b^n f = 0$$

Заметим, что $\varphi^{-m}\mathscr{N}^m = f \cdot (1 + pk_m)$, где $k_m \in I$. Это следует из пунктов 3 и 1 теоремы 4. Поэтому можем написать

$$(1 + pk_1)f - nb(1 + pk_2)f + ... \pm nb^{n-1}(1 + pk_{n-1})f \mp b^n f = 0$$

Теперь сократим на f и рассмотрим значения по модулю pI:

$$C_n^0 - C_n^1 b + C_n^2 b^2 + ... \pm C_n^n b^n \equiv 0 \bmod pI$$

$$(1 - b)^n \equiv 0 \bmod pI$$

а из этого уже следует, что $b \in 1 + p\mathcal{O}_H$.

□

2.4. Гомоморфизм Θ

Далее будем считать что параметр нашей формальной группы $a \in U_1$. Обозначим $\mathfrak{M}$ максимальный идеал I, порожденный $p\mathcal{O}_H[[T]]$ и $T\mathcal{O}_H[[T]]$. Зададим на нём операцию сложения при помощи формального группового закона: $a +_F b$, для $a, b \in \mathfrak{M}$ и будем обозначать множество $\mathfrak{M}$ с этой структурой как $\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$. Наша цель построить гомоморфизм из $\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$ в I хорошо согласованный с их структурами.

Лемма 4. *Пусть $i \geq 1$, $g, h \in I$, h удовлетворяет условию*

$$h(T) \equiv T^p \bmod p\mathcal{O}_H$$

i тогда

$$[p^i] \circ g \equiv [p^{i-1}] \circ \varphi g \circ h \bmod p^i\mathcal{O}_H$$

ii Если параметр формальной группы $a \in U$, то в этом случае

$$[p^i] \circ g \equiv [p^{i-1}] \circ a^{p-1}\varphi g \circ h \bmod p^i\mathcal{O}_H$$

Доказательство. Сначала докажем пункт (ii), из него простыми рассуждениями получим пункт (i).
Будем доказывать по индукции. База $i = 1$
Несложная цепочка сравнений дает требуемое утверждение:

$$[p] \circ g \equiv a^{p-1} g^p \equiv a^{p-1} \varphi g(T^p) \equiv a^{p-1} \varphi g \circ h \bmod p\mathcal{O}_H$$

Индукционный переход $i \to i+1$.
Обозначим

$$A = [p^{i-1}] \circ a^{p-1} \varphi g \circ h$$

Запишем $[p]$ в виде $[p](T) = T^p a^{p-1} + pk_2(\mathrm{T})$
Напишем индукционное предположение:

$$[p^i] \circ g = [p^{i-1}] \circ (a^{p-1} \varphi g) \circ h + p^i k_1$$

И снова напишем цепочку очевидных сравнений из которой всё будет следовать:

$$\begin{aligned}
[p^{i+1}] \circ g = [p] \circ ([p^i] \circ g) = (A + p^i k_1)^p a^{p-1} + pk_2(A + p^i k_1) \equiv \\
\equiv A^p a^{p-1} + pk_2(A) \equiv [p](A) = [p^i] \circ a^{p-1} \varphi g \circ h \bmod p^{i+1} \mathcal{O}_H
\end{aligned}$$

В случае пункта (i) $a \in U_1$, поэтому $a \equiv 1 \bmod p\mathcal{O}_H$, отсюда тривиально следует требуемое утверждение. □ Теперь определим отображение $\Theta : I \to I$ следующим образом:

$$\Theta(f) = \log(f) - \frac{\varphi \log(f \circ [p])}{p}$$

Теорема 6. *Θ является корректно определённым отображением. Более того, если Θ сузить на $\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$, то Θ будет гомоморфизмом*

$$\Theta : \mathfrak{F}(\mathfrak{M}) \to A$$

где $A = \left\{ f \in I : f(0) \in \mathcal{O}_H, \frac{d}{dT}(f)(0) \in (1 - \varphi)\mathcal{O}_H \right\}$, в случае $p \neq 2$
и $A = \left\{ f \in I : f(0) \in (1 - \varphi)\mathcal{O}_H + p\mathcal{O}_H, \frac{d}{dT}(f)(0) \in (1 - \varphi)\mathcal{O}_H \right\}$ иначе.

Доказательство. Докажем для случая $p \neq 2$. Случай $p = 2$ рассматривается аналогично, более подробно он разобран в [6].
Известно ([7]) что логарифм формальной группы выражается следующим образом:

$$\log = \lim_{n \to \infty} \frac{[p^n]}{p^n}$$

Тогда

$$\log \circ g - \frac{\log \circ \varphi g \circ [p]}{p} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{[p^{n+1}] \circ g - [p^n] \circ \varphi g \circ [p]}{p^{n+1}} \right)$$

Как видно из леммы 4 выражение под знаком предела лежит в I, следовательно и сам предел там содержится. Этим мы доказали корректность Θ.
Проверим что в случае, когда область определения это $\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$, Θ будет гомоморфизмом.

$$\begin{aligned}
\Theta(f +_F g) = \log(f +_F g) - \frac{\varphi \log((f +_F g) \circ [p])}{p} = \\
= \log(f) + \log(g) - \frac{\varphi \log(f \circ [p])}{p} - \frac{\varphi \log(g \circ [p])}{p} = \Theta(f) + \Theta(g)
\end{aligned}$$

Теперь проверим, что Θ действует в точности в множество A.
В $\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$ содержатся ряды вида $pk_1(T) + Tk_2(T)$, где $k_1, k_2 \in I$. Докажем, что $\Theta(f)(0) \in \mathcal{O}_H$. Очевидно, что достаточно доказать это только для рядов f вида $f = pk_1(T)$.

$$\Theta(pk_1)(0) = \log(pk_1(0)) - \frac{\varphi \log(pk_1(0))}{p}$$

Аргументы обоих логарифмов лежат в максимальном идеале, и расписав логарифм в ряд и подставив аргумент с нормированием не меньшим единицы, мы получим значение с нормированием тоже не меньшим единицы, поэтому оба слагаемых лежат в $\mathcal{O}_H$. Осталось проверить, что производные имеют нужный вид.:

$$\frac{d}{dT}\Theta(f)(0) = f'(0)\log'(0) - \frac{\varphi(\log'(0)f'(0)[p]'(0))}{p} = f'(0)\log'(0) - \varphi(f'(0)\log'(0))$$

$\square$

3. Заключение

В настоящей работе получено обобщение операторов следа и нормы для рядов Лорана, введённых Кольманом в статье [6]. Оказалось, что для построенных обобщенных операторов остаются верными многие результаты из [6], правда для некоторых из них требуются дополнительные условия на значения параметра многочленной формальной группы. Используя аналогичные результаты из [6], Кольман в своей работе [8] получает явную формулу для классического символа Гильберта (для круговых расширений $\mathbb{Q}_p$). Ожидается, что используя полученные результаты будет возможно получить аналогичные формулы для обобщенных символов Гильберта для формальных групп.

В разделе 2.3 ставится задача об отыскании собственных чисел и собственных функций операторов $\mathscr{N}$, $\mathscr{S}$, $\varphi^{-1}\mathscr{N}$ и $\varphi^{-1}\mathscr{S}$. Оказалось, что мы можем переводить собственные функции с собственным числом 1 оператора $\varphi^{-1}\mathscr{N}$ в собственные функции оператора $\varphi^{-1}\mathscr{S}$ и наоборот при помощи логарифмирования и экспоненцирования соответственно. Так же удалось доказать вложения множеств собственных чисел и корневых значений операторов $\mathscr{S}$ и $\varphi^{-1}\mathscr{N}$ в $p\mathcal{O}_H$ и $1 + p\mathcal{O}_H$ соответственно. Но остаётся открытым вопрос, все ли элементы этих множеств реализуются в качестве собственных и корневых значений соответствующих операторов.

В последней части статьи строится гомоморфизм

$$\Theta : \mathfrak{F}(\mathfrak{M}) \to A$$

согласованный со структурой формального модуля на $\mathfrak{F}$. Его значение в том что используя аналогичный гомоморфизм Кольман в своей статье [8] получает явную формулу символа Гильберта. Также в его работе [9] активно используются классические операторы $\mathscr{N}$, $\mathscr{S}$ и гомоморфизм Θ. Поэтому важно было отметить что данная конструкция переносится и на случай многочленных формальных групп для, возможно, получения аналогичных формул для обобщенных символов Гильберта.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lubin J. One-parameter formal Lie groups over p-adic integer rings, Annals of Math. 80 (1964), 464–484.

2. Frohlich A. Formal groups. Lecture Notes in Mathematics. Springer. 1968. Vol. 74.

3. Lubin J. Entireness of the endomorphism rings of one-dimensional formal groups, Proc. American Math. Soc. 52, (1975), 8–9.

4. Востоков С. В., Волков В. В., Пак Г. К. Символ Гильберта для многочленных формальных групп // Вопросы теории представлений алгебр и групп. 23, Зап. научн. сем. ПОМИ, 400, ПОМИ, СПб., 2012, 127–132; J. Math. Sci. (N. Y.), 192:2 (2013), 196–199.

5. Lubin, Jonathan, and John Tate. Formal Complex Multiplication in Local Fields // Annals of Mathematics, vol. 81, no. 2, 1965, pp. 380–387.

6. Coleman R. F. Division values in local fields // Invent. Math. 1979. Vol. 53. № 2. P. 91–116.

7. Hazewinkel, Michiel. (1978). Formal Groups and Applications.

8. Coleman, Robert F. The dilogarithm and the norm residue symbol. Bulletin de la Société Mathématique de France, Volume 109 (1981), pp. 373–402.

9. Coleman, Robert F. The arithmetic of Lubin-Tate division towers. Duke Math. J. 48 (1981), no. 2, 449–466.

REFERENCES

1. Lubin, J. One-parameter formal Lie groups over p-adic integer rings, Annals of Math. 80 (1964), 464–484.

2. Frohlich, A. Formal groups. Lecture Notes in Mathematics. Springer. 1968. Vol. 74.

3. Lubin, J. Entireness of the endomorphism rings of one-dimensional formal groups, Proc. American Math. Soc. 52, (1975), 8–9.

4. Vostokov, S. V., Volkov, V. V., Pak, G. K. “The Hilbert symbol of a polynomial formal group”, Problems in the theory of representations of algebras and groups. Part 23, Zap. Nauchn. Sem. POMI, 400, POMI, St. Petersburg, 2012, 127–132; J. Math. Sci. (N. Y.), 192:2 (2013), 196–199.

5. Lubin, Jonathan, and John Tate. “Formal Complex Multiplication in Local Fields.” Annals of Mathematics, vol. 81, no. 2, 1965, pp. 380–387.

6. Coleman, R. F., 1979, “Division values in local fields“, *Invent. Math.*, vol. 53, no. 2, pp. 91–116.

7. Hazewinkel, Michiel. (1978). Formal Groups and Applications.

8. Coleman, Robert F. The dilogarithm and the norm residue symbol. Bulletin de la Société Mathématique de France, Volume 109 (1981), pp. 373–402.

9. Coleman, Robert F. The arithmetic of Lubin-Tate division towers. Duke Math. J. 48 (1981), no. 2, 449–466.

Получено 17.10.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 511 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-371-388

Обобщенные разбиения Рози и множества ограниченного остатка[1]

А. В. Шутов

Шутов Антон Владимирович — кандидат физико-математических наук, доцент, Хабаровское отделение института прикладной математики ДВО РАН (г. Хабаровск).
e-mail: a1981@mail.ru

Аннотация

Рози ввел фрактальное множество, связанное со сдвигом двумерного тора на вектор (β^{-1}, β^{-2}), где β – действительный корень уравнения $\beta^3 = \beta^2+\beta+1$ и показал, что данный фрактал разбивается на три фрактала, являющихся множествами ограниченного остатка относительно данного сдвига тора. Введенное множество получило название фрактала Рози. В дальнейшем были введены многочисленные обобщения фракталов Рози, нашедшие применения в целом ряде задач теории чисел, теории динамических систем и комбинаторики.

Журавлев ввел бесконечную последовательность разбиений исходного фрактала Рози на фрактальные множества и показал, что они также состоят из множеств ограниченного остатка. В настоящей работе рассматривается задача о построении обобщения таких разбиений для фракталов Рози, связанных с алгебраическими единицами Пизо.

В работе введена бесконечная последовательность разбиений $d-1$-мерных фракталов Рози, связанных с алгебраическими единицами Пизо степени d, на фрактальные множества d типов. Каждое следующее разбиение последовательности является подразбиением предыдущего. Доказан ряд свойств, описывающих самоподобие введенных разбиений.

Показано, что введенные разбиения являются так называемыми обобщенными перекладывающимися разбиениями относительно некоторого сдвига тора. В частности, действие данного сдвига на разбиении сводится к перекладыванию d центральных фигур разбиения. В качестве следствия получено, что разбиение Рози произвольного порядка состоит из множеств ограниченного остатка относительно рассматриваемого сдвига тора.

Также доказано, что орбита рассматриваемого сдвига тора обладает свойством самоподобия.

Ключевые слова: разбиения Рози, фракталы Рози, числа Пизо, множества ограниченного остатка.

Библиография: 34 названия.

Для цитирования:
А. В. Шутов. Обобщенные разбиения Рози и множества ограниченного остатка // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 3, с. 371–388.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19-11-00065).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 3.

UDC 511 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-371-388

Generalized Rauzy tilings and bounded remainder sets[2]

A. V. Shutov

Shutov Anton Vladimirovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Khabarovsk Division of the Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences (Khabarovsk).
e-mail: a1981@mail.ru

Abstract

Rauzy introduced a fractal set associted with the toric shift by the vector (β^{-1}, β^{-2}), where β is the real root of the equation $\beta^3 = \beta^2 + \beta + 1$. He show that this fractal can be partitioned into three fractal sets that are bounded remaider sets with respect to the considered toric shift. Later, the introduced set was named as the Rauzy fractal. Further, many generalizations of Rauzy fractal are discovered. There are many applications of the generalized Rauzy fractals to problems in number theory, dynamical systems and combinatorics.

Zhuravlev propose an infinite sequence of tilings of the original Rauzy fractal and show that these tilings also consist of bounded remainder sets. In this paper we consider the problem of constructing similar tilings for the generalized Rauzy fractals associated with algebraic Pisot units.

We introduce an infinite sequence of tilings of the $d-1$-dimensional Rauzy fractals associated with the algebraic Pisot units of the degree d into fractal sets of d types. Each subsequent tiling is a subdivision of the previous one. Some results describing the self-similarity properties of the introduced tilings are proved.

Also, it is proved that the introduced tilings are so called generalized exchanding tilings with respect to some toric shift. In particular, the action of this shift on the tiling is reduced to exchanging of d central tiles. As a corollary, we obtain that the Rauzy tiling of an arbitrary order consist of bounded remainder sets with respect to the considered toric shift.

In addition, some self-similarity property of the orbit of considered toric shift is established.

Keywords: Rauzy tilings, Rauzy fractals, Pisot numbers, bounded remainder sets.

Bibliography: 34 titles.

For citation:
A. V. Shutov, 2019, "Generalized Rauzy tilings and bounded remainder sets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 371–388.

1. Введение

Рози в работе [1] ввел фрактал $\mathcal{T}$, представляющий собой геометрический объект, связанный с комбинаторной подстановкой вида

$$\begin{array}{c} 1 \to 12 \\ 2 \to 13 \\ 3 \to 1 \end{array},$$

[2]The study was carried out at the expense of a grant of the Russian scientific Foundation (project 19-11-00065).

а также с алгебраическим числом β, являющимся корнем уравнения

$$\beta^3 = \beta^2 + \beta + 1. \tag{1}$$

Позднее конструкция Рози была обобщена на случай более общих подстановок и алгебраических уравнений [2], [3]. В дальнейшем были предложены три основные конструкции фракталов Рози:

1) проектирование дискретной прямой, получаемой при помощи некоторой подстановки [2], [4];

2) рассмотрение фрагментов ступенчатых поверхностей, получаемых при помощи геометрических подстановок [3], [4];

3) использование жадных разложений действительных чисел по степеням β [5].

Фракталы Рози оказались тесно связаны с целым рядом задач теории чисел (диофантовы приближения, арифметика β-разложений, множества ограниченного остатка и т.д.), комбинаторики слов, теории динамических систем и даже физики квазикристаллов. Подробные обзоры результатов, связанных с обобщенными фракталами Рози и соответствующую библиографию можно найти в работах [6], [4], [7], [8].

Ключевую роль в исследованиях, связанных с обобщенными фракталами Рози, играет их разбиение на непересекающиеся фрактальные множества, которое мы будем далее называть разбиением Рози порядка 0. В случае уравнения (1) и исходной конструкции Рози данное разбиение имеет вид

$$\mathcal{T} = \mathcal{R}_0 \sqcup \mathcal{G}_0 \sqcup \mathcal{B}_0. \tag{2}$$

и порождает перекладывание областей $S_{\mathcal{T}}$, которое оказывается изоморфным сдвигу двумерного тора на вектор (β, β^2). Аналогичные результаты имеют место и для ряда семейств общих фракталов Рози [4].

В случае классического фрактала Рози, отвечающего разбиению (1), В.Г.Журавлев рассмотрел [9] последовательность разбиений d^n, обобщающих разбиение (2). Здесь разбиение d^0 совпадает с разбиением (2), а d^n представляет собой разбиение $\mathcal{T}$ на фрактальные множества трех типов, являющееся подразбиением разбиения d^{n-1}. Разбиения d^n получили название разбиений Рози порядка n.

В настоящей работе мы вводим и изучаем разбиения Рози порядка n в более общем случае единиц Пизо, являющихся корнями уравнений

$$\beta^d = a_1\beta^{d-1} + \ldots + a_{d-1}\beta + 1$$

с дополнительным условием на коэффициенты

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{d-1}.$$

Введенные нами разбиения оказывается разбиениями фрактала Рози на множества d типов. Мы доказываем, что эти множества аффинно эквивалентны множествам, образующим разбиение Рози порядка 0. Также мы доказываем, что действие аналога отображения $S_{\mathcal{T}}$ на разбиениях Рози порядка n сводится к перекладыванию d центральных областей. В качестве следствия мы показываем, что разбиения Рози всех порядков состоят из множеств ограниченного остатка относительно некоторого сдвига тора.

Пусть S_α – иррациональный сдвиг тора $\mathbb{T}^d$. Множество $X \subset \mathbb{T}^d$ называется множеством ограниченного остатка, если существует постоянная $C(X)$ такая, что для всех натуральных N выполняется неравенство

$$|\sharp\{k : 0 \leq k < N, S_\alpha^k(0) \in X\} - \frac{|X|}{|\mathbb{T}|^d} N| \leq C(X)$$

Такие множества впервые были введены Гекке [10]. В случае $d = 1$ в работах [11] и [12] было дано полное описание множеств ограниченного остатка, а в работах [13], [14] была полностью решена задача о соответствующей константе $C(X)$. В случае $d > 1$ задача о множествах ограниченного остатка оказывается существенно более сложной. Имеющиеся результаты касаются поиска критериев множеств ограниченного остатка [15]–[19], построения отдельных семейств множеств ограниченного остатка [20]–[22], а также получения оценок на константу $C(X)$ для конкретных множеств ограниченного остатка [23], [24]. В частности, Рози показал [1], что для уравнения (1) разбиение Рози порядка 0 является разбиением на множества ограниченного остатка. В.Г.Журавлевым [9] была доказана аналогичная теорема в случае разбиения Рози порядка n, соответствующего уравнению (1). В настоящей работе мы доказываем аналогичный результат для разбиений Рози порядка n, соответствующих рассматриваемому нами классу уравнений.

2. Фрактал Рози и β-разложения

В настоящем параграфе мы приводим конструкцию фрактала Рози, развитую Акиямой [5], [25]–[27]. Отметим, что ряд используемых нами утверждений сформулированы здесь в несколько меньшей общности, по сравнению с исходными работами.

Пусть $\beta > 1$ – алгебраическое число Пизо степени d. Напомним, что числами Пизо называются вещественные алгебраические целые числа, большие единицы, абсолютная величина всех сопряженных которых строго меньше единицы. С каждым действительным x можно связать его β-разложение вида [28]

$$x = \sum_{k=k(x)}^{m(x)} \varepsilon_k(x)\beta^k, \tag{3}$$

получаемое по так называемому жадному алгоритму. Здесь $k(x) \geq -\infty$, $m(x) < \infty$. Жадность разложения (3) означает, что для любого $m_1 \leq m(x)$ выполняются неравенства

$$0 \leq x - \sum_{k=m_1}^{m(x)} \varepsilon_k(x)\beta^k < \beta^{m_1}.$$

Пусть $\beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(r_1)}$ – действительные сопряженные, $\beta^{(r_1+1)}, \overline{\beta^{(r_1+1)}}, \ldots,\ \beta^{(r_1+r_2)}, \overline{\beta^{(r_1+r_2)}}$ – комплексные сопряженные к β. Ясно, что $r_1 + 2r_2 = d - 1$. Кроме того, из определения числа Пизо вытекает, что $|\beta| > 1$, $|\beta^{(k)}| < 1$.

Рассмотрим множество $\mathbb{Z}[\beta]_{\geq 0} \subset \mathbb{Q}(\beta)$, определяемое условием

$$\mathbb{Z}[\beta]_{\geq 0} = \{x : k(x) \geq 0\}.$$

Разложение (3) позволяет определить отображение

$$\Phi : \mathbb{Z}[\beta]_{\geq 0} \to \mathbb{R}^{d-1}$$

по правилу

$$\Phi(x) = (x^{(1)}, \ldots, x^{(r_1)}, \mathrm{Re}x^{(r_1+1)}, \mathrm{Im}x^{(r_1+1)}, \ldots, \mathrm{Re}x^{(r_1+r_2)}, \mathrm{Im}x^{(r_1+r_2)}),$$

где

$$x^{(j)} = \sum_{k=k(x)}^{m(x)} \varepsilon_k(x)(\beta^{(j)})^k.$$

Множество
$$\mathcal{T} = \overline{\Phi(\mathbb{Z}[\beta]_{\geq 0})} \tag{4}$$
будем называть фракталом Рози. Здесь и далее черта сверху обозначает замыкание множества.

Геометрия фракталов Рози тесно связана с арифметикой β-разложений. В качестве примера приведем следующий результат [5].

Теорема 1. *β-разложение любого числа $x \in \mathbb{Q}(\beta)$ конечно тогда и только тогда, когда 0 является внутренней точкой фрактала Рози $\mathcal{T}$.*

Геометрические свойства фрактала Рози тесно связаны с разложением Реньи единицы [29] $d(1,\beta)$, определяемым следующим образом. Пусть
$$T_\beta(x) = \{\beta x\},$$
где $\{\cdot\}$ – дробная доля числа. Тогда
$$d(1,\beta) = c_{-1}c_{-2}\dots,$$
где
$$c_{-k} = [\beta T_\beta^{k-1}(1)]$$
и $[\cdot]$ – целая часть числа. Процесс вычисления коэффициентов c_{-k} прерывается, если $T_\beta^k(1) = 0$. Отметим, что разложение
$$1 - [\beta]\beta^{-1} = \sum_{k \leq -2} c_k \beta^k$$
является жадным. Также отметим, что разложение $d(1,\beta)$ может быть как конечным, так и бесконечным. Справедлива следующая теорема

Теорема 2. *Предположим, что длина слова $d(1,\beta)$ – конечна и последний элемент этого слова равен 1. Тогда $\mathcal{T}$ – линейно связное ограниченное множество и мера границы $\partial\mathcal{T}$ равна 0. Кроме того, для любого $x \in \mathbb{Z}[\beta]_{\geq 0}$ $\Phi(x)$ – внутренняя точка множества $\mathcal{T}$. Пусть дополнительно длина разложения $d(1,\beta)$ равна d. Тогда имееет место решетчатое разбиение простанства $\mathbb{R}^{d-1}$ при помощи копий фрактала Рози $\mathcal{T}$:*
$$\mathbb{R}^{d-1} = \mathcal{T} + \Phi(r_1)\mathbb{Z} + \ldots + \Phi(r_{d-1})\mathbb{Z}.$$
Здесь $r_k = 1 - T_\beta^k(1)$.

Для проверки применимости условий теоремы 2 нам понадобится следующий результат [30].

Теорема 3. *Пусть β является корнем уравнения*
$$\beta^d = a_1\beta^{d-1} + \ldots + a_{d-1}\beta + a_d.$$
Тогда $d(1,\beta)$ конечно и имеет длину d тогда и только тогда, когда
$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{d-1} \geq a_d \geq 1. \tag{5}$$
В этом случае
$$d(1,\beta) = a_1 a_2 \dots a_d.$$

Условие (5) в сочетании с условием
$$a_d = 1 \tag{6}$$
гарантирует выполнимость условий теоремы 2. Отметим, что условие (6) означает, что β является обратимым элементом (единицей) кольца $\mathbb{Z}[\beta]$.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что условия (5) и (6) выполнены.

3. Разбиение Рози порядка 0

В случае классического фрактала Рози ($d = 3$ и $a_1 = a_2 = 1$) существует каноническое разбиение (2) [1] фрактала Рози $\mathcal{T}$ на три подобных ему фрактала. Разбиение (2) определяет перекладывание $S_{\mathcal{T}}$ областей $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{G}_0$ и $\mathcal{B}_0$, которое оказывается изоморфным сдвигу тора. При этом подобие множеств $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{G}_0$ и $\mathcal{B}_0$ исходному фракталу Рози $\mathcal{T}$ позволяет проитерировать разбиение (2) классическим методом инфляции-дефляции и получить бесконечную последовательность разбиений [9]. Однако, обобщение этого подхода на произвольные фракталы Рози наталкивается на принципиальные трудности, связанные с тем, что общее множество $\mathcal{T}$ не разбивается на подобные ему множества.

Для преодоления этих трудностей нам потребуется альтернативное определение фрактала Рози, основанное на понятии графа допустимости.

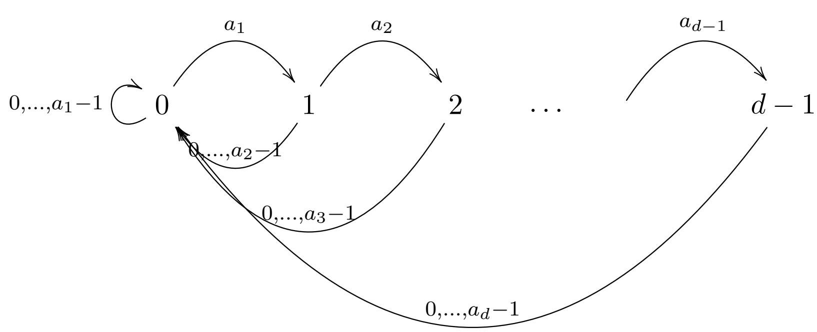
Граф допустимости представляет собой ориентированный граф с кратными ребрами и петлями. В случае рассматривамого нами класса чисел Пизо данный граф содержит d вершин, помеченных числами $0, 1, \ldots, d-1$. Ребра графа имеют следующий вид:

1) a_1 ориентированных петель в вершине 0, помеченных числами от 0 до $a_1 - 1$;

2) ориентированные ребра из вершины i в вершину $i+1$, помеченные числами a_i;

3) a_{i+1} ориентированных ребер из вершины i в вершину 0, помеченные числами от 0 до $a_{i+1} - 1$.

Обозначим граф допустимости черз $G(\beta)$. Он имеет следующий вид.



Каждому конечному пути $v_0 \xrightarrow{c_0} v_1 \xrightarrow{c_1} \ldots \xrightarrow{c_{n-1}} v_n$ в графе $G(\beta)$ можно сопоставить слово $c_0c_1\ldots c_{n-1}$, составленное из меток ребер пути. В случае $v_0 = 0$ полученные слова будем называть допустимыми.

Определение допустимых слов мотивировано следующим результатом [25].

Теорема 4. *Следующие условия эквивалентны*

1) разложение $x = \sum_{k=k(x)}^{m(x)} \varepsilon_k(x)\beta^k$ *является жадным;*

2) слово $\varepsilon_{m(x)}\varepsilon_{m(x)-1}\ldots\varepsilon_{k(x)}$ *допустимо;*

3) каждое подслово слова $\varepsilon_{m(x)}\varepsilon_{m(x)-1}\ldots\varepsilon_{k(x)}$ *лексикографически меньше слова* $d(1,\beta)$.

Из доказанной теоремы в частности вытекает, что любое подслово допустимого слова допустимо.

Пусть Adm – множество допустимых слов. Определим отображение $\Phi_{Adm} : Adm \to \mathcal{T}$ равенством

$$\Phi_{Adm}(c_0c_1\ldots c_{n-1}) = \Phi(\sum_{k=0}^{n-1} c_{n-1-k}\beta^k).$$

Тогда из теоремы 4 немедленно получаем следующий результат.

Теорема 5. *Справедливо равенство*

$$\mathcal{T} = \overline{\Phi_{Adm}(Adm)}.$$

Пусть теперь $Adm(j)$ – множество допустимых слов, для которых пути в графе $G(\beta)$ заканчиваются в вершине j. Определим множества

$$\mathcal{R}_j = \overline{\Phi_{Adm}(Adm(j))}.$$

Имеет место следующая теорема [25], [31].

Теорема 6. *Каждое множество $\mathcal{R}_j$ представляет собой линейно связное ограниченное множество и мера границы $\partial\mathcal{R}_j$ равна 0. Кроме того, различные множества $\mathcal{R}_j$ не имеют общих внутренних точек.*

Таким образом, мы получили разбиение

$$\mathcal{T} = \mathcal{R}_0 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{R}_{d-1}, \tag{7}$$

называемое разбиением Рози порядка 0.

В силу теоремы 2 фрактал Рози $\mathcal{T}$ является фундаментальной областью решетки

$$L = \sum_{k=1}^{d-1} \Phi(r_k)\mathbb{Z}.$$

Поэтому существует естественная проекция π из $\mathcal{T}$ в $d-1$-мерный тор $\mathbb{T}^{d-1} = \mathbb{R}^{d-1}/L$.

Определим отображение $S : \mathbb{T}^{d-1} \to \mathbb{T}^{d-1}$ равенством

$$S(x) = x + \Phi(1) \pmod L.$$

Далее определим перекладывание $S_{\mathcal{T}}$ областей $\mathcal{R}_j$ равенством $S_{\mathcal{T}}(x) = x + \Phi(T_\beta^j(1))$, если $x \in \mathcal{R}_j$.

Также для допустимого слова $a \in Adm$ обозначим через $S_{Adm}(a)$ лексикографически следующее за a слово из Adm. S_{Adm} можно рассматривать как отображение $Adm \to Adm$.

Теорема 7. *Имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc}
Adm & \xrightarrow{S_{Adm}} & Adm \\
\downarrow{\scriptstyle \Phi_{Adm}} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_{Adm}} \\
\mathcal{T} & \xrightarrow{S_{\mathcal{T}}} & \mathcal{T} \\
\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\
\mathbb{T}^{d-1} & \xrightarrow{S} & \mathbb{T}^{d-1}
\end{array}$$

Коммутативность верхней части диаграммы можно найти в работе [31], коммутативность нижней части немедленно следует из определений и теоремы 2.

4. Множества ограниченного остатка I: случай разбиений порядка 0

Многомерную задачу о множествах ограниченного остатка удобно сформулировать следующим образом.

Пусть L^d – некоторая d-мерная решетка, α – иррациональный относительно решетки L^d вектор, то есть вектор, координаты которого в некотором базисе решетки L^d линейно независимы над $\mathbb{Z}$ вместе с единицей. Отображение сдвига

$$S_\alpha : x \to x + \alpha \bmod L^d$$

переводит тор $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/L^d$ в себя. Согласно теореме Вейля о равномерном распределении [32] для произвольной области $X \subset \mathbb{T}^d$ имеет место асимптотическая формула

$$\sharp\{k : 0 \leq k < N, S_\alpha^k(0) \in X\} = \frac{|X|}{\det L^d} N + o(N). \tag{8}$$

Множество X будем называть множеством ограниченного остатка, если асимптотику (8) можно улучшить до асимптотики

$$\sharp\{k : 0 \leq k < N, S_\alpha^k(0) \in X\} = \frac{|X|}{\det L^d} N + O(1). \tag{9}$$

Впервые такие множества были введены Гекке [10].

Один из подходов к построению множеств ограниченного остатка основан на понятии перекладывающегося разбиения тора.

Пусть множество $T \subset \mathbb{R}^d$ является фундаментальной областью решетки L^d. Очевидно, что существует естественное отображение проекции $\pi : T \to \mathbb{T}^d$.

Рассмотрим теперь разбиение

$$\mathbb{T}^d = \mathbb{T}_0 \sqcup \mathbb{T}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{T}_d \tag{10}$$

d-мерного тора на непересекающиеся множества и порожденное им разбиение

$$T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_d,$$

где $T_j = \pi^{-1}(\mathbb{T}_j)$.

Разбиение (10) будем называть перекладывающимся, если существуют векторы $v_0, \ldots, v_d$ такие, что отображение $S^* : x \to x + v_j$, если $x \in T_j$, переводит множество T в себя и его действие на множестве T совпадает с действием, индуцированным сдвигом S_α, то есть диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{S^*} & T \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathbb{T}^d & \xrightarrow{S_\alpha} & \mathbb{T}^d \end{array} \tag{11}$$

коммутативна.

Замечание 1. *Формально отображение S^* не однозначно определено на границах множеств T_j. Точнее, если $x \in T_j \cap T_k$ можно положить как $T(x) = x + v_j$ так и $T(x) = x + v_k$. Однако, из коммутативности диаграммы (11) вытекает, что $v_j - v_k \in L^d$ и π-образы точек $x + v_j$ и $x + v_k$ на торе $\mathbb{T}^d$ совпадают. Таким образом, коммутативность диаграммы (11) при каком-то одном определении отображения S^* на границах влечет ее коммутативность при любых возможных определениях S^*.*

Справедлива следующая теорема [18].

Теорема 8. *Множества $\mathbb{T}_j$, $j = 0, 1, \ldots, d$ являются множествами ограниченного остатка относительно сдвига S_α.*

Объединение теорем 7 и 8 немедленно приводит к следующему результату.

Теорема 9. *Множества $\pi(\mathcal{R}_j)$, $j = 0, 1, \ldots, d-1$ являются множествами ограниченного остатка относительно сдвига S.*

Замечание 2. *Теоерму 9 вероятно можно доказать и иначе, используя методы исходной работы [1], однако соответствующее доказательство никогда не было опубликовано.*

5. Разбиения Рози порядка n

Пусть Adm_n – множество допустимых слов длины n и $Adm_n(j) = Adm_n \cap Adm(j)$.

Выберем некоторое слово $u \in Adm_{d-1}(j)$. Пусть $\widetilde{A}_n(j)$ – множество слов w длины n, для которых слово $uw \in Adm$. Определение множества $\widetilde{A}_n(j)$ не зависит от выбора u, так как замена слова u не меняет начальную вершину j пути графа $G(\beta)$, соответствующего слову w. Пусть $w \in \widetilde{A}_n(j)$. Для $u \in Adm$ обозначим через $Adm(u)$ множество допустимых слов, заканчивающихся на слово u.

Заметим, что любое слово v длины, большей или равной $n+2$ единственным образом представимо в виде $v = xuw$, где $x \in Adm$, $u \in Adm_{d-1}(j)$ и $w \in \widetilde{A}_n(j)$. Имеет место разбиение на непересекающиеся множества

$$Adm \setminus \bigsqcup_{k=0}^{n+1} Adm_k = \bigsqcup_{j=0}^{d-1} \bigsqcup_{u \in Adm_{d-1}(j)} \bigsqcup_{w \in \widetilde{A}_n(j)} Adm(uw). \tag{12}$$

При этом множество $\bigsqcup_{k=0}^{n+1} Adm_k$ очевидно является конечным.

Рассмотрим множества

$$\mathcal{R}_{n,j}(w) = \overline{\Phi_{Adm}\left(\bigsqcup_{u \in Adm_{d-1}(j)} Adm(uw)\right)}.$$

Легко видеть, что при $n = 0$ имеем

$$\mathcal{R}_{0,j}() = \mathcal{R}_j,$$

так как, очевидно, $Adm(j) = \bigsqcup\limits_{u \in Adm_{d-1}(j)} Adm(u)$.

Определим отображения $B_{Adm} : Adm \to Adm$ формулой $B_{Adm}(a) = a0$, где слово $a0$ получено приписыванием нуля справа к слову a. Слово $a0$ является допустимым, так как из любой вершины графа $G(\beta)$ выходит дуга, помеченная символом 0.

Определим также отображение $B : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ при помощи коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\beta]_{\geq 0} & \xrightarrow{\times\beta} & \mathbb{Z}[\beta]_{\geq 0} \\ \big\downarrow \Phi & & \big\downarrow \Phi \\ \mathcal{T} & \xrightarrow{B} & \mathcal{T} \end{array} \tag{13}$$

где верхняя стрелка обозначает умножение на β. Легко видеть, что B представляет собой аффинное преобразование пространства $\mathbb{R}^{d-1}$.

Из определений и (13) следует, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Adm & \xrightarrow{B_{Adm}} & Adm \\ \big\downarrow \Phi_{Adm} & & \big\downarrow \Phi_{Adm} \\ \mathcal{T} & \xrightarrow{B} & \mathcal{T} \end{array} \tag{14}$$

также коммутативна.

Далее заметим, что слово $w = 0^n$, состоящее из n нулей принадлежит множествам $\widetilde{A}_n(j)$ при всех j. При этом

$$B^n_{Adm} Adm(j) = \bigsqcup_{u \in Adm_{d-1}(j)} B^n_{Adm} Adm(u) = \bigsqcup_{u \in Adm_{d-1}(j)} Adm(u0^n).$$

Отсюда, с учетом коммутативной диаграммы (14) получаем

$$B^n\mathcal{R}_j = \mathcal{R}_{n,j}(0^n).$$

Далее, заметим, что для слова $xuw \in Adm$ с $\Phi_{Adm}(xuw) \in \mathcal{R}_{nj}(w)$ имеем $xu0^n \in Adm$, $\Phi_{Adm}(xu0^n) \in \mathcal{R}_{nj}(0^n)$ и $\Phi_{Adm}(xu0^n) \in \mathcal{R}_{nj}(0^n) - \Phi_{Adm}(xuw) \in \mathcal{R}_{nj}(w) = \Phi_{Adm}(w)$.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 10. *Имеет место равенство*

$$\mathcal{R}_{n,j}(w) = B^n\mathcal{R}_j + \Phi_{Adm}(w).$$

Объединяя полученный результат с (12) и теоремой 6, получаем следующую теорему.

Теорема 11. *Имеет место разбиение*

$$\mathcal{T} = \bigsqcup_{j=0}^{d-1} \bigsqcup_{w\in\widetilde{A}_n(j)} \mathcal{R}_{n,j}(w) \tag{15}$$

фрактала Рози $\mathcal{T}$ на множества $\mathcal{R}_{n,j}(w)$, не имеющие общих внутренних точек. Каждое из множеств $\mathcal{R}_{n,j}(w)$ линейно связно и имеет границу нулевой меры.

Разбиение (15) называется разбиением Рози порядка n.

Рассмотрим вопрос о взаимосвязи между разбиениями Рози различных порядков.

Теорема 12. *При $j > 0$ справедливо равенство*

$$\mathcal{R}_{n,j}(w) = \mathcal{R}_{n+1,j-1}(a_jw).$$

Кроме того,

$$\mathcal{R}_{n,0}(w) = \bigsqcup_{j'=0}^{d-1} \bigsqcup_{v\in\{0,1,\ldots,d-1\}} \mathcal{R}_{n+1,j'}(vw).$$

Вначале докажем первое из равенств. Из рассмотрения путей в графе $G(\beta)$ вытекает, что любое слово $u \in Adm_{d-1}(j)$ с $j > 0$ представимо в виде $u = u_1a_j$ с $u_1 \in Adm_{d-2}(j-1)$. Отсюда получаем

$$\bigsqcup_{u\in Adm_{d-1}(j)} Adm(uw) = \bigsqcup_{u_1\in Adm_{d-2}(j-1)} Adm(u_1a_jw).$$

Далее заметим, что любое слово из $Adm(u_1a_jw)$ имеет вид xu_1a_jw, где слово $x \in Adm$. Предположим, что слово x непусто и представим x в виде $x = x_1y$, где y – последний символ слова x. Тогда слово yu_1 допустимо. В силу условий (5), $y \neq a_1$. Поэтому можно считать, что y соответствует петле графа $G(\beta)$, расположенной в вершине 0 и, следовательно, $yu_1 \in Adm_{d-1}(j-1)$. Перебирая все допустимые значения y, получаем, что с точностью до конечного числа слов выполняется равенсто

$$\bigsqcup_{u_1\in Adm_{d-2}(j-1)} Adm(u_1a_jw) = \bigsqcup_{u'\in Adm_{d-1}(j-1)} Adm(u'a_jw)$$

и, следовательно, равенство

$$\bigsqcup_{u\in Adm_{d-1}(j)} Adm(uw) = \bigsqcup_{u'\in Adm_{d-1}(j-1)} Adm(u'a_jw).$$

Применяя к последнему равенству отображение Φ_{Adm} и осуществляя замыкания полученных точечных множеств, получаем требуемый результат. При этом мы учитываем, что отличие в конечном множестве точек исчезает при замыкании.

Перейдем теперь к рассмотрению случая $j = 0$. Из рассмотрения путей в графе $G(\beta)$ вытекает, что любое слово $u \in Adm_{d-1}(0)$ представимо в виде $u = u_1 v$, где $u_1 \in Adm_{d-2}(j')$, $0 \leq j' \leq d-1$ и $v \in \{0, 1, \ldots, a_{j'+1} - 1\}$ – последний символ слова u. Отсюда получаем

$$\bigsqcup_{u \in Adm_{d-1}(j)} Adm(uw) = \bigsqcup_{j'=0}^{d-1} \bigsqcup_{u_1 \in Adm_{d-2}(j')} \bigsqcup_{v \in \{0,1,\ldots,a_{j'+1}-1\}} Adm(u_1 v w).$$

Повторяя предыдущее рассуждение, получаем требуемый результат.

Следствие 1. *Разбиение Рози порядка n является подразбиением разбиения Рози порядка $n-1$.*

6. Действие сдвига тора на разбиении

Наша следующая задача состоит в том, чтобы описать действие отображения $S_{\mathcal{T}}$ на разбиении Рози порядка n.

Теорема 13. *Пусть $w_{max}(n, j)$ – лексикографически максимальное слово из $\widetilde{A}_n(j)$. Тогда для любого слова $w \in \widetilde{A}_n(j)$, $w \neq w_{max}(n, j)$ найдется слово $w' \in \widetilde{A}_n(j)$, такое, что*

$$S_{\mathcal{T}}(\mathcal{R}_{n,j}(w)) = \mathcal{R}_{n,j}(w').$$

Заметим, что точки вида $\Phi_{Adm}(xuv)$, где $x \in Adm$ и $u \in Adm_{d-1}(j)$ всюду плотны в $\mathcal{R}_{n,j}(w)$. При этом в силу теоремы 7,

$$S_{\mathcal{T}}(\Phi_{Adm}(xuv)) = \Phi_{Adm}(S_{Adm}(xuw)).$$

Выберем $w' = S_{Adm}(w)$. Тогда из условия $w \neq w_{max}(n, j)$ следует, что $S_{Adm}(xuw) = xuw'$. Отсюда вытекает, что все точки вида $S_{\mathcal{T}}(\Phi_{Adm}(xuv))$ принадлежат множеству $\mathcal{R}_{n,j}(w')$ и всюду плотны в нем. Переходя к замыканиям, получаем требуемый результат.

Рассмотрим теперь случай $w = w_{max}(n, j)$.

Теорема 14. *Справедливо равенство*

$$\bigsqcup_{j=0}^{d-1} S_{\mathcal{T}}(\mathcal{R}_{n,j}(w_{max}(n, j))) = \bigsqcup_{j=0}^{d-1} \mathcal{R}_{n,j}(0^n).$$

Вначале докажем включение

$$\bigsqcup_{j=0}^{d-1} S_{\mathcal{T}}(\mathcal{R}_{n,j}(w_{max}(n, j))) \subseteq \bigsqcup_{j=0}^{d-1} \mathcal{R}_{n,j}(0^n). \tag{16}$$

Для этого достаточно доказать, что для любого слова вида $xuw_{max}(n, j)$ с $x \in Adm$ и $u \in Adm_{d-1}(j)$ выполняется включение

$$S_{\mathcal{T}}(\Phi_{Adm}(xuw_{max}(n, j))) \in \mathcal{T}_n,$$

где

$$\mathcal{T}_n = \bigsqcup_{j=0}^{d-1} \mathcal{R}_{n,j}(0^n).$$

При этом множество $\mathcal{T}_n$ может быть записано в виде

$$\mathcal{T}_n = \overline{\Phi_{Adm} Adm(0^n)}.$$

В силу теоремы 7, имеем

$$S_{\mathcal{T}}(\Phi_{Adm}(xuw_{max}(n,j))) = \Phi_{Adm}(S_{Adm}(xuw_{max}(n,j))).$$

Поскольку $S_{Adm}(xuw_{max}(n,j)) \in Adm(0^n)$, получаем требуемое включение. Далее заметим, что отображение $S_{\mathcal{T}}$ взаимно-однозначно (за исключением, возможно, множества меры ноль) и сохраняет меру. Поэтому, сравнивая площади в левой и правой части (16), делаем вывод о невозможности строгого включения, что и доказывает теорему 14.

Отметим, что из теоремы 10 вытекает, что множества $\mathcal{T}_n$ обладают свойством самоподобия

$$\mathcal{T}_n = B^n \mathcal{T}. \tag{17}$$

Пусть $X \subset \mathcal{T}$. Отображение

$$d_X S_{\mathcal{T}}(x) = S_{\mathcal{T}}^{n_X(x)}(x),$$
$$n_X(x) = \min\{k : k > 0, S_{\mathcal{T}}^k(x) \in X\}$$

называется отображением первого возвращения для отображения $S_{\mathcal{T}}$ и множества X. Пусть

$$d_n = d_{\mathcal{T}_n} S_{\mathcal{T}}.$$

Теорема 15. *Диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \xrightarrow{S_{\mathcal{T}}} & \mathcal{T} \\ \Big\downarrow B^n & & \Big\downarrow B^n \\ \mathcal{T}_n & \xrightarrow{d_n} & \mathcal{T}_n \end{array}$$

коммутативна

Достаточно доказать теорему 15 для точек вида $\Phi_{Adm}(x) \in \mathcal{T}$. В силу коммутативной диаграммы 14, имеем

$$B^n(\Phi_{Adm}(x)) = \Phi_{Adm}(x0^n)$$

и, в силу теоремы 7,

$$B^n(S_{\mathcal{T}}(\Phi_{Adm}(x))) = \Phi_{Adm}(S_{Adm}(x)0^n).$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$d_n(\Phi_{Adm}(x0^n)) = \Phi_{Adm}(S_{Adm}(x)0^n).$$

Данное равенство вытекает из определения d_n и того факта, что в множестве $Adm(0^n)$ нет слов расположенных между $x0^n$ и $S_{Adm}(x)0^n$ (относительно лексикографического поряядка).

Приведем два очевидных следствия из теоремы 15.

Следствие 2. *Отображение первого возвращения для сдвига тора S и множества $\pi(\mathcal{T}_n)$ топологически сопряжено с S.*

Следствие 3. *Пусть $x \in \mathcal{T}_n$ и $Orb(x) = \{S_{\mathcal{T}}^k(x)\}_{k=-\infty}^{\infty}$. Пусть также*

$$Orb_n(x) = Orb(x) \cap \mathcal{T}_n.$$

Тогда

$$B^n Orb(x) = Orb_n(x).$$

Следствие 3 означает, что орбита сдвига тора S обладает свойством самоподобия.

7. Множества ограниченного остатка II: случай разбиений порядка n

В [19], [33] и [34] был введен ряд близких условий, при которых разбиение тора состоит из множеств ограниченного остатка. Здесь мы будем использовать вариант из работы [34].

В обозначениях раздела 4 рассмотрим разбиение d-мерного тора $\mathbb{T}^d$:

$$\mathbb{T}^d = \bigsqcup_{j=1}^{d+1} \bigsqcup_{i=0}^{\sharp E_j - 1} \mathbb{E}_j(i) \tag{18}$$

на непересекающиеся множества $d+1$ типа. Здесь $\sharp E_j$ – количество множеств типа $\mathbb{E}_j$.

Разбиение (18) порождает разбиение развертки

$$T = \bigsqcup_{j=1}^{d+1} \bigsqcup_{i=0}^{\sharp E_j - 1} E_j(i)$$

в котором $E_j(i) = \pi^{-1}(\mathbb{E}_j(i))$.

Разбиение (18) будем называть обобщенным перекладывающимся разбиением тора относительно сдвига S_α, если выполняются три условия.

1) $S^*(E_j(i)) = E_j(i+1)$ для всех допустимых значений i, j.

2) Справедливо равенство

$$\bigsqcup_{j=1}^{d+1} E_j(0) = \bigsqcup_{j=1}^{d+1} S^*(E_j(\sharp E_j - 1))$$

и существуют векторы w_j такие, что

$$S^*(E_j(\sharp E_j - 1)) - w_j = E_j(0).$$

3) Множество $E = \bigsqcup_{j=1}^{d+1} E_j(0)$ является разверткой некоторого тора.

Отметим, что условия 2) и 3) влекут за собой, что отображение первого возвращения для сдвига тора S_α на множестве $\bigsqcup_{j=1}^{d+1} \mathbb{E}_j(0)$ топологически сопряжено некоторому сдвигу тора.

Из теорем 13–15 и формулы 17 вытекает следующий результат.

Теорема 16. *Разбиение*

$$\mathbb{T}^{d-1} = \bigsqcup_{j=0}^{d-1} \bigsqcup_{w\in\widetilde{A}_n(j)} \pi(\mathcal{R}_{n,j}(w))$$

является обобщенным перекладывающимся разбиением тора относительно сдвига S.

В [34] был доказан следующий результат.

Теорема 17. *Обобщенное перекладывающееся разбиение тора является его разбиением на множества ограниченого остатка относительно сдвига S_α.*

Объединяя теоремы 16 и 17, получаем основной результат работы.

Теорема 18. *Множества $\pi(\mathcal{R}_{n,j}(w))$ являются множествами ограниченного остатка относительно сдвига тора S.*

8. Заключение

В настоящей работе начато построение обобщенных разбиений Рози произвольных порядков, связанных с алгебраическими единицами Пизо. Введено общее определение таких разбиений и доказан ряд их базовых свойств. В частности, показано, что обобщенные разбиения Рози порождают обобщенные перекладывающиеся разбиения тора и, как следствие, состоят из множеств ограниченного остатка.

Отметим, что изучение классического разбиения Рози [1], [9] было тесно связано с разложениями натуральных чисел по последовательности трибоначчи,определяемой рекуррентным соотношением $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$. В настоящей работе для построения и изучения обобщенных разюиений Рози мы использовали иные методы, основанные на комбинаторике слов. Тем не менее, изучение связи обобщенных разбиений Рози с разложениями натуральных чисел по линейным рекуррентным последовательностям является интересной задачей, которой автор планирует посвятить одну из следующих работ.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rauzy G. Nombres algébriques et substitutions // Bull. Soc. Math. France. 1982. Vol. 110. P. 147–178.

2. Arnoux P., Berthe V., Ei H., Ito S. Tilings, Quasicrystals, Discrete Planes, Generalized Substitutions, and Multidimensional Continued Fractions // Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science Proceedings AA (DM-CCG). 2001. P. 059–078.

3. Arnoux P., Ito S. Pisot substitutions and Rauzy fractals // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. 2001. Vol. 8, № 2. P. 181–207.

4. Pytheas Fogg N. Substitutions in dynamics, aritheoremetics and combinatorics. Springer. 2001.

5. Akiyama S. Self affine tiling and Pisot numeration system // Number Theory and its Applications. Kanemitsu: Kluwer. 1999. P. 7–17.

6. Combinatorics, Automata and Number Theory. Edited by V. Berthe, M. Rigo. Cambridge University Press, 2010.

7. Siegel A., Thuswaldner J. Topological properties of Rauzy fractals. Memoires de la SMF. Vol. 118. 2009.

8. Shutov A. V., Maleev A. V. Generalized Rauzy fractals and quasiperiodic tilings // Classification and Application of Fractals: New Reserch. Nova Publishers. 2012. P. 55–111.

9. Журавлев В. Г. Разбиения Рози и множества ограниченного остатка // Записки научных семинаров ПОМИ. 2005. Т. 322. С. 83–106.

10. Hecke E. Eber Analytische Funktionen und die Verteilung van Zahlen mod Eins // Math. Sem. Hamburg Univ. 1921. Vol. 5. P. 54–76.

11. Kesten H. On a conjecture of Erdös and Szüsz related to uniform distribution mod 1 // Acta Arithmetica. 1966. Vol. 12, № 2. P. 193–212.

12. Oren I. Admissible functions with multiple discontinuities // Israel Journal of Mathematics. 1982. Vol. 42, № 4. P. 353–360.

13. Шутов А. В. Оптимальные оценки в проблеме распределения дробных долей на множествах ограниченного остатка // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. № 7. С. 168–175.

14. Красильщиков В. В., Шутов А. В. Описание и точные значения максимума и минимума остаточного члена проблемы распределения дробных долей // Математические заметки. 2011. Т. 89, № 1. С. 43–52.

15. Ferenczi S. Bounded remainder sets // Acta Arithmetica. 1992. Vol. 61, № 4. P. 319–326.

16. Grepstad S., Lev N. Sets of bounded discrepancy for multi-dimensional irrational rotation // Geometric and Functional Analysis. 2015. Vol. 25, № 1. P. 87–133.

17. Rauzy G. Ensembles a restes bornes // Seminaire de theorie des nombres de Bordeaux 1983/1984. Vol. 24. Bordo, 1984. P. 1–12.

18. Журавлев В. Г. Многомерная теорема Гекке о распределении дробных частей // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, № 1. С. 95–130.

19. Кузнецова Д. В., Шутов А. В. Перекладывающиеся разбиения тора, подстановка Рози и множества ограниченного остатка // Математические заметки. 2015. Т. 98, № 6. С. 878–897.

20. Szüsz R. Über die Verteilung der Vielfachen einer komplexen Zahl nach dem Modul des Einheitsquadrats // Acta Math.Acad.Sci.Hungar. 1954. Vol. 5, № 1. P. 35–39.

21. Liardet P. Regularities of distribution // Compositio Math. 1987. Vol. 61, № 3. P. 267–293.

22. Heynes A., Koivusalo H. Constructing bounded remainder sets and cut-and-project sets which are bounded distance to lattices // Israel Journal of Mathematics. 2016. Vol. 212, № 1. P. 189–201.

23. Абросимова А. А. BR-множества // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, № 2. С. 8–22.

24. Журавлев В. Г. Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка // Записки научных семинаров ПОМИ. 2011. Т. 392. С. 95-–145.

25. Akiyama S., Barat G., Berthe V., Siegel A. Boundary of central tiles associated with Pisot beta-numeration and purely periodic expansions // Monatshefte fur Mathematik. 2008. Vol. 155, № 3. P. 377–419.

26. Akiyama S. On the boundary of self-affine tilings generated by Pisot numbers // Journal of Math. Soc. Japan. 2002. Vol. 54, № 2. P. 283–308.

27. Akiyama S. Pisot number system and its dual tiling // Physics and Theoretical Computer Science. IOS Press. 2007. P. 133–154.

28. Parry W. On the β-expansions of real numbers // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1960. Vol. 11, № 3. P. 401–416.

29. Renyi A. Representations for real numbers and their ergodic properties // Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. 1957. Vol. 8, № 3. P. 477–493.

30. Frougny C., Solomyak B. Finite beta-expansions // Ergod. Th. and Dynam. Sys. 1992. Vol. 12, № 4. P. 713-–723.

31. Berthe V., Siegel A. Tilings associated with beta-numeration and substitution // Integers: Electronic journal of combinatorial number theory. 2005. Vol. 5, № 3. ♯A02.

32. Weyl H. Üeber die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins // Math. Ann. 1916. Vol. 7, № 3. P. 313–352.

33. Журавлев В. Г. Индуцированные множества ограниченного остатка // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28, № 5. С. 171–194.

34. Шутов А. В. Подстановки и множества ограниченного остатка // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, № 2. С. 499-520.

REFERENCES

1. Rauzy, G. 1982, “Nombres algébriques et substitutions“, *Bull. Soc. Math. France*, vol. 110, pp. 147–178.

2. Arnoux, P., Berthe, V., Ei, H. & Ito, S. 2001, “Tilings, Quasicrystals, Discrete Planes, Generalized Substitutions, and Multidimensional Continued Fractions“, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science Proceedings AA (DM-CCG)*, pp. 059–078.

3. Arnoux, P.& Ito, S. 2001, “Pisot substitutions and Rauzy fractals“, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, vol. 8, no. 2, pp. 181–207.

4. Pytheas Fogg, N. 2001, *Substitutions in dynamics, aritheoremetics and combinatorics*, Springer.

5. Akiyama, S. 1999, “Self affine tiling and Pisot numeration system“, *Number Theory and its Applications*, Kluwer, Kanemitsu, pp. 7–17.

6. *Combinatorics, Automata and Number Theory* 2010, Edited by V. Berthe & M. Rigo. Cambridge University Press.

7. Siegel, A. & Thuswaldner, J. 2009, “Topological properties of Rauzy fractals“, *Memoires de la SMF*, vol. 118. .

8. Shutov, A. V. & Maleev A. V. 2012, “Generalized Rauzy fractals and quasiperiodic tilings“, *Classification and Application of Fractals: New Reserch*, Nova Publishers, pp. 55–111.

9. Zhuravlev, V. G. 2006, “Rauzy tilings and bounded remainder sets on the torus“, *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 137, no 2, pp. 4658–4672. doi:10.1007/s10958-006-0262-z.

10. Hecke, E. 1921, “Eber Analytische Funktionen und die Verteilung van Zahlen mod Eins“, *Math.Sem.Hamburg Univ.*, vol. 5, pp. 54–76. doi: 10.1007/BF02940580.

11. Kesten, H. 1966, “On a conjecture of Erdös and Szüsz related to uniform distribution mod 1“, *Acta Arithmetica*, vol. 12, no. 2, pp. 193–212.

12. Oren, I. 1982, “Admissible functions with multiple discontinuities“, *Israel Journal of Mathematics*, vol. 42, no. 4, pp. 353–360. doi:10.1007/BF0276141.

13. Shutov, A. B. 2007, “Optimal estimates in the problem of the distribution of fractional parts on bounded remainder sets“, *Vestnik SamGU. Estesstvennonauchnaya setiya*, no. 7, pp. 168–175.

14. Krasil'shchikov, V. V. & Shutov, A. V. 2011,“Description and Exact Maximum and Minimum Values of the Remainder in the Problem of the Distribution of Fractional Parts“, *Math. Notes*, vol. 89, no. 1, pp. 59–67. doi:10.1134/S000143461.

15. Ferenczi, S. 1992, “Bounded remainder sets“, *Acta Arithmetica*, vol. 61, no. 4, pp. 319–326. doi:10.4064/aa-61-4-319-326.

16. Grepstad, S. & Lev, N. 2015, “Sets of bounded discrepancy for multi-dimensional irrational rotation“, *Geometric and Functional Analysis*, vol. 25, no 1, pp. 87–133. doi:10.1007/s00039-015-0313-z.

17. Rauzy, G. 1984, “Ensembles a restes bornes“, *Seminaire de theorie des nombres de Bordeaux 1983/1984*, vol. 24. Bordo. pp. 1–12.

18. Zhuravlev, V. G. 2013, “Multi-dimensional Hecke theorem on the distribution of fractional parts“, *St. Petersburg Math. J.*, vol. 24, no. 1, pp. 71–97. doi: 10.1090/S1061-0022-2012-01232-X.

19. Kuznetsova, D. V. & Shutov, A. V. 2015, “Exchanged Toric Tilings, Rauzy Substitution, and Bounded Remainder Sets“, *Mathematical Notes*, vol. 98, no. 5–6, pp. 932–948.

doi:10.1134/S0001434615110267.

20. Szüsz, R. 1954, “Über die Verteilung der Vielfachen einer komplexen Zahl nach dem Modul des Einheitsquadrats“, *Acta Math.Acad.Sci.Hungar.*, vol. 5, no. 1, pp. 35–39.

doi:10.1007/BF02020384.

21. Liardet, P. 1987, “Regularities of distribution“, *Compositio Math.*, vol. 61, no. 3, pp. 267–293.

22. Heynes, A. & Koivusalo, H. 2016, “Constructing bounded remainder sets and cut-and-project sets which are bounded distance to lattices‘, *Israel J. Math.*, vol. 212, no. 1, pp. 189–201. doi:10.1007/s11856-016-1283-z.

23. Abrosimova, A. A. 2015, “BR-sets“, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 16, no. 2, pp. 8–22.

doi:10.22405/2226-8383-2015-16-2-8-11.

24. Zhuravlev, V. G. 2012, “Exchanged toric developments and bounded remainder sets“, *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 184, no. 6, pp. 716—745. doi: /10.1007/s10958-012-0894-0.

25. Akiyama, S., Barat, G., Berthe, V. & Siegel, A. 2008, “Boundary of central tiles associated with Pisot beta-numeration and purely periodic expansions“, *Monatshefte fur Mathematik*, vol. 155, no. 3, pp. 377–419. doi:10.1007/s00605-008-0009-7.

26. Akiyama, S. 2002, “On the boundary of self-affine tilings generated by Pisot numbers“, *Journal of Math. Soc. Japan*, vol. 54, no. 2, pp. 283–308. doi:10.2969/jmsj/05420283.

27. Akiyama, S. 2007, “Pisot number system and its dual tiling“, *Physics and Theoretical Computer Science*, IOS Press, pp. 133–154.

28. Parry, W. 1950, “On the β-expansions of real numbers“, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, vol. 11, no. 3, pp. 401–416. doi:10.1007/BF02020954.

29. Renyi, A. 1957, “Representations for real numbers and their ergodic properties“, *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar.*, vol. 8, no.3, pp. 477–493. doi:10.1007/BF02020331.

30. Frougny, C. & Solomyak, B. 1992, “Finite beta-expansions“, *Ergod. Th. and Dynam. Sys.*, vol. 12. no. 4, pp. 713-–723. doi:10.1017/S0143385700007057.

31. Berthe, V. & Siegel A. 2005, “Tilings associated with beta-numeration and substitution“, *Integers: Electronic journal of combinatorial number theory*, vol. 5, no. 3, ♯A02.

32. Weyl, H. “Üeber die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins“, *Math. Ann.*, vol. 7, no. 3, pp. 313–352. doi:10.1007/BF01475864.

33. Zhuravlev, V. G. 2017, “Induced bounded remainder sets“, *St. Petersburg Mathematical Journal*, vol. 28, no. 5, pp. 671-688. doi:10.1090/spmj/1466.

34. Shutov, A. V. 2018, “Substitutions and bounded remainder sets“, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 499-520. doi:10.22405/2226-8383-2018-19-2-499-520.

Получено 27.06.2018 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 3.

УДК 512 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-389-392

Гипотеза Якобиана для свободной ассоциативной алгебры (произвольной характеристики)

А. Белов-Канель, Л. Ровен, Цзе-Тай Юй

Белов-Канель Алексей Яковлевич — доктор физико-математических наук, федеральный профессор математики, профессор, университет Бар-Илана (г. Рамат-Ган, Израиль), Колледж математики и статистики, Шэньчжэньский университет, Шэньчжэнь, 518061, Китай.
e-mail: beloval@cs.biu.ac.il; kanelster@gmail.com
Ровен Луи Хейл — факультет математики, университет Бар-Илан (Израиль).
e-mail: rowen@math.biu.ac.il
Цзе-Тай Юй — профессор, МФТИ, факультет математики, университет Сенгэн (Китай).
e-mail: jietai@hotmail.com

Аннотация

Целью данной работы является использование PI-теории для упрощения результатов Дикса и Левина [4] об автоморфизмах свободной алгебры $F\{X\}$, а именно: если якобиан обратим, тогда каждый эндоморфизм является эпиморфизмом. Результаты переносятся на широкий класс колец.

Ключевые слова: Автоморфизмы, полиномиальные алгебры, свободные ассоциативные алгебры.

Библиография: 9 названий.

Для цитирования:
А. Белов-Канель, Л. Ровен, Цзе-Тай Юй. Гипотеза Якобиана для свободной ассоциативной алгебры (произвольной характеристики) // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 3, с. 389–392.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 3.

UDC 512 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-389-392

The Jacobian Conjecture for the free associative algebra (of arbitrary characteristic)

A. Belov-Kanel, L. Rowen and Jie-Tai Yu

Belov-Kanel Alexei Yakovlevich — doctor of physical and mathematical sciences, federal professor, professor, Bar-Ilan University (Ramat Gan, Israel), College of Mathematics and Statistics, Shenzhen University, Shenzhen, 518061, China.
e-mail: beloval@cs.biu.ac.il; kanelster@gmail.com
Rowen Louis Haile — Department of Mathematics, Bar-Ilan University (Israel).
e-mail: rowen@math.biu.ac.il
Jie-Tai Yu — professor, MIPT, Department of Mathematics, Sengeng University (China).
e-mail: jietai@hotmail.com

Abstract

The object of this note is to use PI-theory to simplify the results of Dicks and Lewin [4] on the automorphisms of the free algebra $F\{X\}$, namely that if the Jacobian is invertible, then every endomorphism is an epimorphism. We then show how the same proof applies to a somewhat wider class of rings.

Keywords: Automorphisms, polynomial algebras, free associative algebras.

Bibliography: 9 titles.

For citation:
A. Belov-Kanel, L. Rowen and Jie-Tai Yu, 2019, "The Jacobian Conjecture for the free associative algebra (of arbitrary characteristic)", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 389–392.

1. Introduction and main results

The object of this note is to use PI-theory to simplify the results of Dicks and Lewin [4] on the automorphisms of the free algebra $F\{X\}$, namely that if the Jacobian is invertible, then every endomorphism is an epimorphism. We then show how the same proof applies to a somewhat wider class of rings.

2. Hopfian rings

Definition 1. *An algebra R is **Hopfian** if every epimorphism (i.e., onto algebra homomorphism) $R \to R$ is an isomorphism.*

Dicks and Lewin [4, Proposition 3.1] proved that an endomorphism of the free associative algebra $F\{X\}$ is an epimorphism iff its Jacobian matrix is invertible. In this way, they reduced the Jacobian conjecture for $F\{X\}$ to the question of whether $F\{X\}$ is Hopfian, and proved it for the free algebra in two variables. In fact, this had already been resolved for any finite set of variables by Orzech and Ribes [6], with a more direct proof given in [3]. Also see [9] for a treatment of the Jacobian conjecture over a free algebra, and [1] for an overview of Yagzev's method to attack the Jacobian conjecture.

In this section we give a quick proof of the fact that the free associative algebra $F\{X\}$ is Hopfian, relying on considerations of growth, with a generalization obtained from the proof. . Recall that the **Gelfand-Kirillov dimension** $\mathrm{GKdim}(A)$ of an affine algebra $A = F\{a_1, \dots, a_\ell\}$ is

$$\mathrm{GKdim}(A) := \overline{\lim_{n\to\infty}} \log_n \tilde{d}_n, \tag{1}$$

where $A_n = \sum F a_{i_1} \cdots a_{i_n}$ and $d_n = \dim_F A_n$.

The standard reference on Gelfand-Kirillov dimension is [5] Although the d_n depend on the choice of the generating set $a_1, \dots, a_\ell$, $\mathrm{GKdim}(A)$ is independent of the choice of the generating set. We can tighten this fact a bit: Suppose that $A' = F\{a'_1, \dots, a'_\ell\}$ and $d'_n = \dim_F A'_n$. We say that the growth rate of the d_n is less than or equal to the growth rate of the d'_n if there are constants c, k such that $d'_n \leqslant cd_{kn}$. This defines an equivalence, and it is easy to see that the growth rate of A with respect to any two sets of generators is the same.

LEMMA 1. *Suppose R is an affine algebra in which the growth of R/I is less than the growth of R, for each ideal I of R. Then R is Hopfian.*

In particular, if $\mathrm{GKdim}(R/I) < \mathrm{GKdim}(R)$ *for all ideals I of R, then R is Hopfian.*

PROOF. For any epimorphism $\varphi : R \to R$, one has $\varphi(R) \cong R/\ker\varphi$, but then $\varphi(R)$ and R have the same growth rates, implying $\ker\varphi = 0$. $\square$

The hypothesis of Lemma 1 holds for prime PI-algebras, cf. [2, Theorem 11.2.12], so we have:

COROLLARY 1. *Any prime affine PI-algebra is Hopfian.*

REMARK 1. *R and R/I could have different growth rates even if* $\mathrm{GKdim}(R/I) < \mathrm{GKdim}(R)$. *For example, let R be the subalgebra of the free associative algebra generated by all subwords of u_n for any n, where $u_1 = xyx$ and $u_{n+1} = x^{10^n}u^n x^{10^n} yx^{10^n} u_n x^{10^n}$, a prime algebra, of* $\mathrm{GKdim}\,2$, *and I be the ideal generated by all words of degree 2 in y. Then* $\mathrm{GKdim}(R/I) = 2$, *although the growth rate of R/I is less than that of R. This example is not a PI-algebra.*

A **T-ideal** of an ideal R is an ideal invariant under all ring endomorphisms.

LEMMA 2. *If $\mathcal{I}$ is a T-ideal of R, then any endomorphism φ of R clearly induces an endomorphism of $R/\mathcal{I}$.*

PROOF. Define $\varphi : R/\mathcal{I} \to R/\mathcal{I}$ by $\varphi(a + \mathcal{I}) = \varphi(a) + \mathcal{I}$. This is well-defined since $\varphi(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}$ by hypothesis. $\square$

THEOREM 1 ([6]). *When X is a finite set of noncommuting indeterminates, the free associative algebra $F\{X\}$ is Hopfian.*

PROOF. Let $\varphi : F\{X\} \to F\{X\}$ be an epimorphism, with some nonzero polynomial $f \in \ker(\varphi)$. Let $n = \deg(f)$. Let $\mathcal{I}_n$ be the T-ideal of identities of the algebra of generic $n \times n$ matrices. Then φ induces an endomorphism of $A : F\{X\}/\mathcal{I}_n$, whose kernel does not contain f, since the easy part of the Amitsur-Levitzki theorem says that the degree of any identity of $n \times n$ matrices is at least $2n > n$. Thus the epimorphism induced by φ has non-zero kernel, contradicting Lemma 1. $\square$

The same idea of proof yields a stronger result. We say that R is **T-residually Hopfian** if the intersection of those T-ideals I of R for which R/I is Hopfian is 0. Examples include almost PI-algebras, and in particular the free algebra and all affine algebras of $\mathrm{GKdim}\,2$.

THEOREM 2 ([6]). *Any **T-residually Hopfian** algebra is Hopfian.*

PROOF. Let $\varphi : R \to R$ be an epimorphism, with some nonzero polynomial $f \in \ker(\varphi)$. By hypothesis there is some T-ideal $\mathcal{I}$ not containing r, but Lemma 2 implies that $R/\mathcal{I}$ is not Hopfian, a contradiction. $\square$

Corollary 2.3 belongs to Alexei Kanel-Belov, his work was supported by the Russian Science Foundation under grant 17-11-01377. Louis Rowen was supported by ISF grant N 1623/16.

Bar-Ilan University, Mipt, Shengeng University

Conclusions. In the paper we show that some ideas from PI-theory can be used for polynomial authomorphisms. Note that many specialists in PI-theory got different results in this arrear.

REFERENCES

1. Belov, A., Bokut, L., Rowen, L., and Yu, J.-T., *The Jacobian Conjecture, together with Specht and Burnside-type problems*, Automorphisms in Birational and Affine Geometry (Bellavista Relax Hotel, Levico Terme -Trento, October 29th – November 3rd, 2012, Italy), Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 79, Springer Verlag, 2014, 249–285, ISBN 978-3-319-05681-4, http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-05681-4_15, arXiv: 1308.0674

2. Belov, A. and Rowen, L.H. *Computational Aspects of Polynomial Identities*, Research Notes in Mathematics **9**, AK Peters, 2005.

3. Cohn, P.M., *Free Ideal Rings and Localization*

4. Dicks, W. and Lewin,J., *A jacobian conjecture for free associative algebras*, Communications in Algebra **10:12** (1982) 1285-1306.

5. Krause, G.R., and Lenagan, T.H., *Growth of Algebras and Gelfand-Kirillov Dimension*, Amer. Math. Soc. Graduate Studies in Mathematics **22** (2000).

6. Orzech, M. and Ribes, L., *Residual Finiteness and the Hopf Property in Rings*, Journal of Algebra **15** (1970), 81–88.

7. Orzech, M., *Onto endomorphisms are isomorphosms*, Amer. Math. Monthly **78** (1971), 357–362.

8. Rowen, L.H. and Small, L., *Representable rings and GK dimension* (2015).

9. Schofield, A., *Representations of rings over skew fields*, LMS Lecture note series **92** 1985, 223 pages.

Получено 16.10.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2019–20-3-393-399

Об экстремальных задачах типа Никольского – Бернштейна и Турана для преобразования Данкля[1]

Д. В. Горбачев, Н. Н. Добровольский

Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: dvgmail@mail.ru
Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Аннотация

Изучается взаимосвязь между экстремальными задачами типа Турана и Никольского – Бернштейна на $\mathbb{R}^d$ с весом Данкля. Задача Турана состоит в нахождении супремума заданного момента положительно определенной (относительно преобразования Данкля) функции с носителем в евклидовом шаре и фиксированным значением в нуле. В точном L^1-неравенстве Никольского–Бернштейна оценивается супремум-норма лапласиана Данкля целой функции экспоненциального сферического типа с единичной L^1-нормой. Также отмечается связь с экстремальными задачами типа Фейера и Бомана. Преобразование Данкля покрывает случай классического преобразования Фурье в случае единичного веса.

Неравенства Никольского - -Бернштейна являются классическими в теории приближений, а задачи типа Турана имеют приложения в метрической геометрии. Тем не менее мы доказываем, что они имеют один и тот же ответ, который явно выписывается. Простое доказательство опирается на наши старые результаты из теории решения экстремальных задач для преобразования Данкля.

Ключевые слова: вес Данкля, преобразование Фурье–Данкля, целая функция экспоненциального сферического типа, положительно определенная функция, константа Никольского–Бернштейна, экстремальная задача Турана–Фейера.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
Д. В. Горбачев, Н. Н. Добровольский. Об экстремальных задачах типа Никольского – Бернштейна и Турана для преобразования Данкля // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 393–399.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 3.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2019–20-3-393-399

Extremal Nikolskii – Bernstein- and Turán-type problems for Dunkl transform[2]

D. V. Gorbachev, N. N. Dobrovolskii

Gorbachev Dmitry Viktorovich — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University (Tula).
e-mail: dvgmail@mail.ru

Dobrovol'sky Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University; associate professor of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Abstract

We study the interrelation between the extremal Turán-type problems and Nikolskii – Bernstein problems for nonnegative functions on $\mathbb{R}^d$ with the Dunkl weight. The Turán problem is to find the supremum of a given moment of a positive definite (with respect to the Dunkl transform) function with a support in the Euclidean ball and a fixed value at zero. In the sharp L^1-Nikolskii–Bernstein inequality, the supremum norm of the Dankl Laplacian of an entire function of exponential spherical type with the unit L^1-norm is estimated. Extremal Feuér and Beaumann problems is also mentioned. The Dunkl transform covers the case of the classical Fourier transform in the case of unit weight.

Nikolskii–Bernstein inequalities are classical in approximation theory, and the Turán-type problems have applications in metric geometry. Nevertheless, we prove that they have the same answer, which is given explicitly. The easy proof is relied on our old results from the theory of solving extremal problems to the Dunkl transform.

Keywords: Dunkl weight, Fourier–Dunkl transform, entire function of exponential spherical type, positive definite function, Nikolskii–Bernstein constant, Turán extremal problem.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

D. V. Gorbachev, N. N. Dobrovolskii, 2019, "Extremal Nikolskii – Bernstein- and Turán-type problems for Dunkl transform" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 393–399.

В этой заметке мы покажем взаимосвязь между экстремальными задачами типа Турана для положительно определенных относительно преобразования Фурье–Данкля финитных функций и задачами о точной L^1-константе Никольского–Бернштейна для неотрицательных целых функций экспоненциального сферического типа на $\mathbb{R}^d$. Если неравенства Никольского–Бернштейна относятся к классическим разделам теории приближений, то задачи типа Турана имеют приложения в метрической геометрии. Тем не менее у них будет один ответ.

Задачи Турана и их аналоги интенсивно изучались в классическом безвесовом случае преобразования Фурье (см., например, обзоры результатов в [1, 14, 5, 13, 6]). Для весового случая преобразования Данкля, включающего частным случаем многомерное преобразование Фурье,

[2]This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199).

эти задачи исследовались, например, в работах [13, 7]. Неравенства Никольского–Бернштейна имеют богатую историю (см., например, обзоры в [3, 9, 11]).

Основные факты из теории Данкля можно найти в [15] (см. также [13, 11]). Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^d$ — d-мерное действительное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \ldots + x_dy_d$ и нормой $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $v_\kappa(x) = \prod_{a\in R_+} |\langle a, x\rangle|^{2\kappa(a)}$ — вес Данкля, определяемый заданными положительной подсистемой R_+ системы корней $R \subset \mathbb{R}^d$ и функцией кратности $\kappa\colon R \to \mathbb{R}_+$, инвариантной относительно группы отражений $G(R)$, $c_\kappa^{-1} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2/2}v_\kappa(x)\,dx$ — интеграл Макдональда–Мета–Сельберга, $d\mu_\kappa(x) = c_\kappa v_\kappa(x)\,dx$, $L^p_\kappa(\mathbb{R}^d)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}^d$ функций f с конечной нормой $\|f\|_{p,k} = (\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p\,d\mu_\kappa(x))^{1/p}$, $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|$. Через

$$D_jf(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{a\in R_+} \kappa(a)\langle a, e_j\rangle\, \frac{f(x) - f(\sigma_a x)}{\langle a, x\rangle}, \quad j = 1, \ldots, d,$$

где e_j — единичные орты и $\sigma_a \in O(d)$ — отражение относительно гиперплоскости $\langle a, x\rangle = 0$, обозначим дифференциально-разностные операторы Данкля, $\Delta_\kappa f(x) = \sum_{j=1}^d D_j^2 f(x)$ — лапласиан Данкля.

Пусть $e_\kappa(x, y) = E_\kappa(x, iy)$ — обобщенная экспонента (ядро Данкля), являющаяся решением системы уравнений

$$D_jf(x) = iy_jf(x), \quad j = 1, \ldots, d, \qquad f(0) = 1.$$

Для $e_\kappa(x, y)$ многие свойства аналогичны свойствам экспоненты $e^{i\langle x,y\rangle}$, в частности,

$$(-\Delta_\kappa)^r e_k(x, y) = |y|^{2r} e_k(x, y), \quad r \in \mathbb{Z}_+.$$

Гармонический анализ в пространствах с весом Данкля осуществляется с помощью унитарного в $L^2_\kappa(\mathbb{R}^d)$ преобразования Данкля

$$\mathcal{F}_\kappa(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{e_\kappa(x, y)}\, d\mu_\kappa(x).$$

В частности, обратное преобразование Данкля $\mathcal{F}_\kappa^{-1}(f)(x) = \mathcal{F}_\kappa(f)(-x)$ и

$$(-\Delta_\kappa)^r f(0) = \int_{\mathbb{R}^d} |x|^{2r}\mathcal{F}_\kappa(f)(x)\, d\mu_\kappa(x). \tag{1}$$

Через T^t_κ обозначим положительный оператор обобщенного сдвига (среднего значения) Данкля [11].

В безвесовом случае $\kappa(a) \equiv 0$ индекс κ опускается, $d\mu(x) = (2\pi)^{-d/2}\,dx$ и $\mathcal{F}$, Δ, T^t — классические преобразование Фурье $\mathcal{F}$, оператор Лапласа, оператор усреднения по сферам соответственно.

Перейдем к постановкам задач. Пусть $\mathcal{E}^+_\kappa \subset L^1_\kappa(\mathbb{R}^d)$ — множество неотрицательных целых функций экспоненциального сферического типа не выше 1, $\mathcal{P}^+_\kappa$ — класс непрерывных действительных положительно определенных относительно преобразования Данкля функций f (это означает, что $\mathcal{F}_\kappa(f) \geqslant 0$), таких что $\operatorname{supp} f \subset B^d$. Эти классы двойственны в том смысле, что по теореме Пэли–Винера для преобразования Данкля справедливо равенство $\mathcal{E}^+_\kappa = \mathcal{F}_\kappa(\mathcal{P}^+_\kappa)$, и наоборот.

Точная константа Никольского между L^∞- и L^1-нормами для функций из класса $\mathcal{E}^+_\kappa$ определяется равенством

$$L_{\kappa,0} = \sup\{\|f\|_\infty\colon f \in \mathcal{E}^+_\kappa,\ \|f\|_{1,k} = 1\}. \tag{2}$$

В безвесовом случае она вычислена в работе [3].

Точная константа Никольского–Бернштейна между L^∞- и L^1-нормами для лапласиана Данкля Δ_κ и функций из класса $\mathcal{E}_\kappa^+$ определяется равенством

$$L_{\kappa,1} = \sup\{\|\Delta_\kappa f\|_\infty \colon f \in \mathcal{E}_\kappa^+,\ \|f\|_{1,k} = 1\}.$$

Экстремальная задача Турана заключается в нахождении величины

$$A_{\kappa,0} = \sup\bigg\{\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,d\mu_\kappa(x)\colon f \in \mathcal{P}_\kappa^+,\ f(0) = 1\bigg\}.$$

Для безвесового случая решение задачи см. в [16, 17, 4, 14, 2], а для преобразования Данкля — в [13]. Двойственная постановка задачи $A_{\kappa,0}$ о супремуме $f(0)$ при условии $\|f\|_{1,k} = 1$ на классе $\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{P}_\kappa^+) = \mathcal{E}_\kappa^+$ известна как задача Фейера [13] (см. также [6, 12]). Другими словами,

$$A_{\kappa,0} = \sup\{f(0)\colon f \in \mathcal{E}_\kappa^+,\ \|f\|_{1,\kappa} = 1\}. \tag{3}$$

Отсюда и из (2) получаем неравенство $A_{\kappa,0} \leqslant L_{\kappa,0}$.

Рассмотрим следующий весовой вариант задачи Турана–Фейера: найти

$$A_{\kappa,1} = \sup\bigg\{\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 f(x)\,d\mu_\kappa(x)\colon f \in \mathcal{P}_\kappa^+,\ f(0) = 1\bigg\}.$$

Эквивалентно, с учетом (1), получаем

$$A_{\kappa,1} = \sup\{-\Delta_\kappa f(0)\colon f \in \mathcal{E}_\kappa^+,\ \|f\|_{1,\kappa} = 1\}. \tag{4}$$

Отсюда заключаем, что $A_{\kappa,1} \leqslant L_{\kappa,1}$.

Полезно сравнить задачу $A_{\kappa,1}$ с экстремальной задачей Бомана для преобразования Данкля [7], в которой требуется найти $\inf \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 f(x)\,d\mu_\kappa(x)$ на классе функций $\mathcal{E}_\kappa^+$ с условием $\|f\|_{1,k} = 1$.

Данные задачи обладают радиальной симметрией, поэтому основным способом их решения является применение усреднения по сферам, приводящее к радиальным экстремальным функциям $f(x) = f(|x|)$ и, как следствие, одномерным постановкам на полуоси со степенным весом $b_\alpha t^{2\alpha+1}$ и преобразованием Ганкеля $\mathcal{H}_\alpha$, ядро которого определяется нормированной функцией Бесселя j_α. Здесь $\alpha = \alpha_\kappa = d_\kappa/2 - 1 \geqslant -1/2$, $d_\kappa = d + 2\sum_{a\in R_+}\kappa(a)$ — размерность Данкля $b_\alpha^{-1} = 2^\alpha\Gamma(\alpha+1)$, $j_\alpha(t) = \Gamma(\alpha+1)(2/t)^\alpha J_\alpha(t)$. В безвесовом случаем имеем $\alpha = d/2-1$. Для радиальных функций лапасиан и оператор обобщенного сдвига Данкля сводятся к дифференциальному оператору и сдвигу Бесселя соответственно (их определение см., например, в [10, 8]). Для решения одномерных задач применяются квадратурные формулы Бесселя.

Сформулируем основной результат.

Предложение 1. *Имеем*

$$L_{\kappa,i} = A_{\kappa,i}, \quad i = 0, 1. \tag{5}$$

При этом

$$L_{\kappa,0} = \frac{b_{\alpha_\kappa}}{2^{d_k} d_\kappa}, \quad L_{\kappa,1} = \frac{b_{\alpha_\kappa}}{2^{d_k+1} d_\kappa(d_\kappa+2)}.$$

Экстремальные (с точностью до нормировочных констант) функции в задачах $L_{\kappa,i}$ соответственно $j^2_{\alpha_\kappa+1}(|x|/2)$ и $|x|^2 j^2_{\alpha_\kappa+2}(|x|/2)$, а в задачах $A_{\kappa,i}$ их преобразования Данкля.

Доказательство. Для доказательства будет достаточно воспользоваться результатами работ [10, теорема 1] и [11, теорема 1].

Выше мы привели неравенства $A_{\kappa,i} \leqslant L_{\kappa,i}$, $i = 0, 1$. Чтобы показать, что они точные, воспользуемся доказательством теоремы 1 из [11]. Пусть $i = 0$ или 1, $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число и f_ε — допустимая функция в задаче $L_{\kappa,i}$, для которой

$$L_{\kappa,i} \leqslant (-\Delta_\kappa)^i f(x_\varepsilon) + \varepsilon, \quad x_\varepsilon \in \mathbb{R}^d.$$

Пусть $t = |x|$ и рассмотрим радиальную функцию $g_\varepsilon(t) = T_\kappa^t f_\varepsilon(x_\varepsilon)$. Из свойств оператора обобщенного сдвига [11, раздел 2] следует, что она является неотрицательной целой функций экспоненциального сферического типа не больше 1 и

$$c^{-1} = \|g_\varepsilon\|_{1,\kappa} \leqslant \|f_\varepsilon\|_{1,\kappa} = 1, \quad \Delta_\kappa^i g_\varepsilon(0) = \Delta_\kappa^i f_\varepsilon(x_\varepsilon).$$

Таким образом, функция cg_ε является допустимой в задаче Фейера (3) или (4) и

$$A_{\kappa,i} \geqslant (-\Delta_\kappa)^i c g_\varepsilon(0) = c(-\Delta_\kappa)^i f_\varepsilon(x_\varepsilon) \geqslant c(L_{\kappa,i} - \varepsilon) \geqslant L_{\kappa,i} - \varepsilon,$$

откуда при $\varepsilon \to 0$ выводим обратное неравенство $A_{\kappa,i} \geqslant L_{\kappa,i}$.

Эти рассуждения также показывают, что при поиске экстремумов в этих задачах можно ограничиться радиальными функциями, а тогда, как было отмечено выше, получаются одномерные формулировки на полуоси со степенным весом $b_\alpha t^{2\alpha+1}$. Мы не выписываем их, поскольку они даны в [10]. Применяя теорему 1 из этой работы для $\alpha = \alpha_\kappa$ мы завершаем доказательство. □

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arestov V. V., Berdysheva E. E. The Turán problem for a class of polytopes // East J. Approx. 2002. Vol. 8, no. 2. P. 381–388.

2. Bianchi G., Kelly M. A Fourier analytic proof of the Blaschke–Santaló inequality // Proc. Amer. Math. Soc. 2015. Vol. 143. P. 4901–4912.

3. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere // arXiv:1708.09837. 2017; J. d'Analyse Math. 2019 (to appear).

4. Gorbachev D. V. An extremal problem for periodic functions with supports in the ball // Math. Notes. 2001. Vol. 69, no. 3–4. P. 313–319.

5. Gorbachev D. V. Selected problems of function theory and approximation theory, and their applications. Tula: Grif and Co., 2005. (In Russ.)

6. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Ofitserov E. P., Smirnov O. I. Some extremal problems of harmonic analysis and approximation theory // Chebyshevskii Sbornik. 2017. Vol. 18, no. 4. P. 139–166. (In Russ.)

7. Gorbachev D. V., Ivanov V. I. Bohman extremal problem for the Dunkl transform // Proc. Steklov Inst. Math. 2017. Vol. 297 (Suppl 1). P. 88–96.

8. Gorbachev D. V., Tikhonov S. Y. Wiener's problem for positive definite functions // Math. Zeit. 2018. Vol. 289, no. 3–4. P. 859-874.

9. Gorbachev D. V., Dobrovolskii N. N. Nikolskii constants in $L^p(\mathbb{R}, |x|^{2\alpha+1}\,dx)$ spaces // Chebyshevskii Sbornik. 2018. Vol. 19, no. 2. P. 67–79. (In Russ.)

10. Gorbachev D. V. Nikolskii – Bernstein constants for nonnegative entire functions of exponential type on the axis // Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN. 2018. Vol. 24, no. 4. P. 92–103. (In Russ.)

11. Gorbachev D. V., Ivanov V. I. Nikol'skii – Bernstein constants for entire functions of exponential spherical type in weighted spaces // Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN. 2019. Vol. 25, no. 2. P. 75–87. (In Russ.)

12. Gorbachev D. V., Ivanov V. I. Turán, Fejér and Bohman extremal problems for the multivariate Fourier transform in terms of the eigenfunctions of a Sturm–Liouville problem // Sb. Math. 2019. Vol. 210, no. 6. P. 809–835.

13. Ivanov A. V. Some extremal problem for entire functions in weighted spaces // Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki. 2010. No. 1. P. 26–44. (In Russ.)

14. Kolountzakis M. N., Révész Sz.Gy. On a problem of Turán about positive definite functions // Proc. Amer. Math. Soc. 2003. Vol. 131. P. 3423–3430.

15. Rösler M. Dunkl Operators: Theory and Applications. Lecture Notes in Math. Vol. 1817. Berlin: Springer, 2003. P. 93–135.

16. Siegel C. L. Über Gitterpunkte in konvexen Körpern und damit zusammenhängendes Extremal problem // Acta Math. 1935. Vol. 65. P. 307–323.

17. Vaaler J. D. Some extremal functions in Fourier analysis // Bull. Amer. Math. Soc. (New Series). 1985. Vol. 12, no. 2. P. 183–216.

REFERENCES

1. Arestov V. V., Berdysheva E. E. The Turán problem for a class of polytopes // East J. Approx. 2002. Vol. 8, no. 2. P. 381–388.

2. Bianchi G., Kelly M. A Fourier analytic proof of the Blaschke–Santaló inequality // Proc. Amer. Math. Soc. 2015. Vol. 143. P. 4901–4912.

3. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere // arXiv:1708.09837. 2017; J. d'Analyse Math. 2019 (to appear).

4. Gorbachev D. V. An extremal problem for periodic functions with supports in the ball // Math. Notes. 2001. Vol. 69, no. 3–4. P. 313–319.

5. Gorbachev D. V. Selected problems of function theory and approximation theory, and their applications. Tula: Grif and Co., 2005. (In Russ.)

6. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Ofitserov E. P., Smirnov O. I. Some extremal problems of harmonic analysis and approximation theory // Chebyshevskii Sbornik. 2017. Vol. 18, no. 4. P. 139–166. (In Russ.)

7. Gorbachev D. V., Ivanov V. I. Bohman extremal problem for the Dunkl transform // Proc. Steklov Inst. Math. 2017. Vol. 297 (Suppl 1). P. 88–96.

8. Gorbachev D. V., Tikhonov S. Y. Wiener's problem for positive definite functions // Math. Zeit. 2018. Vol. 289, no. 3–4. P. 859-874.

9. Gorbachev D. V., Dobrovolskii N. N. Nikolskii constants in $L^p(\mathbb{R}, |x|^{2\alpha+1}\,dx)$ spaces // Chebyshevskii Sbornik. 2018. Vol. 19, no. 2. P. 67–79. (In Russ.)

10. Gorbachev D. V. Nikolskii – Bernstein constants for nonnegative entire functions of exponential type on the axis // Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN. 2018. Vol. 24, no. 4. P. 92–103. (In Russ.)

11. Gorbachev D. V., Ivanov V. I. Nikol'skii – Bernstein constants for entire functions of exponential spherical type in weighted spaces // Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN. 2019. Vol. 25, no. 2. P. 75–87. (In Russ.)

12. Gorbachev D. V., Ivanov V. I. Turán, Fejér and Bohman extremal problems for the multivariate Fourier transform in terms of the eigenfunctions of a Sturm–Liouville problem // Sb. Math. 2019. Vol. 210, no. 6. P. 809–835.

13. Ivanov A. V. Some extremal problem for entire functions in weighted spaces // Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki. 2010. No. 1. P. 26–44. (In Russ.)

14. Kolountzakis M. N., Révész Sz.Gy. On a problem of Turán about positive definite functions // Proc. Amer. Math. Soc. 2003. Vol. 131. P. 3423–3430.

15. Rösler M. Dunkl Operators: Theory and Applications. Lecture Notes in Math. Vol. 1817. Berlin: Springer, 2003. P. 93–135.

16. Siegel C. L. Über Gitterpunkte in konvexen Körpern und damit zusammenhängendes Extremal problem // Acta Math. 1935. Vol. 65. P. 307–323.

17. Vaaler J. D. Some extremal functions in Fourier analysis // Bull. Amer. Math. Soc. (New Series). 1985. Vol. 12, no. 2. P. 183–216.

Получено 5.09.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 16U99; 16E50; 16W10; 13B99 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-400-403

Об одном свойстве нильпотентных матриц над алгебраически замкнутым полем

П. В. Данчев

Данчев Петр — Институт математики и информатики Болгарской академии наук (г. София, Болгария).
e-mail: danchev@math.bas.bg; pvdanchev@yahoo.com

Аннотация

Предположим, что F - алгебраически замкнутое поле. Докажем, что кольцо $\prod_{n=1}^{\infty}\mathbb{M}_n(F)$ обладает специальным свойством, которое несколько параллельно (и немного лучше) свойству, установленному Šter (LAA, 2018) для колец $\prod_{n=1}^{\infty}\mathbb{M}_n(\mathbb{Z}_2)$ и $\prod_{n=1}^{\infty}\mathbb{M}_n(\mathbb{Z}_4)$, где $\mathbb{Z}_2$ - конечное простое поле из двух элементов и $\mathbb{Z}_4$ является конечным неразложимым кольцом из четырех элементов.

Ключевые слова: нильпотентные матрицы, идемпотентные матрицы, Жордановая каноническая форма, алгебраически замкнутые поля.

Библиография: 4 названия.

Для цитирования:
П. В. Данчев. Об одном свойстве нильпотентных матриц над алгебраически замкнутым полем // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 3, с. 400–403.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 3.

UDC 16U99; 16E50; 16W10; 13B99 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-400-403

On a Property of Nilpotent Matrices over an Algebraically Closed Field

P. V. Danchev

Danchev Peter — Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences (Sofia, Bulgaria).
e-mail: danchev@math.bas.bg; pvdanchev@yahoo.com

Abstract

Suppose F is an algebraically closed field. We prove that the ring $\prod_{n=1}^{\infty}\mathbb{M}_n(F)$ has a special property which is, somewhat, in sharp parallel with (and slightly better than) a property established by Šter (LAA, 2018) for the rings $\prod_{n=1}^{\infty}\mathbb{M}_n(\mathbb{Z}_2)$ and $\prod_{n=1}^{\infty}\mathbb{M}_n(\mathbb{Z}_4)$, where $\mathbb{Z}_2$ is the finite simple field of two elements and $\mathbb{Z}_4$ is the finite indecomposable ring of four elements.

Keywords: nilpotent matrices, idempotent matrices, Jordan canonical form, algebraically closed fields.

Bibliography: 4 titles.

For citation:
P. V. Danchev, 2019, “On a Property of Nilpotent Matrices over an Algebraically Closed Field”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 400–403.

All rings R are assumed here to be associative, containing the identity element 1 which differs from the zero element 0 of R. Recall that a ring R is *nil-clean* provided that each its element is a sum of a nilpotent and an idempotent, is *π-regular* provided that for every element $r \in R$ there is $n \in \mathbb{N}$ such that $r^n \in r^n R r^n$, and is *strongly π-regular* provided that $r^n \in r^{n+1}R$.

In his seminal paper [4], Šter showed that the ring $\prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}_2)$ is nil-clean but *not* strongly π-regular, whereas the ring $\prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}_4)$ is nil-clean but *not* π-regular. He utilizes an innovation of the method used in [1]. Specifically, for any $n \in \mathbb{N}$, it was proved there that, for every $n \times n$ matrix A over the finite field $\mathbb{Z}_2$, there exists an idempotent matrix E such that $(A-E)^4 = 0$, while the index of nilpotence over the finite ring $\mathbb{Z}_4$ is precisely 8. As usual, the symbol I will stand in the sequel the standard matrix identity. Thereby, $A = N + E$ for some $N^4 = 0$ and hence $(I-E)A = (I-E)N$, but it is not clear at all whether $[(I-E)A]^4 = 0$ will hold eventually.

On the other side, in [2] we have examined rings R having the property that, for each $a \in R$, there is an idempotent $e \in aR$ such that $(1-e)a$ is nilpotent. We shall be here even rather more precise by considering an existing idempotent $e \in aRa$ with $[(1-e)a]^2 = 0$.

It is well known that finite fields are, surely, *not* algebraically closed. So, the purpose of this very short note is to show that some (although little) improvement is possible by a strengthening of the technique utilized in [2] in the case of algebraically closed fields.

Before proceed by proving our chief result, we need the next two technical statements.

Lemma 1. *Let R be a unital ring, $n \geq 2$, and $A = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1} \in \mathbb{M}_n(R)$, where the $E_{i,j}$ denote matrix units. Then there exits an idempotent $B \in A\mathbb{M}_n(R)A$ such that $((I-B)A)^2 = 0$.*

Proof. First, suppose that $n = 2$. Then

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

and hence, taking $B = 0 \in A\mathbb{M}_n(R)A$, we have $((I-B)A)^2 = A^2 = 0$. Let us therefore assume that $n \geq 3$, and let

$$B = A\Big(\sum_{i=1}^{n-2} E_{i+2,i}\Big)A = \Big(\sum_{i=2}^{n-1} E_{i,i-1}\Big)A = \sum_{i=2}^{n-1} E_{i,i}.$$

Then $B \in A\mathbb{M}_n(R)A$, B is clearly an idempotent, and

$$((I-B)A)^2 = ((E_{1,1} + E_{n,n})A)^2 = E_{1,2}^2 = 0,$$

as desired. □

Lemma 2. *Let F be a field, $n \geq 1$, and $A \in \mathbb{M}_n(R)$ a matrix in Jordan canonical form. Then there exits an idempotent $B \in A\mathbb{M}_n(R)A$ such that $((I-B)A)^2 = 0$.*

Proof. Write

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_m \end{pmatrix},$$

where each A_i is a Jordan block of size $n_i \times n_i$. For each A_i we shall define a block B_i of the same size, such that $B_i \in A_i\mathbb{M}_{n_i}(F)A_i$ is idempotent.

If A_i is invertible as a matrix of $\mathbb{M}_{n_i}(F)$, then the identity element I_{n_i} of $\mathbb{M}_{n_i}(F)$ is in $A_i\mathbb{M}_{n_i}(F)A_i$, and we set $B_i = I_{n_i}$. If A_i is not invertible, then either $n_i = 1$ and $A_i = (0)$, or $n_i \geq 2$ and $A_i = \sum_{j=1}^{n_i-1} E_{j,j+1}$. In the first case, we let $B_i = (0)$, and in the second case, we take B_i as in Lemma 1. Then, clearly, in each case, $B_i \in A_i\mathbb{M}_{n_i}(F)A_i$ is idempotent, and it is easy to see that $((I_{n_i} - B_i)A_i)^2 = 0$ for each i.

It follows immediately that

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_m \end{pmatrix}$$

has the desired properties. $\square$

Proposition 1. *Let F be an algebraically closed field, and let $R = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{M}_n(F)$. Then for each $A \in R$ there is an idempotent $B \in ARA$ such that $((I - B)A)^2 = 0$.*

Proof. For each n let A_n denote the projection of A onto the component $\mathbb{M}_n(F)$ in R. Since F is algebraically closed, for each n we can find an invertible matrix $C_n \in \mathbb{M}_n(F)$ such that $D_n = C_nA_nC_n^{-1}$ is in Jordan canonical form. By Lemma 2, for each n we can find an idempotent matrix $G_n \in D_n\mathbb{M}_n(F)D_n$ such that $((I_n - G_n)D_n)^2 = 0$. Now, for each n let $B_n = C_n^{-1}G_nC_n$, and let $B = (B_1, B_2, \dots) \in R$. Since each G_n is idempotent, the same holds for each B_n, and hence also for B. Also, since $G_n \in D_n\mathbb{M}_n(F)D_n$ and C_n is invertible, we have for each n that

$$B_n = C_n^{-1}G_nC_n \in C_n^{-1}D_n\mathbb{M}_n(F)D_nC_n = A_nC_n^{-1}\mathbb{M}_n(F)C_nA_n = A_n\mathbb{M}_n(F)A_n,$$

and hence $B \in ARA$. Finally, since $((I_n - G_n)D_n)^2 = 0$, for each n we have

$$((I_n - B_n)A_n)^2 = ((I_n - C_n^{-1}G_nC_n)A_n)^2 = (C_n^{-1}(I_n - G_n)C_nA_n)^2$$
$$= (C_n^{-1}(I_n - G_n)D_nC_n)^2 = C_n^{-1}((I_n - G_n)D_n)^2C_n = 0,$$

from which it follows that $((I - B)A)^2 = 0$, as required. $\square$

We end our work with the following challenging query:

Problem 1. *Extend the considered above property for any field F which is not necessarily algebraically closed.*

An intuitive idea could be the following one: It is enough to establish the claim for a given $\mathbb{M}_n(F)$ with the index of the nilpotent $(1 - e)a$ bounded independent of n. Since every matrix is the direct sum of a unit and a nilpotent (we do not need the field F to be algebraically closed for this), it is enough to do the assertion for units and for nilpotents. For a unit a, we take $e = 1$. Now suppose a is nilpotent. It is enough to do the statement for the Weyr canonical form of a – for more details the interested reader can see [3]. Thus assume a has Weyr structure $(n_1, n_2, ..., n_r)$. The idea is to get an idempotent e in aRa that is diagonal, has 0's in the first n_1 places and the last n_r, and such that $(1 - e)a$ has zero blocks (relative to the partition $n_1, .., n_r$) except in the $(1, 2)$ block. Then index of the nilpotent $(1 - e)a$ is exactly 2.

We will illustrate in the case of a homogeneous structure $(3, 3, 3, 3)$ but the argument in the nonhomogeneous case is similar although a little trickier. Thus, in terms of 3×3 blocks and $I = I_3$, we will have that

$$a = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Let us now

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

and

$$e = ara = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Then, one finds that

$$(1-e)a = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

is nilpotent of index 2, as expected.

Acknowledgments. The author owes his sincere thanks to Professor Zachary Mesyan from the University of Colorado, Colorado Springs, and to Professor Kevin O'Meara, for their valuable communication on the present object.

REFERENCES

1. S. Breaz, G. Călugăreanu, P. Danchev and T. Micu, *Nil-clean matrix rings*, Lin. Alg. & Appl. **439** (2013), 3115–3119.

2. P.V. Danchev, *A generalization of π-regular rings*, Turk. J. Math. **43** (2019), 702–711.

3. K.C. O'Meara, J. Clark and C.I. Vinsonhaler, Advanced Topics in Linear Algebra: weaving matrix problems through the Weyr form, Oxford Univ. Press, 2011.

4. J. Šter, *On expressing matrices over $\mathbb{Z}_2$ as the sum of an idempotent and a nilpotent*, Lin. Alg. & Appl. **544** (2018), 339–349.

Получено 30.09.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-3-404-428

Оценки константы совместных диофантовых приближений

Ю. А. Басалов

Басалов Юрий Александрович — аспирант, кафедра алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственного педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: basalov_yurij@mail.ru

Аннотация

Данная работа посвящена разработке нового подхода для оценки снизу константы наилучших диофантовых приближений. История вопроса оценки константы наилучших диофантовых приближений восходит к П. Г. Дирихле. С течением времени подходы, применяемые для решения этой задачи претерпели серьезные изменения. Из алгебры (П. Г. Дирихле, А. Гурвиц, Ф. Фуртвенглер) это задача перешла в область геометрии чисел (Г. Дэвенпорт, Дж. В. С. Касселс). Нельзя не отметить такую интересную составляющую данной проблематики, как тесная взаимосвязь диофантовых приближений с геометрией чисел вообще, и алгебраическими решетками в частности (Дж. В. С. Касселс, А. Д. Брюно). Это дало новые возможности, как для применения уже известных результатов, так и для применения новых подходов в проблеме наилучших диофантовых приближений (А. Д. Брюно, Н. Г. Мощевитин).

В середине двадцатого века Г. Дэвенпортом была найдена фундаментальная связь значение константы наилучших совместных диофантовых приближений и критического определителя звездного тела специального вида. Позднее Дж. В. С. Касселс перешел от непосредственного вычисления критического определителя к оценке его значения с помощью вычисления наибольшего значения $V_{n,s}$ – объема параллелепипеда с центром в начале координат обладающего определенными свойствами. Этот подход позволил получить оценки константы наилучших совместных диофантовых приближений для $n = 2, 3, 4$ (см. работы Дж. В. С. Касселса, Т. Кьюзика, С. Красса).

В данной работе, основываясь на описанном выше подходе, получены оценки $n = 5$ и $n = 6$. Идея построения оценок отличается от работы Т. Кьюзика. С помощью численных экспериментов были получены вначале примерные, а затем и точные значения оценок $V_{n,s}$. Доказательство этих оценок достаточно громоздко и представляет в первую очередь техническую сложность. Другим отличием постоенных оценок является возможность обобщзить их на любую размерность.

В рамках доказательства оценок константы наилучших диофантовых приближений нами был решен ряд многомерных оптимизационных задач. При их решении мы достаточно активно использовали математический пакет `Wolfram Mathematica`. Эти результаты являются промежуточным шагом для аналиттических доказательств оценок $V_{n,s}$ и константы наилучших диофантовых приближений C_n для $n \geq 3$

В процессе численных экспериментов была также получена интересная информация о структуре значений $V_{n,s}$. Эти результаты достаточно хорошо согласуется с результатами полученными в работах С. Красса. Вопрос о структуре значений $V_{n,s}$ для больших размерностей мало исследован и может представлять значительный интерес как с точки геометрии чисел, так и с точки теории диофантовых приближений.

Ключевые слова: наилучшие совместные диофантовы приближения, геометрия чисел, звездные тела, критические определители.

Библиография: 56 названий.

Для цитирования:
Ю. А. Басалов. Оценки константы наилучших диофантовых приближений // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 3, с. 404–428.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 3.

UDC 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-3-404-428

Estimations of the constant of the best simultaneous Diophanite approximations

Yu. A. Basalov

Basalov Yurij Aleksandrovich — Postgraduate Student, Department of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Pedagogical University of Leo Tolstoy (Tula).
e-mail: basalov_yurij@mail.ru

Abstract

This paper is devoted to the development of a new approach for estimating from below the constant of the best Diophantine approximations. The history of this problem dates back to P. G. Dirichlet. Over time, the approaches used to solve this problem have undergone major changes. From algebra (P. G. Dirichlet, A. Hurwitz, F. Furtwengler) this problem has moved into the field geometry of numbers (H. Davenport, J. W. S. Cassels). One cannot fail to note such an interesting component of this problem as the close relationship of diophantine approximations with geometry of numbers in general, and algebraic lattices in particular (J. W. S. Cassels, A. D. Bruno). This provided new opportunities, both for applying the already known results and for application of new approaches to the problem of the best Diophantine approximations (A. D. Bruno, N. G. Moshchevitin).

In the mid-twentieth century, H. Davenport found a fundamental relationship between the value of the constant of the best joint Diophantine approximations and critical determinant of a stellar body of a special kind. Later, J. W. S. Cassels went from directly calculating the critical determinant to estimating its value by calculating the largest value of $V_{n,s}$ – the volume of the parallelepiped centered at the origin with certain properties. This approach allowed us to obtain estimates of the constant of the best joint Diophantine approximations for $n = 2, 3, 4$ (see the works of J. W. S. Kassels, T. Cusick, S. Krass).

In this paper, based on the approach described above, the estimates $n = 5$ and $n = 6$ are obtained. The idea of constructing estimates differs from the work of T. Cusick. Using numerical experiments, approximate and then exact values of the estimates $V_{n,s}$ were obtained. The proof of these estimates is rather cumbersome and is primarily of technical complexity. Another difference between constant estimates is the ability to generalize them to any dimension.

As part of the proof of estimates of the constant of the best Diophantine approximations, we have solved a number of multidimensional optimization problems. In solving them, we used the mathematical package `Wolfram Mathematica` quite actively. These results are an intermediate step for analytical proofs of the estimates of $V_{n,s}$ and the constant of the best Diophantine approximations C_n for $n \geq 3$.

In the process of numerical experiments, interesting information was also obtained on the structure of the values of $V_{n,s}$. These results are in good agreement with the results obtained in the works of S. Krass. The question of the structure of the values of $V_{n,s}$ for large dimensions has been little studied and can be of considerable interest both from the point of geometry of numbers and from the point of theory of diophantine approximations.

Keywords: best joint Diophantine approximations, geometry of numbers, star bodies, critical determinants.

Bibliography: 56 titles.

For citation:
Yu. A. Basalov, 2019, "Estimations of the constant of the best simultaneous Diophanite approximations" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 404–428.

1. Введение

1.1. Актуальность исследования

Данная работа посвящена вопросам оценки снизу константы наилучших диофантовых приближений для n действительных чисел. Сейчас в нашей стране исследованиями в области диофантовых приближений занимаются небольшое количество ученых. Судя по значительному количеству современных публикаций в этой области [28, 31, 32, 38, 39, 40, 42] можно предположить, что теория диофантовых приближений относится к числу актуальных направлений исследования, но в нашей стране его дальнейшая судьба не определена в силу малочисленности групп исследователей, занимающихся его развитием.

Задача приближения n действительных чисел является частным случаем задачи приближения n действительных линейных форм

$$\begin{pmatrix}\vec{\alpha_1}\\ \vec{\alpha_2}\\ \cdot\ \cdot\\ \vec{\alpha_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm}\end{pmatrix}$$

и тесно связана с приближением одной линейной формы с помощью принципа переноса Хинчина [45]. При этом она имеет свою богатую историю, восходящую к П. Г. Дирихле [9].

Сформулируем задачу наилучших совместных диофантовых приближений n действительных чисел. Пусть

$$\vec{\alpha}=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_n)$$

— произвольный вектор действительных чисел. Нас будут интересовать приближения $\vec{\alpha}$ рациональными дробями

$$\frac{\vec{p}}{q}=\left(\frac{p_1}{q},\ \frac{p_2}{q},\ \dots,\ \frac{p_n}{q}\right).$$

По теореме Дирихле (1, [45]), существует бесконечно много рациональных векторов $\vec{p}/q$ таких, что

$$\left|\alpha_i-\frac{p_i}{q}\right|<q^{-\frac{n+1}{n}},\qquad i=\overline{1,\dots,n}.$$

В качестве меры качества приближения мы будем использовать

Определение 1. *Мерой качества совместных приближений Дирихле первого рода вектора $\vec{\alpha}$ рациональным вектором $\vec{p}/q$ называется величина*

$$D(\vec{\alpha},\vec{p}/q)=\max_{i=\overline{1,n}} q\,|q\alpha_i-p_i|^n\,. \tag{1}$$

Тогда из теоремы Дирихле (1) следует, что существуют числа C такие, что неравенство

$$\max_{i=\overline{1,n}} q\,|q\alpha_i-p_i|^n<C \tag{2}$$

имеет бесконечное количество решений в целых числах $q>0, p_1,\dots,p_n$.

Определение 2. *Константой наилучших диофантовых приближений $C(\vec{x})$ для вектора $\vec{x}$ называется точная нижняя грань величины C, для которой существует бесконечное число рациональных векторов $\vec{p}/q$, удовлетворяющих неравенству*

$$D(\vec{x}, \vec{p}/q) < C. \tag{3}$$

То есть, для любой положительной константы $C < C(\vec{x})$ неравенство

$$D(\vec{x}, \vec{p}/q) < C$$

имеет конечное число решений с рациональным вектором $\vec{p}/q$, для $C > C(\vec{x})$ — бесконечное число решений, а для $C(\vec{x})$ вопрос о количестве решений остается открытым.

Из теоремы Дирихле непосредственно следует, что для любого вектора $\vec{x}$ константа наилучших диофантовых приближений $C(\vec{x}) \leqslant 1$.

Определение 3. *Константой наилучших диофантовых приближений C_n называется точная верхняя грань числа $C(\vec{x})$ по всем векторам $\vec{x}$ размерности n:*

$$C_n = \sup_{\vec{x} \in \mathbb{R}^s} C(\vec{x}).$$

То есть, C_n — это наименьшее положительное число, при котором неравенство (2) имеет бесконечное количество решений для всех $C = C_n + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) и любых $\vec{x}$. Нас в дальнейшем будет интересовать вопрос вычисления или оценки значения C_n.

Особый интерес этот вопрос вызывает в связи с тем, что вектора $\vec{x}$ для которых $C(\vec{x}) = C_n$ по сути являются плохоприближаемыми, так как на них величина (1) достигает наибольшего значения. Сразу встает вопрос о структуре этих векторов, о их свойствах, о причинах того, почему они являются плохоприближаемыми. Так же интерес вызывают их экстремальные свойства – например, для $n = 1$, это числа из квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, в частности всем известное золотое сечение.

Выделяют еще один частный случай наилучших диофантовых приближений $C(\vec{x})$ – наилучшие приближения алгебраических векторов $\vec{x}$.

Определение 4. *Константой наилучших диофантовых приближений C_n^* алгебраических чисел называют точную верхнюю грань числа $C(\vec{x})$ по всем векторам $\vec{x}$, таким что вместе с 1 они образуют базис чисто вещественного поля алгебраических чисел степени $n+1$.*

Для C_n^* было получено значительное количество оценок [1, 2, 7, 37]. Для нас этот случай имеет особый интерес в силу двух факторов.

Во-первых, методы оценки для алгебраических чисел значительно отличаются своим разнообразием от оценок для произвольных действительных чисел.

Во-вторых, существуют мнения, что $C_n = C_n^*$ [7]. Одним из результатов, который может косвенно подкрепить эту гипотезу является оценка, полученная Дж. Шекерсом (Szekers) [36]

$$C_n^* \leq C_n.$$

Отметим, что неравенство имеет место тогда, когда плохо приближаемый вектор $\vec{x}$ не является алгебраическим. Следующим фактом, которым можно подкрепить эту гипотезу, является случай $n = 1$, где $C_1^* = C_1$. Для $n = 2$ известно, что $C_2^* = 2/7$, а $C_2 \geq 2/7$. Возможно, в будущем эта гипотеза будет либо подтверждена, либо опровергнута.

1.2. Степень разработанности

Исторически, в основе оценок для $n = 1$ лежит теория цепных дробей, и наиболее значимой является оценка А. Гурвица [16], полученная им в 1891 году. Для $n = 2$ в основе известных оценок лежит математический аппарат линейной алгебры (Ф. Фуртвенглер [13, 14]), геометрия чисел (Г. Дэвенпорт, Дж. В. С. Касселс [5, 6, 8]) и результаты многомерных обобщений цепных дробей (В. Адамс, Т. Кьюзик [1, 7]).

Одной из первых общих оценок снизу является результат, полученный в 1929 году Ф. Фуртвенглером [13, 14]. Он построил оценки дискриминантов алгебраических полей, которые приводят к оценке качества приближения n действительных чисел рациональными, что в свою очередь приводит к оценке константы наилучших совместных диофантовых приближений.

Одна из наиболее фундаментальных на данный момент оценок принадлежит Г. Дэвенпорту [8]. Позднее она была доработана Дж. В. С. Касселсом [5]. Г. Дэвенпорт обнаружил связь между значением критического определителя (см. определение 7) звездного тела и оценкой некоторых форм. В частном случае это позволяет вычислив критический определитель $(n+1)$-мерного звездного тела Дэвенпорта

$$\mathbb{F}_n : |x_0| \max_{1 \le i \le n} |x_i|^n < 1,$$

получить значение константы наилучших совместных диофантовых приближений. Однако, вычисление критических определителей для тел такого вида является сложной задачей. Поэтому Дж. В. С. Касселс перешел от непосредственного вычисления критического определителя, к оценке его значения. Этот подход оказался достаточно плодотворным, позволив получить оценки константы наилучших совместных диофантовых приближений для $n = 2, 3, 4$. Оценки такого рода являются достаточно сложной вычислительной задачей, и в каждом отдельном случае решение такой задачи требовало использования новых подходов.

Отметим некоторые известные оценки константы наилучших диофантовых приближений сверху. Первая оценка сверху была получена Г. Минковским [25] в 1896 году с использованием геометрии чисел. Г. Ф. Блихфельдт [4] введя понятие фундаментального параллелепипеда в 1914 году улучшил результат Г. Минковского. Позднее подход Г. Ф. Блихфельдта получил развитие в работах П. Мюллендера, В. Спона, В. Г. Новака [27, 35, 29, 30]. Значительный интерес представляет сравнение подходов при оценке константы наилучших совместных диофантовых приближений сверху и снизу.

1.3. Цели и задачи исследования

Целью данной работы является развитие подходов Г. Дэвенпорта, Дж. В. С. Касселса, Т. Кьюзика, С. Красса с целью получения оценки снизу константы наилучших диофантовых приближений для $n > 4$. Для этого будет использоваться оценка наибольшего значения $V_{n,s}$ – объема параллелепипеда с центром в начале координат, находящегося внутри $(n+1)$-мерного звездного тела Дэвенпорта

$$\mathbb{F}_n : |x_0| \max_{1 \le i \le n} |x_i|^n < 1,$$

.

1.4. Новизна исследования

Задача получения оценок значений критического определителя звездного тела Дэвенпорта сводится к задаче нахождения наибольшего объема параллелепипеда с центром в начале координат находящегося внутри $(n+1)$-мерного звездного тела Дэвенпорта. Эта задача в свою очередь сведена нами к задаче многомерной оптимизации.

1.5. Теоретическая и практическая значимость работы

Получены новые оценки константы наилучших диофантовых приближений, а так же значительная информация о структуре значений $V_{n,s}$. Была предложена новая методика оценки значений $V_{n,s}$: вначале, с помощью численных экспериментов высказывается гипотезу о виде точных значений оценок, затем эти оценки выводятся и доказываются аналитически. Эта методика может быть обобщена и применена к вопросу оценки некоторых критических определителей решеток.

1.6. Методы исследования

В середине двадцатого века Г. Дэвенпортом была найдена фундаментальная связь значение константы наилучших совместных диофантовых приближений и критического определителя звездного тела специального вида. Позднее Дж. В. С. Касселс перешел от непосредственного вычисления критического определителя к оценке его значения с помощью вычисления наибольшего значения $V_{n,s}$ – объема параллелепипеда с центром в начале координат, обладающего определенными свойствами. Этот подход позволил получить оценки константы наилучших совместных диофантовых приближений для $n = 2, 3, 4$ (см. работы Дж. В. С. Касселса [5], Т. Кьюзика [6], С. Красса [20, 21]).

Идея построения оценок отличается от работы Т. Кьюзика [6]. Численные эксперименты в системе компьютерной алгебры `Wolfram Mathematica` позволили высказать гипотезу о виде точных значений оценок $V_{n,s}$, затем эти оценки были выведены и доказаны аналитически. Другим отличием построенных оценок является возможность обобщения их на любую размерность.

1.7. Положения, выносимые на защиту

1. Для объема $V_{5,2}$ наибольшего параллелепипеда звездного тела Дэвенпорта размерности 5 справедлива оценка
$$V_{5,2} \geq \sqrt{\frac{27\left(9+5\sqrt{5}\right)}{88}},$$
для константы совместных диофантовых приближений C_5 размерности 5 справедлива оценка
$$C_5 \geq \frac{3}{46}\sqrt{\frac{3\left(9+5\sqrt{5}\right)}{1166}}.$$
2. Для объема V_6 размерности 6 справедлива оценка
$$V_{6,3} \geq \frac{9+5\sqrt{5}}{11},$$
для константы совместных диофантовых приближений C_6 размерности 6 справедлива оценка
$$C_6 \geq \frac{9+5\sqrt{5}}{11\sqrt{184\,607}}.$$

2. Основное содержание работы

2.1. История вопроса

Первые результаты по оценке константы наилучших диофантовых приближений были получены в XIX веке. В первую очередь, это общий результат полученный П. Г. Дирихле в 1842 году [9] для n линейных форм

Теорема 1. *Пусть $\alpha_{ij}(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$ и Q – произвольные действительные числа, причем $Q > 1$. Тогда найдутся целые числа $q_1,\ q_2, \ldots,\ q_m$ и $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n$ такие, что $1 \leq max\,(|q_1|,\ |q_2|, \ldots,\ |q_m|) < Q^{\frac{n}{m}}$ и*

$$\left|\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot q_j - p_i\right| \leq \frac{1}{Q}, \qquad (1 \leq i \leq n). \tag{4}$$

Доказательство. См. [45].□

откуда непосредственно следует, что $C_n \leq 1$. Доказательство этой теорем основано на принципе Дирихле [45].

В 1891 году А. Гурвиц [16], используя теорию цепных дробей и теорию квадратичных иррациональностей, доказал следующую теорему.

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения*

- *Для любого иррационального числа α существует бесконечное множество различных рациональных чисел p/q, удовлетворяющих неравенству*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\,q^2}.$$

- *Сформулированное выше утверждение становится неверным, если заменить $\sqrt{5}$ на любое число $A > \sqrt{5}$.*

Доказательство. См. [45].□

Это утверждение приводит к первому и единственному известному точному значению C_n. Это $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. При это равенство достигается, при приближении чисел из квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. В дальнейшем проводилось много исследований по вопросу обобщения цепных дробей на многомерный, в частности двухмерный, случай. Подобные обобщения рассматривали Л. Эйлер [10], К. Г. Я. Якоби [17], А. О. Перрон [34] В современное время также производятся исследования по исследованию алгоритмов обобщения цепных дробей [38, 39, 40]. Однако, никакие из полученных алгоритмов не позволили получить оценки для C_2.

В 1927 Ф. Фуртвенглер использую теорию алгебраических полей и произведя оценку дискриминанта произвольного алгебраического поля [13, 14] получил следующую оценку

Теорема 3. *Пусть k положительное число меньшее $1/\sqrt{|\Delta|}$, где Δ – это наименьший по модулю дискриминант алгебраического поля степени $n+1$. Тогда, для любых действительных чисел $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ неравенства*

$$q\,|q\alpha_i - p_i|^n < k, \qquad i = \overline{1,n}$$

имеют бесконечное количество решений в целых числах $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n,\ q$.

Доказательство. См. [13, 14].□

Из этого утверждения непосредственно следует, что $C_n \geq 1/\sqrt{|\Delta|}$.

Например, для $n = 2$ наилучшая оценка достигается при $\Delta = -23$ [46] (дискриминант кубического поля порождаемого уравнением $x^3 - x^2 - 1 = 0$) и соответствующая оценка равна $C_2 \geq 1/\sqrt{23}$. Для $n = 3$ наименьший по модулю дискриминант равен 117 [46] (дискриминант поля порождаемого уравнением $x^4 - x^3 - x^2 + x + 1 = 0$) и соответствующая оценка равна $C_3 \geq 1/\sqrt{117}$.

Напомним некоторые понятия из геометрии чисел.

Определение 5. *Функция $F(\overline{x})$, где $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ называется лучевой, если*

- $F(\overline{x})$ *неотрицательна, то есть* $F(\overline{x}) \geq 0$;
- $F(\overline{x})$ *непрерывна;*
- $F(\overline{x})$ *однородна, то есть для любого* $t \geq 0$, $F(t\overline{x}) = tF(\overline{x})$.

Определение 6. *Пусть $a_1, \ldots, a_n$ – линейно независимые точки вещественного евклидова пространства. Множество всех точек*

$$x = u_1 a_1 + \ldots + u_n a_n$$

с целыми коэффициентами $u_1, \ldots, u_n$ называется решеткой Λ. Величина

$$d(\Lambda) = |\det(a_1, \ldots, a_n)|$$

называется определителем решетки Λ.

Определение 7. *Пусть $\mathbb{F}$ – точечное тело. Если решетка Λ не имеет в $\mathbb{F}$ отличных от $\mathbb{O}$ точек ($\mathbb{O} \in \mathbb{F}$), то Λ допустима для $\mathbb{F}$ или $\mathbb{F}$-допустима. Точную нижнюю грань*

$$\Delta(\mathbb{F}) = \inf d(\Lambda)$$

определителей $d(\Lambda)$ всех $\mathbb{F}$-допустимых решеток Λ называют критическим определителем множества $\mathbb{F}$. Если $\mathbb{F}$-допустимых решеток нет, то $\mathbb{F}$ является множеством бесконечного типа и $\Delta(\mathbb{F}) = \infty$.

Определение 8. *Под звездным телом понимают множество, обладающее следующими свойствами*

- *существует точка, называемая "началом", которая является внутренней точкой множества;*
- *любой луч, выходящий из "начала", либо не пересекается с границей множества, либо имеет с ней только одну общую точку.*

Г. Дэвенпортом [8] был получен следующий фундаментальный результат. Пусть $\mathbb{F}_n$ это $(n+1)$-мерное звездное тело

$$\mathbb{F}_n : |x_0| \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^n < 1,$$

а $\Delta\mathbb{F}_n$ его критический определитель. Тогда

Теорема 4.

$$C_n \geq \frac{1}{\Delta\mathbb{F}_n}. \tag{5}$$

На практике, вычисление $\Delta\mathbb{F}_n$ оказалось проблематичной. Поэтому Дж. В. С. Касселс [5, 6] перешел от непосредственного вычисления к оценке значения $\Delta\mathbb{F}_n$

Теорема 5. *Пусть*

$$f_{n,s} = \frac{1}{2^s} \prod_{i=1}^{s} |x_i^2 + x_{s+i}^2| \prod_{i=2s+1}^{n} |x_i| \tag{6}$$

и $2^n V_{n,s}$ объем наибольшего параллелепипеда с центром в начале координат, содержащегося внутри фигуры

$$f_{n,s} \leq 1. \tag{7}$$

Пусть $\Delta_{n,s}$ наименьшее абсолютное значение дискриминанта действительного поля степени $n+1$, которое имеет s пар комплексно-сопряженных алгебраических чисел (то есть $2s \le n+1$). Тогда

$$D_n \le \sqrt{\Delta_{n,s}}/V_{n,s}, \tag{8}$$

или же

$$C_n \ge V_{n,s}/\sqrt{\Delta_{n,s}}. \tag{9}$$

Доказательство. [6].□

Значения $\Delta_{n,s}$ известны для обширного количества n (см. [46]). Таким образом, задача оценки константы наилучших диофантовых приближений снизу сводится к оценке снизу $V_{n,s}$. Ранее были получены следующие оценки

$$V_{2,0} = 2, V_{2,1} = 1 \qquad \text{(Дж. В. С. Касселс)}$$

$$V_{3,1} = 2,\ V_{3,0} = \frac{3^{3/2}}{2} \qquad \text{(Т. Кьюзик)}$$

$$V_{4,2} \ge \frac{16}{9},\ V_{4,1} \ge 2,\ V_{4,0} \ge 4 \qquad \text{(С. Красс)}$$

$$V_{5,2} \ge 2.3932\ldots \qquad \text{(С. Красс)}$$

Из этих значений можно получить следующие оценки константы наилучших совместных диофантовых приближений

$$C_2 \ge \frac{2}{7}, \qquad C_3 \ge \frac{2}{\sqrt{275}}, \qquad C_4 \ge \frac{16}{9\sqrt{1609}}. \tag{10}$$

Заметим, что две последние оценки получаются из теоремы 5 при подстановке $s = [n/2]$. Поэтому мы в дальнейшем сосредоточимся на оценке $V_{n,[n/2]}$, в частности, оценке $V_{5,2}$ и $V_{6,3}$.

2.2. Предварительные оценки наибольших параллелепипедов

Рассмотрим матрицу n-ого порядка

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{11}$$

Пусть $\mathbb{E}$ n-мерный единичный куб, состоящий из точек

$$\vec{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n), \qquad 0 \le e_i \le 1, \qquad i = \overline{1, n}.$$

Матрица A преобразует его в n-мерный параллелепипед

$$\mathbb{A} : \vec{a} = A \cdot \vec{e} \tag{12}$$

Заметим, что таким образом каждому n-мерному параллелепипеду соответствует матрица A. Объем этого параллелепипеда равен $2^n \det A$.

Пусть $\mathbb{F}_{n,s}$ – это n-мерное звездное тело

$$\mathbb{F}_{n,s} : f_{n,s} \le 1,$$

где $f_{n,s}$ это (6).

Нас интересует, находится ли некоторый параллелепипед $\mathbb{A}$ внутри звездного тела $\mathbb{F}_{n,s}$. Можно предложить следующий метод проверки этого утверждения. Составим оптимизационную задачу

$$\begin{gathered} f_{n,s} \to \max, \\ |b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n| \leq 1, \\ |b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n| \leq 1, \\ \cdots \\ |b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n| \leq 1. \end{gathered} \tag{13}$$

Если решение задачи ≤ 1, то параллелепипед $\mathbb{A}$ лежит полностью внутри звездного тела $\mathbb{F}_{n,s}$, в противном случае, часть его находится вне звездного тела.

Таким образом, если параллелепипед $\mathbb{A}$ лежит внутри звездного тела $\mathbb{F}_{n,s}$, имеет место оценка

$$V_{n,s} \geq \det A. \tag{14}$$

Нашей целью является построение матрицы A такого вида, чтобы задача (13) имела решение $\max f_{n,s} \leq 1$. Параллелепипеды $\mathbb{A}$ для которых $\det A$ "велико" будем называть *наибольшими*. Соответствующую наибольшему параллелепипеду матрицу мы также будем называть *наибольшей*.

На первом этапе исследования было решено провести вычислительные эксперименты по численному нахождению наибольших значений $V_{n,s}$. В процессе экспериментов производился направленный перебор матриц A с целью найти матрицу с наибольшим $\det A$, удовлетворяющую условию (13).

В результате экспериментов проводимых для размерностей 3 и 4 выяснилось, что существует множество наибольших матриц (а соответственного и параллелепипедов) с одинаковыми $\det A$. Поэтому было произведено исследование с целью получить наибольшую матрицу A с наиболее простой структурой. Оказалось, что можно найти наибольшую матрицу A следующего вида

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{9} \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{9} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k & a_k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_k & a_k \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Стоит отметить следующие моменты.

Во-первых, исходя из вида матрицы A, можно описать структуру параллелепипеда $V_{n,s}$ – все его грани прямоугольники (причем часть из них – квадраты), ребра либо параллельны осям координат, либо образуют с ними угол 45°.

Во-вторых, уже для $n = 7$ наибольшая матрица A_7^* может быть получена как комбинация наибольших матриц A_3^* и A_4^* (точные их значения см. ниже)

$$A_3^* = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ 0 & -\alpha_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

$$A_4^* = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\alpha_2 & \sqrt{2}\alpha_2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\alpha_2 & \sqrt{2}\alpha_2 \end{pmatrix}.$$

$$A_7^* = \begin{pmatrix} \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\alpha_3 & \sqrt{2}\alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}\alpha_3 & \sqrt{2}\alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_3 & \alpha_3 \\ \underbrace{\qquad}_{A_3^*} & & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{A_4^*} & & & \underbrace{\qquad\quad}_{A_3^*} & \end{pmatrix}.$$

Вообще, для $n > 6$ матрицу A_n^* можно получить из A_{n-4}^* и A_4^*. Этот факт схож с результатом, полученным С. Крассом [20]

$$V_{n,s}V_{n',s'} \leq V_{n+n',s+s'}, \tag{16}$$

только вместо знака неравенства стоит равенство.

Перейдем к нахождению точных значений $V_{n,s}$. Для это поступим следующим образом. Определим точки, в которых наибольший параллелепипед $\mathbb{A}_n$ касается звездного тела $\mathbb{F}_{n,[n/2]}$, выпишем в этих точках граничные условия и на их основании получим параметры параллелепипеда.

Например, для $n = 3$ рассмотрим матрицу

$$A_3^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & b \\ 0 & -b & b \end{pmatrix}.$$

Построим обратную задачу. Выберем набор точек в которых $f_{3,1}$ должна быть ≤ 1 (Если выбрать в качестве него все точки $\mathbb{A}_3^*$ (набор δ_{max}), то матрица гарантировано будет удовлетворять задаче (13)) При фиксированном наборе δ_0 точек будет максимизировать значение $\det A_3^*$. Если $\det A_3^*$ совпадет с $\det A_3$ наибольшей матрицы для $n = 3$, это будет означать, что можно перейти при проверке задачи (13) от набора δ_{max} к набору δ_0. Сужая набор δ_0 до минимума мы получим граничные точки в которых $f_{3,1} = 1$.

Проводя численные эксперименты, начав с точек со значениями координат $-1, 0, 1$ (на единичном кубе, единичный куб с помощью преобразования (12) приводится к $\mathbb{A}_3^*$), мы пришли к набору, состоящему из единственной точки $(1, 1, 0)$. Эта точка, применяя преобразование (12), превращается в точку (a, b, b), что приводит нас к задаче

$$2ab^2 \to \max,$$
$$\frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right) b = 1.$$

Решив эту задачу мы получим точное значение

$$A_3^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det A_3^* = 2ab^2 = 2. \tag{17}$$

Полученная матрица дает оценку $V_{3,1} \geq 2$, что совпадает результатом Т. Кьюзика [6].
Для $n = 4$ возьмем матрицу

$$A_4^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & -b & b \end{pmatrix}.$$

В этом случае достаточно взять две точки $(1,1,1,0)$ и $(1,1,1,1)$. Это приводит нас к задаче

$$\begin{gathered} 2a^2b^2 \to \max, \\ \frac{1}{4}\left(a^2+b^2\right)^2 = 1, \\ \frac{1}{4}a^2\left(a^2+4b^2\right) = 1. \end{gathered}$$

Решив эту задачу получим

$$A_4^* = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{4}{3}} & \sqrt{\frac{4}{3}} \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{4}{3}} & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{pmatrix},$$

$$\det A_4^* = 2a^2b^2 = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{9} \approx 1.77777... \tag{18}$$

Для $n = 5$ возьмем матрицу

$$A_5^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & b & 0 & 0 \\ 0 & -c & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & 0 & -b & b \end{pmatrix}.$$

В этом случае получаются более сложные граничные точки:

$$\left(1,1,\sqrt{5}-2,-1,1\right), \quad \left(1,1,-1,\frac{1}{3},1\right), \quad (1,1,1,-1,1).$$

Соответствующая задача имеет вид

$$\begin{gathered} 4ab^2c^2 \to \max, \\ 2a^2b^2c = 1, \\ \frac{8}{27}(a^2+4b^2)c^3 = 1, \\ \left(3-\sqrt{5}\right)b^2\left(a^2+\left(3-\sqrt{5}\right)^2 b^2\right)c = 1. \end{gathered}$$

Ее решение

$$a = \sqrt{7-3\sqrt{5}} \cdot \sqrt[10]{\frac{134+30\sqrt{5}}{27}}, \qquad b = a \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{8(4\sqrt{5}-9)}}, \qquad c = \frac{1}{2a^2b^2},$$

что дает оценку

$$V_{5,2} \geq \det A_5^* = \sqrt{\frac{27\left(9+5\sqrt{5}\right)}{88}} \approx 2.48831... \tag{19}$$

Для $n = 6$ матрица имеет вид

$$A_6^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & b \end{pmatrix}.$$

В этом случае достаточно двух граничных точек: $(1,1,1,1,1,1)$ и $\left(1,1,\sqrt{5}-2,1,1,1\right)$. Соответствующая задача имеет вид

$$\begin{gathered} 4a^2b^4 \to \max, \\ \frac{1}{2}a^2b^2\left(a^2+4b^2\right) = 1, \\ \frac{1}{4}\left(3-\sqrt{5}\right)b^2\left(a^2+4b^2\right)\left(a^2+\left(3-\sqrt{5}\right)^2 b^2\right) = 1. \end{gathered}$$

Ее решение

$$a = \sqrt[6]{\frac{8\left(30\sqrt{5}-67\right)}{11}}, \qquad b = \sqrt[6]{\frac{56+25\sqrt{5}}{88}}.$$

что дает оценку

$$V_{6,3} \geq \det A_6^* = \frac{9+5\sqrt{5}}{11} \approx 1.83458... \tag{20}$$

2.3. Оценки некоторых функций

Введем следующие функции

$$F_0 = \left(\frac{1}{2}+x^2\right)\left(\frac{1}{2}+y^2\right),$$

$$F_1 = (1+x^2)|y|,$$

$$F_2 = (t_1+y^2)(t_2x^2+z^2)|w|, \quad \text{где } t_1 = 10\sqrt{5}-22, \text{ и } t_2 = \frac{26+10\sqrt{5}}{27}$$

$$F_3 = (t+x^2)(t+z^2)(y^2+w^2), \quad \text{где } t = 10\sqrt{5}-22.$$

Для доказательств полученных выше значений $\det A_n^*$ нам потребуются некоторые оценки значений этих функций. Они приведены в виде теорем ниже.

Теорема 6. *[51]*

$$\max F_0(x,y) = \left(\frac{1}{2}+x^2\right)\left(\frac{1}{2}+y^2\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2,$$

при условии

$$-2 \leq x+y \leq 2, \quad -2 \leq x-y \leq 2.$$

Теорема 7. *[51]*

$$\max F_1(x,y) = (1+x^2)|y| = 2,$$

при условии

$$-2 \le x+y \le 2, \quad -2 \le x-y \le 2.$$

Теорема 8. *[51]*

$$\max F_2(x,y,z,w) = (t_1+y^2)(t_2x^2+z^2)|w| = \frac{64\left(5\sqrt{5}-9\right)}{27},$$

где $t_1 = 10\sqrt{5}-22$ *и* $t_2 = \frac{26+10\sqrt{5}}{27}$, *при условии*

$$-2 \le x+y \le 2, \quad -2 \le x-y \le 2.$$

$$-2 \le z+w \le 2, \quad -2 \le z-w \le 2.$$

Теорема 9. *[51]*

$$\max F_3(x,y,z,w) = (t+x^2)(t+z^2)(y^2+w^2) = 64(56-25\sqrt{5}),$$

где $t = 10\sqrt{5}-22$, *при условии*

$$-2 \le x+y \le 2, \quad -2 \le x-y \le 2.$$

$$-2 \le z+w \le 2, \quad -2 \le z-w \le 2.$$

2.4. Доказательство оценок объема критического параллелепипеда и константы наилучших диофантовых приближений

Будем рассматривать матрицы следующего вида

$$A_* = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{9} \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{9} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k & a_k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_k & a_k \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A_*^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{9} \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2a_1} & \frac{1}{2a_1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2a_1} & \frac{1}{2a_1} & \cdots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{9} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2a_k} & \frac{1}{2a_k} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{2a_k} & \frac{1}{2a_k} \end{pmatrix}.$$

Задача (13) принимает вид

$$
\begin{gathered}
f_{n,[n/2]} = \tfrac{1}{2^{[n/2]}} \prod_{i=1}^{[n/2]} |x_i^2 + x_{[n/2]+i}^2| \prod_{i=2[n/2]}^{n} |x_i| \to \max, \\
\left|\frac{x_1}{a}\right| \le 1, \quad \cdots \quad \left|\frac{x_{n-2k}}{a}\right| \le 1, \\
\left|\frac{x_{n-2k+1}}{2a_1} + \frac{x_{n-2k+2}}{2a_1}\right| \le 1, \quad \left|\frac{x_{n-2k+1}}{2a_1} - \frac{x_{n-2k+2}}{2a_1}\right| \le 1, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\left|\frac{x_{n-1}}{2a_k} + \frac{x_n}{2a_k}\right| \le 1, \quad \left|\frac{x_{n-1}}{2a_k} - \frac{x_n}{2a_k}\right| \le 1.
\end{gathered}
$$

Сделав замену

$$
\begin{gathered}
x_i = a y_i, \qquad i = \overline{1, n-2k} \\
x_{n-2(k-i)-1} = a_i y_{n-2(k-i)-1}, \quad x_{n-2(k-i)} = a_i y_{n-2(k-i)}, \qquad i = \overline{1,k}
\end{gathered}
$$

задача примет вид

$$
\begin{gathered}
f_{n,[n/2]} = \tfrac{1}{2^{[n/2]}} \prod_{i=1}^{[n/2]} |x_i^2 + x_{[n/2]+i}^2| \prod_{i=2[n/2]}^{n} |x_i| \to \max, \\
|y_1| \le 1, \quad \cdots \quad |y_{n-2k}| \le 1, \\
|y_{n-2k+1} + y_{n-2k+2}| \le 2, \quad |y_{n-2k+1} - y_{n-2k+2}| \le 2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
|y_{n-1} + y_n| \le 2, \quad |y_{n-1} - y_n| \le 2.
\end{gathered}
$$

В этой задаче ограничения не зависят от исходной матрицы A. Это свойство мы будет в дальнейшем использовать.

Разберем подробно доказательство оценки для $V_{3,1}$. Доказательство оценок $V_{4,2}$, $V_{5,2}$, $V_{6,3}$ строится аналогичным образом.

Рассмотрим матрицу

$$
A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

После описанных выше преобразований задача (13) примет вид

$$
\begin{gathered}
f_{3,1} = \tfrac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)|x_3| = \tfrac{1}{2}\left(y_1^2 + y_2^2\right)|y_3| \to \max, \\
|y_1| \le 1, \qquad |y_2 + y_3| \le 2, \qquad |y_2 - y_3| \le 2.
\end{gathered}
$$

Докажем, что $\max f_{3,1} \le 1$.

Отметим, что наибольшее значение достигается, при $|y_1| = 1$. Действительно, пусть существует максимум такой, что $\max f_{3,1} = f_{3,1}(\delta, y_2, y_3)$, где $|\delta| < 1$. Тогда

$$
f_{3,1}(\delta, y_2, y_3) = \frac{1}{2}\left(\delta^2 + y_2^2\right)|y_3| \le \frac{1}{2}\left(1 + y_2^2\right)|y_3| = f_{3,1}(1, y_2, y_3).
$$

Противоречие, т.е. $|y_1| = 1$.

Таким образом, достаточно доказать, что $\max f_{3,1}^* \le 1$, при условии

$$
|y_2 + y_3| \le 2, \qquad |y_2 - y_3| \le 2, \tag{21}
$$

где
$$f^*_{3,1} = \frac{1}{2}\left(1 + y_2^2\right)|y_3|.$$

То есть
$$f^*_{3,1} = \frac{1}{2}\left(1 + y_2^2\right)|y_3| = \frac{1}{2}F_0(y_2, y_3),$$
где
$$F_0(a,b) = \left(1 + a^2\right)|b|.$$

В силу теоремы (6)
$$\max F_0(a,b) = 2$$
при ограничениях (21). Тогда $f^*_{3,1} \leq 1$, что и требовалось доказать.

Сформулированные ранее результаты (17), (18), (19), (20), приводят нас к следующей общей оценке.

Теорема 10. *Имеет место оценка*
$$V_{n,[n/2]} \geq T_n \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{2[(n-3)/4]}, \qquad n > 2,$$
где
$$T_n = \max\begin{cases} 2, & \textit{если } n \equiv 3(mod\,4),\\ \dfrac{16}{9} \approx 1.77777..., & \textit{если } n \equiv 0(mod\,4),\\ \sqrt{\frac{27\left(9+5\sqrt{5}\right)}{88}} \approx 2.48831..., & \textit{если } n \equiv 1(mod\,4),\\ \dfrac{9+5\sqrt{5}}{11} \approx 1.83458..., & \textit{если } n \equiv 2(mod\,4). \end{cases}$$

В случае $n \equiv 0(\bmod 4)$ оценка совпадает с оценкой Красса (16).

В случае $n \equiv 3(\bmod 4)$ оценка Красса имеет вид
$$V_{4k-1,2k-1} > (16/9)^{[(4k-1)/4]} = (16/9)^{k-1}.$$

То есть, полученная нами оценка вдвое улучшает оценку Красса.

В случае $n \equiv 1(\bmod 4)$ оценка Красса имеет вид
$$V_{4k+1,2k} > (16/9)^{[(4k+1)/4]} = (16/9)^{k}.$$

Полученная оценка несколько улучшает оценку Красса, так как
$$\sqrt{\frac{27\left(9+5\sqrt{5}\right)}{88}} \approx 2.48831... > 1.77777... \approx \frac{16}{9}.$$

В случае $n \equiv 2(\bmod 4)$ оценка Красса имеет вид
$$V_{4k+2,2k+2} > (16/9)^{[(4k+2)/4]} = (16/9)^{k}.$$

Полученная оценка несколько улучшает оценку Красса, так как
$$\frac{9+5\sqrt{5}}{11} \approx 1.83458... > 1.77777... \approx \frac{16}{9}.$$

Помимо $V_{n,s}$ в оценку (9) входит значение $\Delta_{n,s}$. Известно достаточно много значений $\Delta_{n,s}$ [46], однако вычисление этой величины достаточно трудоемко. Сейчас большую работу в этом направлении проводят Ю. Клюнерс и Г. Малле [18, 46]. Они построили большую базу данных алгебраических полей степени вплоть до 19. Приведем некоторые значения $\Delta_{n,[n/2]}$, которые будут нас интересовать для оценок C_n.

Степень поля $(n+1)$	$\Delta_{n,[n/2]}$
4	-275
5	$1\,609$
6	$28\,037$
7	$-184\,607$
8	$-4\,286\,875$
9	$29\,510\,281$
10	$-209\,352\,647$
11	$-5\,939\,843\,699$

Объединяя приведенные ранее результаты получаем следующие оценки константы наилучших диофантовых приближений

$$
\begin{aligned}
C_3 &\geq \frac{2}{5\sqrt{11}} &&\approx 0.120605\ldots\\
C_4 &\geq \frac{16}{9\sqrt{1609}} &&\approx 0.044320\ldots\\
C_5 &\geq \frac{3}{46}\sqrt{\frac{3\left(9+5\sqrt{5}\right)}{1166}} &&\approx 0.014860\ldots\\
C_6 &\geq \frac{9+5\sqrt{5}}{11\sqrt{184\,607}} &&\approx 0.004269\ldots\\
C_7 &\geq \frac{32}{4\,275\sqrt{19}} &&\approx 0.001717\ldots\\
C_8 &\geq \frac{256}{81\sqrt{29\,510\,281}} &&\approx 0.000581\ldots\\
C_9 &\geq \frac{6}{9051}\sqrt{\frac{3\left(9+5\sqrt{5}\right)}{506}} &&\approx 0.000229\ldots\\
C_{10} &\geq \frac{16\left(9+5\sqrt{5}\right)}{99\sqrt{5\,939\,843\,699}} &&\approx 0.000042\ldots
\end{aligned}
$$

Эти значения улучшает оценки данные в [11].

3. Заключение

Данная работа посвящена разработке нового подхода для оценки снизу константы наилучших диофантовых приближений.

В первой части работы был дан исторический обзор по проблеме оценки константы наилучших диофантовых приближений. С течением времени подходы, применяемые для решения этой задачи претерпели серьезные изменения. Из алгебры (П. Г. Дирихле [9], А. Гурвиц [16], Ф. Фуртвенглер [13, 14]) это задача перешла в область геометрии чисел (Г. Дэвенпорт [8], Дж. В. С. Касселс [5]).

Стоит отметить такую интересную составляющую данной проблематики, как тесная взаимосвязь диофантовых приближений с геометрией чисел вообще, и алгебраическими решетками в частности (Дж. В. С. Касселс [5], А. Д. Брюно [38, 39, 40]). Это уже дало новые возможности, как для применения уже известных результатов, так и для применения новых подходов в проблеме наилучших диофантовых приближений (А. Д. Брюно[38, 39, 40], Н. Г. Мощевитин [42]). По всей видимости, в будущем взаимосвязь между этими направлениями будет только усиливаться.

Во второй части работы мы развили подходы к оценке константы наилучших диофантовых приближений, заложенного Г. Дэвенпортом [8], Дж. В. С. Касселсом [5], Т. Кьюзиком (см. [6]). Эти подходы основаны на оценке наибольшего значения $V_{n,s}$ – объема параллелепипеда с центром в начале координат обладающего определенными свойствами (5). Применение новых идей в сочетании с эффективным использованием численных экспериментов, позволило улучшить существующие оценки константы наилучших диофантовых приближений для $n = 5$ и $n = 6$.

В третьей части нами был решен ряд многомерных оптимизационных задач. При их решении мы достаточно активно использовали математический пакет `Wolfram Mathematica`. Эти результаты являются промежуточным шагом для доказательства в четвертой части данной работы оценок $V_{n,s}$ и константы наилучших диофантовых приближений C_n для $n \geq 3$

Отметим, что для получения более сильных оценок, скорее всего, потребуются принципиально новые подходы. Косвенным признаком этого может быть полученная нами в разделе 2.2 информация о том, что A_n^* можно представить в виде композиции A_{n-4}^* и A_4^*. В качестве возможного подхода по усилению оценок C_n снизу можно предложить непосредственную оценку значения критического определителя звездного тела $\mathbb{F}_n$. Это нетривиальная задача, но необходимо отметить, что в случае оценки сверху были получены достаточно обширные результаты [23, 29, 30, 31, 32, 42].

Другим направление возможных исследований может стать применение предложенного в данной работе подхода для оценки критических определителей. Задача оценки критического определителя ограниченного тела достаточно схожа с задачей оценки $V_{n,s}$. Нам кажется, что сочетание численных и аналитических методов в описанном случае может дать определенные результаты в этом вопросе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adams W. W. Simultaneous Diophantine approximations and cubic irrationals // Pacific journal of mathematics. 1969. Vol. 30. No. 1. P. 1–14.

2. Adams W. W. The best two-dimensional diophanite approximation constant for cubic irrtionals // Pacific journal of mathematics. 1980. Vol. 91. No. 1. P. 29–30.

3. Bernstein L. A 3-Dimensional Periodic Jacobi-Perron Algorithm of Period Length 8 // Journal of Number Theory, 1972, Vol. 4, Issue 1. P. 48–69.

4. Blichfeldt H. A new principle in the geometry of numbers, with some applications // Trans. Amer. Math. Soc. 1914. Vol. 15. P. 227–235.

5. Cassels J. W. S. Simultaneous Diophantine approximation // J. London Math. Soc. 1955. Vol. 30. P. 119–121.

6. Cusick T. W. Estimates for Diophantine approximation constants // Journal of Number Theory. 1980. Vol. 12 (4). P. 543–556

7. Cusick J. W. The two dimensional diophanite approximation constant // Pacific journal of mathematics. 1983. Vol. 105 (1). P. 53–67.

8. Davenport. H. On a theorem of Furtwängler // J. London Math. Soc. 1955. Vol. 30. P. 186–195.

9. Dirichlet L. G. P. Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbruchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen // S. B. Preuss. Akad. Wiss. 1842, P. 93–95.

10. Euler L. De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda // Petersburger Akademie Notiz. Exhib. August 14, 1775 // Commentationes arithmeticae collectae. V. II. St. Petersburg. 1849. P. 99–104.

11. Finch S. R. Mathematical Constants. Cambridge University Press, 2003 (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Book 94).

12. Fujita H. The minimum discriminant of totally real algebraic fields of degree 9 with cubic subfields // Mathematics of Computation. 1993. Vol. 60, No. 202. P. 801–810.

13. Furtwängler H. Über die simulatene Approximation von Irrationalzahlen. I // Math. Ann. 1927. Vol. 96. P. 169–175.

14. Furtwängler H. Über die simulatene Approximation von Irrationalzahlen. II // Math. Ann. 1928. Vol. 99. P. 71–83.

15. Hunter J. The minimum discriminant of quintic fields // Proc. Glasgow Math. Assoc. 1957. Vol. 3. P. 57–67.

16. Hurwitz A. Über die angenaherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationaleBriiche // Math. Ann. 1891. Vol. 39. P. 279–284.

17. Jacobi C. G. J. Allgemeine Theorie der Kettenbruchanlichen Algorithmen, in welchenjede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird // J. Reine Angew. Math. 1868. Vol. 69. P. 29–64. // Gesammelte Werke, Bd. IV. Berlin: Reimer. 1891. P. 385–426.

18. Klüners J., Malle, G. A Database for Field Extensions of the Rationals. LMS Journal of Computation and Mathematics. 2001. Vol. 4. P. 182–196.

19. Koksma J., Meulenbeld B. Sur le theoreme de Minkowski, concernant un systeme de formes lineaires reelles. I, II, III, IV // Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Sect. Sci. 1942. Vol. 45. P. 256–262, 354–359, 471–478, 578–584.

20. Krass S. Estimates for n-dimensional Diophantine approximation constants for $n \geq 4$ // J. Number Theory. 1985. Vol. 20(2). P. 172-176.

21. Krass S. The N-dimensional diophantine approximation constants // Australian Mathematical Society. 1985. Vol 32(2). P. 313–316.

22. Lanker M., Petek P., Rugeji M. S. The continued fractions ladder of specific pairs of irrationals // arXiv.org. 2011. Дата обновления: 30.06.2011. URL: https://arxiv.org/abs/1108.0087 (дата обращения: 10.04.2019).

23. Mack J. M. Simultaneous Diophantine approximation // J. Austral. Math. Soc. A. 1977. Vol. 24. P. 266–285.

24. Mayer J. Die absolut-kleinsten Diskriminanten der biquadratischen Zahlkorper // S.-B. Akad. Wiss. Wien Abt. Ila. 1929. Vol. 138. P. 733–742.

25. Minkovski H. Geometrie der Zahlen. Berlin: Teubner, 1896.

26. Mordell L. Lattice points in some n-dimensional non-convex regions. I, II // Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Sect. Sci. 1946. Vol. 49. P. 773–781, 782–792.

27. Mullender P. Lattice points in non-convex regions. I // Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Sect. Sci. 1948. Vol. 51. P. 874–884.

28. Murru N. On the Hermite problem for cubic irrationaliti // arXiv.org. 2013. Дата обновления: 16.01.2014. URL: https://arxiv.org/abs/1305.3285v3 (дата обращения: 10.04.2019).

29. Nowak W. G. A note on simultaneous Diophantine approximation // Manuscr. Math. 1981. Vol. 36. P. 33–46.

30. Nowak W. G. A remark concerning the s-dimensional simultaneous Diophantine approximation constants // Graz. Math. Ber. 1993. Vol. 318. P. 105–110.

31. Nowak W. G. Lower bounds for simultaneous Diophantine approximation constants. // Comm. Math. 2014. Vol. 22, Is. 1, P. 71–76.

32. Nowak W. G. Simultaneous Diophantine approximation: Searching for analogues of Hurwitz's theorem // In: T.M. Rassias and P.M. Pardalos (eds.), Essays in mathematics and its applications. Springer/ Switzerland. 2016. P. 181–197.

33. Odlyzko A. M. Bounds for discriminants and related estimates for class numbers, regulators and zeros of zeta functions : a survey of recent results // Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux. 1990. Tome 2. No. 1. P. 119–141.

34. Perron O. Grundlagen fur eine Theorie des Jacobischen Ketten-bruchalgorithmus // Math. Ann. 1907. Vol. 64. P. 1-76.

35. Spohn W.G. Blichfeldt's theorem and simultaneous Diophantine approximation // Amer. J. Math. 1968. Vol. 90. pp. 885–894.

36. Szekers G. The n-dimensional approximation constant // Bull. Austral. Math. Soc. 1984. Vol. 29. P. 119–125.

37. Woods A. C. The asymetric product of three homogenous linear forms // Pacific J. Math. 1981. Vol. 93. P. 237–250.

38. Брюно А. Д. Алгоритм обобщенной цепной дроби // Препринт N45. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша. 2004.

39. Брюно А. Д. Структура наилучших диофантовых приближений // ДАН. 2005. Том 402. No. 4.

40. Брюно А. Д. Алгоритм обобщенной цепной дроби // ДАН. 2005. Том. 402. No. 6.

41. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел: Пер. с англ. – М.: Мир, 1965.

42. Мощевитин. Н. Г. К теореме Блихфельдта-Мюллендера-Спона о совместных приближениях // Тр. МИАН. 2002. Том 239. с. 268–274.

43. Прасолов В. В. Многочлены. – М.: МЦНМО, 2001.

44. Хинчин А.Я. Цепные дроби. – М.: Физматгиз, 1961.

45. Шмидт В. М. Диофантовы приближения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1983.

46. A Database for Number Fields // A Database for Number Fields.
URL: http://galoisdb.math.upb.de/ (дата обращения: 05.05.2018).

Работы автора по теме диссертации

47. Басалов Ю. А. Геометрическая интерпретация проблемы наилучших диофантовых приближений // V всероссийская научно-практическая конференция ППС, аспирантов, магистрантов, соискателей ТГПУ им. Л. Н. Толстого «Университет XXI века: исследования в рамках научных школ». 2015.

48. Басалов Ю. А. О наилучших приближениях кубических иррациональностей // Всероссийская научно-практическая конференция «Университет XXI века: научное измерение». 2016.

49. Реброва И. Ю., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Балаба И. Н., Есаян А. Р., Басалов Ю. А., Басалова А. Н., Лямин М. И., Родионов А. В. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе и его реализация в ПОИВС «ТМК» - II // Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2017.

50. Басалов Ю. А. Компьютерное моделирование и неполные частные кубических иррациональностей // IV международная конференция «Многомасштабное моделирование структур, строение вещества, наноматериалы и нанотехнологии». ТГПУ им. Л. Н. Толстого. 2017. С. 97–100.

51. Basalov Yu. A. On estimating the constant of simultaneous Diophantine approximation // arXiv.org. 2019. Дата обновления: 09.04.2019. URL: https://arxiv.org/abs/1804.05385 (дата обращения: 10.04.2019).

52. Басалов Ю. А. Об оценке константы наилучших диофантовых приближений для n > 4 // XV Международная конференция Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения, посвященной столетию со дня рождения профессора Коробова Николая Михайловича. 2018. С. 245–248.

53. Ю. А. Басалов. Об истории оценок константы наилучших совместных диофантовых приближений // Чебышевский сборник, Т. 19, Вып. 2, 2018, С. 388-405. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-2-394-411

54. Басалов Ю. А. О методах оценки снизу константы совместных диофантовых приближений // Материалы Международного молодежного научного форума "ЛОМОНОСОВ-2019"/ Отв. ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов. [Электронный ресурс]. М: МАКС Пресс, 2019. – 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM); 12 см. – Систем. требования: ПК с процессором 486+; Windows 95; дисковод DVD-ROM; Adobe Acrobat Reader. – 1600 Мб. 11000 экз.

55. Басалов Ю. А. О методах оценок критических определителей // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVI Междунар. Конф., посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2019. С. 227–228.

56. Басалов Ю. А. Оценка константы наилучших диофантовых приближений для n=5 и n=6 // Чебышевский сборник, Т. 20, Вып. 1, 2019, с. 66–81. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-1-66-81

REFERENCES

1. Adams W. W. 1969, “Simultaneous Diophantine approximations and cubic irrationals“, *Pacific journal of mathematics*, Vol. 30, No. 1, pp. 1–14.

2. Adams W. W. 1980, "The best two-dimensional diophanite approximation constant for cubic irrtionals", *Pacific journal of mathematics*, Vol. 91, No. 1, pp. 29-30.

3. Bernstein L. 1972, "A 3-Dimensional Periodic Jacobi-Perron Algorithm of Period Length 8", *Journal of Number Theory*, Vol. 4, Issue 1. pp. 48–69.

4. Blichfeldt H. 1914, "A new principle in the geometry of numbers, with some applications", *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 15. pp. 227–235.

5. Cassels J. W. S. 1955, "Simultaneous Diophantine approximation", *J. London Math. Soc.*, Vol. 30, pp. 119-121.

6. Cusick T. W. 1980, "Estimates for Diophantine approximation constants", *Journal of Number Theory*, Vol. 12 (4), pp. 543–556.

7. Cusick J. W. 1983, "The two dimensional diophanite approximation constant", *Pacific journal of mathematics*, Vol. 105, No. 1, pp. 53–67.

8. Davenport. H. 1955, "On a theorem of Furtwängler", *J. London Math. Soc.* , Vol. 30, pp. 186-195.

9. Dirichlet L. G. P. 1842, "Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbruchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen", *S. B. Preuss. Akad. Wiss.*, pp. 93–95.

10. Euler L. 1775, "De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda" *Petersburger Akademie Notiz. Exhib.*.

11. Finch S. R. 2003, *Mathematical Constants*, Cambridge University Press (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Book 94).

12. Fujita H. 1993, "The minimum discriminant of totally real algebraic fields of degree 9 with cubic subfields", *Mathematics of Computation*, Vol. 60, No. 202, pp. 801–810.

13. Furtwängler H. 1927, "Über die simulatene Approximation von Irrationalzahlen. I", *Math. Ann.*, Vol. 96, pp. 169-175.

14. Furtwängler H. 1928, "Über die simulatene Approximation von Irrationalzahlen. II", *Math. Ann.*, Vol. 99, pp. 71-83.

15. Hunter J. 1891, "The minimum discriminant of quintic fields", *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, Vol. 3, pp. 57-67.

16. Hurwitz A. 1891, "Über die angenaherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Briiche", *Math. Ann.*, Vol. 39, pp. 279-284.

17. Jacobi C. G. J. 1868, "Allgemeine Theorie der Kettenbruchanlichen Algorithmen, in welchenjede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird", *J. Reine Angew. Math.* Vol. 69, pp. 29–64.

18. Klüners J., Malle G. A. 2001, "Database for Field Extensions of the Rationals", *LMS Journal of Computation and Mathematics*, Vol. 4, pp. 182–196.

19. Koksma J., Meulenbeld B. 1942, "Sur le theoreme de Minkowski, concernant un systeme de formes lineaires reelles. I, II, III, IV", *Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Sect. Sci.*, Vol. 45, pp. 256–262, 354–359, 471–478, 578–584.

20. Krass S. 1985, “Estimates for n-dimensional Diophantine approximation constants for $n \geq 4$“, *J. Number Theory* , Vol. 20, Is. 2, pp. 172-176.

21. Krass S. 1985, “The N-dimensional diophantine approximation constants“, *Australian Mathematical Society* , Vol. 32, Is. 2, pp. 313-316.

22. Lanker M., Petek P., Rugeji M. S. 2011, “The continued fractions ladder of specific pairs of irrationals“, Available at: https://arxiv.org/abs/1108.0087

23. Mack J. M. 1977, “Simultaneous Diophantine approximation“, *J. Austral. Math. Soc. A.*, Vol. 24, pp. 266-285.

24. Mayer J. 1929, “Die absolut-kleinsten Diskriminanten der biquadratischen Zahlkorper“, *S.-B. Akad. Wiss. Wien Abt. Ila.*, Vol. 138, pp. 733–742.

25. Minkovski H. 1896, *Geometrie der Zahlen*. Teubner.

26. Mordell L. 1946, “Lattice points in some n-dimensional non-convex regions. I, II “, *Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Sect. Sci.*, Vol. 49, pp. 773–781, 782–792.

27. Mullender P. 1948, “Lattice points in non-convex regions. I“, *Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Sect. Sci.*, Vol. 51, pp. 874–884.

28. Murru N. 2013, “On the Hermite problem for cubic irrationaliti“, Available at: https://arxiv.org/abs/1305.3285v3

29. Nowak W. G. 1981, “A note on simultaneous Diophantine approximation“, *Manuscr. Math.*, Vol. 36, pp. 33-46.

30. Nowak W. G. 1993, “A remark concerning the s-dimensional simultaneous Diophantine approximation constants“, *Graz. Math. Ber.*, Vol. 318. pp. 105-110.

31. Nowak W. G. 2014, “Lower bounds for simultaneous Diophantine approximation constants“, *Comm. Math*, Vol. 22, Is. 1, pp. 71-76.

32. Nowak W. G. 2016, “Simultaneous Diophantine approximation: Searching for analogues of Hurwitz’s theorem“, *In: T.M. Rassias and P.M. Pardalos (eds.), Essays in mathematics and its applications*, Springer, Switzerland, pp. 181-197.

33. Odlyzko A. M. 1990, “Bounds for discriminants and related estimates for class numbers, regulators and zeros of zeta functions : a survey of recent results“, *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, Tome 2, No. 1, pp. 119–141.

34. Perron O. 1907, “Grundlagen fur eine Theorie des Jacobischen Ketten-bruchalgorithmus“, *Math. Ann.*, Vol. 64, pp. 1–76.

35. Spohn W. G. 1968, “Blichfeldt’s theorem and simultaneous Diophantine approximation“, *Amer. J. Math.*, Vol. 90, pp. 885–894.

36. Szekers G. 1984, “The n-dimensional approximation constant“, *Bull. Austral. Math. Soc.*, Vol. 29, pp. 119–125.

37. Woods A. C. 1981, “The asymetric product of three homogenous linear forms“, *Pacific J. Math.*, Vol. 93, pp. 237–250.

38. Bruno A. D. 2004, “Algorithm of the generalized continued fraction“, *Preprint IAM of Keldysh.*

39. Bruno A. D. 2005, “The structure of best Diophantine approximations“, *Proceedings FAS.*

40. Bruno A. D. 2005, “Algorithm of the generalized continued fractions“, *Proceedings FAS.*

41. Cassels J. W. S. 1965, *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Mir.

42. Moshchevitin N. G. 2002, “To the Blichfeldt-Mullender-Spohn theorem on simultaneous approximations“, *Proceedings of the Steklov Mathematical Institute*, Vol. 239, pp. 268–274.

43. Prasolov V. V. 2001, *Polynomials*, MCNMO.

44. Hinchin A. Ya. 1961, *Continued fractions*, Mir.

45. Schmidt W. M. 1983, *Diophantine Approximation*, Mir.

46. A Database for Number Fields. Available at: http://galoisdb.math.upb.de/

Works of the author on the topic of the thesis

47. Basalov Yu. A. 2015, “Geometric interpretation of the problem of the best Diophantine approximations“, *V All-Russian Scientific and Practical Conference of faculty, graduate students, undergraduates, applicants TSPU of Leo Tolstoy "University of the XXI century: research in the framework of scientific schools".*

48. Basalov Yu. A. 2016, “On the best approximations of cubic irrationality“, *All-Russian Scientific and Practical Conference "University of the XXI Century: Scientific Dimension".*

49. Rebrova I. Yu., Dobrovolsky N. M., Dobrovolsky N. N., Balaba I. N., Yesayan A. R., Basalov Yu. A., Basalova A. N., Lyamin M. I., Rodionov A. V. 2017, *The number-theoretic method in approximate analysis and its implementation in POIVS "TMK II*, Publishing house of TSPU of Leo Tolstoy, 2017.

50. Basalov Yu. A. 2017, “Computer modeling and partial quotients of cubic irrationality“, *IV international conference "Multiscale modeling of structures, structure of matter, nanomaterials and nanotechnology"*, pp. 97–100.

51. Basalov Yu. A. 2018, “On the estimation of the constant of the best Diophantine approximations for $n > 4$ “, *XV International Conference Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: Modern Problems and Applications dedicated to the centenary of the birth of Professor Korobov Nikolai Mikhailovich*, pp. 245–248.

52. Basalov Yu. A. 2018, “On the history of estimates of the constant of the best joint diophantine approximations“, *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 19, Issue 2, pp. 388–405. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-2-394-411

53. Basalov Yu. A. 2019, “On estimating the constant of simultaneous Diophantine approximation“, Avaliable at: https://arxiv.org/abs/1804.05385

54. Basalov Yu. A. 2019, “On methods for lower estimation of the constant of diophantine approximations“, *Materials of the International Youth Scientific Forum "LOMONOSOV-2019".*

55. Basalov Yu. A. 2019, “On methods for estimating critical determinants“, *Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history: Materials of the XVI Intern. Conf., Dedicated to the 80th birthday of Professor Michel Deza*, pp. 227–228.

56. Basalov Yu. A. 2019, ‘Estimation of the constant of the best simultaneous Diophanite approximations for n=5 and n=6“, *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 20, Issue 1, pp. 66–81. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-1-66-81

Получено 9.09.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 3.

УДК 539.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-429-435

Роль математики в развитии механики композиционных материалов[1]

И. К. Архипов, В. И. Абрамова, А. Е. Гвоздев, Д. В. Малий

Архипов Игорь Константинович — доктор технических наук, профессор, Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Тульский филиал (г. Тула).
e-mail: iarh@list.ru

Абрамова Влада Игоревна — кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: abramova_vi@mail.ru

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Малий Дмитрий Владимирович — старший преподаватель кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

Аннотация

В работе изложен краткий обзор по истории развития новых разделов математики и их влияние на теоретические исследования механики композиционных материалов. Показан вклад российских и советских математиков и механиков, позволивший создать функциональную основу для изучения механических свойств композитов — новых материалов, получивших широкое применение в технике и народном хозяйстве. Композитные материалы были созданы во второй половине XX века. Они представляют собой многокомпонентные структуры, составленные из различных однородных материалов. Наиболее распространенными являются двухкомпонентные структуры из матрицы и наполнителя. Технологически эти компоненты могут составлять детерминированные или случайные структуры. Изменяя структуру и свойства компонентов, можно получать материалы с заранее заданными макроскопическими свойствами (эффективные свойства), необходимыми для конкретного применения. Появление композитных материалов вызвало бурный рост исследований механических свойств, позволяющих проектировать эти материалы. Эти исследования велись как в теоретическом, так и в практическом плане. Теоретические исследования, сводились в основном, к построению математических моделей механического поведения композитов, как структурно-неоднородных материалов.

Ключевые слова: история развития, новые разделы математики, механика композиционных материалов.

Библиография: 18 названий.

[1]Работа выполнена в рамках реализации федеральной целевой программы «Исследование и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы» (уникальный идентификатор проекта RFMEF 157717X0271).

Для цитирования:
И. К. Архипов, В. И. Абрамова, А. Е. Гвоздев, Д. В. Малий. Роль математики в развитии механики композиционных материалов // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 429–435.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 3.

UDC 539.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-429-435

The role of mathematics in the development of composite materials mechanics[2]

I. K. Arkhipov, V. I. Abramova, A. E. Gvozdev, D. V. Maliy

Arkhipov Igor Konstantinovich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Plekhanov Russian University of Economics (Tula).
e-mail: iarh@list.ru
Abramova Vlada Igorevna — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: abramova_vi@mail.ru
Gvozdev Aleksander Evgenievich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief researcher of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Maliy Dmitry Vladimirovich — Senior Lecturer of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

Abstract

The paper presents a brief overview of the history of new branches of mathematics and their impact on theoretical studies of mechanics of composite materials. The contribution of Russian and Soviet mathematicians and mechanics is shown, which allowed to create a functional basis for the study of mechanical properties of composites — new materials that have been widely used in engineering and the national economy. Composite materials were created in the second half of the twentieth century. They are multicomponent structures composed of various homogeneous materials. The most common are two-component structures of matrix and filler. Technologically, these components can constitute deterministic or random structures. By changing the structure and properties of the components, it is possible to obtain materials with predetermined macroscopic properties (effective properties) necessary for a particular application. The emergence of composite materials has caused a rapid growth of research on mechanical properties, allowing the design of these materials. These studies were conducted in both theoretical and practical terms. Theoretical studies were mainly reduced to the construction of mathematical models of the mechanical behavior of composites as structurally inhomogeneous materials.

Keywords: history of development, new branches of mathematics, composite materials mechanics.

Bibliography: 18 titles.

[2]The work was carried out within the framework of the Federal Program "Research and development in priority areas of development of the scientific and technological complex of Russia for 2014–2020" (unique identifier of the project RFMEFI57717X0271).

For citation:
I. K. Arkhipov, V. I. Abramova, A. E. Gvozdev, D. V. Maliy, 2019, "The role of mathematics in the development of composite materials mechanics" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 429–435.

1. Введение

Композиционные материалы по своему строению разделяются на две большие группы: 1. Композиты с регулярной (детерминированной) структурой. 2. Композиты со случайной (случайно-неоднородной) структурой. Композиты с детерминированными структурами изучались с помощью традиционных методов механики деформированного твердого тела. Для этого выбирался так называемый представительный объём, характеризующий макроскопические свойства всего композита. Напряжённо-деформированное состояние (НДС) в этом объёме определялось путём решения соответствующей краевой задачи теории упругости или пластичности. Широкое применение нашли также численные методы, в частности, методы конечных элементов. НДС в макроскопическом объёме находилось путём соответствующего осреднения результатов расчёта в представительном объёме.

2. Развитие механики композиционных структурно-неоднородных стохастических материалов

Более сложной является проблема изучения напряжённо-деформированного состояния в композитах со случайными распределениями компонентов. Здесь методы механики деформированного твердого тела могут применяться лишь частично. Задача осложняется фактором случайности распределения компонентов. Математическая модель должна учитывать этот фактор, который приводит к случайности распределения механических свойств в микрообъемах композита, а также распределению полей напряжений и деформаций вокруг включений или волокон композита.

Для построения математических моделей потребовались фундаментальные результаты новых разделов математики. Такими разделами являются теория случайных процессов и полей, теория восстановления, теория надёжности, математическая статистика, некоторые разделы теории вероятности.

Значительные результаты в этих разделах получены русскими и советскими математиками А. А. Марковым, Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоровым, Е. С. Вентцель, Ю. В. Линником, А. П. Хусу, А. М. Ягломом и другими. Так А. А. Марков 1907 году дал понятие марковского случайного процесса, частным случаем которого было понятие марковской цепи. Обобщение марковских процессов на непрерывное время было сделано А. Н. Колмогоровым. Дифференциальные уравнения А. Н. Колмогорова были успешно применены в теории массового обслуживания. Дальнейшее развитие это направление получило в работах Б. В. Гнеденко. Значительный вклад в теорию вероятностей и математическую статистику был сделан Ю. В. Линником, который доказал предельные теоремы для независимых случайных величин и неоднородных цепей Маркова, а также опубликовал работы по теории метода наименьших квадратов. Наиболее полное изложение теории случайных процессов и полей с практическими приложениями было сделано в работах Е. С. Вентцель. Многие из этих приложений были использованы механиками при построении математических моделей структурно-неоднородных композитов со случайным распределением компонентов. Работы А. П. Хусу по теории функционалов, заданных на случайных процессах и полях, легли в основу построения моделей упругопластического деформирования композитов со случайными свойствами, в частности, на основании этой теории удалось найти концентрацию микропластических зон в композитах различной структуры.

Развитие механики композиционных структурно-неоднородных стохастических материалов с использованием работ русских и советских математиков велось в нескольких важнейших направлениях: 1. Статистические характеристики напряженного и деформированного состояния сред со случайными неоднородностями. 2. Эффективные характеристики упругости, вязко-упругости и пластичности со случайными свойствами компонентов. 3. Прочность и разрушение композиционных материалов.

В монографии В. А. Ломакина [1] применены статистические методы в механике деформируемых твердых тел, основанные на использовании методов теории случайных функций и полей. Большое внимание уделено имеющим принципиальное значение задачам о деформации тел со случайными неоднородностями. В частности рассмотрена плоская задача теории упругости стохастически неоднородных тел. Исследовано влияние структурной неоднородности на механические свойства композитов.

В монографии [2] и многочисленных статьях В. В. Болотина разработаны и исследованы стохастические модели разрушения композитов различной структуры. При этом использована, разработанная автором, статистическая теория накопления повреждений в композиционных материалах и масштабный эффект надежности. В. В. Болотиным и В. Н. Москаленко разработана также оригинальная модель расчета макроскопических постоянных сильно изотропных композиционных материалов [3].

В монографии Т. Д. Шермергора [4] рассмотрены вопросы вычисления эффективных модулей упругости, коэффициентов теплового расширения поликристаллов и композитов, произведен расчет упругих полей в микронеоднородных материалах при их деформировании, распространение упругих волн в таких средах, вязкоупругие свойства композитов. Основной упор сделан на теорию случайных функций и полей.

В статьях Л. П. Хорошуна [5], [6] на основании обобщений моделей теории вероятности разработан оригинальный метод условных моментов, позволяющий учитывать реальное структурное распределение компонентов и его влияние на напряженно-деформированного состояния в микронеоднородных средах и в волокнистых композитах.

В монографии Г. П. Черепанова [7], посвящённой механике разрушения композиционных материалов, рассмотрены механизмы и закономерности разрушения различных типов композитов. Разработана, основанная на методах теории функций комплексного переменного, теория инвариантных Г-интегралов, позволяющая создать асимптотическую теорию армирования упругих тел. Проведено оптимальное проектирование некоторых композиционных материалов на основе линейной механики разрушения.

В монографии В. П. Тамужа, В. С. Куксенко [8] рассмотрена микромеханика разрушения полимерных материалов, изложена методика диагностирования и математическое описание дисперсных повреждений, возникающих при нагружении полимерных и композиционных материалов, разработана статистическая модель разрушения и распространения трещин, построена теория разрушения при сложном напряженном состоянии и сложном нагружении. Рассмотрено усталостное нагружение с учетом накопления микродефектов в композитах.

Приведенный перечень работ советских ученых-механиков, использовавших результаты новых разделов математики в механике композитов, далеко не исчерпывает все достижения в этой области. Применение этих результатов в последующие годы привело к значительному технологическому прорыву в производстве и оптимальном проектировании композиционных материалов.

В последнее время в связи с развитием компьютерных технологий расширились возможности исследования структурных распределений компонентов в композитах. Для этого используются методы конечных элементов в сочетании с различными пакетами прикладных программ (в частности АНЗИС). При этом используется генератор случайных чисел совместно с методом Монте-Карло. Полученные реализации структур испытываются с целью определения напряженно-деформированного состояния в композите. Единственным недостатком этого метода является большой потребный объем памяти компьютера. Заметим, что основой этого метода, как и в других ранее изложенных методах, является теория случайных процессов и полей и математическая статистика.

Данный материал может быть использован для создания ресурсосберегающих технологий обработки конструкционных и инструментальных материалов, слитковых, порошковых и наноструктурных металлических систем [9–18].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломаким В. А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М.: Наука, 1970. 138 с.
2. Болотин В. В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М.: Стройиздат, 1971. 255 с.
3. Болотин В. В., Москаленко В. Н. К расчету макроскопических постоянных сильно изотропных композиционных материалов // Изв. АНСССР, МТТ. 1969. № 3. 108 с.
4. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
5. Хорошун Л. П. Уточненные модели деформирования композитов // Механика композитных материалов. 1984. № 5. С. 798–804.
6. Хорошун Л. П. Методы теории случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микронеоднородных сред // Прикладная механика. 1978. Т. 14. № 2. С. 3–17.
7. Черепанов Г. П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 295 с.
8. Тамуж В. П., Куксенко В. С. Микромеханика разрушения полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1978. 294 с.
9. Макаров Э. С., Гвоздев А. Е., Журавлев Г. М., Сергеев А. Н., Минаев И. В., Бреки А. Д., Малий Д. В. Применение теории пластичности дилатирующих сред к процессам уплотнения порошков металлических систем // Чебышевский сборник. 2017; 18(4):268–284. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2017-18-4-268-284
10. Макаров Э. С., Гвоздев А. Е., Журавлев Г. М., Сапожников С. В., Сергеев А. Н., Колмаков А. Г., Бреки А. Д., Малий Д. В., Добровольский Н. Н. Анализ уравнений теории пластичности порошковых металлических систем // Чебышевский сборник. 2018; 19(1):152–166. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-1-152-166
11. Журавлев Г. М., Гвоздев А. Е., Колмаков А. Г., Сергеев А. Н., Малий Д. В. Применение математического метода локальных вариаций для решения задач пластического формоизменения металлических, порошковыхи нанокомпозиционных материалов // Чебышевский сборник. 2018; 19(4):43–54. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-4-43-54
12. Gvozdev A. E., Bogolyubova D. N., Sergeev N. N., Kolmakov A. G., Provotorov D. A., Tikhonova I. V. Features of softening processes of aluminum, copper, and their alloys under hot deformation // Inorganic Materials: Applied Research. 2015. Т. 6. № 1. С. 32–40.
13. Гвоздев А. Е., Журавлев Г. М., Кузовлева О. В. Основы формирования состояния высокой деформационной способности металлических систем: монография. Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. 382 с.

14. Beran M. Statistical Continuum Theories. Inter. Publ. New York. 1968.

15. Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials. J. Mech. Phys. Solids. 13, № 4, 1968.

16. Kröner E. Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Berlin, Springer-Verlag, 1958.

17. Kröner E. Elastostatik statistisch aufgebauter Körper. ZAMM. 55, № 4, 1975.

18. Yeh R. H. T. Variational principles for linear anisotropic composites. Physics. 58, 419, 1972

REFERENCES

1. Lomakin, V. A. (1970), Statistical problems in mechanics of deformable bodies [Statisticheskie zadachi mekhaniki tverdyh deformiruemyh tel], Nauka, Moscow, 138 p.

2. Bolotin, V. V. (1971), Application of methods of probability theory and reliability theory in construction calculations [Primenenie metodov teorii veroyatnostej i teorii nadezhnosti v raschetah sooruzhenij], Stroizdat, Moscow, 255 p.

3. Bolotin, V. V., Moskalenko, V. N. (1969), On the calculation of macroscopic constants of strongly isotropic composite materials [Primenenie metodov teorii veroyatnostej i teorii nadezhnosti v raschetah sooruzhenij], Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela, No. 3, 108 p.

4. Shermergor, T. D. (1977), Theory of elasticity of micro-homogeneous media [Teoriya uprugosti mikroneodnorodnyh sred], Nauka, Moscow, 399 p.

5. Khoroshun, L. P. (1984), Refined models of deformation of composites [Utochnennye modeli deformirovaniya kompozitov], Mechanics of composite materials, No. 5, pp. 798–804.

6. Khoroshun, L. P. (1978), Methods of the theory of random functions in problems of macroscopic properties of micro-homogeneous media [Metody teorii sluchajnyh funkcij v zadachah o makroskopicheskih svojstvah mikroneodnorodnyh sred], Applied mechanics, vol. 14, No. 2, pp. 3–17.

7. Cherepanov, G. P. (1983), Fracture Mechanics of composite materials [Mekhanika razrusheniya kompozicionnyh materialov], Nauka, Moscow, 295 p.

8. Tamuzh, V. P., Kuksenko, V. S. (1978), Micromechanics of polymer materials destruction [Mikromekhanika razrusheniya polimernyh materialov], Zinatne, Riga, 294 p.

9. Makarov, E. S., Gvozdev, A. E., Zhuravlev, et al., (2017), Application of the theory of plasticity of dilating media to the processes of compaction of powders of metal systems [Primenenie teorii plastichnosti dilatiruyushchih sred k processam uplotneniya poroshkov metallicheskih sistem], Chebyshevskii Sbornik, vol. 18, No. 4, pp. 268–284.

10. Makarov, E. S., Gvozdev, A. E., Zhuravlev, et al., (2018), Analysis of the equations of the theory of plasticity of powder metal systems [Analiz uravnenij teorii plastichnosti poroshkovyh metallicheskih sistem], Chebyshevskii Sbornik, vol. 19, No. 1, pp. 152–166.

11. Zhuravlev, G. M., Gvozdev, A. E., Kolmakov, A. G., et al., (2018), Application of the mathematical method of local variations for solving problems of plastic shaping of metal, powder and nanocomposite materials [Primenenie matematicheskogo metoda lokal'nyh variacij dlya resheniya zadach plasticheskogo formoizmeneniya metallicheskih, poroshkovyh i nano-kompozicionnyh materialov], Chebyshevskii Sbornik, vol. 19, No. 4, pp. 43–54.

12. Gvozdev, A. E., Bogolyubova, D. N., Sergeev, N. N., et al., (2015), Features of softening processes of aluminum, copper, and their alloys under hot deformation [Osobennosti protekaniya processov razuprochneniya pri goryachej deformacii alyuminiya, medi i ih splavov], Inorganic Materials: Applied Research, vol. 6, No. 1, pp. 32–40.

13. Gvozdev, A. E., Zhuravlev, G. M., Kuzovlev, O. V. (2018), Fundamentals of formation of the state of high deformation ability of metal systems [Osnovy formirovaniya sostoyaniya vysokoj deformacionnoj sposobnosti metallicheskih sistem], TulGU, Tula, 382 p.

14. Beran, Mark J. (1968), Statistical Continuum Theories, Interscience Publishers Inc., New York, 439 p.

15. Hill, R. (1968), A self-consistent mechanics of composite materials, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 13, No. 4, pp. 213–222.

16. Kröner, E. (1958), Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen, Springer-Verlag, Berlin, 180 p.

17. Kröner, E. (1975), Elastostatik statistisch aufgebauter Körper. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, vol. 55, No. 4, pp. 39–43.

18. Yeh, R. H. T. (1972), Variational principles for linear anisotropic composites. Physics, vol. 58, p. 419.

Получено 5.09.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 51(091) DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-436-451

Г. М. Фихтенгольц и преподавание математического анализа в России в первой половине XX века

С. С. Демидов, С. С. Петрова

Демидов Сергей Сергеевич — доктор физико-математических наук, механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: serd@mail.ru
Петрова Светлана Сергеевна — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: spetr33@mail.ru

Аннотация

В работе обсуждается эволюция курса математического анализа в отечественных университетах в первой половине XX столетия и роль в этом процессе профессора Ленинградского университета Г. М. Фихтенгольца (1888–1959), автора классических сочинений — трёхтомного «Курса дифференциального и интегрального исчисления» (1947–1949) и двухтомного учебника «Основы математического анализа» (1955–1956).

Ключевые слова: реформа математического анализа Вейерштрасса, теория вещественного числа, определённые интегралы, зависящие от параметра.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
С. С. Демидов, С. С. Петрова. Г. М. Фихтенгольц и преподавание математического анализа в России в первой половине XX века // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 436–451.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 3.

UDC 51(091) DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-436-451

G. M. Fikhtengol'ts and the teaching of the mathematical analysis in the Russia during the first half of the XXth century

S. S. Demidov, S. S. Petrova

Demidov Sergey Sergeevich — doctor of physical and mathematical Sciences, Faculty of Mathematics and Mechanics, M. V. Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: serd@mail.ru
Petrova Svetlana Sergeevna — candidate of physical and mathematical Sciences, senior scientific researcher, Faculty of Mathematics and Mechanics, M. V. Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: spetr33@mail.ru

Abstract

We discuss the evolution of the course of the mathematical analysis in the Russian universities during the first half of the XXth century and the role in this process of the professor of the Leningrad University G. M. Fikhtengol'ts (1888–1959), who was the author of the classical works — of the three-volume treatise «Differential and Integral Calculus» (1947–1949) and of the two-volumes text-book «The Fundamentals of Mathematical Analysis» (1955–1956).

Keywords: Weierstrass' reform of the mathematical analysis, theory of real numbers, integrals depended from parameters.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
S. S. Demidov, S. S. Petrova, 2019, "G. M. Fikhtengol'ts and the teaching of the mathematical analysis in the Russia during the first half of the XXth century", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 436–451.

1. Вступление

Для математического анализа последняя треть XIX-го века прошла под знаком реформы его оснований, осуществлённой К. Вейерштрассом.

Период конца XIX-го – начала XX-го столетий отмечен появлением трактатов Э. Пикара (1891–1893), Э. Гурса (1902–1903), Ш.-Ж. де ла Валле-Пуссена (1903–1906) (мы выделяем здесь руководства, оказавшиеся наиболее популярными в тогдашней России), в которых эта реформа нашла своё зримое выражение.

Началась перестройка курсов дифференциального и интегрального исчисления в университетах Европы. В этом процессе наше отечество не оказалось в первых рядах.

Существует легенда (впрочем, законно претендующая на роль исторического факта), что тогдашний лидер петербургских математиков один из отцов современной теории вероятностей А. А. Марков, относившийся к нововведениям Вейерштрасса более чем прохладно, в своих лекциях по анализу упрямо продолжал излагать теорему Ампера — утверждение о том, что всякая непрерывная функция дифференцируема всюду кроме может быть конечного множества точек области своего определения.

В Москве царствовал Н. В. Бугаев, в лекциях которого по исчислению вейерштрассовский дух также не ночевал. И хотя наиболее чуткие к новым веяниям профессора (вроде петербуржца К. А. Поссе, казанского математика А. В. Васильева или одессита С. О. Шатуновского) начали вводить вейерштрассовские идеи в свои курсы по анализу, процесс перестройки продвигался медленно.

Но прежде чем начать разговор о перестройке курса анализа в Российской высшей школе, совершившейся в 10-х – 30-х годах XX века, позволим себе сделать несколько общих замечаний о русских учебниках по математике XIX-го – начала XX-го века.

2. Об учебной литературе по анализу в высшей школе России второй половины XIX-го — начала XX-го века.

В России середины XIX века, когда число высших учебных заведений, где преподавались математические дисциплины, было сравнительно невелико, потребности в учебной литературе полностью покрывались иностранными учебниками (в том, что касается анализа, одним из самых распространённых был курс Ж. Штурма, читанный им в середине века в парижской Политехнической школе), а также сравнительно немногочисленными книгами российских профессоров, такими как «Дифференциальное исчисление с приложениями к геометрии» профессора Московского университета Н. Е. Зернова (Москва, 1842).

Вторая половина века – время активного роста системы высшего образования. Подготовка учебных руководств и пособий для студентов (число высших учебных заведений росло, увеличивался и преподавательский корпус и число учащихся) мало по малу становилось специальным видом деятельности, на поприще которой появлялись знаковые имена. Так петербургский математик К. А. Поссе (1847–1928) приобрёл всероссийскую известность, как автор известных учебников по дифференциальному и интегральному исчислению. Он, в частности, активно сотрудничал с организованным в 1904 г. в Одессе издательством «Mathesis» — первым отечественным издательством, специализировавшимся на издании книг по естествознанию и математике.

С середины 19 века началась и к концу 20 получила широкое распространение практика литографированных изданий курсов лекций, читаемых известными профессорами. Так с содержанием лекций основного на рубеже XIX–XX веков лектора по математическому анализу в Московском университете Н. В. Бугаева (1837–1903) мы можем ознакомиться только по их литографированным изданиям. Оригинальный математик и мыслитель, Бугаев читал очень специфический курс исчисления, вейерштрассовский дух в котором, как мы уже говорили, не ночевал. «Излишней строгостью» он пренебрегал, предпочитая при изложении широкий мировоззренческий подход, чем чрезвычайно привлекал слушателей склонных к философии. С его курса начал своё знакомство с анализом Н. Н. Лузин (1883–1950). Но только начал, так как в июне 1903 года Бугаев умер, и далее он должен был посещать лекции Л. К. Лахтина (1858–1927) «с его диктованием основ анализа. На его диктанты, — писал Н. Н. Лузин в письме начала 1930-х годов М. Я. Выгодскому [1, с. 135], — я не ходил: зачем, раз можно купить или занять для прочтения его литографированные записки?».

Это письмо позволяет замечательным образом представить ситуацию в преподавании анализа в русских университетах, сложившуюся к началу XX века. «Я вспоминаю себя, — пишет в нём Лузин [1, с. 135], — студентом 2-го курса (т. е. речь идёт о 1902/1903 учебном годе – С. Д.) ...Я начинал своё знакомство с анализом по беспорядочно и жадно читаемому разнообразию книг. Всё зависело от случая: есть или нет такой-то книги в библиотеке, и как она выглядит, солидно или так себе. В голове была каша, хаос, обрывки нитей, срастающихся случайно. ...Главное в том, что я не знал ни Goursat'a, ни Jordan'a, а воспитывался на старинных курсах Анализа: Lacroix и других. Самым новым для меня был 7-томный курс Laurent'a ("Traitй d'Analyse"). В нём автор гордился, что он ученик Cauchy. Теория множеств и теория функций действительного переменного пришли ко мне лишь в момент окончания Университета. Такое старинное воспитание было обусловлено чистою случайностью, так как когда я был в Университете (1901–1908), курс Goursat был уже в полном ходу за границей и у нас в кругах, близких к профессорским; я же его не знал, и читал всё "автодидактом"».

Однако, «в кругах, близких к профессорским», во всяком случае в Москве, были уже обеспокоены складывавшейся ситуацией: оставаясь на таких позициях, Москва могла быстро превратиться в провинцию. Поэтому один из ведущих московских математиков Б. К. Млодзеевский (1858–1923) возглавил работу над переводом учебника Гурса на русский язык. В качестве переводчика выступил А. И. Некрасов (1883–1957) — в ту пору оставленный при университете для подготовки к профессорскому званию, впоследствии знаменитый механик, действительный член АН СССР.

В 1911 году первый том вышел из печати. Выхода второго тома пришлось ждать долго — вмешались события начавшейся в 1914 войны и последовавших революции и войны гражданской. Второй том появился лишь в 1933 году. В том же году вышло второе издание: все три тома.

Издания 1933 года осуществлялись уже государственным издательством — Государственным издательством технико-теоретической литературы. Выпуск учебной физико-математической литературы становился уже государственной задачей.

Питерцы приступили к подобной работе значительно позднее. Они выбрали для перевода двухтомник Валле-Пуссена. Переводчиками выступили Я. Д. Тамаркин (1888–1945) и Г. М. Фихтенгольц (1888–1959). Возглавил предприятие сам В. А. Стеклов (1864–1926). Шла гражданская война и найти издательство, способное осуществить набор математического текста, оказалось делом сложным. В итоге в 1922 году удалось опубликовать только первый том. Издания второго тома пришлось ждать до 1933 года, когда за него взялось упомянутое Государственное издательство технико-теоретической литературы. К тому времени Стеклова уже давно не было в живых, а Тамаркин благополучно эмигрировал в США. Так что и переводчиком, и составителем примечаний и редактором выступил Фихтенгольц.

Стоит отметить также, что при случившемся в 10-е – 20-е годы отсутствии на российском книжном рынке современной литературы по математическому анализу проблему отчасти решало появление русского перевода учебника А. Дженокки «Дифференциальное исчисление и начала интегрального исчисления» с дополнениями и разъяснениями Дж. Пеано, который переводился дважды — в 1903 неким Н. С. Синеоковым[1] и в 1922 упомянутым Поссе.

Вторая половина 20-х – 30-е годы – время возрождения и активного роста издательской деятельности в секторе научной и учебной литературы. Начавши, как мы уже говорили, с перевода наиболее значимых западных учебников, математики вскоре перешли к написанию собственных руководств, лучше отвечавших особенностям и специфическим нуждам советской школы. Этот процесс приобрёл особый размах в 40-е — 50-е годы и к середине XX века русская школа уже обладала замечательной библиотекой собственной учебной математической литературы, в том числе и по математическому анализу. Вся эта деятельность падает на период зарождения и бурного развития Советской математической школы, ставшей во второй половине XX столетия одной из ведущих. Разумеется, для создания и функционирования такого организма требовалась и мощная школа подготовки квалифицированных кадров — среднего и высшего уровня. Такая школа стала необходимой не только для нужд советской науки, но и народного хозяйства всей страны, которая вступала в эпоху индустриализации, осуществлявшейся в авральном режиме – надвигалась новая война. Выработка учебных программ такой школы, а также создание учебной литературы стало делом нескольких поколений математиков. В этой работе принимали участие все ведущие математики СССР, в их числе — Н. Н. Лузин, В. И. Смирнов (1887–1974), А. Я. Хинчин (1894–1959), А. Н. Колмогоров (1903–1987), С. Л. Соболев (1908–1989), И. М. Гельфанд (1913–2009). Математический анализ стал доминантой программы подготовки студентов-математиков. В работе над курсом анализа напряжённо работали ведущие математики Москвы, Ленинграда и других городов Союза. Ядро этой группы составили математики, так или иначе связанные с теорией функций действительного переменного — именно там в ту пору формировалась высокая культура теоретико-функциональных исследований, столь необходимая для разработчиков курсов математического анализа, реализовывавших вейерштрассовские стандарты. Назовём лишь некоторые из наиболее успешных учебников по анализу, созданных в 20-е — 40-е годы. Это и вышедший первым изданием в 1924–1947 годах знаменитый курс высшей математики В. И. Смирнова, центральное место в котором занимал анализ, это и книги Н. Н. Лузина по дифференциаль-

[1]Г. С. Смирнова сообщила нам следующую информацию, которую она извлекла из ИНТЕРНЕТА: Синеоков Николай Степанович родился в 1872 году в Царицыне, где окончил гимназию. Учился на физико-математическом факультете вначале Киевского, затем Одесского университетов. Преподавал в реальном училище в Симбирске, затем в Царицыне. По сведениям из Российского государственного исторического архива (www.fgurgia.ru) преподавал математику и физику в Царицынской Александровской гимназии (1908), в 1911 стал директором Бежицкой мужской гимназии. В 1919 был случайно арестован в Москве, но затем отпущен. В 1920 вернулся в Царицын, где работал в губстатбюро, затем в школе, наконец профессором Сталинградского медицинского института

ному и интегральному исчислению, это двухтомный курс В. В. Немыцкого, М. И. Слудской и А. Н. Черкасова (первое издание 1940–1941 гг.), это и курс А. Я. Хинчина, первое издание которого увидело свет в 1953 году. Одной из самых ярких в этом ряду стала фигура профессора Ленинградского университета Григория Михайловича Фихтенгольца, на примере многолетней работы которого над созданием университетского курса дифференциального и интегрального исчисления можно видеть как осуществлялось СССР формирование системы математической подготовки студентов – от будущих инженеров до уровня математиков-профессионалов.

3. Г. М. Фихтенгольц

Григорий Михайлович родился в Одессе 5 июня 1888 года в семье железнодорожного служащего. В 1905 он с золотой медалью закончил гимназию, а в 1911 году Новороссийский университет в Одессе, где его учителями были И. В. Слешинский (1854–1931), С. О. Шатуновский (1859–1929) и В. А. Циммерман (1866–1939). Немногочисленные сведения об одесском периоде его жизни можно почерпнуть из статей [2–8]. К сожалению, это практически вся доподлинно известная нам информация о его ранних годах. Немногое, что мы можем восстановить по имеющейся в нашем распоряжении вторичной литературе, требует проверки и документального подтверждения. Изучить одесский период научной биографии выдающегося математика и педагога — одна из важных задач, стоящих перед исследователями его творчества[2].

Судя по всему, его семья (железнодорожные служащие) не была сколь-нибудь состоятельной. По окончании университета он начал трудиться в известном одесском издательстве «Mathesis», совмещая эту деятельность с работой над магистерской диссертацией. Темой его исследований стала теория «простых определённых интегралов, зависящих от параметра». Кто был, выражаясь современным языком, его научным руководителем? Эту роль исполнил С. О. Шатуновский (1859–1929) – замечательный математик, известный своим глубоким интересом к проблемам оснований математики, автор оригинального курса «Введение в анализ» (литогр. издание, Одесса, 1906; печ. издание, Одесса, 1923) — одного из первых в России изложений математического анализа, отвечающих новому уровню строгости [9]. Именно лекции Шатуновского по анализу стали для Фихтенгольца отправной точкой многолетних размышлений над построением собственного курса, завершившихся созданием в 40-е — 50-е годы его классических учебников, речь о которых ещё впереди.

Областью научных интересов Григория Михайловича стала метрическая теория функций действительного переменного, а первый цикл работ, завершившийся магистерской диссертацией (1918), был посвящён, как мы уже говорили, теории интегралов, зависящих от параметра [8]. «Здесь Г. М. Фихтенгольц продолжил и в ряде направлений завершил исследования различных авторов (Осгуд, Витали, Харди, Лебег, Юнг и других), относящиеся к предельному переходу, дифференцированию и интегрированию под знаком интеграла» [5, с. 123]. Говоря о его научной (а также об общественной) деятельности мы ограничимся лишь отдельными замечаниями, необходимыми для раскрытия нашей темы, отсылая интересующегося читателя к специальной литературе. В связи с его первыми научными работами обратим внимание на то важное для биографии нашего героя обстоятельство, что, исследуя чисто математические вопросы, он никогда не упускал из вида их возможную педагогическую составляющую. Так (наблюдение С.С. Вороновского [10, с. 297]) в его первой публикации 1913 года (Математический сборник. 1913. Т. 29. С. 53–66) на с. 53 читаем: «Доказательства основных теорем (речь идёт об утверждениях разрабатываемой им теории интегралов, зависящих от параметров. —

[2]Вообще развитие математики в Одессе в XIX — первой трети XX вв. остаётся одним из самых малоизученных вопросов. Мы до сих пор слабо представляем себе каким образом Одесса из абсолютной математической провинции эволюционировала в крупный центр математической мысли, сыгравший важную роль в становлении Советской математической школы.

С. Д., С. П.) могут быть даны в столь простом виде, что они, на наш взгляд, заслуживают быть введёнными в курсы интегрального исчисления». (Это намерение было им впоследствии осуществлено в «Курсе дифференциального и интегрального исчисления» – об этом ниже.)

Работая в издательстве «Mathesis», Григорий Михайлович познакомился с профессором Санкт-Петербургских Высших женских (Бестужевских) курсов В. И. Шифф (1860–1919): под её редакцией и с её примечаниями в 1911–1912 годах вышли две части его перевода «Курса аналитической геометрии» О. Дзиобека. Шифф порекомендовала Фихтенгольца своему коллеге по Бестужевским курсам К. А. Поссе (1847–1928) [11, с. 324]. Известный математик (в 1916 избранный почётным членом Петербургской Академии наук) [12] Поссе выступил автором наиболее распространённых тогда в России учебников по дифференциальному и интегральному исчислению. Он и привлёк Фихтенгольца к работе над изданием русского перевода первой части курса Э. Чезаро, выпущенного издательством «Mathesis» в 1913 году: «Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых. Перевод с немецкого (русский перевод осуществлялся с немецкого перевода Г. Ковалевского. – С. Д., С. П.) с примечаниями и дополнениями профессора К. А. Поссе». В предисловии Поссе читаем [13, с. XI]: «В работе моей, как редактора, деятельную и весьма ценную помощь мне оказывал Г. М. Фихтенгольц. На нём лежал ответственный труд чтения последней ревизионной корректуры; кроме того, я ему обязан многими, и весьма ценными замечаниями, которыми я неоднократно пользовался, и за которые приношу ему мою глубокую благодарность». Так началось их многолетнее сотрудничество[3].

В 1913 г. Фихтенгольц переехал в Санкт-Петербург, где начал работать в Императорском электротехническом институте имени Александра III, том самом, в котором в те годы работал сам Поссе. Вряд ли стоит сомневаться в том, что переезд Григория Михайловича в столицу был осуществлён при его деятельной поддержке. Вся дальнейшая его творческая жизнь связана с этим городом, в котором он вырос в известного математика и выдающегося педагога. Вот краткие сведения из его послужного списка. В 1918 году он приступил к работе в Петроградском (впоследствии Ленинградском) университете, с начала 1920-х гг. начал преподавать во 2-м педагогическом институте, позднее вошедшем в состав Педагогического института им. А. И. Герцена.

В университете он основал кафедру математического анализа, которой руководил вплоть до 1953 года, когда в ходе пресловутой кампании борьбы с космополитизмом был освобождён от заведования. Лекции Фихтенгольц читал блестяще. О его неторопливой манере, великолепно выполненных чертежах, о продуманной системе использования доски, о выделении на ней рамкой полученных формул, наиболее важные из которых удостаивались рамки с кружочками по углам, о сведениях по истории математики, сообщавшихся по ходу изложения — обо всём этом вспоминали те, кому выпала удача слушать его лекции по анализу. Но главное в этих лекциях была тщательная продуманность всего курса, над совершенствованием которого он работал всю жизнь.

Начало его собственному математическому творчеству положили начатые ещё в Одессе исследования по метрической теории функций. Как мы уже говорили, это были работы об интегралах, зависящих от параметра — цикл трудов, завершившийся в 1918 году его магистерской диссертацией. Дальнейшие его исследования о суперпозиции абсолютно непрерывных функций, о смежных вопросах теории функций действительного и комплексного переменного получили широкий отклик у отечественных (Н. К. Бари, Д. Е. Меньшов и др.) и зарубежных математиков (С. Банах, С. Сакс и др.). В 1924 году он стал одним из приглашённых докладчиков на Международном конгрессе математиков в Торонто. Важно подчеркнуть, что исследования Фихтенгольца ввели в тематику петербуржцев теорию множеств и теорию функций действительного переменного – области до тех пор в северной столице не только не

[3]История их сотрудничества — тема, требующая специального исследования.

разрабатывавшиеся, но даже высокомерно третируемые, как, по выражению В. Я. Успенского, «канторовско-лебеговская дребедень». Фихтенгольц стал основателем ленинградской школы теории функций действительного (или, как предпочитали говорить питерцы, вещественного) переменного — Л. В. Канторович, И. П. Натансон и др.

С середины 30-х годов основной областью исследований Фихтенгольца стал функциональный анализ. На протяжении многих лет он вместе с Л. В. Канторовичем вёл в Ленинградском университете семинар по функциональному анализу. Среди его учеников Л. В. Канторович, И. П. Натансон, а также С. Л. Соболев, Д. К. Фаддеев, С. А. Христианович.

Когда в 1934 году в СССР был восстановлен упразднённый революцией институт учёных степеней, Фихтенгольц в 1935 году получил степень доктора физико-математических наук.

Завершая краткую научно-биографическую справку о Фихтенгольце, нельзя не упомянуть о его постоянном интересе к проблемам преподавания математики в средней и высшей школе. Так уже в 1918 году он вошёл в состав Совета экспертов при Наркомпросе РСФСР, приняв активное участие в формировании новой советской школы. В 1935–37 годах (а это был в высшей степени ответственный для советской школы период — время выхода из затянувшегося послереволюционного кризиса и выстраивания новой советской школы, обеспечившей последующий научно-технический подъём страны) он принял на себя обязанности председателя комиссии Наркомпроса по составлению школьных программ по математике. В эти же годы он вёл активную деятельность по радикальной перестройке учебных планов и программ преподавания на физико-математических факультетах педагогических институтов. В 1934 году Фихтенгольц выступил инициатором проведения Первой математической олимпиады для школьников, положившей в стране начало этому замечательному движению.

Жизненный путь Григория Михайловича Фихтенгольца завершился 26 июня 1959 года. Ему только исполнилось в ту пору 71 год. Наверняка у него ещё были немалые планы, которые он надеялся осуществить. Но одно из главных дел своей жизни — полное изложение основ математического анализа, над которым он трудился с юности — он успел закончить.

4. Работа Фихтенгольца над созданием курса математического анализа

4.1. Довоенный период

Воспитанник С. О. Шатуновского, Фихтенгольц ещё в студенческие годы оказался вовлечённым в дело создания фундаментального логически безупречного курса математического анализа. Интерес к проблемам, возникающим при таком построении укреплялся в ходе его работы в издательстве «Mathesis». Начавшееся в связи с изданием русского перевода учебника Э. Чезаро сотрудничество с Поссе продолжилось в Петербурге, где молодой одессит оказался вовлечённым в преподавание математики и, прежде всего, анализа в высшей технической школе. О том, что проблемы построения курса анализа оставались в зоне его постоянных размышлений, свидетельствует текст его первой статьи, опубликованной в 1913 году в «Математическом сборнике» – об этом мы уже говорили выше. Не будем гадать – как сложилась бы карьера Фихтенгольца, если бы не разразившиеся в 1917 г. революционные события (сильным тормозом могло оказаться его еврейское происхождение, да и то, что в питерской среде он очутился во всех отношениях чужаком), но для таких как он эпоха революции и первые послереволюционные годы оказались вполне успешными. Как мы уже говорили выше, в 20-е — 30-е годы он вырос в заметную фигуру петроградского-ленинградского научного и педагогического сообщества. Его привлекли к работе над русским переводом двухтомника Валле-Пуссена, первый том которого под редакцией В. А. Стеклова увидел свет в «Научном книгоиздательстве» в 1922 году — Валле-Пуссен Ш. Ж. Курс анализа бесконечно малых. Т. 1. Перевод

Я. Д. Тамаркина и Г. М. Фихтенгольца под редакцией В. А. Стеклова. Петроград. Однако наступившие лихие годы нарушили все издательские планы. Особенно это касалось трудных в отношении набора математических текстов. Положение начало выправляться в конце 20-х годов. Второй том, переводчиком которого указан только Фихтенгольц (Тамаркин в 1924 году эмигрировал и с 1925 жил и работал в США), удалось издать лишь в 1933: Валле-Пуссен Ш. Ж. Курс анализа бесконечно малых. Т. 2. Перевод Г. М. Фихтенгольца. Ленинград.

Получивший изрядную практику в преподавании математики будущим инженерам, Фихтенгольц написал для них учебник по математическому анализу с включением в него элементов аналитической геометрии. Этот учебник вышел в свет в 1926 г. в серии «Руководства и пособия для техникумов и ВТУЗ'ов»: Фихтенгольц Г. М. Математика для техников. М.-Л.: Государственное научно-техническое издательство[4]. На основании этой книги, существенно её дополнив и переработав (в результате чего её объём увеличился вдвое), в 1931 году он издал первую часть «Математики для инженеров»: Фихтенгольц Г. М. Математика для инженеров. Часть 1. М.-Л.: Государственное научно-техническое издательство. А в 1932 и 1933 годах вышли соответственно 2 и 3 части. Изложение в этих книгах, предназначенных для воспитания будущих инженерно-технических работников (ИТР), лишено строгости университетских учебников. Разумеется, не надо в них искать теорию вещественного числа и строгих доказательств теорем анализа.

Вспомним, однако, о том, что уже в 1918 году Фихтенгольц приступил к работе в университете. Так что параллельно с работой в высшей технической школе он начал выстраивать собственный университетский курс математического анализа. Результатом стал первый том этого курса, появившийся в 1939 году: Фихтенгольц Г. М. Математический анализ. Ч. I. Составлено по записям лекций под редакцией доцента Г. Р. Лоренца. Л.: Изд-во ЛГУ. В предисловии читаем (с. 3): «Настоящая работа представляет обработку тех лекций, которые я на протяжении 20 лет многократно читал математикам первого курса. В основу положены записи моих лекций, сделанные студентами III курса Н. И. Фельдманом и В. П. Басовым. Большой труд по редактированию текста выполнен доцентом Г. Р. Лоренцом, которому я обязан рядом улучшений в изложении. Всем этим лицам, в особенности Г. Р. Лоренцу, я приношу свою искреннюю благодарность».

Том открывался главой, посвящённой теории вещественных чисел. Её он излагает в форме теории сечений Р. Дедекинда. Затем идут главы о теории пределов, свойствах непрерывных функций, производных и дифференциалах, об основных теоремах дифференциального исчисления, о функциях многих переменных, для которых излагается дифференциальное исчисление, о неявных функциях и о геометрических приложениях исчисления. Главы 10–12 посвящены интегральному исчислению: понятию неопределённого и определённого интеграла, приложениям интегрального исчисления к геометрии и механике. Завершает том глава по теории бесконечных рядов.

Изложение следует официальной программе первого курса дифференциального и интегрального исчисления. Случаи выхода за её пределы (рассмотрение вопроса о независимости функций в восьмой главе, посвящённой неявным функциям) оговариваются специально. Стиль изложения по существу тот же, что и в широко известном курсе, о котором речь пойдёт ниже. Многое (вплоть до обозначений) из курса 1939 года (особенно это касается примеров и их разборов) перейдёт в первый том учебника, вышедшего в 1947 году.

Второй том так и не появился: началась Великая Отечественная война. Очевидно, в годы ей предшествовавшие и в годы самой войны, находясь в эвакуации в Саратове, Фихтенгольц много размышлял над продолжением учебника. Первый том нового издания он решил цели-

[4] В стране началось создание государственных издательств, способных качественно издавать научную, в частности, математическую, литературу. К ГНТИ восходит знаменитый ФИЗМАТГИЗ, впоследствии преобразованный в Главную редакцию физико-математической литературы Издательства «Наука».

ком посвятить дифференциальному исчислению, заново переписав для этого соответствующие разделы довоенного издания, существенно увеличив их в объёме. Первый том он выпустил в 1947 году. В 1948 и 1949 вышли второй и третий тома. Но об этом уже смотри далее.

4.2. Послевоенный период

Итак первый том, посвящённый дифференциальному исчислению, увидел свет в 1947 году. Его открывает теория вещественных чисел в форме теории сечений Р. Дедекинда, за ней следуют теория пределов и дифференциальное исчисление для функций сначала одной, а затем многих переменных, приёмы исследования функций с помощью производных. Походя читателя знакомят с теорией интерполирования. Следом даются геометрические приложения дифференциального исчисления, которые по существу могут служить введением в дифференциальную геометрию.

Изложение отличает систематичность и строгость, а также ясность и простота. Оно сопровождается подробным разбором многочисленных примеров и решением специально подобранных задач, помогающим понять излагаемый теоретический материал.

Так, например, в п. 293 приводится решение задачи: «Пусть электрическая лампочка может передвигаться (например, на блоке) по вертикальной прямой OB. На каком расстоянии от горизонтальной плоскости OA её следует поместить, чтобы в точке A этой плоскости получить наибольшую освещённость?»

В п. 201 решается задача: «Среди всех вписанных в данный круг треугольников найти тот, площадь которого наибольшая». А в п. 239 ищется огибающая семейства парабол $y = a^2$ $(x - a)^2$.

Большое место при этом отводится задачам, решение которых требует проведения значительных аналитических выкладок и доведения решения «до числа». Так как – замечает автор – «точное» или в «конечном виде» решение задач математического анализа возможно лишь в редких (притом, как правило, простейших) случаях – то он старается дать читателю представление о приближённых методах решения и приближённых их решениях. Так, например, в п. 158 он решает задачу нахождения трёх действительных корней уравнения $2x^3$ – x^2 – $7x$ $+ 5 = 0$ с точностью до 0,001.

Книга по жанру примыкает скорее к французским traitës по дифференциальному и интегральному исчислению. Однако, созданная в иной традиции и предназначенная прежде всего для нужд тогдашней советской высшей школы, она по своему характеру во многом от них отличается.

Одной из целей, которые ставил перед собой автор, было дать по возможности полное изложение основных вопросов исчисления в их взаимосвязях с другими разделами математики, а также с различными приложениями. Так в приводимых примерах рассматриваются контактные преобразования (п. 218, 222), метод наименьших квадратов (п. 201), задачи интерполяции (п. 128–130), неравенства Коши, Гёльдера, Минковского, Иенсена (п. 133, 144). При этом излагаемый материал погружался в исторический контекст. Это достигалось делаемыми автором по ходу изложения замечаниями. Например, сформулировав в п. 111 теорему Ролля, автор замечает: «В действительности Ролль высказал это утверждение лишь для многочленов». Или, сформулировав в п. 109 теорему Ферма, он тут же оговаривается: «Это утверждение, разумеется, воспроизводит лишь сущность того приёма, который применял Ферма для разыскания наибольших и наименьших значений функции (Ферма не располагал понятием производной)». Введя в п. 202 понятие якобиана, автор замечает: «Этот определитель называется обычно *функциональным определителем Якоби* или *якобианом* системы (1) — по имени немецкого математика Якоби (C. G. J. Jacobi), впервые изучившего его свойства и применения». И тут же добавляет: «В науку якобианы были введены одновременно с Якоби М. В. Остроградским». Подобный исторический крен становился в СССР в 30-е — 40-е годы непременной чертой подачи учебного материала. Впрочем, особую роль исторический контекст развития математических идей приобрёл у Фихтенгольца в том варианте, который писался как учебник по курсу анализа для студентов – о нём речь пойдёт далее.

Второй том, посвящённый интегральному исчислению, открывается изложением теории неопределённого интеграла и параграфами, знакомящими с техникой интегрирования. В отдельном разделе рассматриваются эллиптические интегралы и задачи к ним приводящие. Чтобы не прерывать линию изложения, затрагивающую преимущественно классы интегралов, берущихся в конечном виде, рассмотрение эйлеровых интегралов 1-го и 2-го рода, представляющих Бета-функцию и Гамма-функцию, вынесено в конец тома. Далее излагаются теория определённого интеграла, её приложения к выводу формулы Валлиса, к доказательству трансцендентности числа e и др., а также к геометрии (вычисление длины дуги кривой, площади плоской фигуры и поверхности, объёма тела), механике и физике (нахождение статических моментов, центра тяжести и др.), наконец, методы приближённого вычисления определённых интегралов. В отдельном параграфе даётся набросок введения в теорию обыкновенных дифференциальных уравнений. Затем автор переходит к изложению теории рядов – числовых и функциональных (особо отметим разделы, посвящённые расходящимся рядам, а также обвёртывающим и асимптотическим рядам). После этого идут две главы о несобственных интегралах и интегралах, зависящих от параметра. Последние составляли сюжет его первых исследований, начатых ещё в Одессе и завершённых его диссертацией 1918 г. (о чём мы неоднократно упоминали).

Третий том открывает глава, посвящённая криволинейным интегралам и интегралу Стильтьеса. Следующие главы — «Двойные интегралы», «Площадь поверхности. Поверхностные интегралы», «Тройные и многократные интегралы». Последняя глава включает в себя введение в векторный анализ. Далее излагается теория рядов и интеграла Фурье, а также их приложения к различным вопросам механики и физики — выражение эксцентрической аномалии планеты через её среднюю аномалию (п. 720), теория колебания струны (п. 721), решение задачи распространения тепла в конечном и бесконечном стержне (п. 722–724), задача распространения тепла в круглой пластине (п. 725), применение гармонического анализа к практическим вопросам машиноведения, электротехники и др. (п. 726).

В заключение тома Фихтенгольц, отталкиваясь от идей своего учителя С. О. Шатуновского, предлагает свой подход для выработки общей теории предела, охватывающей все имеющиеся в анализе виды предела.

Курс Фихтенгольца даёт не только развёрнутое и в принципиальных моментах детализированное изложение основных идей дифференциального и интегрального исчисления, но и вводит читателя в обширный круг вопросов и даже теорий, для которых это исчисление служит, с одной стороны, основанием для разработки его важнейших концепций, с другой, широким полем самых разнообразных приложений. При этом курс строится таким образом, что эти отступления могут служить теоретическим введением в соответствующий вопрос или даже в теорию, например, в область дифференциальных уравнений, обыкновенных и с частными производными. Например, параграф, в котором сообщается о расходящихся рядах, является превосходным введением в теорию расходящихся рядов.

Вот уже более половины столетия трёхтомник, выдержавший многочисленные переиздания, занимает почётное место на книжных полках математиков — к нему прибегают, чтобы в тонкостях понять те или иные разделы анализа или просто освежить их в памяти, а зачастую и войти в тот или иной вопрос, до поры остававшийся на периферии их интересов.

Для первого знакомства с анализом курс не предназначен — для этого он слишком перегружен материалом и разнообразными подробностями. Для этой цели Фихтенгольц подготовил специальный учебник, ориентированный на университетскую программу — двухтомные «Основы математического анализа».

5. Основы математического анализа

«“Основы математического анализа” задуманы, как нам сообщает автор в предисловии, как учебник анализа для первого и второго курса математических отделений университетов; в соответствии с этим и книга делится на два тома. При составлении её был широко использован мой трёхтомный «Курс дифференциального и интегрального исчисления», но содержащийся в нём материал подвергся сокращению и переработке в целях приближения книги к официальной программе по математическому анализу ...». Главную свою задачу он видел «в систематическом и — по возможности — строгом изложении основ математического анализа».

В соответствии с этим автор начинал первый том с теории действительного числа, хотя и предупреждал, что сам он, по соображениям педагогическим, обычно отодвигал это изложение (равно как и изложение некоторых других сложных для начинающих тем) на более позднее время. Далее он переходил к понятию функции и к сведениям о важнейших их классах — об элементарных функциях, обратных тригонометрических, о суперпозиции функций. Затем следует изложение теории пределов, вопросов о непрерывности и разрывах функции, о свойствах непрерывных функций, дифференцировании функций одной переменной, об основных теоремах дифференциального исчисления (теоремы Ферма и Ролля, формула Тейлора и др.) и исследовании функций с помощью производных. Далее он переходит к изложению соответствующих вопросов для функций многих переменных. Следом автор даёт понятие неопределённого интеграла и знакомит с техникой интегрирования. С целью разрушения «вредной иллюзии, воспитываемой решением одних лишь простых задач, будто результаты аналитических выкладок непременно должны быть “элементарными”, автор коротко знакомит читателя с эллиптическими интегралами и даже приводит встречающиеся на практике задачи, приводящие к таким интегралам. Далее следует раздел, посвящённый понятию определённого интеграла. Большое внимание уделено приближённому вычислению интегралов, геометрическим и механическим приложениям интегрального исчисления, а также некоторым геометрическим приложениям дифференциального исчисления (касательные к кривым и касательные плоскости, кривизна плоской кривой).

Второй том открывает теория рядов — числовых и функциональных. Далее следуют несобственные интегралы, интегралы, зависящие от параметра, главы, посвящённые неявным функциям и функциональным определителям, криволинейным интегралам, двойным интегралам, вычислению площади поверхности и поверхностным интегралам, тройным и многократным интегралам, теории поля, наконец рядам и интегралам Фурье.

Учебник не предлагает упражнений, выполнение которых должно помочь читателю проверить уровень освоения им пройденного материала (предполагается, что для этой цели в русской учебной литературе имеются специальные сборники задач), но сопровождается многочисленными детально разобранными примерами, позволяющими помочь ему в уяснении теоретического материала и подготовить его «к сознательной работе над упражнениями». Для того, чтобы привить читателю мысль о широких связях математического анализа с другими математическими дисциплинами и с многообразными потребностями практики, разбираются многочисленные примеры применения анализа в геометрии, механике, физике и технике.

Что следует подчеркнуть особо, это погружение излагаемого материала в исторический контекст. Изложение постоянно сопровождается замечаниями исторического характера. Так появление в тексте каждого нового имени (например, И. Ньютона, М. Ролля или Г. Ф. Лопиталя) сопровождается краткой исторической справкой, ряд параграфов посвящён истории понятий, методов и теорий — понятия функции (п. 21), понятия предела функции (п. 26), вопроса о перестановке двух предельных операций (п. 313), о замене переменных в двойном (п. 359) и тройном интеграле (п. 387), истории тригонометрических рядов (п. 419–425). Глава 14 (п. 217–233) представляет собой очерк возникновения основных идей математического анализа, а заключает второй том «Очерк дальнейшего развития математического анализа», в котором буквально пунктиром намечаются основные пути истории теории дифференциальных уравнений — обыкновенных и с частными производными (с. 436–437), вариационного исчисления (с. 438–440), теории функций комплексного переменного (с. 441–443), теории интегральных уравнений (с. 444–446), теории функций действительного переменного (с. 447–449), функционального анализа (с. 450–455).

6. История математики в учебниках Фихтенгольца

Исторические справки и даже целые исторический разделы, сопровождающие у Фихтенгольца изложение математического анализа, чрезвычайно информативны. Они свидетельствуют о превосходном знании автором современной историко-математической литературы. В то же самое время они отражают общую для всей советской учебной литературы тенденцию рассматривать предлагаемый учащемуся материал в широком историческом контексте. Это отличает и педагогические установки В. И. Смирнова, П. С. Александрова, А. Н. Колмогорова, Б. В. Гнеденко — мы назвали лишь несколько имён известных математиков, внесших крупный вклад в изучение её истории. Полноценное познание математической теории, с доминировавшей в советской традиции точки зрения, невозможно без представления о её истории. Студент должен иметь представление о том какой зачастую сложный и противоречивый путь прошла мысль, прежде чем излагаемая теория приняла современный вид, о том, что математика, как всё на свете, живёт в истории. Что вчера она была совсем не той, что сегодня, и завтра она может принять совершенно иное обличье. Творческий математик должен стараться видеть место того, чем он сегодня занимается, в потоке истории, то есть сознательно переживать настоящее. Готовя 5-е издание своего классического учебника «Курс дифференциальных уравнений» (1950), В. В. Степанов (1889–1950) посчитал необходимым включить в него исторический очерк, для чего обратился к А. П. Юшкевичу, который исполнил его просьбу: все последующие издания книги выходили уже с этим очерком. Краткий исторический очерк, исправлявшийся и дополнявшийся в каждом издании пока был жив автор, сопровождает каждое издание «Курса теории вероятностей» (1-е издание 1950, 8-е — 2005) Б. В. Гнеденко (1912–1995).

В этой традиции писал свои учебники и Фихтенгольц, обнаруживший несомненное дарование историка[5].

7. Учебники Г. М. Фихтенгольца в советской образовательной традиции

Начиная с 30-х годов, создание корпуса учебной литературы по математике (от школьных учебников до университетских курсов по различным математическим дисциплинам), учитывающей и своеобразие математической подготовки в стране и цели развития её научно-технического потенциала, стало одной из насущных проблем, стоявших перед математическим сообществом. Формировавшаяся в 30-е годы Советская математическая школа требовала для своего успешного функционирования привлечения всё новых и новых молодых исследователей, которым было необходимо дать соответствующее образование. Для этого были необходимы обширные, продуманные, согласованные в своих главных частях образовательные программы, оснащённые хорошей, отвечающей современному уровню учебной литературой. Именно такую литературу начали создавать в 30–50-е годы советские математики. Одной из

[5]Свидетельством этому может служить и его историко-математическая статья: О преобразовании переменных в кратных интегралах // Историко-математические исследования. 1952. Вып. 5. С. 241–268. В ней даётся мастерский сравнительный анализ работ по этому вопросу Л. Эйлера, Ж. Лагранжа, К. Якоби и Э. Каталана и в их контексте выявляется вклад в эту тематику М. В. Остроградского.

вершин этого процесса и стали учебники по анализу Г. М. Фихтенгольца — рассмотренные нами трехтомный трактат по дифференциальному и интегральному исчислению и двухтомный учебник по основаниям математического анализа[6].

Учебники Фихтенгольца стали ориентирами, которые задавал планку уровню преподавания математического анализа в советской высшей школе. Конечно, использовались и другие руководства, лекторы в различных университетах читали свои оригинальные курсы, однако указанные книги служили образцами и для их авторов и студентов. В качестве примера сошлёмся на студенческий опыт одного из авторов настоящей заметки, в прошлом студента, а ныне преподавателя механико-математического факультета Московского университета. Читал ему анализ великолепный мастер профессор Н. В. Ефимов (1910–1982). Это был двухгодичный выверенный во всех деталях курс, который его автор читал уже многие десятилетия. Тем не менее в качестве учебника, к которому следовало обращаться студентам в случае возникавших вопросов, он рекомендовал книги Фихтенгольца. Так что книги Фихтенгольца стали настольными для автора, как и для многих его современников. В пору студенчества он пользовался ими в тех случаях, когда не понимал чего-нибудь в лекциях Ефимова, позднее при подготовке собственных лекций или когда хотел расширить свои познания в вопросах, опускаемых обыкновенно при чтении лекций студентам.

Конечно, стандарты изложения математического анализа со времён Фихтенгольца сильно изменились. Сегодня в русской высшей школе в ходу другие учебники: в качестве примера назовём двухтомник В. А. Зорича (1981–1984; 6-е издание 2012б), курс В. А. Ильина, В. А. Садовничего и Бл. Х. Сендова (3-е издание, 2006 г.), лекции Г. И. Архипова, В. А. Садовничего и В. Н. Чубарикова (1999) — этот список можно продолжать и продолжать[7]. Однако, курсы Фихтенгольца, на которых было воспитано несколько поколений советских учёных, а также учёных восточной Европы и Китая[8], остаются в ходу и по сию пору — не зря же их с таким упорство продолжают переиздавать современные коммерческие издательства.

8. Заключение

Трёхтомный «Курс дифференциального и интегрального исчисления» и написанные на его основе двухтомные «Основы математического анализа» Г. М. Фихтенгольца вобрали в себя многолетний опыт преподавания исчисления в российской высшей школе, воплощённый в курсах К. А. Поссе, С. О. Шатуновского, В. А. Стеклова, В. И. Смирнова. Эти книги стали одним из наиболее ярких достижений Советской математической школы. Их автор, сам будучи замечательным математиком, дал образцовое изложение математического анализа,

[6]К подобным сочинениям были необходимы сборники задач. В советской литературе их было создано немало. Лучшим среди них стал «Сборник задач и упражнений по математическому анализу», составленный профессором Московского университета Б. П. Демидовичем (1906–1977). Первое его издание увидело свет в 1952 г. С той поры он многократно дополнялся и переиздавался (19-е издание выло в 2017 году), в том числе в переводах на разные языки (включая китайский).

[7]Тем более, что наша выборка сделана исключительно с точки зрения московского наблюдателя. К тому же мы вовсе выпустили из вида учебную литературу по анализу, подготовленную для студентов не чисто математических специальностей, например, для будущих физиков, для которых была создана обширная библиотека руководств, включавшая замечательные учебники С. М. Никольского, Л. Д. Кудрявцева и др.

[8]Трёхтомный «Курс дифференциального и интегрального исчисления» и написанные на их основе двухтомные «Основы математического анализа» Фихтенгольца выдержали многочисленные переиздания, одно перечисление которых составляет для нас трудно решаемую проблему. Из обыкновенного поиска в Интернете удалось установить, что ещё в 2003 году в издательстве Физматлит вышло 8-е издание «Курса», а последнее издание в издательстве Лань помечено 2019 годом. В 2019 году в издательстве Лань вышло 11-е издание «Основ математического анализа». Эти книги были переведены на основные европейские и китайский языки. Английский перевод «The Fundamentals of Mathematical Analysis», впервые изданный в 1965 году Pergamon Press в серии International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics (vol. 72/73), выдержал несколько переизданий.

сложившегося к 40-м годам XX столетия, своего рода «Начала», ставшие вратами в великое сооружение математической мысли XVII–XX столетий. Он предложил такое его изложение, которое в развёрнутой версии может служить настольной книгой работающего математика, а в сокращённой — учебным руководством для студента, ещё только приступающего к его изучению. Предисловие к первому тому «Основ...» Фихтенгольц завершил так: «Эта книга подытоживает мой многолетий опыт преподавания математического анализа в Ленинградском университете. Да будет она полезна советской молодёжи!» Эти слова, адресованные современникам, обращены и к нам — все мы, читая его книги, приобщаемся к кругу учеников и коллег выдающегося математика и великого педагога Григория Михайловича Фихтенгольца.[9]

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Два письма Н. Н. Лузина М. Я. Выгодскому (публикация и примечания В. А. Волкова и С. С. Демидова) // Историко-математические исследов. 2-я серия, 1997. Вып. 2(37). С. 133–152.

2. Смирнов В. И., Канторович Л. В., Натансон И. П. Григорий Михайлович Фихтенгольц (к шестидесятилетию со дня рождения) // Успехи матем. наук, 1948. Т. 3. Вып. 5. С. 179–181.

3. Смирнов В. И., Канторович Л. В., Натансон И. П. Григорий Михайлович Фихтенгольц (к шестидесятилетию со дня рождения) // Вестник ЛГУ. 1948. № 6. С. 133–135.

4. Канторович Л. В., Натансон И. П. Григорий Михайлович Фихтенгольц (к семидесятилетию со дня рождения) // Вестник ЛГУ. 1958. № 7. С. 5–13.

5. Канторович Л. В., Натансон И. П. Григорий Михайлович Фихтенгольц (некролог) // Успехи матем. наук. 1959. Т. 14. № 5. С. 123–128.

6. Александров А. Д., Акилов Г. П. и др. Григорий Михайлович Фихтенгольц (некролог) // Вестник ЛГУ. 1959. Вып. 4. № 19. С. 158–159.

7. Виноградов С. А., Владимиров Д. А. и др. Григорий Михайлович Фихтенгольц (к столетию со дня рождения) // Вестник ЛГУ. 1988. Вып. 3. № 15. С. 3–6.

8. Богачёв В. И. О работах Г. М. Фихтенгольца по теории интеграла // Историко-математические исследов. Сер. 2. 2005. Вып. 9 (44). С. 252–264.

9. Чеботарёв Н. Г. Самуил Осипович Шатуновский // Успехи матем. наук. 1940. Вып. VII. С. 316–321.

10. Вороновский С. С. К научной биографии Г. М. Фихтенгольца // Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова. Годичная научная конференция. 2010. М.: Янус-К, 2011. С. 297–299.

11. Вороновский С. С. Эволюция курса математического анализа К. А. Поссе // Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова. Годичная научная конференция. 2011. М.: Янус-К, 2011. С. 322–324.

12. Сергеев А. А. К. А. Константин Александрович Поссе (1847–1928). М.: Наука, 1997.

[9]Завершая очерк, хотим заметить, что в обширный круг учеников Г. М. Фихтенгольца попал и талантливый прозаик И. Грекова. Под таким псевдонимом выступила известный математик Е. С. Вентцель (1907–2002), оставившая нам замечательные воспоминания о Ленинградском университете 20-ых годов и своём профессоре Г. М. Фихтенгольце [15], к которым мы с удовольствием отсылаем наших читателей, желающих соприкоснуться с личностью этого удивительного человека и погрузиться в окружавшую его атмосферу.

13. Чезаро Э. Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых с многочисленными примерами для упражнения. Часть 1. Перевод с немецкого с примечаниями и дополнениями профессора К. А. Поссе. Одесса: Mathesis, 1913.

14. Ермолаева Н. С. Новые материалы к биографии Н. Н. Лузина // Историко-матем. исследования. 1989. Вып. 31. С. 191–203.

15. Грекова И. Ленинградский университет в 20-х годах (эссе) / Е. С. Вентцель — И. Грекова. К 100-летию со дня рождения. Составители Р. П. Вентцель, Г. И. Эпштейн. М.: Юность, 2007. С. 18–37.

REFERENCES

1. Volkov V.A., Demidov S.S. 1997, "Two letters of N. N. Luzin to M. Ya. Vygodsky", Istoriko-matematicheskie issledovaniya, 2-series, vol. 2(37), pp. 133-152.

2. Smirnov V. I., Kantorovich L. V., Natanson I. P. 1948, "Grigory Mikhailovich Fichtenholz (to the sixtieth anniversary of the birth)", Russian mathematical surveys, Vol. 3, issue. 5, pp. 179-181.

3. Smirnov V. I., Kantorovich L. V., Natanson I. P. 1948, "Grigory Mikhailovich Fichtenholz (to the sixtieth anniversary of his birth)". Vestnik LSU, no. 6, pp. 133-135.

4. Kantorovich L. V., Natanson I. P. 1958, "Grigory Mikhailovich Fichtenholz (to the seventieth anniversary from birthday)" . Vestnik LSU, no. 7, pp. 5-13.

5. Kantorovich L. V., Natanson I. P. 1959, "Grigory Mikhailovich Fichtenholz (obituary)", Russian mathematical surveys, vol. 14, no. 5, pp. 123-128.

6. Alexandrov A.D., Akilov G. P. 1959, "Grigory Mikhailovich Fichtenholz (obituary)", Vestnik LSU, issue. 4, no. 19, pp. 158-159.

7. Vinogradov S. A., Vladimirov D. A. 1988, "Grigory Mikhailovich Fichtenholz (to the centenary of birth)", Vestnik LSU, issue. 3, no. 15, pp. 3-6.

8. Bogachev V. I. 2005, "About the works of G. M. Fichtenholz on the theory of the integral", Istoriko-matematicheskie issledovaniya, ser. 2, vol. 9 (44), pp. 252-264.

9. Chebotarev N. G. 1940, "Samuil Osipovich Shatunovskii", Russian mathematical surveys, issue.VII, pp. 316-321.

10. Voronovsky S. S. 2011, "To the scientific biography of G. M. Fichtenholz". Annual Conference of the Institute of Natural History and Technology. S.I. Vavilova 2010, Janus-K, Moscow, pp. 297-299.

11. Voronovsky S. S. 2011, "Evolution of the course of mathematical analysis K. A. Posse". Annual Conference of the Institute of Natural History and Technology. S.I. Vavilova 2010, Janus-K, Moscow, pp. 322-324.

12. Sergeyev A. A. 1997, "Konstantin Alexandrovich Posse (1847-1928)", Nauka, Moscow.

13. Cesaro E. 1913, "Elementary tutorial of algebraic analysis and calculus of infinitesimal with numerous examples for exercise", part I, Translation from German with notes and additions by Professor K. A. Posse, Mathesis, Odessa.

14. Ermolaeva N. S. 1989, “New materials to the biography of N. N. Luzin”, Istoriko-matematicheskie issledovaniya, issue. 31, pp. 191-203.

15. Grekova I., Wentzel R. P., Epstein H. I. 2007, “Leningrad University in the 20s (essay)”, E. S. Wentzel - I. Grekova. To the centenary of birth, Yunost, Moscow, pp. 18-37.

Получено 3.10.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 539.52:669.14.018 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-452-476

Особенности материалов и технологий аддитивного производства изделий [1]

А. Н. Кубанова, А. Н. Сергеев, Н. М. Добровольский,
А. Е. Гвоздев, П. Н. Медведев, Д. В. Малий

Кубанова Анастасия Николаевна — начальник отдела исследований и развития АО «ПОЛЕМА», инженер кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: chupeychik@mai.ru

Сергеев Александр Николаевич — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой технологии и сервиса, старший научный сотрудник кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: ansergueev@gmail.com

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Медведев Павел Николаевич — кандидат педагогических наук, доцент кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: medvedeff_82@mail.ru

Малий Дмитрий Владимирович — старший преподаватель кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

Аннотация

В работе представлены сравнительные схемы классического производства изделий сложной формы и их получения с применением аддитивных технологий с указанием основных положительных и отрицательных аспектов применения аддитивных технологий. Перечислены основные технологии аддитивного производства изделий, с указанием специфики их применения. Рассказано о способах получения и свойствах порошковых материалов. Описана технология сфероидизации порошковых материалов и ее пост-процессы. Представлена концепция полного цикла аддитивного производства. Приведены основные программные пакеты для моделирования процессов аддитивного получения изделий из различных металлических систем.

Ключевые слова: аддитивные технологии, порошковые материалы, сфероидизация, горячее изостатическое прессование, моделирование.

Библиография: 37 названия.

[1]Работа выполнена в рамках реализации федеральной целевой программе «Исследование и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы» (уникальный идентификатор проекта RFMEF 157717X0271)

Для цитирования:
А. Н. Кубанова, А. Н. Сергеев, Н. М. Добровольский, А. Е. Гвоздев, П. Н. Медведев, Д. В. Малий Особенности материалов и технологий аддитивного производства изделий // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 452–476.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 3.

UDC 539.52:669.14.018 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-452-476

Materials and technologies for production products by additive manufacturing [2]

A. N. Kubanova, A. N. Sergeev, N. M. Dobrovolskii,
A. E. Gvozdev, P. N. Medvedev, D. V. Maliy

Kubanova Anastasia Nikolaevna — Head of Research and Development Department of JSC "POLEMA", Engineer of the Department of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: chupeychik@mai.ru
Sergeev Aleksander Nikolaevich — Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Head of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: ansergueev@gmail.com
Gvozdev Aleksander Evgenievich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief researcher of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Dobrovolskii Nikolai Mihailovich — Doctor of Physical and Mathematical sciences, professor, Head of the Department of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru
Medvedev Pavel Nikolaevich — Candidate of Pedagogical Science, Associate Professor of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: medvedeff_82@mail.ru
Maliy Dmitriy Vladimirovich — Senior Lecturer of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

Abstract

The paper presents comparative schemes of classical production of complex products and their manufacturing with using additive technologies, including the main positive and negative aspects of using additive technologies. The article listes the main technologies of additive manufacturing of products, indicating the specifics of their application. The paper describes the methods of production and properties of powder materials. The spheroidization technology of powder materials and its post-processes is described. The article presents the concept of full cycle additive manufacturing. The basic software packages for modeling the processes of additive production of products from various metal systems are presented.

[2]The work was carried out within the framework of the Federal Program "Research and development in priority areas of development of the scientific and technological complex of Russia for 2014–2020" (unique identifier of the project RFMEF 157717X0271)

Keywords: additive technologies, powder materials, spheroidization, hot isostatic pressing, modeling.

Bibliography: 37 titles.

For citation:
A. N. Kubanova, A. N. Sergeev, N. M. Dobrovolskii, A. E. Gvozdev, P. N. Medvedev, D. V. Maliy, 2019, "Materials and technologies for production products by additive manufacturing" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 452–476.

1. Тенденции к возникновению и развитию аддитивных технологий

Аддитивные технологии (АТ) привлекают все большее внимание не только исследователей, но и промышленных производителей с мировым именем благодаря возможности создания изделий сложной по геометрии формы, которую зачастую невозможно получить традиционными методами [1].

Основное развитие аддитивные технологии получили за счет быстроты наладки производственного процесса. Получение прототипа даже простой формы традиционными способами (литье, деформация, термообработка, механическая обработка) занимает от нескольких недель до нескольких месяцев. При этом необходимо учитывать большие затраты на изготовление требуемой технологической оснастки. При использовании же современных методов аддитивного производства в первую очередь требуется лишь наличие оборудования, позволяющего производить печать изделия, и открытого программного обеспечения, дающего возможность корректировки технологических параметров печати для подбора наиболее оптимального режима.

Современные методы консолидации порошковых материалов, а также развитие последующих процессов механической и термической обработки, позволяют изготавливать изделия с сопоставимыми свойствами, а порой и существенно превышающими свойства изделий, получаемых традиционными способами. В настоящее время в РФ одним из наиболее востребованных направлений является развитие технологий послойного синтеза [2]. Они позволяют изготавливать из металлических порошков со сферической или близкой к ней формой частиц изделия с повышенной износостойкостью, долговечностью, коррозионной стойкостью, при снижении трудоемкости и металлоемкости машин и механизмов.

Так, например, традиционная технология получения инструмента из слитков быстрорежущих марок сталей включает в себя целый перечень технологических переделов, требующих на каждом этапе отдельный подбор технологии и режима (рис. 1).

Получение расплава быстрорежущих марок стали, как правило, проводят в открытых плавильных печах индукционного типа. Непрерывное литье слитков осуществляется путем вытяжки охлажденного расплава через кристаллизатор. Порезка на мерные заготовки проводится с помощью передвижных газового резака и/или металлической пилы.

Горячая обработка позволяет уменьшить отрицательные последствия литья – снизить неоднородность распределения карбидов в готовом материале. Высокая вторичная твердость и большие различия физико-механических свойств отдельных фаз в быстрорежущих сталях затрудняют их горячую обработку и приводят к значительным потерям металла (до 50 % от массы литья), поэтому их стоимость примерно в 15-17 раз выше стоимости производства углеродистой стали и примерно в 3-4 раза выше стоимости производства коррозионно-стойкой хромоникелевой стали [3]. Проведение горячей деформации быстрорежущих марок стали по классической технологии осуществляется путем различных методов, причем режим проведения каждого из них разрабатывается отдельно под каждый размер и профиль заготовки.

Kubanova/image1-eps-converted-to.pdf

Рис. 1: Схема традиционной технологии изготовления инструмента из слитков быстрорежущей стали

Основными методами горячей деформации являются: ковка, прокатка, экструзия, правка на молоте. Далее следует целый перечень механической и термической обработок полученных заготовок: обрезка концов заготовки для удаления концентраторов трещин, промежуточные отжиги для снятия внутренних термических напряжений, шлифовка и полировка заготовок, контроль готовых изделий (металлографический и химический анализы, контроль физико-механических свойств). Необходимо отметить, что быстрорежущим сталям, полученным по традиционной технологии, присущ ряд недостатков, сдерживающих дальнейшее развитие этого класса инструментальных материалов [3]. Такими недостатками являются:

— карбидная ликвация в слитке, не устраняемая полностью даже после многократной пластической деформации и значительно снижающая технологическую пластичность заготовок;

— значительная деформация инструмента при термической обработке;

— плохая шлифуемость и др.

С конца 80-ых годов XX века традиционная технология получения заготовок быстрорежущих сталей для инструмента из слитков претерпела некоторые изменения, связанные с изучением и развитием порошковой отрасли металлургии (рис. 2).

Производство быстрорежущей стали методами порошковой металлургии позволяет эффективно воздействовать на состав и свойства получаемого материала. Методы порошковой металлургии включают в себя получение порошка с размером частиц в интервале от 0-1000 мкм путем плавки, как правило, в индукционных печах открытого типа под слоем шлака, и последующего распыления расплава потоком газа (азота) под давлением 1-1,5 МПа (расход газа на 1 кг жидкого металла варьируется в интервале 0,6-1,0 $м^3$) или потока воды под давлением 3,5-5МПа [3]. Далее необходима обязательная классификация порошкового материала методами ситовой и/или воздушной классификации для выделения фракции 40-150 мкм для компактирования порошка методом горячей экструзии. Предварительное время нагрева заготовок рассчитывается исходя из их удельной толщины и габаритов и, как правило, для капсул весом 0,5-1,0 тонн составляет порядка 12-15 часов. Время выдержки заготовки в печи перед проведением экструзии составляет порядка 5-8 часов. Компактирование порошка методом горячей экструзии проводят при температуре 1100-1140 °С со степенью деформации

Kubanova/image2-eps-converted-to.pdf

Рис. 2: Схема изготовления инструмента из быстрорежущей стали методом порошковой металлургии

80-88 %. Для снятия внутренних напряжений после экструзии и подготовки структуры сплава к последующим механической и термической обработкам ее подвергают отжигу согласно следующим параметрам: нагрев до 850-870 °C, выдержка 2 ч, охлаждение с печью до 750-770 °C, выдержка 6 ч (для заготовок весом 0,5-1,0 тонн) и дальнейшее охлаждение с печью.

Для проведения компактирования методом ГИП проводят классификацию порошка на фракцию 40-500 мкм. ГИП проводят при температуре 1000-1200 °C и давлении рабочего газа (аргон) 100-200 МПа. Для эффективности проведения процесса ГИП, а также с целью сокращения его продолжительности, проводят предварительное компактирование порошка методом холодного изостатического прессования с усилием порядка 0,4 МПа для увеличения значения плотности. Проведение дополнительной горячей деформации методами проката или ковки применяется с целью доуплотнения, а также с целью изменения геометрии сечения заготовки.

Основным отличием традиционного метода от метода порошковой металлургии является получение заготовки быстрорежущей стали для дальнейшей механической обработки путем компактирования порошкового материала методом горячей экструзии или посредством горячего изостатического прессования. Данный технологический процесс обладает следующими преимуществами:

— обеспечивает более высокую стойкость режущего инструмента (в 1,5-2 раза);

— позволяет получить изотропные свойства по сечению изделия и повышенную конструктивную прочность за счет применения компактирования порошка методом горячего изостатического прессования (ГИП);

— позволяет получить более высокий уровень технологических свойств (повышенную технологическую пластичность, незначительную склонность к росту зерна и деформации при закалке, хорошую шлифуемость, пониженную склонность к скалыванию и микровыкрашиванию режущей кромки инструмента).

Однако, из-за низкого коэффициента использования металла (КИМ) и высокой трудоемкости многопереходной технологии деформации, механической и термической обработок изделия инструментального производства из, например, быстрорежущих сталей имеют высокую себестоимость. Кроме того, эти стали являются весьма дорогими материалами.

Непрерывное развитие различных сфер производств диктует требования по модернизации технологических процессов с целью эффективного получения готовых изделий как по временным затратам, так и с точки зрения экономической целесообразности. Внедрение аддитивных технологий в традиционные схемы производств напрямую относится к данной модернизации. Аддитивный метод производства позволяет на первом переделе получить из порошкового материала изделие с геометрией близкой к конечной форме, значительно сократив тем самым как временные издержки, так и снизив влияние человеческого фактора за счет сокращения количества технологических операций. На рис. 3 продемонстрирована схема производства инструмента из порошковой быстрорежущей стали с применением аддитивных технологий.

Kubanova/image3-eps-converted-to.pdf

Рис. 3: Перспективная схема изготовления изделий с применением методов аддитивных технологий

Основой данной схемы является построение конечной геометрии изделия методом аддитивных технологий. Выбор того или иного способа АТ зависит от целого ряда факторов:

— природа материала (его химический состав);

— фракционный состав материала;

— наличие текучести порошкового материала;

— геометрия конечного изделия;

— требования к физико-механическим характеристикам конечного изделия и др.

Технология и режимы термической обработки в первую очередь зависят от самого материала (сплава), а также от предъявляемых свойств к конечному изделию. В связи с этим, на примере изделий из быстрорежущих марок стали, в качестве режимов термической обработки (как отжига, так и специальной термической обработки для получения требуемых физико-механических свойств) возможно использование стандартных режимов, отработанных при проведении традиционных схем производства.

Сложностью данной производственной схемы, помимо подбора режимов самой технологии построения изделия, является двухстадийная проверка геометрии изделия с применением особо чувствительных контрольно-измерительных машин (КИМ). Данную проверку необходимо проводить дважды: после построения изделия и в процессе финишного контроля качества.

Аддитивные методы производства позволяют получить изделия с низкой анизотропией свойств по сечению детали. Это объясняется тем, что в процессе 3D-печати из металлического порошка за один раз расплавляется небольшое количество материала. Для сплавов некоторая сегрегация легирующих элементов происходит, но в гораздо меньшем масштабе, чем, например, при классическом способе получения изделий методом литья. Быстрое затвердевание приводит к более равномерному химическому составу и микроструктуре по всей детали. При литье же металлических сплавов элемент с самой высокой температурой плавления начинает затвердевать первым. По мере того как отливка охлаждается от периферии к центру, зерна представляют собой значительно различную концентрацию легирующих элементов. Концентрация будет варьироваться по всей части, и зерна будут формироваться в определенных ориентациях, в связи с чем свойства материала не будут однородными или изотропными.

Применение же аддитивных способов производства позволяет получить равномерное распределение не только химических элементов, но и физико-механических характеристик по сечению изделия.

2. Основные технологии построения изделий в аддитивном производстве

Технологии аддитивного производства подразделяются в первую очередь по используемому материалу. Для получения прототипа с целью проверки геометрической сопоставимости используют фотополимеры и, соответственно, технологию стереолитографии (Stereolithography - SLA). Для получения же опытного образца для испытаний используют металлические порошки и соответственно следующие технологические процессы [4]:

— селективное лазерное плавление (selective laser melting - SLM);
— селективное лазерное спекание (selective laser sintering – SLS);
— прямое лазерное спекание металла (direct metal laser sintering – DMLS);
— электронно-лучевое плавление (electron beam melting – EBM);
— аддитивное производство дуговой сваркой (wire-arc additive manufacturing - WAAM);
— прямое лазерное напыление (direct laser deposition – DLD);
— прямое осаждение металла (direct metal deposition – DMD);
— лазерное напыление металлов (laser metal deposition - LMD).

Одним из самых перспективных методов в аддитивном производстве сегодня является метод селективного лазерного плавления (selective laser melting - SLM), суть которого заключается в послойном последовательном расплавлении порошкового материала при помощи лазерного излучения (рис. 4) [5].

Kubanova/image4-eps-converted-to.pdf

Рис. 4: Принципиальная схема построения изделий методом SLM

Метод SLM состоит из двух основных этапов – моделирование изделия и его непосредственная печать. На первом этапе создается цифровая трехмерная модель изделия, которая затем с помощью специальной программы дифференцируется на тонкие слои. На втором этапе происходит непосредственная печать изделия. Сначала на поверхности рабочей платформы с помощью выравнивающего устройства формируется равномерный слой порошка. Затем лазер высокой мощности через систему управляющих зеркал строит на этом слое сечение модели, соответствующее текущему слою. Мощность лазера устанавливается таким образом, что частицы металлического порошка сплавляются в полностью однородную массу. После формирования слоя рабочая платформа смещается вниз на высоту одного слоя, а платформа подачи порошка поднимается. Далее все действия повторяются до тех пор, пока изделие не будет построено полностью [1]. Метод SLM обладает значительными преимуществами, в том числе сокращает число необходимых постобработочных этапов, обладает контролем пространственного распределения состава и микроструктуры путем печати с оптимизированными параметрами, а также проектированием сложных конструктивных элементов в сочетании с компьютерной системой [6].

Еще одним из наиболее распространенных методов в аддитивном производстве является метод селективного лазерного сплавления (selective laser sintering – SLS). Его принципиальная схема сопоставима со схемой изготовления изделий методом SLM (рис. 5) [7].

Kubanova/image5-eps-converted-to.pdf

Рис. 5: Принципиальная схема построения изделий методом SLS

Особый интерес данный метод представляет для изготовления деталей из высокопрочных сталей, в числе который мартенситностареющая сталь марки 03Н18К9М5Т. Образцы данного материала, полученные методом SLS показали высокие механические характеристики, сопоставимые с закаленным состоянием аналогичного материала, изготовленного классической технологией с использованием горячей деформации в виде проката. При высоких прочностных характеристиках были получены и высокие показатели пластичности [8]. Дополнительно стоит отметить, что не зависимо от угла синтезирования образцов в 3D-принтере, разброс экспериментальных данных по механическим свойствам практически не наблюдался.

Для построения изделий методами SLS и SLM применяются порошки зернистостью 20-45 мкм. Для применения в технологии СЭЛС используются порошки размерами 100-200 мкм.

Метод прямого лазерного спекания металла (direct metal laser sintering – DMLS) аналогичен по схеме построения методам SLM или SLS. Пример оборудования данного метода представлен на рис. 6 [9].

Kubanova/image6-eps-converted-to.pdf

Рис. 6: Оборудование для построения изделий методом DMLS

Метод электронно-лучевого плавления (electron beam melting – EBM) применяется для тугоплавких материалов и сплавов (вольфрам, молибден, тантал), а также для высокоактивных материалов (титан и его сплавы). Его принципиальная схема представлена на рис. 7 [10]. Толщина слоя при построении данным методом составляет 50-100 мкм, что позволяет применять данный способ для изготовления изделий сложной формы.

Kubanova/image7-eps-converted-to.pdf

Рис. 7: Схема построения изделий по технологии EBM

Стоит отметить, что применение данного метода дает принципиальную возможность получить изделия из тугоплавких материалов и их сплавов. Согласно классических ранее освоенных технологических процессов в области порошковой металлургии, производство изделий из таких металлов, как вольфрам и молибден возможно лишь с применением:

— высокотемпературных печей для проведения спекания прессованных заготовок (плотность заготовки на уровне 40-60% от теоретической плотности металла) в восстановительной атмосфере водорода (температура спекания варьируется в диапазоне $1950 - 2150°C$);

— дуплекс-процесса, включающего в себя вакуумно-дуговой переплав ранее прессованных заготовок (плотность заготовки на уровне 40-60% от теоретической плотности металла) с последующим переплавом слитков в электронно-лучевой установке.

Наряду с современным методом EBM в мире известен процесс получения компактных заготовок методом Spark Plasma sintering (SPS), основанном на процессе спекания порошкового материала (в том числе мелкодисперсных порошковых частиц) посредством прохождения через них постоянного тока [11]. В данном технологическом процессе в качестве технологической оснастки используется сложная комплексная графитовая форма, состоящая как из массивных блоков графита, так и графитовой бумаги. Применение графитовой оснастки обусловлено высокими свойствами графита обеспечивать «свободное» проведение импульсов постоянного тока, которые позволяют достичь локального нагрева порошкового материала до требуемой температуры спекания в течение нескольких минут. Применение метода SPS позволяет получать мелкозернистую структуру материала за счет быстрого изменения температуры как в процессе нагрева, так и в процессе охлаждения. Данный метод применяется в получении изделий и заготовок из графитовых материалов, тугоплавких металлов (вольфрам, хром, молибден), композиционных материалов, керамики. Однако, в связи с небольшими габаритами рабочей зоны данных установок, а также сложности изготовления графитовой оснастки, в большинстве случаев метод SPS получил распространение в лабораторных исследованиях.

Классические производственные цепочки сложны в исполнении не только за счет большого количество технологических операций, но также из-за низкой распространенности требуемого технологического оборудования в виду его высокой стоимости и сложности исполнения. Специфичность областей применения продукции из вольфрама, молибдена и их сплавов так же требует быстрой переналадки оборудования для оперативного изготовления опытных образцов новой продукции. Развитие аддитивной технологии EBM может помочь решить данные задачи.

В настоящее время лазерная обработка материалов нашла широкое применение для проведения восстановительного ремонта изношенных деталей различных устройств (лопаток турбин, клапанов и т.д.) [12], для получения специальных защитных покрытий с особыми свойствами, а также для послойного выращивания детали путем послойного нанесения (напыления и/или наплавки) порошкового материала. Стоит заметить, что актуальной задачей так же является разработка новых порошковых материалов для нанесения покрытий на изделия из экономнолегированных сплавов, в том числе стойких к изнашиванию при высоких температурах. Известно, что модифицирование наплавленного сплава ультрадисперсными тугоплавкими частицами оказывает влияние на процессы кристаллизации в сварочной ванне, способствуя диспергированию структурных составляющих и инициируя выделение твердых фаз, что влияет на повышение механических и эксплуатационных свойств металла [13].

Аддитивное производство дуговой сваркой (wire-arc additive manufacturing - WAAM) применяется для различных видов сталей (марки нержавеющих и быстрорежущих сталей), для никелевых, титановых, алюминиевых и магниевых сплавов. В основе метода лежит плавление металлической проволоки с одновременным нанесением полученного подплавленного материала на рабочую платформу, которая, как правило, приводится в движение для получения изделий с осью вращения. Материал проволоки соответствует материалу требуемого изделия. Принципиальная схема изображена на рис. 8 [14]. Толщина слоя при построении составляет 1-3 мм (в зависимости от толщины направляемой проволоки), что в свою очередь делает данную технологию пригодной для изготовления крупногабаритных изделий.

Получение покрытий с высокими эксплуатационными свойствами, обеспечивающими повышение долговечности работы изделий в экстремальных условиях высокого износа, коррозии, механических нагрузок и температур, является важной фундаментальной задачей

Kubanova/image8-eps-converted-to.pdf

Рис. 8: Схема построения изделий по технологии WAAM

[15], справиться с которой позволяет технология прямого лазерного напыления (direct laser deposition – DLD). Она представляет собой послойное напыление порошкового материала на подложку. Данный метод нанесения применяется как для построения изделий «с нуля», так и для нанесения защитного покрытия на готовую деталь.

Технология DLD, как правило, основана на применении порошковых материалов на железной, никелевой и кобальтовой основах. Фракционный диапазон применяемых порошков варьируется от 40 до 150 мкм. Необходима хорошая сферичность порошка, позволяющая добиться постоянства текучести при подаче порошка в область построения. Принципиальная схема представлена на рис. 9 [16].

Kubanova/image9-eps-converted-to.pdf

Рис. 9: Схема построения изделий по технологии DLD

Метод прямого осаждения металла (direct metal deposition – DMD) аналогичен методу DLD, что видно из его схемы (рис. 10) [17]. Применение данный метод также нашел при послойном построении изделий из порошковых материалов на железной, никелевой и кобальтовой основах.

Kubanova/image10-eps-converted-to.pdf

Рис. 10: Схема построения изделий по технологии DMD

Метод лазерного напыления металлов (laser metal deposition - LMD) используется для нанесения различного рода покрытий (коррозионностойкие, износостойкие и др.) на готовые изделия из металлов и сплавов. Данный способ позволяет наносить покрытия толщиной в диапазоне 20-60 мкм, что в свою очередь значительно сокращает диапазон фракционного состава используемых порошковых материалов (рис. 11) [18].

Kubanova/image11-eps-converted-to.pdf

Рис. 11: Схема построения изделий по технологии LMD

Обозначение методы аддитивных технологий имеют между собой существенные отличия как в области применения, решаемых задачах, так и в особенностях каждой из технологий. Однако, неизменными для каждого метода являются основные требования, предъявляемые к применяемому порошковому материалу, в числе которых:

— качественный рассев по фракционному составу;

— стабильность текучести порошкового материала;

— требуемый химический состав;

— форма частиц близкая к сферической.

2.1. Порошковые материалы для аддитивных технологий

Развитие аддитивных технологии и их распространение в массовом производстве началось с их применения на классических и отчасти стандартных порошковых материалах. Среди них особое распространение получили:

— сплавы на железной основе марок 304L, 310S, 316L, 410, 430, 434, 904L, 17-7PH, различные марки быстрорежущих сталей и др.;

— сплавы на никелевой основе марок: Inconel 625, Inconel 718, Inconel 936 и др.;

— сплавы на кобальтовой основе марок: Co212, Co512, КХ28М6 и др.;

— сплавы на основе меди: алюминиевые и фосфористые бронзы;

— сплавы на основе титана: Ti64 или ВТ6.

Так же известен опыт по получению опытных изделий из порошков чистых тантала, вольфрама, карбида вольфрама и молибдена высокой сферичности.

Для определения газообразующих примесей в металлах и сплавах применяются различные инструментальные методы: методы высокотемпературной экстракции в несущем газе, атомно-эмиссионная и массоспектрометрия с различными источниками возбуждения, ИК- спектрометрия, рентгенофлоуресцентный анализ, нейтронно-активационный анализ, активационный анализ заряженных частиц, оже- электронная спектрометрия [20].

Основными требованиями к порошковым металлическим материалам для аддитивных технологий являются [21]:

— стабильная текучесть на требуемом по технологии печати уровне;

- высокий уровень сферичности порошка;

— соответствие порошка требованиям по гранулометрическому распределению (как правило, применяемый фракционный интервал порошкового материала варьируется в диапазоне 20–150 мкм);

— соответствие порошка требованиям по химическому составу;

— низкое содержание кислорода;

— низкое содержание азота;

— высокий уровень насыпной плотности;

— высокий уровень плотности утряски;

— высокий уровень истинной плотности порошка, показывающий наличие внутренних пор и несплошностей в порошке.

2.2. Способы получения порошковых материалов для аддитивных технологий

В мировой практике существуют различные методы получения порошковых материалов из чистых металлов и сплавов на их основе. Наибольшее распространение получили следующие технологии изготовления металлических порошков [22]:

1) распыление расплава водой, применяемое для неактивных к кислороду материалам;

2) распыление расплава газом как из открытой плавильной печи, так и из вакуумной плавильной камеры;

3) распыление расплава плазмой;

4) центробежное распыление расплава, применяемое для сложнолегированных сплавов на основе никеля;

5) распыление заранее подготовленного распыляемого электрода, применяемая, в основном, для титана и его сплавов;

6) химико-термическое восстановление оксидов (магни- или кальциотермия);

7) самораспространяющийся высокотемпературный синтез.

Получение металлических порошков методом распыления водой является наиболее распространенным и экономичным способом. Высокое давление воды в сочетании с высокой скоростью охлаждения приводят к появлению частиц порошка неправильной формы, которая менее желательна для применения порошка в сфере аддитивного производства, поскольку она ухудшает свойство текучести и снижает насыпную плотность [22]. Однако, проведение дополнительных технологических процессов, например, плазменной сфероидизации, позволяет достичь требуемого уровня сферичности порошка, а соответственно повысить его текучесть и насыпную плотность.

Метод газовой атомизации позволяет получать сферические порошки различных материалов. Исходное сырье расплавляется в защитной атмосфере (вакуум или инертный газ) или под действием воздуха (при плавке в открытой печи). Затем полученный расплав сливается через распылитель, в котором производится разрушение потока расплава струей высокоскоростного инертного газа (азот, гелий, аргон), который разбивает расплав на мелкие капли [23]. При данном методе производства возможно образование сателлитов на отдельных порошковых частицах. Это связано с условиями получения порошка, при которых отдельные частицы разного размера сталкиваются друг с другом в процессе распыления.

В качестве материалов для применения в области аддитивных технологий возможно использовать порошки, полученные различными методами порошковой металлургии. Так, например, в работе [19] рассмотрено получение многокомпонентных жаропрочных сплавов на основе моно алюминида никеля NiAl путем трех интегральных технологий на основе протекания высокотемпературного химического синтеза:

— центробежное СВС-литье оксидного сырья с последующим вакуммно-индукционным переплавом для проведения плазменного центробежного распыления порошка;

— высокотемпературный элементный синтез (ЭС) механически активированной смеси сырьевых оксидов с последующим измельчением спека и плазменной сфероидизацией полученного порошка;

— гидридно-кальциевое восстановление смеси сырьевых оксидов с последующим гашением и измельчением спека и плазменной сфероидизацией полученного порошка.

После получения металлического порошка вышеописанными методами необходимо проводить:

— их ситовую и/или воздушную классификацию, позволяющей выделить целевую фракцию порошка для каждой отдельно взятой технологии аддитивного производства;

— проводить сфероидизацию порошка для достижения стабильного показателя по текучести, также с целью уменьшения содержания поверхностного кислорода на порошке.

2.3. Плазменная сфероидизация как процесс улучшения сферичности порошка и стабилизации его текучести

Разработка методов получения порошков металлов и сплавов со сферической формой частиц с заданными свойствами и их коммерциализации является одной из важнейших задач развития аддитивного производства [24]. Термическая плазма, генерируемая либо дуговыми разрядами, либо за счет индукционного нагрева, получила за последние годы широкое применение для осуществления целого ряда технологических операций, включающих поверхностное рафинирование порошкового материала. Она является удобным инструментом для получения высокого уровня сферичности порошковых материалов, полученных различными способами [25].

Порошковые материалы для аддитивных технологий должны обладать высоким уровнем сферичности, в виду того, что при сплавлении частиц самой энергетически выгодной формой является система «сфера-сфера» [26]. Не менее важным фактором является стабильная текучесть (сыпучесть) порошкового материала, обеспечивающая постоянство подачи порошка при печати изделий. Для обеспечения данных свойств применяется сфероидизация порошковых материалов в индукционно-связанной плазме либо в дуговой плазме. Как правило, оба метода применяются для обработки порошковых материалов на основах Co, Ni, Fe, Ti в диапазоне гранулометрического состава от 20 до 150 мкм. Однако, уже есть российские и мировые наработки по сфероидизации чистых тугоплавких порошковых материалов, таких как вольфрам, молибден и хром [27,28]. Степень сферичности порошков данных металлов достигает уровня 80-95%, а показатель текучести по ГОСТ 20899-98 (ИСО 4490-78) варьируется в пределах 10-20 секунд. Содержание поверхностного кислорода на порошке при проведении плазменной сфероидизации так же имеет тенденцию к снижению до уровня 90-150 ppm.

В качестве рабочей среды для создания плазмы применяется смесь газов, состав и соотношение которых напрямую зависит от порошкового материала, планируемого к сфероидизации. Так для порошков на основе Ti используется смесь Ar, He и H в соотношениях 89:10:1, а для сплавов на основах Fe, Ni или Co используется смесь Ar и H в соотношениях 10:1. Состав плазмы напрямую влияет на характер и эффективность сфероидизации. При некорректном подборе газового состава, а также при использовании газов, не отвечающих техническим требованиям, возможны:

— выход из строя всей газовой системы оборудования сфероидизации;

— не зажигание плазмы, что делает невозможным сам процесс сфероидизации;

— загрязнение металлического порошка по химическому составу в процессе сфероидизации;

— некачественная сфероидизация, отражающаяся в виде низкого уровня сферичности порошкового материала.

Подготовка, проведение и постобработка металлического порошка в процессе сфероидизации проводится согласно следующим этапам:

— подготовка исходного порошка путем предварительной ситовой и/или воздушной классификации;

— химический, гранулометрический и ситовой анализы исходного порошка;

— определение физических свойств исходного порошка: насыпной плотности, плотности утряски, текучести, сферичности металлографическим методом;

— засыпка исходного металлического порошка в специальные загрузочные емкости;

— настройка скорости подачи исходного порошкового материала в рабочую зону плазмотрона (горящую плазму);

— настройка высоты подачи исходного порошкового материала в рабочую зону плазмотрона (горящую плазму);

— проведение проверки герметичности (как газовой, так и жидкостной системы) установки сфероидизации;

— зажигание плазмы, включение подачи порошка, старт процесса сфероидизации;

— выгрузка металлического сфероидизированного порошка;

— проведение металлографического экспресс-анализа для определения показателя сферичности и корректности настроек процесса сфероидизации;

— проведение химического анализа порошка для определения содержания газовых включений с целью определения корректности настроек процесса сфероидизации;

— проведение ультрозвуковой промывки сфероидизированного порошка для удаления наночастиц, образованных в результате частичного испарения сфероидизируемого порошкового материала;

— проведение сушки порошкового материала в среде инертного (Ar) газа с принудительным нагревом (при необходимости);

— гранулометрический и ситовой анализы сфероидизированного отмытого порошка;

— проведение ситовой и/или воздушной классификации сфероидизированного отмытого порошкового материала;

— химический, гранулометрический и ситовой анализы полученного порошка с целью определения соответствия заявленным требованиям;

— определение физических свойств полученного порошка: насыпной плотности, плотности утряски, текучести, сферичности металлографическим методом, с целью определения соответствия заявленным требованиям.

Сфероидизация порошков основана на интенсивном нагреве исходных частиц, подаваемых в плазменный поток, их плавлении и приобретении каплями расплава сферической формы за счет сил поверхностного натяжения. Плазменная струя формируется в результате пропускания плазмообразующегося газа через дуговой разряд или индукционное поле. Исходный порошок подается в рабочую зону плазмотрона или реактора (рис. 12), а после выносится системой фильтрации в приемные бункера целевого продукта.

В завершении процесса сфероидизации необходимо предусмотреть ультразвуковую промывку полученного порошка. Данная операция позволяет убрать нано- и микрочастицы порошка, образовавшиеся в процессе сфероидизации за счет конденсации паров расплавленных частиц. Данный вид промывки проводится в несколько циклов в специальной обессоленной (деонизированной) воде. Количество циклов зависит от фракционного состава полученного порошка после сфероидизации, а также от его химического состава. Как правило, количество циклов промывки варьируется в пределах 5-8 циклов. После промывки порошок представляет собой пульпу (смесь порошка с водой). Для его обезвоживания необходимо проводить ряд циклов сушки в защитной атмосфере (вакуум и/или аргон). Возможно применение сушки с нагревом технологической емкости с порошком до $50-80^{\circ}C$. За счет операций ультразвуковой

Рис. 12: Схема процесса сфероидизации порошкового материала

промывки и сумки удается дополнительно повысить текучесть порошка, а также снизить в нем содержание кислорода.

Как правило, после проведения процессов сфероидизации и ультразвуковой промывки порошка необходимо провести повторную классификацию порошкового материала для получения целевого фракционного состава. Для этого, как правило, используют установки воздушной классификации, позволяющие с высокой производительностью провести тщательный рассев порошкового материала.

В завершении технологического процесса получения порошка для аддитивных технологий, включающего пост процесс плазменной сфероидизации, необходимо предусмотреть защитную упаковку готового порошка во влагостойкие контейнеры. Чистый титан и сплавы упаковываются под аргоном, в то время как другие материалы обычно упаковываются под нормальной воздушной атмосферой [22].

3. Аддитивное производство под ключ. Решения мировых производителей

В основе технологий аддитивного производства находится оборудование для печати: 3D-принтеры и/или установки напыления и наплавки. Однако, если рассматривать полностью процесс получения изделия методом аддитивного производства, то процесс окажется очень сложным за счет большого наличия пост-процессов, к которым относятся:

— обязательное проведение отжига напечатанных изделий для снижения термических напряжений;

— проведение механической обработки (как правило электроэрозионная или лентопильная обработка) для удаления детали с площадки построения;

— горячее изостатическое прессование готовых изделий;

— сложная 3х- и/или 5-ти координатная механическая обработка готового изделия за счет исходной сложной геометрии;

— проверка геометрических размеров полученных изделий с помощью особо чувствительных контрольно-измерительных машин (КИМ).

3.1. Метод горячего изостатического прессования как гарант увеличения уровня физико-механических свойств

Многократное получение аддитивно изготовленных материалов со 100% эталонной плотностью, несомненно, является сложной задачей. Технологии производства присадок к металлам позволяют получать плотность, превышающую 99% [22]. Плотность зависит от развития пор в процессе печати, а также наличия неметаллических (в том числе газовых) включений. Даже при использовании традиционных технологий, например, литье, для получения изделий сложной формы, практически невозможно избавиться от пористости в сплавах, которая, как правило, является основной причиной низких механических характеристик готовых изделий. Широко используемым приемом, позволяющим практически полностью устранить пористость любого происхождения и тем самым повысить качество отливок, является применение горячего изостатического прессования (ГИП) [29-33]. Суть ГИП заключается в одновременном воздействии на изделие высокой температуры и давления. При этом происходит уплотнение материала по механизму пластической деформации с последующей диффузионной сваркой сомкнувшихся внутренних поверхностей пор. Более высокая плотность и гомогенность заготовок после ГИП улучшает механические свойства с соответствующим повышением прочности на растяжение и текучести, ковкости и сопротивления разрушению. Проведение процесса ГИП так же уменьшает разброс данных характеристик по сечению и длине заготовки [34].

Согласно работе [19] механические свойства компактных образцов из порошковых материалов фракции 20-45 мкм на основе моно алюминида никеля способны за счет проведения цикла горячего изостатического прессования (ГИП) обеспечить следующий рекордный уровень: предел прочности на сжатие порядка 3200 МПа, предел текучести на сжатие составляет 1300 МПа, относительное сжимание на уровне 17% [19]. Достичь данный уровень свойств так же удалось за счет проведения предварительной сфероидизации порошкового материала, позволившей увеличить насыпную плотность порошка, которая в свою очередь способствовала более плотной засыпке порошкового материала в капсулу для процесса ГИП. Установлено, что без применения предварительной сфероидизации порошкового материала уровень свойств компактного образца из моно алюминида никеля, полученного методом ГИП, характеризуется следующими значениями: $\sigma сж = 2850$ МПа, $\sigma 0,2 = 1250$МПа, $\upsilon = 12\%$.

3.2. Мировые предложения по развитию аддитивного производства

За последние 10 лет аддитивное производство получило наиболее активное развитие как в России, так и в мире. Появились мировые производители, предлагающие технологические решения под ключ. Среди них следующие:

1) 3D systems - предоставляет профессиональные онлайн-услуги 3D-печати и производства готовых изделий методами: стереолитография и литье в уретановые формы для изделий из полимеров, технологии SLS и DMP для металлических порошков, литье под давлением для легкоплавких сплавов, а также финишная механическая обработка высокой точности [35].

2) SMS group - предлагает законченную концепцию производства (рис. 12), позволяющую реализовать серийную производственную цепочку аддитивного производства, которая включает в себя [36]:

— установку распыления расплава из вакуумной плавильной камеры;

— систему контроля и классификации металлического порошка;

— 3d-принтеры для печати заготовок и изделий близких к конечной форме;

— оборудование для снятия напечатанных заготовок с подложки;

— оборудование для проведения промежуточной (отжиг для снятия напряжений) и конечной термообработки для получения целевых свойств в изделии;

— комплекс металлообрабатывающих станков с числовым программным управлением ЧПУ для проведения финишной механической обработки;

— оборудование для сканирования исходной (целевой) геометрии модели (образца готового изделия), а также для проверки и анализа полученного изделия.

Дополнительно компания SMS group предлагает в рамках технологической цепочки аддитивного производства использовать:

Kubanova/image13-eps-converted-to.pdf

Рис. 13: Концепция аддитивного производства от SMS Group

— оборудование для проведения циклов горячего изостатического прессования для повышения плотности напечатанных изделий;

— оборудование для защитной упаковки и хранения порошковых материалов;

— лабораторное оборудование для анализа порошковых материалов, включающее как проверку химического и гранулометрического составов, так и проверку физических свойств порошка;

— лабораторное оборудование для проверки физико-механических свойств готовых изделий и/или образцов-свидетелей в целях проведения аттестации продукции.

4. Моделирование в аддитивном производстве

В случае, когда мы имеем дело не с промышленным производством, подразумевающим заданный технологический процесс, а с изготовлением штучных деталей или восстановлением узлов, физические свойства материала и геометрические размеры готового изделия будут каждый раз новые. Соответственно, для успешного получения изделия необходимо либо проведение ряда экспериментов для определения допустимых и оптимальных параметров процесса аддитивной технологии, что довольно дорого, либо использование некоторого математического аппарата, позволяющего провести предварительные расчеты этих параметров [12].

В настоящее время совместно с развитием аддитивных технологий активно растет рынок и программных продуктов для этой сферы. В большом количестве на мировом рынке представлены программные продукты для подготовки изделия к 3D-печати: форматирование файла, построение поддержек, выбор параметров печати. Наиболее распространенными программными продуктами являются следующие [37]:

— Cura: является программным обеспечением, подходящим для большинства 3D-принтеров. Это полностью открытый исходный код, который при необходимости может быть расширен. Данное программное обеспечение очень просто в использовании и позволяет управлять наиболее важными настройками 3D-печати в понятном интерфейсе. Возможен запуск на стандартных режимах, и, если необходим более точный контроль над настройками, то возможно использование программы в режиме “пользовательский”, позволяющем в ручном режиме изменять требуемые параметры.

— MatterControl: программное обеспечение для CAD-систем и 3D-печати.

Интерфейс замечательно хорошо структурирован. Соответствующие расширенные настройки печати позволяют рассматривать MatterControl в качестве комплексного программного обеспечения для большинства аспектов процесса 3D-печати, от подготовки поддержки до нарезки и управления.

— 3DPrinterOS: Облачное решение для управления 3D-принтером, которое включает в себя очередь заданий для печати, управление принтером и систему плагинов на основе приложений, которая позволяет анализировать и восстанавливать файлы формата STL.

— KISSlicer: это довольно сложный программный инструмент для 3D-печати. Бесплатная версия программы будет достаточна для большинства пользователей печати, но доступна только с одним экструдером. Платная же версия позволяет запрограммировать печатать с несколькими головками.

— Slic3r: это программное обеспечение с открытым исходным кодом с возможностью добавления функций bleeding edge, которые больше не встречаются ни в одном из программных модулей.

— IceSL: это удобное программное обеспечение для 3D-печати, включающий элемент моделирования.

— Octoprint: это программное обеспечение, имеющее специальный блок, позволяющий управлять принтером удаленно посредством соединения через интерфейс OctoPrint. Это позволяет отнести данное программное обеспечение к одной из лучших для 3D-печати в настоящее время на рынке.

Однако, несмотря на великое многообразие программных комплексов в сфере аддитивных технологий, в настоящее время мало известно программ для моделирования самого процесса 3D-печати, которые позволяли бы в ходе процесса послойного лазерного синтеза прогнозировать стратегию построения изделия, а также анализировать напечатанный образец по целому ряду свойств и характеристик: процесса распространения тепла, напряженно-деформированного состояния, многопараметрической оптимизации структуры, периодических пористых и ячеистых структур с переменными теплофизическими и механическими свойствами, оценки остаточной прочности и предельных нагрузок, формирования микроструктуры материала.

Именно для решения задач по расчету и прогнозированию напряженно-деформированного состояния изделий и конструкций было разработано уникальное инженерно-программное обеспечение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калайда Т. А. Метод селективного лазерного плавления для создания изделий со сложной геометрией // Материалы XV Российской ежегодной конференции молодых научных сотрудников и аспирантов «Физико-химия и технология неорганических материалов». Москва, 2018. С. 55–56.

2. Дежина И. Г., Пономарев А. К., Фролов А. С. Новые производственные технологии: публичный аналитический доклад. М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2015. 272 с.

3. Гвоздев А. Е. Производство заготовок быстрорежущего инструмента в условиях сверхпластичности. М.: Машиностроение, 1992. 176 с.

4. Powders for 3D Printing / MKNANO [электронный ресурс]. - URL: https://mknano.com/3-D-Printing-Additive-Manufacturing-Materials/Metal-Powders/Spherical-Metal-Powders/Powders-for-3D-Printing (дата обращения 24.10.2019 г.).

5. Additive manufacturing. Different kinds of additive manufacturing / ScanAndMake [электронный ресурс]. URL: https://scanandmake.com/additive-manufacturing#collapse3 (дата обращения 24.10.2019 г.).

6. Каплан М. А. Исследование структуры сферического порошка коррозионностойкой стали 316L для аддитивного производства // Материалы XV Российской ежегодной конферен-

ции молодых научных сотрудников и аспирантов «Физико-химия и технология неорганических материалов». Москва, 2018 г. С. 468–469.

7. Назад из виртуальности [электронный ресурс]. URL: https://hi-tech.mail.ru/review/nazad_iz_virtualnosti/(дата обращения 24.10.2019 г.).

8. Владиславская Е. Ю. Исследование механических характеристик образцов из мартенситностареющей стали 08Х18К9М5Т, синтезированных методом селективного лазерного сплавления // Материалы XV Российской ежегодной конференции молодых научных сотрудников и аспирантов «Физико-химия и технология неорганических материалов». Москва, 2018. С. 38–39.

9. The Types Of 3D Printing / All About 3D Printing [электронный ресурс]. – URL: http://allabout3dprinting.com/types-of-3d-printing/(дата обращения 24.10.2019г.)

10. Laser sintering, melting and others – SLS, SLM, DMLS, DMP, EBM, SHS / 3D Printing and Design [электронный ресурс]. – URL: https://www.additive.blog/knowledge-base/3d-printers/laser-sintering-melting-sls-slm-dmls-dmp-ebm-shs/ (дата обращения 24.10.2019г.)

11. Spark plasma sintering system / Systeme GmbH (FCT) [электронный ресурс]. – URL: http://www.fct-systeme.de/en/content/Spark_Plasma_Sinteranlagen/ nm.12 nc.26 (дата обращения 24.10.2019г.)

12. Манцыбора А. А., Полоник М. В. Расчет методом конечных элементов процесса обработки оптоволоконным лазером материала заданной конфигурации // Сборник материалов VII международной конференции «Деформация и разрушение материалов и наноматериалов». М.: ИМЕТ РАН, 2017, 951 с.

13. Антонов А. А., Артемьев А. А., Соколов Г. Н. Разработка порошковой проволоки для дуговой наплавки износостойкого сплава системы Fe-Cr-C-Mo-Ni-Ti-B // Сборник материалов VII международной конференции «Деформация и разрушение материалов и наноматериалов». М.: ИМЕТ РАН, 2015, 953 с.

14. Jing G., Yong Zh., Changmeng L., Qianru W., Xianping Ch. and Jiping L. Wire Arc Additive Manufacturing of AZ31 Magnesium Alloy: Grain Refinement by Adjusting Pulse Frequency // Metals for Additive Manufacturing. 2016, vol. 9(10), p.823. URL: https://doi.org/10.3390/ma9100823

15. Капралов Е. В., Будовских Е. А., Капралов Е. В., Будовских Е. А., Громов В. Е., Райков С. В., Иванов Ю. Ф. Структура и свойства композиционных износостойких наплавок на сталь: монография. Новокузнецк: Изд. центр СибГИУ, 2014. 109 с.

16. 3D-принтер порошковый металл. Принципы, возможности, расходные материалы / Компьютерная помощь [электронный ресурс]. – URL: https://128gb.ru/3d-powder-metal-printer-principles-opportunities-supplies-prices.html (дата обращения 24.10.2019 г.).

17. Механик А. 3D-фанам стоит немного успокоиться. Наука и технологии // Стимул [электронный ресурс]. – URL: https://stimul.online/articles/science-and-technology/3d-fanam-stoit-nemnogo-uspokoitsya/ (дата обращения 24.10.2019 г.).

18. Laser Metal Deposition Resolution [электронный ресурс]. URL: https://www.auroralilys.com/index5.php?yhsw=laser-metal-deposition-resolution (дата обращения 24.10.2019г.).

19. Левашов Е. А., Капланский Ю. Ю., Курбаткина В. В., Пацера Е. И., Самохин А. В., Фадеев А. А., Мартынов Д. А., Гурских А. В., Чупеева А. Н. Новое поколение жаропрочных никелевых сплавов с иерархической структурой и их применение в аддитивных технологиях // Материалы 13-й международной научно-технической конференции. Минск, 2018. С. 62–65.

20. Григорович К. В. Современные возможности методом определения газообразующих примесей и неметаллических включений в металлах и сплавах // Материалы XV Российской ежегодной конференции молодых научных сотрудников и аспирантов «Физико-химия и технология неорганических материалов». Москва, 2018. С. 24–25.

21. Additive Manufacturing. With Amperprint for 3D-Printing you Have the Powder to Create / Höganäs [электронный ресурс]. – URL: https://www.hoganas.com/en/powder-technologies/additive-manufacturing/3d-printing-powders/ (дата обращения 24.10.2019 г.).

22. A look into powder materials for metal 3d printing / 3D-Printing Industry (3DPI) [электронный ресурс]. – URL: https://3dprintingindustry.com/news/a-look-into-powder-materials-for-metal-3d-printing-57788/ (дата обращения 24.10.2019 г.).

23. Кирсанкин А. А. Получение сферических порошков методом газовой атомизации для аддитивного производства // Материалы XV Российской ежегодной конференции молодых научных сотрудников и аспирантов «Физико-химия и технология неорганических материалов». Москва, 2018. С. 58–59.

24. Фадеев А. А. Сфероидизация металлических порошков системы W-Ni-Fe в термической плазме электродугового разряда // Материалы XV Российской ежегодной конференции молодых научных сотрудников и аспирантов «Физико-химия и технология неорганических материалов». Москва, 2018. С. 311–313.

25. Зленко М. А., Нагайцев М. В., Довбыш В. М. Аддитивные технологии в машиностроении. ГНЦ РФ ФГУП «НАМИ», 2015. 220 с.

26. Барахтин Б. К., Васильева О. В., Жуков А. С., Кузнецов П. А. Физико-химические процессы при консолидации порошка в методе селективного лазерного сплавления // VII Международная конференция «Деформация и разрушение материалов и наноматериалов». М: ИМЕТ РАН, 2017. 951 с.

27. Tungsten / TEKNA [электронный ресурс]. URL: http://www.tekna.com/spherical-powders/tungsten (дата обращения 24.10.2019 г.).

28. Сферичные порошки тугоплавких металлов для аддитивных технологий / АО «ПОЛЕМА» [электронный ресурс]. URL: http://www.polema.net/userfiles/files/сферичные%20порошки%20тугоплавких%20 металлов%20производства%20АО%20ПОЛЕМА(1).pdf (дата обращения 24.10.2019 г.).

29. Строганов Г. Б. Высокопрочные литейные алюминиевые сплавы. М., Металлургия, 1985. 216 с.

30. Zoheir F. The influence of porosity and hot isostatic pressing treatment on wear characteristics of cast and P/M aluminum alloys // Wear. 2011, vol. 271, pp. 1594–1601. DOI: 10.1016/j.wear.2011.01.037

31. Падалко А. Г. Практика горячего изостатического прессования неорганических материалов. М.: ИКЦ «Академкнига», 2007. 267 с.

32. James T. Staley Jr, Murat Tiryakioglu, John Campbell. The effect of increased HIP temperatures on biofilms and tensile properties of A206-T71 aluminum castings // Materials Science and Engineering A 460-461, 2007, pp. 324–334. DOI: 10.1016/j.msea.2007.01.049

33. Белов А. Ф., Бондарев Б. И., Шмаков Ю. В. Свойства заготовок из алюминиевых сплавов после горячего изостатического прессования // Цветные металлы: 1983, № 5, С. 65–67.

34. Акопян Т. К. Влияние горячего изостатического прессования на структуру и свойства высокопрочных литейных алюминиевых сплавов нового поколения — никалинов АЦ6Р0,5Ж и АЦ6Н4 // Сборник материалов XI Российской ежегодной конференции молодых научных сотрудников и аспирантов «Физико-химия и технология неорганических материалов». М.: ИМЕТ РАН, 2014, 619 с.

35. 3D Systems the Power of on Demand / 3D SYSTEMS [электронный ресурс]. URL: https://www.3dsystems.com/on-demand-manufacturing (дата обращения 24.10.2019 г.).

36. Frontrunner for New Production Process. Powder Production and 3D Printing / SMS group [электронный ресурс]. URL: https://www.sms-group.com/plants/all-plants/powder-production-and-3d-printing/ (дата обращения 24.10.2019 г.).

37. 3D Printing Software for Beginners and Pros / ALL3DP [электронный ресурс]. URL: https://all3dp.com/1/best-free-3d-printing-software-3d-printer-program/ (дата обращения 24.10.2019 г.).

REFERENCES

1. Kalaida, T. A., 2018, “The method of selective laser melting for the creation of products with complex geometry” [Metod selektivnogo lazernogo plavleniya dlya sozdaniya izdelij so slozhnoj geometriej], Proceedings of the XV Russian annual conference of young researchers and postgraduates “Physico-chemistry and technology of inorganic materials”, Moscow, 2018, pp. 55-56.

2. Dezhina, I. G., Ponomarev, A. K., Frolov, A. S., 2015, “New production technologies: public analytical report”, Moscow, “Delo” RANHiGS, 272 p.

3. Gvozdev, A. E., 1992, “Production of high-speed tool blanks in conditions of superplasticity”, Moscow, Mashinostroenie, 176 p.

4. Powders for 3D Printing / MKNANO [electronic resource]: URL: https://mknano.com/3-D-Printing-Additive-Manufacturing-Materials/Metal-Powders/Spherical-Metal-Powders/Powders-for-3D-Printing (accessed 24.10.2019).

5. Additive manufacturing. Different kinds of additive manufacturing / ScanAndMake [electronic resource]: URL: https://scanandmake.com/additive-manufacturing#collapse3 (accessed 24.10.2019).

6. Kaplan, M. A., 2018, “Research of structure of spherical powder of corrosion-resistant steel 316L for additive production” [Issledovanie struktury sfericheskogo poroshka korrozionnostojkoj stali 316L dlya additivnogo proizvodstva], Proceedings of XV Russian annual conference of young scientists and postgraduates "Physical chemistry and technology of inorganic materials Moscow, pp. 468-469.

7. Back from virtuality [electronic resource]: URL: https://hi-tech.mail.ru/review/nazad_iz_virtualnosti/ (accessed 24.10.2019).

8. Vladislavskaya, E. Yu., 2018, "Investigation of mechanical characteristics of samples from martensitic aging steel 08X18K9M5T synthesized by selective laser fusion" [Issledovanie mekhanicheskih harakteristik obrazcov iz martensitnostareyushchej stali 08H18K9M5T, sintezirovannyh metodom selektivnogo lazernogo splavleniya], Proceedings of the XV Russian annual conference of young researchers and postgraduates "Physical chemistry and technology of inorganic materials", Moscow, pp. 38-39.

9. The Types Of 3D Printing / All About 3D Printing [electronic resource]: URL: http://allabout3dprinting.com/types-of-3d-printing/(accessed 24.10.2019).

10. Laser sintering, melting and others – SLS, SLM, DMLS, DMP, EBM, SHS / 3D Printing and Design [electronic resource]: URL: https://www.additive.blog/knowledge-base/3d-printers/laser-sintering-melting-sls-slm-dmls-dmp-ebm-shs/ (accessed 24.10.2019).

11. Spark plasma sintering system / Systeme GmbH (FCT) [electronic resource]: URL: http://www.fct-systeme.de/en/content/Spark_Plasma_Sinteranlagen/ nm.12 nc.26 (accessed 24.10.2019).

12. Mantsybora, A. A., Polonik, M. V., 2017, "Calculation by finite element method of optical fiber laser processing of a material of a given configuration" [Raschet metodom konechnyh elementov processa obrabotki optovolokonnym lazerom materiala zadannoj konfiguracii], Proceedings of the VII international conference "Deformation and destruction of materials and nanomaterials", Moscow, IMET RAN, 951 p.

13. Antonov, A. A., Artemyev, A. A., Sokolov, G. N.,2015 "Development of cored wire for arc surfacing of wear-resistant alloy of Fe-Cr-C-Mo-Ni-Ti-B system" [Razrabotka poroshkovoj provoloki dlya dugovoj naplavki iznosostojkogo splava sistemy Fe-Cr-C-Mo-Ni-Ti-B], Proceedings of the VII international conference "Deformation and destruction of materials and nanomaterials", Moscow, IMET RAN, 953 p.

14. Jing, G., Yong, Zh., Changmeng, L., Qianru, W., Xianping, Ch. and Jiping L., 2016, "Wire Arc Additive Manufacturing of AZ31 Magnesium Alloy: Grain Refinement by Adjusting Pulse Frequency", Metals for Additive Manufacturing, vol. 9(10), p. 823. URL: https://doi.org/10.3390/ma9100823

15. Kapralov, E. V., Budovskikh, E. A., Kapralov, E. V., Budovskikh, E. A., Gromov, V. E., Raikov, S. V., Ivanov, Yu. F., 2014, "Structure and properties of composite wear-resistant surfacing on steel" [Struktura i svojstva kompozicionnyh iznosostojkih naplavok na stal'], Novokuznetsk Izd. centr SibGIU, 109 p.

16. 3D printer powder metal. Principles, capabilities, supplies / Computer help electronic resource]: URL: https://128gb.ru/3d-powder-metal-printer-principles-opportunities-supplies-prices.html (accessed 24.10.2019).

17. Mechanic, A. 3D fans should calm down a bit. Science and technology // Stimulus [electronic resource]: URL: https://stimul.online/articles/science-and-technology/3d-fanam-stoit-nemnogo-uspokoitsya/ (accessed 24.10.2019).

18. Laser Metal Deposition Resolution [electronic resource]: URL: https://www.auroralilys.com/index5.php?yhsw=laser-metal-deposition-resolution (accessed 24.10.2019).

19. Levashov, E. A., Kaplansky, Yu. Yu., Kurbatkina, V. V., Patsera, E. I., Samokhin, A.V., Fadeev, A. A., Martynov, D. A., Gurskikh, A.V., Chupeeva, A. N., 2018 "A new generation of heat-resistant Nickel alloys with hierarchical structure and their application in additive technologies" [Novoe pokolenie zharoprochnyh nikelevyh splavov s ierarhicheskoj strukturoj i ih primenenie v additivnyh tekhnologiyah], Proceedings of the 13th international scientific and technical conference, Minsk, pp. 62–65.

20. Grigorovich, K. V., 2018, "Modern possibilities by the method of determination of gas-forming impurities and nonmetallic inclusions in metals and alloys" [Sovremennye vozmozhnosti metodom opredeleniya gazoobrazuyushchih primesej i nemetallicheskih vklyuchenij v metallah i splavah], Proceedings of the XV Russian annual conference of young researchers and postgraduates "Physico-chemistry and technology of inorganic materials", Moscow, pp. 24–25.

21. Additive Manufacturing. With Amperprint for 3D-Printing you Have the Powder to Create / Höganäs [electronic resource]: URL: https://www.hoganas.com/en/powder-technologies/additive-manufacturing/3d-printing-powders/ (accessed 24.10.2019).

22. A look into powder materials for metal 3d printing / 3D-Printing Industry (3DPI) [electronic resource]: URL: https://3dprintingindustry.com/news/a-look-into-powder-materials-for-metal-3d-printing-57788/ (accessed 24.10.2019).

23. Kirsankin, A. A., 2018 "Obtaining spherical powders by gas atomization for additive production" [Poluchenie sfericheskih poroshkov metodom gazovoj atomizacii dlya additivnogo proizvodstva], Proceedings of the XV Russian annual conference of young researchers and postgraduates "Physico-chemistry and technology of inorganic materials", Moscow, pp. 58–59.

24. Fadeev, A. A., 2018, "Spheroidization of metal powders of W-Ni-Fe system in thermal plasma of electric arc discharge" [Sferoidizaciya metallicheskih poroshkov sistemy W-Ni-Fe v termicheskoj plazme elektrodugovogo razryada], Proceedings of the XV Russian annual conference of young researchers and postgraduates "Physico-chemistry and technology of inorganic materials", Moscow, pp. 311–313.

25. Zlenko, M. A., Nagaytsev, M. V., Dovbysh, V. M., 2015, "Additive technologies in mechanical engineering" [Additivnye tekhnologii v mashinostroenii], GNC RF FGUP «NAMI», 220 p.

26. Barakhtin, B. K., Vasilyeva, O. V., Zhukov, A. S., Kuznetsov, P. A., 2017, "Physico-chemical processes in powder consolidation in the method of selective laser fusion" [Fiziko-himicheskie processy pri konsolidacii poroshka v metode selektivnogo lazernogo splavleniya], Proceedings of the VII international conference "Deformation and destruction of materials and nanomaterials Moscow, IMET RAN, 951 p.

27. Tungsten / TEKNA [electronic resource]: URL: http://www.tekna.com/spherical-powders/tungsten (accessed 24.10.2019).

28. Spherical powders of refractory metals for additive technologies / JSC "POLEMA" [electronic resource]: URL: http://www.polema.net/userfiles/files/сферичные%20порошки%20тугоплавких%20 металлов%20производства%20АО%20ПОЛЕМА(1).pdf (accessed 24.10.2019).

29. Stroganov, G. B., 1985, “High-Strength casting aluminum alloys” [Vysokoprochnye litejnye alyuminievye splavy], Moscow, Metallurgiya, 216 p.

30. Zoheir, F., 2011, “The influence of porosity and hot isostatic pressing treatment on wear characteristics of cast and P/M aluminum alloys”, Wear, vol. 271, pp. 1594–1601. DOI: 10.1016/j.wear.2011.01.037.

31. Padalko, A. G., 2007, “Practice of hot isostatic pressing of inorganic materials” [Praktika goryachego izostaticheskogo pressovaniya neorganicheskih materialov], Moscow, Akademkniga, 267 p.

32. James, T. Staley J., Murat, T., John, C., 2007, “The effect of increased HIP temperatures on biofilms and tensile properties of A206-T71 aluminum castings”, Materials Science and Engineering A 460-461, pp. 324-334. DOI: 10.1016/j.msea.2007.01.049

33. Belov, A. F., Bondarev, B. I., Shmakov, Yu. V., 1983, “Properties of billets from aluminum alloys after hot isostatic pressing” [Svojstva zagotovok iz alyuminievyh splavov posle goryachego izostaticheskogo pressovaniya], Non-Ferrous metals, No. 5, pp. 65–67.

34. Akopyan, T. K., 2014, “Influence of hot isostatic pressing on structure and properties of high-strength casting aluminum alloys of new generation-nikalins AC6R0, 5J and AC6N4” [Vliyanie goryachego izostaticheskogo pressovaniya na strukturu i svojstva vysokoprochnyh litejnyh alyuminievyh splavov novogo pokoleniya – nikalinov AC6R0,5ZH i AC6N4], Proceedings of XI Russian annual conference of young scientists and postgraduates “Physico-chemistry and technology of inorganic materials”, Moscow, IMET RAN, 619 p.

35. 3D Systems the Power of on Demand / 3D SYSTEMS [electronic resource]: URL: https://www.3dsystems.com/on-demand-manufacturing (accessed 24.10.2019).

36. Frontrunner for New Production Process. Powder Production and 3D Printing / SMS group [electronic resource]: URL: https://www.sms-group.com/plants/all-plants/powder-production-and-3d-printing/ (accessed 24.10.2019).

37. 3D Printing Software for Beginners and Pros / ALL3DP [electronic resource]: URL: https://all3dp.com/1/best-free-3d-printing-software-3d-printer-program/ (accessed 24.10.2019).

Получено 17.10.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 666.982.24 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-477-492

Развитие механизмов водородного растрескивания металлических систем и методов защиты стального проката от коррозионно-механического разрушения[1]

Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, П. Н. Медведев, С. Н. Кутепов, Д. В. Малий

Сергеев Николай Николаевич — доктор технических наук, профессор, профессор кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
Сергеев Александр Николаевич — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: ansergueev@gmail.com
Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Медведев Павел Николаевич — кандидат педагогических наук, доцент кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: medvedeff_82@mail.ru
Кутепов Сергей Николаевич — кандидат педагогических наук, доцент кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
Малий Дмитрий Владимирович — старший преподаватель кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

Аннотация

Хрупкое разрушение высокопрочных металлов и сплавов применяемых на предприятиях химической и нефтеперерабатывающей промышленности, вызванное воздействием агрессивных водородсодержащих сред, представляет собой серьезную научную проблему, актуальность которой за последние десятилетия резко возросла в связи с открытием аномального воздействия водорода на комплекс свойств металлов и сплавов (аномальная пластическая автодеформация железа, структурно-фазовые превращения, синергетические эффекты микропластичности, эффект обратимой потери формы в аморфных металлических сплавах и многие другие). Значительное количество источников водорода (коррозия в водных растворах, абсорбция водорода при производстве сварочных операций и нанесении технологических защитных покрытий или при катодной защите подземных трубопроводов) вызывает значительные трудности при описании процессов водородной

[1]Работа выполнена в рамках реализации федеральной целевой программе «Исследование и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы» (уникальный идентификатор проекта RFMEF 157717X0271)

деградации металлических материалов. Деградация проявляется различными способами, такими как: водородное растрескивание (ВР) высокопрочных сталей; участие водорода в процессе коррозионного растрескивания под напряжением (КРН) нержавеющих сталей; растрескивание труб ядерных реакторов, выполненных из циркониевых сплавов и охрупчивание титановых сплавов путем образования гидрида, деградация GaAs монолитных СВЧ-интегральных схем на спутниках и др. Вредное влияние водорода на механические свойства впервые было отмечено Джонсоном в 1875 г. С того времени ученые добились многих успехов в разработке металлов с оптимальными параметрами прочности и пластичности. Несмотря на многолетние исследования проблема взаимодействия систем металл-водород остается открытой в связи с разнообразием подходов и методик к оценке охрупчивающего воздействия водорода и водородсодержащих сред. Так вплоть до настоящего времени не удалось установить единый механизм взаимодействия водорода с металлическими материалами, который позволил бы объяснить всю совокупность явлений, связанных с водородным разрушением. Поэтому анализ механизмов водородного растрескивания металлических систем и разработка методов защиты стального проката от коррозионно-механического разрушения являются актуальными направлениями научной и практической деятельности.

Ключевые слова: водородное растрескивание, металлические системы, коррозионно-механическое разрушения, ресурсосберегающие технологии.

Библиография: 40 названия.

Для цитирования:
Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, П. Н. Медведев, С. Н. Кутепов, Д. В. Малий. Развитие механизмов водородного растрескивания металлических систем и методов защиты стального проката от коррозионно-механического разрушения // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 477–492.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 3.

UDC 666.982.24 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-477-492

Development of mechanisms of hydrogen cracking of metal systems and methods to protect steel products from corrosion-mechanical destruction[2]

N. N. Sergeev, A. N. Sergeev, A. E. Gvozdev, P. N. Medvedev, S. N. Kutepov, D. V. Maliy

Sergeev Nikolay Nikolaevich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
Sergeev Aleksander Nikolaevich — Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Head of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: ansergueev@gmail.com
Gvozdev Aleksander Evgenievich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief researcher of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Medvedev Pavel Nikolaevich — Candidate of Pedagogical Science, Associate Professor of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

[2]The work was carried out within the framework of the Federal Program "Research and development in priority areas of development of the scientific and technological complex of Russia for 2014–2020"(unique identifier of the project RFMEFI57717X0271).

e-mail: medvedeff_ 82@mail.ru
Kutepov Sergey Nikolaevich — Candidate of Pedagogical Science, Associate Professor of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
Maliy Dmitry Vladimirovich — Senior Lecturer of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

Abstract

The brittle destruction of high-strength metals and alloys used in the chemical and oil refining industry, caused by the influence of aggressive hydrogen-containing media, is a serious scientific issue, the relevance of which has increased dramatically in recent decades due to the discovery of the anomalous hydrogen effects on the complex properties of metals and alloys (abnormal plastic auto-deformation of iron, structural-phase transformations, synergistic effects of microplasticity, effect of reversible shape loss in amorphous metal alloys, and many others). A significant number of hydrogen sources (corrosion in aqueous solutions, hydrogen absorption in the production of welding operations and application of technological protective coatings or cathodic protection of underground pipelines) causes significant difficulties in describing the processes of hydrogen degradation of metal materials. Degradation is manifested in various ways, such as: hydrogen cracking of high-strength steels; hydrogen participation in the process of stress corrosion cracking of stainless steels; cracking of nuclear reactor tubes made of zirconium alloys and embrittlement of titanium alloys by hydride formation, GaAs degradation of monolithic microwave integrated circuits on satellites, etc. The harmful effect of hydrogen on mechanical properties was first noted by Johnson in 1875. Since then, scientists have made many advances in the development of metals with optimal parameters of strength and plasticity. Despite many years of research, the problem of interaction of metal-hydrogen systems remains open due to the variety of approaches and techniques to the assessment of embrittlement effects of hydrogen and hydrogen-containing media. So far it has not been possible to establish a single mechanism of interaction of hydrogen with metal materials, which would explain the whole set of phenomena, related to hydrogen destruction. Therefore, to analyze the mechanisms of hydrogen cracking of metal systems and to develop methods of steel products protection from corrosion-mechanical destruction are relevant areas of scientific and practical activities.

Keywords: hydrogen cracking, metal systems, corrosion-mechanical destruction, resource-saving technologies.

Bibliography: 40 titles.

For citation:
N. N. Sergeev, A. N. Sergeev, A. E. Gvozdev, P. N. Medvedev, S. N. Kutepov, D. V. Maliy, 2019, "Development of mechanisms of hydrogen cracking of metal systems and methods to protect steel products from corrosion-mechanical destruction" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 477–492.

1. Введение

Большая часть исследований ВР и КРН проводится в условиях лабораторных испытаний, на образцах, имеющих различный химический состав и физико-механические характеристики, что затрудняет создание стройной теории ВР, единой базы данных испытаний, разработку стандартизированных методов исследования и рекомендаций по производству и обработке применяемых металлов и сплавов. Еще одним фактором, затрудняющим процесс феноменологического описания процессов ВР и КРН является отсутствие систематических данных испытаний натурных образцов и их корреляции с лабораторными испытаниями [1, 2]. Различные взгляды на микромеханизмы ВР и КРН были обсуждены и подробно рассмотрены в научной литературе [3-9]. В этой связи особенно актуальной проблемой является создание комплексной методики исследования процессов ВР и КРН включающей в себя проведение испытаний точеных и натурных образцов, позволяющей определять сравнительную стойкость металлов и сплавов к растрескиванию в водородсодержащих средах [9]. Использование полученных результатов позволит определять долговечность и корректировать процессы изготовления и обработки металлов и сплавов с целью создания металлических конструкционных материалов с оптимальными физико-механическими характеристиками и химическим составом, стойких к ВР и КРН.

2. Методика исследования водородного растрескивания и коррозионно-механического разрушения металлических сплавов

Для повышения долговечности и исследования влияния внутренних и внешних факторов на чувствительность арматурных сталей к коррозионно-механическому разрушению коллективом авторов ТГПУ им. Л. Н. Толстого под руководством Н. Н. Сергеева была разработана комплексная методика ускоренных испытаний на КМР высокопрочных сталей, сущность которой включает:

1. Исследование стойкости высокопрочных сталей к ВР и КРН проводили на точеных и натурных образцах арматурных сталей марок: Ст3, Ст5, 18ГС, 20ГС, 20ГС2, 22ГСРМ, 30ГСТ, 35ГС, 20ХГ2Ц, 22Х2Г2АЮ, 23Х2Г2Т, 80С гладкокатанного и периодического профиля $\oslash 6 \ldots 22$ мм и $l = 100 \ldots 400$ мм, как в исходном (горячекатанном или термоупрочненном состоянии), так и прошедших последующую термическую обработку. При выборе водородсодержащей среды для ускоренных лабораторных испытаний исходили из того, что ее действие должно соответствовать действию среды в реальных условиях работы конструкции (характер разрушения в лабораторных и эксплуатационных условиях должен быть одинаковым), и, вместе с тем, она должна обеспечивать сокращение длительности лабораторных испытаний. В связи с этим, в качестве среды вызывающей КРН использовали кипящий раствор нитратов (60% в.ч $Ca(NO_3)_2$ + 5% в.ч. NH_4NO_3 + 35% в.ч. H_2O) при температурах 70; 90; 110℃; а для исследования ВР использовали водный раствор серной кислоты с добавлением роданистого аммония (4,5% H_2SO_4 + 2,5% NH_4CNS) при комнатной температуре с катодной поляризацией при плотности тока $D_K = 60$А/м^2, так и без нее. Дополнительно при проведении сравнительных ускоренных испытаний использовали водный раствор серной кислоты (8% H_2SO_4) с анодной поляризацией при плотности тока $D_A = 3$А/м^2. Испытания проводили с использованием коррозионных камер и рычажных установок, разработанных Н. Н. Сергеевым [10] в условиях статического нагружения (при постоянной растягивающей нагрузке) при напряжениях $\sigma_Э = (0,1 \ldots 0,9)\sigma_B$. Стойкость стали против коррозионно-механического разрушения (КМР) оценивали временем до разрушения по результатам испытаний 4...6 образцов на каждую экспериментальную точку графика. Сталь считали стойкой к растрескиванию если она не разрушилась после 200 часов испытаний при величине статических растягивающих напряжений не менее 75% от критического разрушающего напряжения [11-15].

2. Оценку влияния наводороживания, уровня растягивающих напряжений, длительности коррозионных процессов на субмикроструктурные изменения высокопрочной стали при испытаниях на длительную прочность применяли метод внутреннего трения (ВТ), позволяющий судить о характеристиках локального напряженного состояния металла. Измерения температурных зависимостей внутреннего трения (ТЗВТ) проводили на натурных образцах (d = 8, 10 и 12 мм; l = 200 мм) сталей (гладкокатанных и периодического профиля). Исследования кинетики процесса КМР производили в следующей последовательности: предварительно образцы подвергали комплексному и раздельному влиянию различных факторов – коррозионной среды, растягивающих напряжений, катодной поляризации от внешнего источника тока

при различном времени выдержки вплоть до момента предразрушения. Затем из натурных образцов вырезали образцы l = 200 мм и определяли ТЗВТ. Время между подготовкой образцов и измерением ВТ не превышало 1 часа. Измерения ТЗВТ проводили при различных температурах (20...500 ℃) при $f \sim 10^3 c^{-1}$ по резонансной методике [16]. Наблюдали изменение высоты пика Кестера под влиянием вышеуказанных факторов. Измеряли также величину низкотемпературного фона ВТ 150 ℃, который связан с наличием в материале субмикропустот. По резонансной частоте определяли величину модуля упругости. Исследовали влияние температуры отпуска на механические свойства и стойкость против растрескивания в водородсодержащих средах. Отпуск осуществляли с электронагрева в диапазоне температур 150...600 ℃ с интервалом в 50 ℃. Скорость электронагрева составляла 10...15 ℃/сек. Превращения, происходящие при отпуске, оценивали по изменению высоту пика Кестера, природу которого связывают с взаимодействием примесных атомов с дислокациями, а также с обусловленным этим взаимодействием уровнем внутренних локальных (пиковых) микронапряжений.

3. Измерение уровня остаточных напряжений производили на дифрактометре УРС-50ИМ в CoK_α излучении с автоматической записью интенсивностей линий (110) и (220). Исследования выполняли на натурных образцах, которые предварительно выдерживали под напряжением на воздухе и в среде с катодной поляризацией в течение различного периода времени. Для выявления кинетики наводороживания проводили газовый анализ образцов, электролитически наводороженных под напряжением.

4. Испытания на релаксацию напряжений при одноосном растяжении проводили на гладких образцах при комнатной температуре поддерживая скорость перемещения захвата постоянной для данной геометрии образца. Установленный в захватах испытательной машины образец нагружали и одновременно включали систему автоматического поддержания постоянства деформации на расчетной части образца, при этом регистрировали изменение нагрузки непрерывно или с таким интервалом, чтобы можно было полностью установить характер релаксации. Скорость нарастания напряжения в образце при нагружении контролировали таким образом, чтобы ее величина не превышала 700 МПа/мин. При нагружении до заданной деформации не допускается удлинение образца вследствие ползучести более чем на 0,01 мм за счет несинхронности включения системы автоматического поддержания деформации и нагружения образца.

3. Результаты и их обсуждение

3.1. Модель взаимодействие водорода с дислокационными скоплениями в металлах и металлических сплавах

Взаимодействие водорода с несовершенствами кристаллической решетки металлических материалов является важным и часто доминирующим при определении механизма водородного охрупчивания. Тем не менее, такое взаимодействие гораздо менее понятно на фундаментальном уровне, чем поведение водорода в идеальной кристаллической решетке. Такая ситуация обусловлена многообразием и сложностью взаимодействий водорода с дефектами, а также расхождением между теоретическими расчетами и экспериментальными данными, полученными в ходе исследований процесса водородного растрескивания металлических материалов. В последние десятилетия широкий спектр металлов и сплавов был исследован с точки зрения их склонности к водородному растрескиванию. При этом особое место в исследованиях взаимодействия водорода с дефектами кристаллической решетки уделяется взаимодействию водорода с дислокациями. Понимание процесса взаимодействия водорода с дислокациями имеет большое значение из-за влияния указанного взаимодействия на пластические свойства металлов и подвижность водорода. В областях, удаленных от ядра дислокации, энергию взаимодействия водорода с дислокациями обычно рассматривают в рамках механики сплошной среды. С теоретической точки зрения описание упругой энергии, обусловлено взаимодействием поля напряжений дислокации с полем деформации вокруг атома водорода, растворенного в междоузлии. Напряжения вокруг краевых, винтовых и смешанных дислокаций непрерывно возрастают с приближением к ядру [17, 18], что подразумевает соответствующий диапазон энергий связи. Модель сплошной среды неприменима в ядре дислокации, потому что требует атомистической обработки. Деформация вокруг атомов водорода в ГЦК-металлах имеет кубическую симметрию, поскольку атомы водорода в растворе занимают октаэдрические междоузлия. Ситуация принципиально отличается для ОЦК-металлов, где занятие тетраэдрических междоузлий вызывает тетрагональные искажения. Однако в действительности из экспериментальных данных [17] следует, что тетрагональное искажение отсутствует или очень мало. Следовательно, энергия взаимодействия, будучи в общем случае произведением напряжения и тензора деформации, выражается в виде [3]:

$$\varepsilon = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)V_H}{3}, \tag{1}$$

где V_H – парциальный молярный объем водорода; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения.

Для краевой дислокации можно получить следующее уравнение энергии взаимодействия [19]:

$$\varepsilon = \left(\frac{A}{r}\right)\sin\upsilon, \tag{2}$$

где r – расстояние от ядра дислокации, υ – угол между плоскостью скольжения и позиционным вектором r; A – величина, содержащая упругие постоянные материала вместе с вектором Бюргерса дислокации и парциальным молярным объемом водорода.

Таким образом, локальная энергия для атома водорода зависит от координат r и υ. В случае винтовой дислокации выражение в скобках в формуле (1) равно нулю, и в следствие этого энергия взаимодействия с водородом обычно считается пренебрежимо малой. Это, однако, может представлять собой упрощение, поскольку оно предполагает отсутствие тетрагонального искажения, что не является общепринятым [18, 20], и пренебрегает возможными ловушками в ядре. Локальное заполнение водорода вблизи мест скопления дислокаций определяется статистическим распределением Ферми-Дирака, отражающим возникновение мест заполнения [21]. Из выражения для энергии взаимодействия (2) можно рассчитать распределение энергий узлов $n(\varepsilon)$. Это позволяет сформулировать соотношение между средней концентрацией водорода в решетке (c) и химическим потенциалом водорода (μ):

$$\mu = \mu^0 + \frac{RT}{2}\ln\left(\frac{P_{H_2}}{P^0_{H_2}}\right), \tag{3}$$

где μ^0 – начальный химический потенциал; P_{H_2} – внешнее давление; $P^0_{H_2}$ – начальное давление;

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n(\varepsilon)d\varepsilon}{1 + \exp[(\varepsilon - \mu)/kT]}, \tag{4}$$

Для случая, когда почти весь водород захвачен краевыми дислокациями, получаем [2]:

$$\mu - \mu^0 = -\frac{A}{2}\sqrt{\frac{\psi\rho\pi}{c}}, \tag{5}$$

где ψ – концентрация насыщения водорода в окрестности дислокации, ρ – плотность дислокаций.

При наличии больших локальных концентраций водорода вблизи дислокаций в теоретический расчет должно быть включено взаимодействие H-H. В этом случае, предсказанная сегрегация атомов водорода на дислокациях приводит к протяженным локальным областям высокой концентрации. Образование областей высокой концентрации вносит дополнительные энергетические изменения за счет упругого размещения водородной атмосферы и образования границы между атмосферой и окружающей матрицей. Кроме того, возможна перегруппировка атомов матрицы, приводящая к образованию новой фазы, как это наблюдалось для других растворенных веществ, таких как азот в железе и кислород в кремнии [17].

Подвижность водорода может быть существенно уменьшена благодаря его взаимодействию с дислокациями. Так, водород может быть захвачен включениями, что приводит к увеличению сил сопротивления при движении дислокаций и уменьшению количества водорода в движущейся дислокации, что в свою очередь приводит к уменьшению скорости движения дислокации. Таким образом, распространение трещины может происходить в восприимчивых областях, в которых образуется более острый и более хрупкий наконечник трещины [22, 23]. Кинетика роста трещины будет резко возрастать, если дополнительно будет применяться глобальная нагрузка. Причина заключается в том, что на изменение поведения трещины влияет уменьшение подвижности дислокаций с изменением характеристик скольжения [24].

Скорость движения дислокаций с водородной атмосферой $\bar{v}_{DH}$ может быть выражена соотношением Эйнштейна-Стокса [25]:

$$\bar{v}_{DH} = MF_{dd}, \tag{6}$$

где M – подвижность водородного облака, F_{dd} – сила, движущая дислокацию.

Тогда подвижность водородного облака можно выразить, используя формулу (7)

$$M = \frac{D_{eff}}{kT}, \tag{7}$$

тогда скорость движения дислокации с водородным облаком может быть записана в виде [25]:

$$\bar{v}_{DH} = \frac{D_{eff}}{kT} \times F_{dd}, \tag{8}$$

где D_{eff} – эффективный коэффициент диффузии водорода.

Экспериментальное описание рассматриваемого взаимодействия затруднено из-за малого объема металла, в структуре которого присутствует дефект. Даже при самых высоких плотностях дислокаций $\rho = 10^{11}$см$^{-2}$ ядра обычно насыщаются при средних концентрациях выше 1 ppm (частиц на миллион). Электрохимические исследования водородопроницаемости применимы в этом режиме концентрации и широко используются для наблюдения влияния дислокаций на растворимость и диффузию водорода. Одним из высокочувствительных методов механических исследований водород-дислокационного взаимодействия (особенно при небольших концентрациях водорода) является метод внутреннего трения, который позволяет регистрировать и оценивать фазовые и структурные превращения, происходящие в металлах и сплавах. Исследование зависимостей внутреннего трения (температурных и амплитудных), позволяет с достаточной степенью точности определять параметры дислокационной структуры, особенности металлографической структуры, изменения в концентрации и расположении точечных дефектов. В таких экспериментах высота собственных пиков дислокаций уменьшается за счет добавления водорода, а новый пик (водородный максимум Снука-Кестера) возникает из-за взаимодействия водород-дислокация [26, 27]. Несмотря на то, что интерпретация максимума Снука-Кестера достаточно сложна, метод внутреннего трения остается одним из основных методов исследований кинетики процесса ВР, так как его использование позволяет оценить вклад примесей внедрения (например, C, N, H) в процесс пластификации металла при его деформации [26-28].

3.2. Анализ влияния термической обработки и легирования на чувствительность сталей к коррозионно-механическому разрушению

Проведение большого числа сравнительных испытаний наиболее широко распространенных марок арматурных сталей показало, что при высоком уровне приложенных растягивающих напряжений $(0,9\ldots0,7\sigma_B)$ практически все стали обладают высокой чувствительностью к КМР. Исключение составляют стали 23Х2Г2Т и 35ГС, которые при испытании в водном растворе 8%$\sim H_2SO_4$ с анодной поляризацией при плотности тока $D_A = 3A/\text{м}^2$ при уровне напряжений $0,7\sigma_B$ имеют достаточно высокую стойкость к растрескиванию (более 100 часов). При среднем уровне напряжений $(0,6\ldots0,4\sigma_B)$ стойкость исследуемых сталей при испытаниях в среде, вызывающей ВР практически не меняется, в то время как при испытании в водном растворе 8%$\sim H_2SO_4$ с анодной поляризацией при плотности тока $D_A = 3A/\text{м}^2$ стойкость всех исследуемых сталей значительно возрастает. Несмотря на большую разницу в абсолютных значениях стойкости образцов, испытываемых в различных средах, и характера зависимости времени до разрушения от уровня приложенных напряжений – имеется идентичность в определении порядка стойкости при проведении сравнительных испытаний.

Проведение испытаний по определению длительной прочности различных марок арматурных сталей в средах, вызывающих наводороживание, позволило обнаружить немонотонное изменение стойкости при уменьшении величины растягивающих напряжений. Для проверки и уточнения немонотонной зависимости $\sigma_Э - \tau_P$ были проведены испытания на большем числе образцов, которые показали, что увеличение уровня приложенных растягивающих напряжений приводит к сокращению инкубационного периода развития микротрещин при водородном растрескивании. Зарождение и развитие трещин при этом происходит преимущественно в объеме образца в местах локализации растягивающих напряжений на дефектных участках структуры и субструктуры.

Исследование влияния внутренних и внешних факторов на кинетику процесса КМР позволило установить, что длительная прочность термически упрочненного арматурного проката в значительной степени определяется релаксационной способностью структуры – релаксация остаточных пиковых микронапряжений, локализующихся у границ зерен и субструктурных границ способствует снижению чувствительности к растрескиванию.

Исследование влияния легирования на склонность арматурной стали 35ГС к КМР показало, что низкую чувствительность к растрескиванию стержневой арматуры, изготовленной из стали 35ГС, обеспечивает следующий химический состав: 1) при КРН – 0,28…0,34% C, 0,8…1,2% Mn, 0,6…0,9% Si, и 0,2…0,6% Al; 2) при ВР – 0,31% C, 1,03% Mn, 0,76% Si, 0,01% Al и 0,72% Ti. При этом сталь 35ГС должна прокатываться при обычных условиях прокатки, но с принудительным ограничением температуры конца прокатки после ВТМО или закалкой (870-920℃). Оптимальная температура самоотпуска зависит от количества Al. Для стали 20ГС подвергнутой легированию Zr в количестве 0,0084…0,50% сопротивление КРН достигает максимума при содержании Zr на уровне 0,50%. Исследование комплексного легирования сталей 20ГС, 20ГС2, 22ГСРМ показало, что наибольшую сопротивляемость коррозионно-механическому разрушению показывает сталь 22ГСРМ легированная B (0,52…0,53%) и Mo (0,0020 и 0,0035%).

Для перспективного использования указанных сталей требуются дополнительные исследования влияния химического состава и режимов прокатки на их свойства.

Анализ результатов испытаний на коррозионное растрескивание в растворах нитратов показал, что стержневая арматура периодического профиля из стали 80С в состоянии поставки при механических свойствах класса прочности А600 имеет достаточно высокую стойкость против КРН. Наилучшие коррозионные и механические свойства для арматуры, изготовленной из стали 80С обеспечивают структуры сорбита и тонкого перлита.

Арматура из стали марки 20ХГ2Ц в состоянии поставки при сложившейся технологии производства отличается большой нестабильностью стойкости против КРН при изменении химического состава (в основном углерода) в пределах марочного. Высокую коррозионную стойкость арматура из стали 20ХГ2Ц имеет только при содержании углерода на нижнем пределе марочного состава, что обеспечивается структурой однородного бейнита при механических свойствах на уровне класса прочности А600.

При более высоких механических свойствах арматура из стали 20ХГ2Ц имеет более низкую коррозионную стойкость.

Исследование влияния химического состава и температуры отпуска на чувствительность стали 23Х2Г2Т к КРН позволило установить, что контролируя химический состав (и прежде всего содержание углерода и хрома) и технологические режимы получения данной стали можно не только резко повысить ее сопротивляемость растрескиванию, но и получить гарантированный комплекс высоких эксплуатационных свойств – механических и коррозионных.

Наибольшую устойчивость против КРН при практически неизменной прочности для арматуры из стали 23Х2Г2Т обеспечивает 2-х часовой отпуск в интервале температур 350...400℃.

Полученные данные об изменении высоты 200° пика на ТЗВТ при отпуске стали 23Х2Г2Т в интервале температур 150...400℃, позволяют предполагать, что снижение чувствительности стали 23Х2Г2Т к КРН при отпуске обусловлено протеканием релаксационных процессов.

Проведенные исследования показывают, что влияние микроструктуры и термической обработки на чувствительность арматурной стали 23Х2Г2Т к КРН в растворах нитратов, сводится к изменению уровня и распределения остаточных напряжений в структуре стали и особенностям распределения примесей внедрения (С и N) по объему зерен.

По-видимому, наличие примесей (С и N) на границах зерен является необходимым условием для возникновения коррозионного процесса, а его скорость определяется напряженным состоянием, способностью структуры к релаксации напряжений и концентрацией агрессивной среды.

Таким образом, для повышения стойкости арматурной стали 23Х2Г2Т к КРН необходимо обеспечивать такой состав и условия термической обработки, в результате которых примеси внедрения (С и N) будут удерживаться преимущественно в объеме зерен, а структура стали будет отличаться однородностью и повышенной стойкостью к релаксации напряжений.

Установлено, что изменение прочности арматурной стали 22Х2Г2АЮ класса прочности А1000 в пределах класса не влияет на ее стойкость против КРН. Отпуск арматуры через 4,5 месяца после прокатки вызывает некоторое повышение ее устойчивости против КРН только при температурах 450℃. Однако при этом наступает сильное разупрочнение стали. Интервал времени до 48 часов между концом прокатки и началом отпуска стали не оказывает заметного влияния на ее стойкость против КРН, несмотря на то, что при этом наблюдается существенное изменение модуля упругости (Е) и ВТ (Q^{-1}), свидетельствующие о протекании необратимых процессов.

Полученные результаты о влиянии уровня прочности, температуры отпуска и интервала времени между концом прокатки и началом отпуска на стойкость против КРН стали 22Х2Г2АЮ следует считать предварительными.

Полученная разница в стойкости против КРН у лабораторных и опытной (промышленной) плавки требует тщательной проверки технологических режимов и дополнительных исследований на нескольких промышленных плавках.

4. Заключение

Разработана методика сравнительных испытаний, которая позволяет достаточно экспрессно определять стойкость против коррозионно-механического разрушения арматурных сталей. Установлено влияние термической обработки на механические и коррозионные свойства арматурного проката. Выявлены кинетические закономерности процессов разрушения высокопрочных сталей в условиях воздействия механических, тепловых, концентрационных полей и агрессивных сред, необходимые для повышения и прогнозирования долговечности арматурного проката из высокопрочных сталей в композиционных железобетонных конструкциях и сооружениях. Предложены физико-химические комплексные методы защиты черных и цветных металлов и сплавов от коррозионно-механического разрушения, которые могут обеспечить повышение долговечности высокопрочных сталей, эксплуатируемых в агрессивных водородсодержащих средах и ресурс композиционных железобетонных конструкций со стальными арматурными стержневыми высокопрочными наполнителями.

Представленные результаты могут быть использованы при разработке ресурсосберегающих и малопереходных процессов обработки материалов с применением новых нанокомпозиционных смазок и покрытий и учетом рекомендаций работ [29-40].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шашкова Л.В. Фрактально-синергетические аспекты локальной микроповреждаемости и разрушения диффузионно-активированной водородом стали: дис. . . . д-ра физ.-мат. наук: 01.04.07 / Шашкова Лидия Владимировна. – М., 2014. 336 с.

2. Шаповалов В.И. Легирование водородом.– Днепропетровск: Журфонд, 2013. 385 с.

3. Hirth J.P. Effects of hydrogen on the properties of iron and steel // Metall. Trans. A. – 1980. V. 11A. P. 861-890.

4. Troiano A.R., Hehemann R.F. Stress corrosion cracking of ferritic and austenitic stainless steels / Hydrogen Embrittlement and Stress Corrosion Cracking; R. Gibala and R.F. Hehemann (ed.). ASM, 1995. P.231-248.

5. Birnbaum, H.K. Mechanisms of hydrogen related fracture of metals / Hydrogen effects on materials behavior; N.R. Moody and A.W Thompson (eds). – TMS. Warrendale, PA. 1990. P. 639-658.

6. Lynch S.P. Chapter 1: Mechanistic and fractographic aspects of stress-corrosion cracking (SCC) // Stress Corrosion Cracking. Woodhead Publishing Limited, 2011. P. 3-89.

7. Lynch S.P. Chapter 2: Hydrogen embrittlement (HE) phenomena and mechanisms // Stress Corrosion Cracking. Woodhead Publishing Limited, 2011. P. 90-130.

8. Анализ теоретических представлений о механизмах водородного растрескивания металлов и сплавов / Н.Н. Сергеев, А.Н. Сергеев, С.Н. Кутепов, А.Е. Гвоздев, Е.В. Агеев // Известия Юго-Западного государственного университета. 2017. Т. 21, № 3(72). С. 6-33.

9. Механизмы водородного растрескивания металлов и сплавов, связанные с усилением дислокационной активности / Н.Н. Сергеев, С.Н. Кутепов, А.Е. Гвоздев, Е.В. Агеев // Известия Юго-Западного государственного университета. 2017. Т. 21, № 2(71). С. 32-47.

10. Сергеев Н. Н., Сергеев А. Н. Механические свойства и внутреннее трение высокопрочных сталей в коррозионных средах: монография. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. 430 с.

11. ГОСТ Р 9.915-2010. Металлы, сплавы, покрытия и изделия: Методы испытаний на водородное охрупчивание. – М.: Стандартинформ, 2011. 36 с.

12. ASTM F519-17. Standard Test Method for Mechanical Hydrogen Embrittlement Evaluation of Plating/Coating Processes and Service Environments / in: Annual Book of ASTM Standards, ASTM International, West Conshohocken, PA, USA, 2017.

13. ГОСТ 9.901.1-89. Единая система защиты от коррозии и старения. Металлы и сплавы. Общие требования к методам испытаний на коррозионное растрескивание. – М.: Издательство стандартов, 1993. 21 с.

14. ГОСТ 9.901.4-89. Единая система защиты от коррозии и старения. Металлы и сплавы. Испытания на коррозионное растрескивание образцов при одноосном растяжении. – М.: Издательство стандартов, 1993. 7 с.

15. ГОСТ 9.903-81. Единая система защиты от коррозии и старения. Стали и сплавы высокопрочные. Методы ускоренных испытаний на коррозионное растрескивание. – М.: Издательство стандартов, 1993. 16 с.

16. ГОСТ 25156-82. Металлы. Динамический метод определения характеристик упругости. – М.: Издательство стандартов, 1982. 21 с.

17. Hydrogen interactions with defects in crystalline solids / S. M. Myers, M. I. Baskes, H. K. Birnbaum, J. W. Corbett, G. G. DeLeo, S. K. Estreicher, E. E. Mailer, P. Jena, N. M. Johnson, R. Kirchheim, S. J. Pearton, M. J. Stavola // Rev. Mod. Phys. 1992. Vol. 64. № 2. P. 559-617.

18. Кутепов С. Н. О некоторых аспектах взаимодействия водорода с дислокационными скоплениями в металлах и сплавах // Сб. трудов XIV Российской ежегодной конференции молодых научных сотрудников и аспирантов «Физико-химия и технология неорганических материалов». (17–20.10.2017, Москва). – М.: ИМЕТ РАН, 2017. С. 42-44.

19. Kirchheim R., Hirth J.P. Hydrogen adsorption at cracks in Fe, Nb and Pd // Scr. Metall. 1982. Vol. 16. P. 475-478.

20. Zhang T.-Y., Hack J. The equilibrium concentration of hydrogen atoms ahead of a mixed mode I-mode III crack tip in single crystal iron // Metall. Mater. Trans. A. 1999. Vol. 30A. P. 155-159.

21. Hirth J.P., Carnahan B. Hydrogen adsorption at dislocations and cracks in Fe // Acta Metall. 1978. Vol. 26. P. 1795-1803.

22. Механизмы водородного растрескивания металлов и сплавов. Ч. I (ОБЗОР) / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Г. Колмаков, А. Е. Гвоздев // Материаловедение. № 3. 2018. С. 27–33.

23. Механизмы водородного растрескивания металлов и сплавов. Ч. II (ОБЗОР) / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Г. Колмаков, А. Е. Гвоздев // Материаловедение. № 4. 2018. С. 20–29.

24. Nelson H.G. Hydrogen embrittlement // Treatise on Materials Science and Technologie. 1983. Vol. 25. P. 275-359.

25. Tien J.K., Thomson A.W., Bernstein I.M., Richards R.J. Hydrogen transport by dislocation // Metall. Trans. A. 1976. Vol. 7A. P. 821-829.

26. Головин С.А., Головин И.С. Механическая спектроскопия релаксации Снуковского типа // Металловедение и термическая обработка металлов. 2012. №5 (683). С. 3-11.

27. Чуканов А.Н., Яковенко А.А. Роль водорода в деградации и деструкции малоуглеродистых сталей // Известия ТулГУ. Серия: Естественные науки. 2012. Вып. 1. С. 211-219.

28. Чуканов А.Н., Яковенко А.А., Широкий И.Ф. Механическая спектроскопия в изучении субструктурной деградации углеродистых сталей // Вестник ТГУ. 2013. Т. 18. Вып. 4. С. 1625-1626.

29. Шоршоров М.Х., Гвоздев А.Е., Золотухин В.И., Сергеев А.Н., Калинин А.А., Бреки А.Д., Сергеев Н.Н., Кузовлева О.В., Стариков Н.Е., Малий Д.В. Разработка прогрессивных технологий получения и обработки металлов, сплавов, порошковых и композиционных наноматериалов: монография / Тула, Изд-во ТулГУ, 2016. 235 с.

30. Сергеев Н.Н., Гвоздев А.Е., Сергеев А.Н., Бреки А.Д., Калинин А.А., Александров С.Е., Стариков Н.Е., Кузовлева О.В., Малий Д.В., Кутепов С.Н., Цой Е.В., Клементьев Д.С., Соломатникова Е.Б. Ресурсы деформационной способности различных материалов: учебное пособие. – Тула, Изд-во: ТулГУ, 2016. 172 с.

31. Гвоздев А.Е., Сергеев Н.Н., Минаев И.В., Тихонова И.В., Колмаков А.Г. Роль процесса зародышеобразования в развитии некоторых фазовых переходов первого рода // Материаловедение. 2015. № 1. С. 15-21.

32. Gvozdev A.E., Golyshev I.V., Minayev I.V., Sergeyev A.N., Sergeyev N.N., Tikhonova I.V., Khonelidze D.M., Kolmakov A.G. Multiparametric optimization of laser cutting of steel sheets // Inorganic Materials: Applied Research. 2015. T. 6. № 4. C. 305-310.

33. Gvozdev A.E., Bogolyubova D.N., Sergeev N.N., Kolmakov A.G., Provotorov D.A., Tikhonova I.V. Features of softening processes of aluminum, copper, and their alloys under hot deformation // Inorganic Materials: Applied Research. 2015. T. 6. № 1. C. 32-40.

34. Бреки А.Д., Гвоздев А.Е., Колмаков А.Г. Использование обобщенного треугольника паскаля для описания колебаний силы трения материалов // Материаловедение. 2016. № 11. С. 3-8.

35. Макаров Э.С., Гвоздев А.Е., Журавлев Г.М., Сапожников С.В., Сергеев А.Н., Колмаков А.Г., Бреки А.Д., Малий Д.В., Добровольский Н.Н. Анализ уравнений теории пластичности порошковых металлических систем // Чебышевский сборник. 2018, 19 (1), С. 152-166. URL: https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-1-152-166

36. Макаров Э.С., Журавлев Г.М., Гвоздев А.Е., Сапожников С.В., Сергеев А.Н. Свойства уравнений теории пластичности дилатирующих материалов в концепции пластического газа // Чебышевский сборник. 2018, 19 (2), С. 163-171. URL: https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-2-163-171

37. Журавлев Г.М., Гвоздев А.Е., Колмаков А.Г., Сергеев А.Н., Малий Д.В. Применение математического метода локальных вариаций для решения задач пластического формоизменения металлических, порошковыхи нанокомпозиционных материалов // Чебышевский сборник. 2018, 19 (4), С. 43-54. URL: https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-4-43-54

38. Макаров Э.С., Гвоздев А.Е., Журавлев Г.М., Сергеев А.Н., Минаев И.В., Бреки А.Д., Малий Д.В. Применение теории пластичности дилатирующих сред к процессам уплотнения порошков металлических систем // Чебышевский сборник. 2017, 8(4), С. 268-284. URL: https://doi.org/10.22405/2226-8383-2017-18-4-268-284

39. Гвоздев А.Е., Журавлев Г.М., Сапожников С.В. К теоретическому анализу процесса компактирования порошковых материалов прессованием // Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. 2017б № 4. С. 273-283.

40. Breki A.D., Aleksandrov S.E., Tyurikov K.S., Kolmakov A.G., Gvozdev A.E., Kalinin A.A. Antifriction properties of plasma-chemical coatings based on SiO2 with MoS2 nanoparticles under conditions of spinning friction on SHKH15 steel // Inorganic Materials: Applied Research. 2018. T. 9. № 4. C. 714-718.

REFERENCES

1. Shashkova, L.V., 2014, "Fraktal'no-sinergeticheskie aspekty lokal'noj mikropovrezhdaemosti i razrusheniya diffuzionno-aktivirovannoj vodorodom stali [Fractal-synergetic aspects of local micro-damage and destruction of diffusion-activated hydrogen steel], Moskva, Dis. ... d-ra fiz.-mat. nauk, Tula, 336 p.

2. Shapovalov, V.I., 2013, "Legirovanie vodorodom" [Hydrogen doping], Dnepropetrovsk, Zhurfond, 385 p.

3. Hirth, J.P., 1980, Effects of hydrogen on the properties of iron and steel, Metall. Trans. A., vol. 11A, pp. 861-890.

4. Troiano, A.R., Hehemann, R.F., 1995, Stress corrosion cracking of ferritic and austenitic stainless steels, Hydrogen Embrittlement and Stress Corrosion Cracking, pp. 231-248.

5. Birnbaum, H.K., 1990, Mechanisms of hydrogen related fracture of metals, Hydrogen effects on materials behavior, Warrendale, PA, pp. 639-658.

6. Lynch, S.P., 2011, Chapter 1: Mechanistic and fractographic aspects of stress-corrosion cracking (SCC), Stress Corrosion Cracking. Woodhead Publishing Limited, pp. 3-89.

7. Lynch, S.P., 2011, Chapter 2: Hydrogen embrittlement (HE) phenomena and mechanisms, Stress Corrosion Cracking. Woodhead Publishing Limited, pp. 90-130.

8. Sergeev, N.N., Sergeev, A.N., Kutepov, S.N., et al., 2017, "Analiz teoreticheskih predstavlenij o mekhanizmah vodorodnogo rastreskivaniya metallov i splavov" [Analysis of theoretical ideas about the mechanisms of hydrogen cracking of metals and alloys], Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta, vol. 21, no. 3(72), pp. 6-33.

9. Sergeev, N.N., Kutepov, S.N., Gvozdev, A.E., et al., 2017, "Mekhanizmy vodorodnogo rastreskivaniya metallov i splavov, svyazannye s usileniem dislokacionnoj aktivnosti" [Mechanisms of hydrogen cracking of metals and alloys associated with increased dislocation activity], Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta, vol. 21, no. 2(71), pp. 32-47.

10. Sergeev, N. N., Sergeev, A. N., 2018, "Mekhanicheskie svojstva i vnutrennee trenie vysokoprochnyh stalej v korrozionnyh sredah" [Mechanical properties and internal friction of high-strength steels in corrosive environments], Tula, Izd-vo TulGU, 430 p.

11. GOST R 9.915-2010, 2011, "Metally, splavy, pokrytiya i izdeliya: Metody ispytanij na vodorodnoe ohrupchivanie" [Metals, alloys, coatings and products: hydrogen embrittlement test Methods], Moskva, Standartinform, 36 p.

12. ASTM F519-17, 2017, Standard Test Method for Mechanical Hydrogen Embrittlement Evaluation of Plating, Coating Processes and Service Environments, Annual Book of ASTM Standards, ASTM International, West Conshohocken, PA, USA.

13. GOST 9.901.1-89, 1993, “Edinaya sistema zashchity ot korrozii i stareniya. Metally i splavy. Obshchie trebovaniya k metodam ispytanij na korrozionnoe rastreskivanie” [Unified system of protection against corrosion and aging. Metals and alloys. General requirements for corrosion cracking test methods], Moskva, Standartinform, 21 p.

14. GOST 9.901.4-89, 1993, “Edinaya sistema zashchity ot korrozii i stareniya. Metally i splavy. Ispytaniya na korrozionnoe rastreskivanie obrazcov pri odnoosnom rastyazhenii” [Unified system of protection against corrosion and aging. Metals and alloys. Tests for corrosion cracking of specimens under uniaxial tension], Moskva, Standartinform, 7 p.

15. GOST 9.903-81, 1993, “Edinaya sistema zashchity ot korrozii i stareniya. Stali i splavy vysokoprochnye. Metody uskorennyh ispytanij na korrozionnoe rastreskivanie” [Unified system of protection against corrosion and aging. Steel and alloys high strength. Accelerated Corrosion Cracking Test Methods], Moskva, Standartinform, 16 p.

16. GOST 25156-82, 1982, “Metally. Dinamicheskij metod opredeleniya harakteristik uprugosti” [Metals. Dynamic method of determining the characteristics of elasticity], Moskva, Standartinform, 21 p.

17. Myers, S.M., Baskes, M.I., Birnbaum H.K., et al., 1992, Hydrogen interactions with defects in crystalline solids, Rev. Mod. Phys., vol. 64, no. 2, pp. 559-617.

18. Kutepov, S.N., 2017, “On some aspects of hydrogen interaction with dislocation clusters in metals and alloys” In proceedings of XIV Russian annual conference of young researchers and graduate students “Physics and chemistry and technology of inorganic materials”, Moskva, IMET RAN, pp. 42-44.

19. Kirchheim, R., Hirth, J.P., 1982, Hydrogen adsorption at cracks in Fe, Nb and Pd, Scr. Metall, vol. 16, pp. 475-478.

20. Zhang, T.-Y., Hack, J., 1999, The equilibrium concentration of hydrogen atoms ahead of a mixed mode I-mode III crack tip in single crystal iron, Metall. Mater. Trans. A., vol. 30A, pp. 155-159.

21. Hirth, J.P., Carnahan, B., 1978, Hydrogen adsorption at dislocations and cracks in Fe, Acta Metall, vol. 26, pp. 1795-1803.

22. Sergeev, N.N., Sergeev, A.N., Kutepov, S.N., 2018, “Mekhanizmy vodorodnogo rastreskivaniya metallov i splavov. Ch. I (OBZOR)” [Mechanisms of hydrogen cracking of metals and alloys. Part I (REVIEW)], Materialovedenie, no. 3, pp. 27-33.

23. Sergeev, N.N., Sergeev, A.N., Kutepov, S.N., 2018, “Mekhanizmy vodorodnogo rastreskivaniya metallov i splavov. Ch. II (OBZOR)” [Mechanisms of hydrogen cracking of metals and alloys. Part II (REVIEW)], Materialovedenie, no. 4, pp. 20-29.

24. Nelson, H.G., 1983, Hydrogen embrittlement, Treatise on Materials Science and Technologie, vol. 25. pp. 275-359.

25. Tien, J.K., Thomson, A.W., Bernstein, I.M., et al., 1976, Hydrogen transport by dislocation, Metall. Trans. A., vol. 7A, pp. 821-829.

26. Golovin, S. A. Golovin, I. S., 2012, “Mekhanicheskaya spektroskopiya relaksacii Snukovskogo tipa” [Mechanical spectroscopy of relaxation Chukovskogo type], Metallovedenie i termicheskaya obrabotka metallov, no. 5 (683), pp. 3-11.

27. Chukanov, A. N., Yakovenko, A. A., 2012, “Rol’ vodoroda v degradacii i destrukcii malo-uglerodistyh stalej” [Role of hydrogen in degradation and destruction of low-carbon steels], Tula, Izvestiya TulGU, Seriya: Estestvennye nauki, no. 1, pp. 211-219.

28. Chukanov, A.N., Yakovenko, A.A., Wide, I.F., 2013, “Mekhanicheskaya spektroskopiya v izuchenii substrukturnoj degradacii uglerodistyh stalej” [Mechanical spectroscopy in the study of substructural degradation of carbon steels], Tomsk, Vestnik TGU, vol. 18, no. 4, pp. 1625-1626.

29. Shorshorov, M. H., Gvozdev, A. E., Zolotukhin, I. V., et al., 2016, “Razrabotka progressivnyh tekhnologij polucheniya i obrabotki metallov, splavov, poroshkovyh i kompozicionnyh nano-materialov” [Development of advanced technologies for production and processing of metals, alloys, powder and composite nanomaterials], Tula, Izd-vo TulGU, 235 p.

30. Sergeev, N. N., Gvozdev, A. E., Sergeev, A. N., et al., 2016, “Resursy deformacionnoj sposobnosti razlichnyh materialov” [Resources strain the ability of different materials], Tula, Izd-vo TulGU, 172 p.

31. Gvozdev, A.E., Sergeev, N.N., Minaev, I.V., et al., 2015, “Rol’ processa zarodysheobrazovaniya v razvitii nekotoryh fazovyh perekhodov pervogo roda” [The role of the embryo formation process in the development of some first-order phase transitions], Materialovedenie, no. 1, pp. 15-21.

32. Gvozdev, A.E., Golyshev, I.V., Minayev, I.V., et al., 2015, Multiparametric optimization of laser cutting of steel sheets, Inorganic Materials: Applied Research, vol. 6, no. 4, pp. 305-310. URL: https://doi.org/10.1134/S2075113315040115

33. Gvozdev, A.E., Bogolyubova, D.N., Sergeev, N.N., 2015, Features of softening processes of aluminum, copper, and their alloys under hot deformation, Inorganic Materials: Applied Research, vol. 6. no. 1, pp. 32-40. URL: https://doi.org/10.1134/S2075113315010086

34. Brake, A.D., Gvozdev, A.E., Kolmakov, A.G., 2016, “Ispol’zovanie obobshchennogo treugol’nika paskalya dlya opisaniya kolebanij sily treniya materialov” [The use of the generalized Pascal triangle to describe the vibrations of the friction force of materials], Materialovedenie, no. 11, pp. 3-8.

35. Makarov, E.S., Gvozdev, A.E., Zhuravlev, G.M., et al., 2018, Analysis of plasticity theory equations of powder metal systems, Chebyshevskii Sbornik, vol.19 (1), pp.152-166. URL: https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-1-152-166

36. Makarov, E.S., Zhuravlev, G.M., Gvozdev, A.E., et al., 2018, The equations of the plasticity theory properties of dilating materials in the concept of plastic gas, Chebyshevskii Sbornik, vol. 19 (2), pp. 163-171. URL: https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-2-163-171

37. Zhuravlev, G.M., Gvozdev, A.E., Kolmakov, A.G., et al., 2018, Application of mathematical method of local variations to solve problems of plastic formification of metal, powder and nanocomposition materials, Chebyshevskii Sbornik, vol. 19 (4), pp. 43-54. URL: https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-4-43-54

38. Makarov, E.S., Gvozdev, A.E., Zhuravlev, G.M., et al., 2017, Application of plasticity theory of dilating media to sealing processes of powders of metallic systems, Chebyshevskii Sbornik, vol. 18 (4), pp. 268-284. URL: https://doi.org/10.22405/2226-8383-2017-18-4-268-284.

39. Gvozdev, A.E., Zhuravlev, G.M., Sapozhnikov, S.V., 2017, "K teoreticheskomu analizu processa kompaktirovaniya poroshkovyh materialov pressovaniem" [Theoretical analysis of the process of compacting powder materials by pressing], Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Nauki o Zemle, no. 4, pp. 273-283.

40. Breki, A.D., Aleksandrov, S.E., Tyurikov, K.S., et al., 2018, Antifriction properties of plasma-chemical coatings based on SiO2 with MoS2 nanoparticles under conditions of spinning friction on SHKH15 steel, Inorganic Materials: Applied Research, vol. 9, no 4, pp. 714-718. URL: https://doi.org/10.1134/S2075113318040081

Получено 27.09.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 51(091) DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-3-493-504

Связи между польскими и московскими математиками в первой половине XX века

Г. С. Смирнова

Смирнова Галина Сергеевна — кандидат физико-математических наук, доцент, механико-математический факультета, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: galiafr@mail.ru

Аннотация

В статье рассказывается об истории возникновения Варшавской математической школы В. Серпинского и Львовской школы функционального анализа С. Банаха, сыгравших важную роль в развитии новых областей математики в первой половине XX в. Особое внимание уделено взаимосвязям между польскими и московскими математиками в период между двумя мировыми войнами. Большую часть своих выдающихся результатов, в особенности по топологии, московские ученые публиковали в только что созданных польских математических журналах. Лидеры школ постоянно поддерживали тесные дружеские отношения, свидетельством чему являются сохранившиеся письма Н. Н. Лузина и В. Серпинского, П. С. Урысона и К. Куратовского, Н. К. Бари и А. Райхмана, в которых среди прочих обсуждаются вопросы организации математических исследований.

Освещено участие польских ученых в работе нескольких важных математических форумов, проходивших в то время в СССР: Первого Всесоюзного съезда математиков в Харькове (1930 г.), Международной конференции по дифференциальной геометрии и тензорному анализу (Москва, 1934 г.) и Международной топологической конференции (Москва, 1935 г.). Отмечено, что и в Москве, и в польских университетах в первой половине XX века начинают работать научные студенческие семинары, тематика которых также свидетельствует о постоянном интересе как польских, так и московских математиков к исследованиям своих коллег.

Ключевые слова: история математики, польская математическая школа, московская математическая школа

Библиография: 48 названий.

Для цитирования:
Г. С. Смирнова. Связи между польскими и московскими математиками в первой половине XX века // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 493–504.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 3.

UDC 51(091) DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-3-493-504

Relations between polish and moscow mathematicians in the first half of the XXth century

G. S. Smirnova

Smirnova Galina Sergeevna — candidate of physical and mathematical sciences, assistant professor, department of mechanics and mathematics, Moscow State M. V. Lomonosov University (Moscow).
e-mail: galiafr@mail.ru

Abstract

The article is devoted to the appearance of the famous Warsaw mathematical School of V. Sierpinski and Lviv School of Functional Analysis of S. Banach. These schools have played an important role in the development of new areas of mathematics in the first half of the 20th century. Particular attention is paid to the interrelations between Polish and Moscow mathematicians in the period between the two world wars. Most of their outstanding results, especially in topology, Moscow scientists published in the newly created Polish mathematical journals. The leaders of the schools constantly maintained close friendly relations, as evidenced by the surviving letters of N. N. Luzin and V. Sierpinsky, P. S. Uryson and K. Kuratovsky, N. K. Bari and A. Rajchman, in which, among others, the organization of mathematical research was discussed.

The participation of Polish scientists in the work of several important mathematical forums held at that time in the USSR was covered: the First Congress of Mathematicians of the USSR in Kharkov (1930), the International Conference on Differential Geometry and Tensor Analysis (Moscow, 1934) and the International Topological Conference (Moscow, 1935). It is noted that in Moscow and in Polish universities in the first half of the 20th century scientific student seminars were starting to work, the themes of which also have indicated the constant interest of both Polish and Moscow mathematicians in their colleagues research.

Keywords: history of Mathematics, Polish mathematical school, Moscow mathematical school

Bibliography: 48 titles.

For citation:
G. S. Smirnova, 2019, "Relations between polish and moscow mathematicians in the first half of the XXth century vol. 20, no. 3, pp. 493–504.

1. Введение

Одной из особенностей развития математики конца XIX – первой половины XX вв. стало появление большого числа математических школ, в которых решение важных научных проблем и развитие отдельных дисциплин происходило усилиями не одного человека, а целого коллектива, сформировавшегося вокруг выдающихся личностей. Чаще всего в качестве одного из важных факторов, способствующих созданию математической школы, выступает фактор территориальный.

Также на рубеже веков одной из тенденций высшего математического образования в большинстве европейских университетов стало появление сначала учебных, а потом и специальных научных студенческих семинаров, что способствовало привлечению способной молодежи к интенсивной исследовательской работе с первых лет обучения.

Наиболее показательной в этом плане является история создания и деятельности Московской философско-математической школы, из которой выросла и стала признанным лидером Московская школа теории функций Д. Ф. Егорова и Н. Н. Лузина, представители которой сами в свою очередь стали основателями новых математических школ Советского Союза. Это – и топологическая школа Александрова и Урысона, и школа теории вероятностей Хинчина и Колмогорова, и школа функционального анализа, основы которой были заложены исследованиями Люстерника и Шнирельмана, и многие другие, о которых существует богатая историко-математическая литература.

Важную роль в развитии математики и ее новых областей в первой половине XX века сыграла знаменитая Польская математическая школа, лидеры которой всегда были тесно связаны с лидерами Московской школы. Истории польской математики посвящено большое количество научных исследований, в особенности, польских историков науки (например, [12, 16, 17, 18]), однако на русском языке она, на наш взгляд, освещена недостаточно. Можно назвать большое и основательное освещение становления и развития Польской школы теории множеств Г. И. Синкевич [7] и лишь небольшое число статей (например, [3, 6]). И это, пожалуй, все.

Своей статьей мы постараемся немного восполнить этот пробел, изложив небольшую часть материалов о связях между московскими и польскими математиками в период между двумя Мировыми войнами.

2. Польская математика перед Первой мировой войной

Главными центрами развития польской математической мысли к концу XIX в. стали три университетских города: Краков, Львов и Варшава.

В Кракове с 1364 г. действовал один из старейших европейских университетов – Ягеллонский, в котором начинал свое математическое образование Николай Коперник. В 1865–1884 гг. курсы по теории рядов и теории чисел там читал Ф. Мертенс (Franz Carl Josef Mertens, 1840–1927), университетский друг Кантора. После реформы образования Польши конца XVIII в. в составе университета было две кафедры математики. На рубеже XIX–XX вв. ими руководили Казимеж Жоравский (с 1895 г. по 1918 г.), позже переехавший в Варшаву, и Станислав Заремба (с 1900 г.).

Основной областью интересов К. Жоравского (Kazimierz Żorawski, 1866–1953), ученика норвежского геометра Софуса Ли, была дифференциальная геометрия. Его коллеги и ученики Антоний Гоборский (Antoni Maria Emilian Hoborski, 1879–1940) и Станислав Голомб (Stanisław Gołąb, 1902–1980), получившие много интересных и важных результатов, в сентябре 1934 г. принимали участие в первой Московской Международной конференции по тензорной дифференциальной геометрии.

С. Заремба (Stanisław Zaremba, 1863–1942) учился в Петербурге и Париже. Позже получил широкую известность своими работами по гармоническому анализу, рядам Дирихле, функциям Грина, теоретической арифметике. Считался ведущим среди математиков Кракова. С исследований С. Зарембы берет начало выдающаяся Краковская школа теории дифференциальных уравнений.

Львовский университет, основанный в 1661 г., был вторым важным центром польской науки. Кафедрами математики здесь руководили Юзеф Пузына (Józef Puzyna,1856–1919) и Вацлав Серпинский (Wacław Sierpiński, 1882–1969). К 1913 г. два талантливых ученика Серпинского защитили во Львове докторские диссертации: Стефан Мазуркевич (Stefan Mazurkiewicz, 1888–1945) – по топологии и Станислав Рузевич (Stanisław Ruziewicz, 1889–1941) – по теории действительных функций. В том же году во Львов приехал чрезвычайно одаренный математик Зигмунд Янишевский (Zygmunt Janiszewski, 1888–1920), получивший образование в различных университетах Европы и в 1911 г. защитивший докторскую диссертацию по топологии под руководством А. Лебега.

В Варшавском университете в конце XIX – начале XX вв. работали известные российские математики М. А. Андреевский (1848–1879), Н. Н. Алексеев (1827–1881), Н. Я. Сонин (1849–1915), и позже – В. А. Анисимов (1860–1907), Н. Н. Зинин (1854–1910) и Г. Ф. Вороной (1868–1908).

Последний – Георгий Федосеевич Вороной, выпускник Петербургского университета, впоследствии член-корреспондент Российской Академии наук, оказал наибольшее влияние на становление В. Серпинского, всегда вспоминавшего своего учителя с большой теплотой [20]. Благодаря ему Серпинский на всю жизнь сохранил в исследованиях «петербургский» стиль — четкую, почти инженерную постановку задачи, подробное «алгоритмически» обоснованное решение и конкретный результат, удобный для дальнейшего применения.

С 1897 г. в Варшаве печатаются первые польские чисто математические журналы «Wiadomości Matematyczne», выходившие до 1939 г. под редакцией С. Дикштейна (Samuel Dickstein, 1851–1939) и возрожденные Польским Математическим обществом в 1955 г. До этого широкую известность в Польше имел основанный С. Дикштейном в 1888 г. журнал «Prace Matematyczno-Fysiczne».

В своем докладе 1957 г. «О математике в Польше», Серпинский писал: «*...до войны было только четыре профессора-математика: Жоравский и Заремба в Кракове, Пузына и я – во Львове... мы дружески беседовали обо всем, кроме математики, потому что все мы работали в разных областях этой науки: Жоравский – в области геометрии, Заремба – в теории дифференциальных уравнений, Пузына – в теории аналитических функций, Дикштейн – в истории математики, я – в теории множеств и теории чисел. Не было проблем, которые одновременно интересовали бы нас всех...*» [18].

3. Реформа организации математических исследований в Польше

В 1915 г. многие польские ученые, работавшие в различных учебных заведениях страны, вернулись в Варшаву и стали преподавать здесь. Ядро варшавских математиков составили Серпинский (профессор Варшавского университета с 1919 г.), Янишевский (профессор Варшавского университета с 1918 г.) и Мазуркевич (профессор Варшавского университета с 1919 г.). Они не хотели мириться с существовавшим в стране положением дел в математических исследованиях, и в революционном 1917 г. Янишевский написал свою знаменитую статью «О запросах науки в Польше» [14], в которой предлагал сосредоточить усилия польских математиков на некоторых избранных областях математики: теории множеств, топологии и теории действительных функций, т.е. тех областях математики, которыми с успехом занимались во Львове. Совместный труд учёных должен был привести к большей эффективности работы, чем индивидуальные усилия. Кроме того, Янишевский предлагал создать новый математический журнал, посвящённый именно этим областям математики, и статьи в нем должны были бы печататься на иностранных языках, используемых в работе математических конгрессов.

В 1920 г. появился первый номер «Fundamenta Mathematicae» – первого в мире специализированного математического журнала, с которым постоянно сотрудничали ведущие польские математики В. Серпинский, К. Куратовский, К. Борсук, С. Эйленберг, С. Мазуркевич, А. Тарский, С. Сакс, Й. Марцинкевич, С. Улам, а также многие иностранные ученые. С 1920 по 1939 гг. вышло 32 тома журнала, в которых, например, московские математики опубликовали 35 статей.

П. С. Александров писал о важной роли этого журнала в сотрудничестве польской и советской математических школ [10]. С одной стороны, для московских математиков большую роль играла ориентация журнала на наиболее значительные проблемы науки, с другой стороны – после Первой мировой войны математики всей Европы испытывали острый недостаток в научной периодике, т.к. деятельность научных журналов практически прекратилась. Восстановление их работы Д. Ф. Егоров считал одной из насущных задач математики того периода и приложил огромные усилия по возобновлению издания «Математического сборника», прерванного в 1919 г. В 1924 г. из печати вышел 31 том, и статьи Сборника отныне публиковались на всех основных европейских языках.

Тесное сотрудничество, возникшее между московскими и варшавскими учеными, объясняется, в первую очередь, обстоятельствами биографии В. Серпинского. В начале Первой мировой войны он, как подданный Австро-Венгрии, был интернирован в Вятку, но после больших хлопот и усилий профессоров Московского университета Д. Ф. Егорова и Б. К. Млодзеевского получил разрешение на жительство в Москве, где почти три года посещал лекции и семинары в Московском университете. Между ним и его ровесником Н. Н. Лузиным – одним из будущих основателей знаменитой Московской математической школы теории функций зародилась большая дружба, основанная на общности научных интересов и закрепленная совместными исследованиями и результатами, послужившая в дальнейшем источником вдохновения для обоих математиков и их учеников. Помимо восьми совместных статей, между ними все время (вплоть до смерти Лузина в 1950 г.) велась научная переписка, стимулировавшая научные поиски обоих. К сожалению, архив Серпинского был сожжен немцами в 1943 г. и сохранилось лишь несколько писем Серпинского к Лузину [5]. Урысон и Куратовский, Н. К. Бари и А. Райхман также постоянно обменивались письмами друг с другом несмотря на трудности работы почты в то время.

В феврале 1918 г. Серпинский вернулся во Львов, а осенью того же года был приглашен в Варшавский университет, где в течение тридцати последующих лет заведовал кафедрой математики. Позднее в Варшаву из Львова также переехали К. Куратовский (Kazimierz Kuratowski, 1896–1980) и А. Тарский (Alfred Tarski, 1901–1983). После отъезда Серпинского с коллегами математическая жизнь во Львове не остановилась. Там возник второй важный центр польской научной мысли XX века: Г. Штейнгауз (Hugo Dyonizy Steinhaus, 1887–1972), С. Банах (Stefan Banach, 1892–1945) и О. Никодим (Otton Marcin Nikodym, 1887–1974) основали еще одну выдающуюся польскую математическую школу – школу функционального анализа. В 1929 г. здесь стал выходить новый специализированный журнал «Studia Mathematica», в скором времени занявший положение одного из ведущих в этой области.

Важную роль в становлении и организации деятельности польского математического сообщества сыграло Краковское общество математиков, в 1920 г. реорганизованное в Польское математические общество. Характеристику отношений математических коллективов Польши к 1926 г. мы можем найти в письме Лузина к А. Данжуа от 30 сентября 1926 г.: *«... насколько я могу судить по беседам с польскими математиками, прибывшими в Варшаву, в Польше господствует современное движение, а классика сохраняется лишь в Кракове. Что касается Львова, Ковно и Вильно, то эти города настолько “модернизированы”, что смотрят на все глазами Варшавы, то есть школы г-на Серпинского.»* [4].

4. Участие в работе национальных математических съездов и международных конференций

Установившиеся дружеские отношения между лидерами московской и варшавской математических школ способствовали тесному сотрудничеству ученых наших стран во всех областях математики. На Первом Всероссийском съезде математиков в Москве весной 1927 г. Н. Н. Лузин в своем докладе о состоянии дел в теории функций действительного переменного сообщил о результатах Банаха, Тарского и Серпинского, а П. С. Александров в докладе о топологии – о достижениях Шаудера.

Осенью 1927 г. московские математики (Н. Н. Лузин, Д. Е. Меньшов, Н. К. Бари) участвовали в работе Первого съезда польских математиков во Львове, одним из важных результатов которого стала организация в 1929 г. журнала «Studia Mathematica», посвящённого исследованиям в области функционального анализа и теории вероятностей. В 1934 г. А. Н. Колмогоров опубликовал в этом журнале статью по топологии.

В 1930 г. в Харькове состоялся I Всесоюзный съезд математиков, на который из Варшавы приехали три математика [8]:

1) профессор **Пшеборский**, Антоний-Бонифаций Павлович (Antoni Bonifacy Przeborski, 1871–1941), который до 1922 г. работал в Харьковском университете, в 1920–22 – ректором, а с 1 сентября 1922 г. возглавлял кафедру теоретической механики Варшавского университета;

2) Ежи **Нейман** (урожденный Бессарабии Юрий Чеславович Нейман, Jerzy Neyman, 1894–1981), начавший свое образование в Харьковском университете у С. Н. Бернштейна, защитивший диссертацию в Варшаве под руководством Серпинского и продолживший изучение статистики в Лондоне и Париже у Карла Пирсона и Эмиля Бореля; в 1927 г. в Варшаве основал лабораторию биометрики [19];

3) Александр **Райхман** (Aleksander Rajchman, 1890–1940), основные труды которого относятся к теории ортогональных и тригонометрических рядов и теории вероятностей [24].

Делегатом Львовского Научного общества им. Т. Шевченко на этом съезде был Мирон Онуфриевич **Зарицкий** (1889–1961), ученик Серпинского по Варшавскому университету, с 1939 г. работавший в Львовском университете: в 1939–1941 гг. — продеканом, а в 1945–1947 гг. — деканом физико-математического факультета.

В 1934 г. в Москве директором Института математики Московского университета был назначен А. Н. Колмогоров, и одним из его первых шагов в области международных отношений стал план создания целой серии конференций по различным областям математики. К сожалению, осуществились лишь два звена этой широко задуманной цепи конференций. Первой в том же году прошла конференция по дифференциальной геометрии и тензорному анализу, председателем оргкомитета которой был профессор Московского университета В. Ф. Каган. В состав польской делегации вошли краковские математики А. Гоборский и С. Голомб, а также математик и философ из Варшавы А. Вундгейлер (A. Wundheiler, 1902–1957).

Ученик Зарембы Антоний **Гоборский** (Antoni Maria Emilian Józef Franciszek Hoborski, 1879–1940) в 1919 г. стал одним из главных организаторов и первым ректором Академии горного дела в Кракове (ныне – Университет науки и технологий AGH), соучредителем Польского математического общества. С 1921 г. Гоборский – также профессор Ягеллонского университета, где читал курс лекций по дифференциальной геометрии. В своем учебнике по теории кривых (1933) Гоборский последовательно использовал векторный метод, который был новинкой в математической литературе того времени. Его учебник по теории поверхностей содержит первое на польском языке изложение тензорного исчисления. В 1939 г. жизнь Гоборского оборвалась в концентрационном лагере Заксенхаузен. В настоящее время в память о профессоре на обложку каждого выпуска основанного им журнала «Opuscula Mathematica» помещается его фотография.

Станислав **Голомб** (Stanisław Gołąb, 1902–1980) – после окончания Ягеллонского университета занимался научными исследованиями в Голландии под руководством Я. Схоутена и позже – в Италии у Леви-Чивиты, в Чехии и в Геттингене. Так же, как и Гоборский, был профессором Академии горного дела и Ягеллонского университета. Научные интересы Голомба лежали в области аффинной геометрии, дифференциальной геометрии и функциональных уравнений.

Третий польский участник конференции Александр **Вундгейлер** (Alexander Wundheiler, 1902–1957) – варшавский математик и философ, о котором сохранилось не очень много биографических сведений. В 1927 г. окончил Варшавский университет, в 1932 г. получил докторскую степень. В 1932 г. был приглашенным докладчиком на Международном математическом конгрессе в Цюрихе на секции Механики и математической физики. До эмиграции 1939 г. преподавал механику в Варшавском университете. В США преподавал в различных учебных заведениях и публиковал работы по механике, прикладной математике, символической логике и философии.

О нем в своих воспоминаниях пишет С. Улам [21]: *«Я провел большую часть своего времени с другими поляками, которые нашли свой путь в Кембридж – Тарски, Стефан Бергман и Александр Вундгейлер. Все они были ужасно несчастны, а Вундгейлер больше всех. У него всегда была какая-то «Weltschmerz» [мировая скорбь – Г.С.]… Это был талантливый математик, очень вежливый, приятный и умный человек, ум которого было довольно сложно описать – это был ум мудрого критика, которому, правда, недоставало чего-то для математической изобретательности… Его интересовала геометрия датского математика Схоутена, которая по мне была слишком формальной и символьной… Когда я уехал из Кембриджа, мы постепенно потеряли друг друга из виду. Потом я узнал, что он покончил с собой… Он был одинок, и много раз говорил мне, что несчастлив из-за своей внешности. Он был очень невысокого роста, а лицо его, в котором читался глубокий ум, было не из тех, что женщины обычно находят привлекательными. Он считал себя безобразным, и это угнетало его»*.

Заметим, что Улам, может быть, не совсем прав в том, что Вундгейлер был одинок. По сведениям компьютерной биографической энциклопедии Prabook в 1952 г. Вундгейлер женился (https://prabook.com/web/alexander_wundt.wundheiler/1047943) на Литгард Наторп (Luitgard Natorp, 1924–1994), эмигрантке из Германии, с которой в последние годы своей жизни занимался исследованиями по символической логике [22, 23]. Мы нашли изображение Вундгейлера на одной из архивных фотографий участников конференции 1934 г., размещенных на сайте кафедры дифференциальной геометрии и топологии механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

На конференции Вундгейлер выступил с докладом, посвященным классификации геометрий с помощью инвариантов группы движений пространства, предложенной в 1872 г. Ф. Клейном (т.н. Эрлангенская программа) [9]. Вундгейлер приступил к исследованию понятия инварианта, используя язык тензорного исчисления, не существовавшего во времена Клейна, и попытался классифицировать возникающие инварианты в соответствии с их «силой». По мнению Схоутена (Schouten Jan Arnoldus, 1883–1971), этот подход Вундгейлера, использующий полученные с помощью избыточных координат сильные и слабые аффиноры, был многообещающим в смысле механических приложений дифференциальной геометрии [9]. Еще раньше Схоутен интересовался этой проблематикой и вместе со своими учениками посвятил ей ряд работ. Голомб с учениками также много работал в этом направлении на протяжении всей своей жизни. Удивительно, что сам Вундгейлер после 1934 г. работ, посвященных теории геометрических объектов, не публиковал.

На Московской топологической конференции 1935 г. состав польской делегации был впечатляющим: В. Серпинский, К. Куратовский, С. Мазуркевич, К. Борсук из Варшавы и молодой талантливый львовский тополог Ю. Шаудер.

Стефан **Мазуркевич** (1888–1945) еще в 1913 г. получил свой первый выдающийся результат в топологии – развивая идеи Янишевского о неприводимых континуумах, он решил задачу характеризации общих непрерывных кривых (или общих жордановых континуумов), т. е. непрерывных образов отрезка, определив локально связные континуумы и доказав, что именно они являются непрерывными образами отрезка. Возникла топология континуумов, блестяще развитая в Польше (Янишевский, Мазуркевич, Серпинский, Куратовский, Кнастер) и в Соединенных Штатах Америки. Александров высоко оценивал результаты польских топологов: «*Высшими достижениями этой ветви топологии, после построения Брауэром в 1909 г. первых неразложимых континуумов, я считаю построение Кнастером наследственно неразложимого континуума и доказательство Бингом топологической единственности таких континуумов («псевдодуга»)*» [1].

Ученик Мазуркевича, Кароль **Борсук** (Karol Borsuk, 1905–1982) в 1930 г. защитил докторскую диссертацию, в которой начал разрабатывать свою теорию ретрактов, соединившую методы и подходы как теоретико-множественной, так и алгебраической топологии.

Юлиуш **Шаудер** (Juliusz Paweł Schauder, 1899–1943) учился в Львовском университете у Рузевича, Штейнгауза и Банаха, затем – в Лейпциге и Париже. В Париже началось его успешное сотрудничество с молодым Ж. Лере (Jean Leray, 1906–1998), результатом чего стала совместная работа [15], в которой они ввели топологические рассуждения в функциональный анализ, тем самым изменив вектор развития этой математической дисциплины. В Москве подобными вопросами занимались П.С. Александров и А.Н. Тихонов [11], и сейчас одна из известных теорем о неподвижных точках называется теоремой Шаудера–Тихонова (обобщение теоремы Шаудера на случай локально выпуклых топологических векторных пространств).

После присоединения Львова к Советскому Союзу в 1939 г. связи с московскими математиками стали теснее. Очень много интересного об этом периоде жизни львовских математиков можно узнать из воспоминаний профессора механико-математического факультета М.И. Вишика (1921–2012), который в 1939 г. учился во Львовском университете [2]. В воспоминаниях одного из учеников Шаудера Р.С. Ингардена [13] рассказывается о том, что в это время в университете некоторые профессора организовали специальные научные семинары с приглашенными участниками. Шаудер весной 1940 г. решил вести такой семинар по непрерывным группам и в качестве основной книги, необходимой к изучению, взял недавно изданную в Москве книгу Л.С. Понтрягина (1938).

В течение 1940–41 учебного года во Львов приезжали П.С. Александров, М. Крейн, Л. А. Люстерник и С. Л. Соболев. С другой стороны, львовские ученые (Банах, Мазур, Шаудер, Сакс) в 1940 г. участвовали в Киевской конференции по функциональному анализу.

Серпинский и Куратовский приняли участие в работе секции «Топологическая теория множеств». Александров высоко оценивал вклад Куратовского в развитие топологии. В [1] он писал: «*В 1922–1924 гг. общая топология достигла существенно нового уровня вследствие определения Куратовским наиболее общих топологических пространств, построения теории бикомпактных пространств и доказательства первых основных метризационных теорем, а также примыкающих к ним предложений (например, леммы Урысона)*». Однако на этой конференции Куратовский и Серпинский рассказывали о полученных ими результатах, относящихся скорее к дескриптивной теории множеств. Доклад **Куратовского** назывался «О проективных множествах». Эти его исследования были направлены на решение проблемы построения теории борелевских, проективных множеств и множеств со свойством Бэра в метрических пространствах и определения их области общности, поставленной в 1927 г. Ф. Хаусдорфом. **Серпинский** сделал на конференции в Москве сразу три доклада: «О взаимнооднозначных и в одну сторону непрерывных отображениях», «Об отображениях множеств, даваемых функциями Бэра» и «О проективном множестве второго класса в пространстве замкнутых плоских множеств», в котором изложил свой новый результат 1935 г., доложенный на майском заседании Польского математического общества.

На заседания этой секции специально приезжал Н. Н. Лузин, который хотя и приветствовал всех участников от имени Академии наук СССР, но выступать с научным докладом не стал, поскольку общая тематика конференции отличалась от направления его математических исследований в то время. Годом позже это обстоятельство стало одним из тех, которые ставились Лузину в вину (т.н. «дело Лузина»). Серпинский выступил в поддержку Лузина что, к сожалению, дало обратный эффект: Лузин был вынужден прекратить активное общение с польскими математиками. И даже спустя 12 лет в 1948 г. А. Н. Колмогорову, П. С. Александрову и К. К. Марджанашвили была запрещена поездка на VI съезд польских математиков. Причина отказа заведующего отделом пропаганды и агитации ЦК КПСС была следующей: «*Польский профессор Серпинский известен как один из самых реакционных польских математиков и буржуазных националистов. В 1936 г. в связи со статьей в газете "Правда", критиковавшей академика Н. Н. Лузина за преклонение перед иностранщиной и неправильное отношение к молодым научным кадрам, он выступил в печати в защиту Н. Н. Лузина с нападками на советскую печать. Серпинский препятствовал деятельности прогрессивной части польских студентов... Учитывая, что VI съезд польских математиков связан с чествованием реакционного польского профессора Серпинского, Отдел пропаганды и агитации ЦК ВКП(б) просьбу академика Вавилова о посылке на съезд математиков не поддерживает*».

Выдающийся американский тополог С. Лефшец (1884–1972), выступая на Московской конференции 1935 г. от имени американской делегации, говорил: «*Для людей науки недостаточно читать в печати и невозможно, так как слишком много печатается; но очень важно войти в соприкосновение друг с другом. И важно, чтобы такое соприкосновение было чаще*».

К сожалению, ситуация в Советском Союзе, да и во всем мире ухудшалась. Уже начиная с 1932 г., выезд за границу стал невозможен и научные контакты с мировым математическим сообществом были прерваны. Только фантастическая энергия П. С. Александрова позволила ему организовать эту необычайную по представительству конференцию. Единственным благоприятным событием этого периода можно назвать включение в 1939 г. Львова и его области в состав СССР, в результате чего идеи Банаха и его школы функционального анализа стали беспрепятственно распространяться в математических кругах всего Советского Союза, чему, конечно же, способствовали и поездки Банаха, Мазура и Шаудера в Москву, Киев, Тбилиси, а также выступления московских математиков во Львове.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров П. С. Вступительное слово // УМН. 1979. Том 34, Вып. 6(210). С. 11–13.

2. Демидович В. Б. Интервью с М. И. Вишиком // Мехматяне вспоминают. М., 2008. С. 68–91.

3. Мельников И. Г. Выдающийся польский математик Вацлав Серпинский (К 85-летию со дня рождения) // В. Серпинский. 250 задач по элементарной теории чисел. М., 1968. С. 3–13.

4. Письма Н. Н. Лузина к А. Данжуа // Историко-математические исследования. М., Наука. 1978. Вып. 23. С. 314–348.

5. Письма В. Серпинского к Н. Н. Лузину // Историко-математические исследования. М., 1979. Вып. 24. С. 366-373.

6. Серпинский В. Математика в Польше // Матем. просвещение. М. 1959. Вып. 4. С. 87–93.

7. Синкевич Г. И. Георг Кантор & Польская математическая школа. — СПб. 2012.

8. Труды Первого Всесоюзного съезда математиков. Харьков, 24–29 июня 1930 г. — М.-Л.: ОНТИ. 1936.

9. Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике. Под ред. проф. В. Ф. Кагана. Москва-Ленинград, 1937. Вып. IV.

10. Aleksandrow P. S. O pewnych przejawach współpracy polskiej i radzieckiej szkoły matematycznej w dziedzinie topologii i teorii mnogości // Wiadomości Matematyczne. 1963. T. 6 Z. 2. S. 175–180.

11. Bogatov E. Key moments of the mutual influence of the Polish and Soviet schools of nonlinear functional analysis in the 1920s-1950s // Antiquitates Mathematicae. 2017. Vol. 11(1). P. 131–156.

12. Duda R. Leaders of Polish mathematics between the two world wars // Commentationes Mathematicae. Wroclaw, 2013. Vol. 53 N 2. P. 5–12.

13. Ingarden R. S. Juliusz Schauder — personal reminiscences // Topological Methods in Nonlinear Analysis Journal of the Juliusz Schauder Center. 1993. V. 2(1). P. 1–14.

14. Janishewski Z. O potrzebach matematyki w Polsce // Nauka Polska. 1918. T. 1. S. 11–18.

15. Leray J., Schauder J. Topologie et équations fonctionnelles // Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. 1934. Sér. 3. Band 51. S. 45–78.

16. Murawski R. The Philosophy of Mathematics and Logic in the 1920s and 1930s in Poland — Basel: Springer. 2014.

17. Przeniosło M. Kontakty naukowe polskich i rosyjskich matematyków w dwudziestoleciu międzywojennym // Studia z Dziejów Rosji i Europy Srodkowo-Wschodniej. 2014. XLIX: 1. S. 115–129.

18. Przeniosło M. Szkoły matematyczne w międzywojennej Polsce i ich związki z nauką światową // Przegląd Nauk Historycznych. 2016. R. XV. N. 2.

19. Reid C. Neyman – from Life. — New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1982.

20. Sierpiński W. Georgij Woronoj // Wiadomości Matematyczne. 1909. T. 13. Z. 1-4. S. 115–117.

21. Ulam S. Adventures of a Mathematician. — Berkeley. 1976.

22. Who's Who in Polish America. — New York: Harbinger House. 1943.

23. Wundheiler L., Wundheiler A. Some logical concepts for syntax // Machine translation of languages. Fourteen essays. New York, John Wiley & Sons (co-published with The Technology Press). 1955. P. 194–207.

24. Zygmund A. Aleksander Rajchman (1890–1940) // Wiadomości Matematyczne. 1987. T. XXVII. S. 219–231.

REFERENCES

1. Alexandrov, P. S. 1979, "*Introduction*", *Uspekhi Mathematicheskikh Nauk*, vol. 34, no. 6 (210), pp. 11–13.

2. Demidovich V. B. 2008, "Interview with M.I. Vishik", *Mekhmatiane vspominaiut.* M., pp. 68–91.

3. Melnikov, I. G. 1968, "Outstanding Polish mathematician Vaclav Serpinsky (on the occasion of his 85th birthday)", *V. Serpinski. 250 zadach po elementarnoi teorii chisel.* [Serpinsky V. 250 problems of the elementary theory of numbers]. Moscow, pp. 3–13.

4. Letters of N. N. Luzin to A. Denjoy, 1978, *Istoriko-matematicheskie issledovanija* M., vol. 23, pp. 314–348.

5. Letters of V. Serpinski to N. N. Luzin, 1979, *Istoriko-matematicheskie issledovanija* M., vol. 24, pp. 366–373.

6. Sierpinski, V. 1959, "Mathematics in Poland", *Matematicheskoe prosveshchenie* M., vol. 4., pp. 87–93.

7. Sinkevich, G. I. 2012, *Georg Kantor & Polskaia matematicheskaja shkola.* [Georg Cantor & Polish School of Mathematics]. Saint Petersburg, 2012.

8. *Trudy Pervogo Vsesoiuznogo s'ezda matematikov. Karkov, 24–29 ijunia 1930 g.* [Proceedings of the First Congress of Mathematicians of the USSR. Kharkov, 24–29 June, 1930]. Moscow–Leningrad, 1936.

9. 1937, *Trudy seminara po vektornomu i tenzornomu analizy c ikh prilozhenijami k geometrii, mekhanike i phizike* (Proceedings of the seminar on vector and tensor analysis with their applications to geometry, mechanics and physics), ed. Prof. B. F. Kagan. Moscow–Leningrad, vol. IV.

10. Alexandrov, P. S. 1963, "O pewnych przejawach współpracy polskiej i radzieckiej szkoły matematycznej w dziedzinie topologii i teorii mnogości", *Wiadomości Matematyczne.* vol. 6, no. 2, pp. 175–180.

11. Bogatov, E. 2017, "Key moments of the mutual influence of the Polish and Soviet schools of nonlinear functional analysis in the 1920s-1950s", *Antiquitates Mathematicae*, vol. 11(1), pp. 131–156.

12. Duda, R. 2013, "Leaders of Polish mathematics between the two world wars", *Commentationes Mathematicae*, Wroclaw, vol. 53, no. 2, pp. 5–12.

13. Ingarden, R. S. "Juliusz Schauder — personal reminiscences", *Topological Methods in Nonlinear Analysis Journal of the Juliusz Schauder Center*, vol. 2(1), pp. 1–14.

14. Janiszewski, Z. 1918, "On the needs of mathematics in Poland", *Nauka Polska*, vol. 1, pp. 11–18.

15. Leray,J. & Schauder, J. 1934, "Topologie et équations fonctionnelles", *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, sér. 3, vol. 51, pp. 45–78.

16. Murawski, R. 2014, *The Philosophy of Mathematics and Logic in the 1920s and 1930s in Poland*, Springer, Basel.

17. Przeniosło, M. 2014, “Kontakty naukowe polskich i rosyjskich matematyków w dwudziestoleciu międzywojennym“, *Studia z Dziejów Rosji i Europy Srodkowo-Wschodniej*, vol. XLIX, no. 1, pp. 115–129.

18. Przeniosło, M. 2016, “Szkoły matematyczne w międzywojennej Polsce i ich związki z nauką światową“, *Przegląd Nauk Historycznych*, vol. XV, no. 2.

19. Reid, C. 1982, *Neyman – from Life*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin.

20. Sierpiński, W. 1909, “Georgij Woronoj“, *Wiadomości Matematyczne*, vol.13, no. 1–4, pp. 115–117.

21. Ulam, S. 1976, *Adventures of a Mathematician*, Berkeley.

22. 1943, *Who's Who in Polish America*, Harbinger Hous,eNew York.

23. Wundheiler, L. & Wundheiler, A. 1955, “Some logical concepts for syntax“,*Machine translation of languages. Fourteen essays*, John Wiley & Sons (co-published with The Technology Press),New York, pp. 194–207.

24. Zygmund, A. 1987, “Aleksander Rajchman (1890–1940)“, *Wiadomości Matematyczne*, 1987. vol. XXVII, pp. 219–231.

Получено 14.10.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 930.2 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-3-505-512

Ранние работы Н. Е. Жуковского по кинематике жидкого тела

И. А. Тюлина, В. Н. Чиненова

Тюлина Ирина Александровна — доцент, кандидат физико-математических наук, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

Чиненова Вера Николаевна — доцент, кандидат физико-математических наук, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: v.chinenova@yandex.ru

Аннотация

В данной статье анализируются наиболее крупные и важные работы Н. Е. Жуковского (1847-1921), связанные с развитием теоретической гидродинамики: о кинематике жидкого тела, о движении твердого тела имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью и о видоизменении метода Кирхгофа.

Работа посвящена 170-летию со дня рождения выдающегося русского ученого Николая Егоровича Жуковского.

Ключевые слова: Н. Е. Жуковский, теоретическая гидродинамика

Библиография: 7 названий.

Для цитирования:
И. А. Тюлина, В. Н. Чиненова. Ранние работы Н. Е. Жуковского по кинематике жидкого тела // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 505–512.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 3.

UDC 930.2 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-3-505-512

Early works by Zhukovsky on the kinematics of a liquid body

I. A. Tyulina, V. N. Chinenova

Tyulina Irina Aleksandrovna — assistant professor, candidate of physical and mathematical sciences, Mechanics and Mathematics Department, Moscow State M. V. Lomonosov University (Moscow).

Chinenova Vera Nikolaevna — assistant professor, candidate of physical and mathematical sciences, Mechanics and Mathematics Department, Moscow State M. V. Lomonosov University (Moscow).

e-mail: v.chinenova@yandex.ru

Abstract

This article analyzes the largest and most important works of N. E. Zhukovsky (1847-1921), related to the development of theoretical hydrodynamics: on the kinematics of a liquid body, on the motion of a solid body having a cavity filled with a homogeneous droplet liquid and on the modification of the Kirchhoff method.

The work is devoted to the 170th anniversary of the birth of the outstanding Russian scientist Nikolai Egorovich Zhukovsky.

Keywords: N. E. Zhukovsky, theoretical hydrodynamics

Bibliography: 7 titles.

For citation:

I. A. Tyulina, V. N. Chinenjva, 2019, "Early works by Zhukovsky on the kinematics of a liquid body", Chebyshevskii sbornik, vol. 20, no. 3, pp. 505–512.

Подводя итоги своей научной деятельности за 40 лет, Н. Е. Жуковский отметил: «Мои главные работы по гидромеханике представляют три статьи: «Кинематика жидкого тела», «Движение твердого тела с полостями, наполненными жидкостью» и «Видоизменение метода Кирхгофа». Во всех своих работах я стремился нарисовать картину движения, дать его отчетливый геометрический образ» [1, с.60].

Как известно, первая опубликованная научная работа Жуковского относится к гидродинамике и посвящена кинематике жидкого тела [2], она была опубликована в 1876 г. в VIII томе «Математического сборника», издаваемого Московским математическим обществом. Эту работу Николай Егорович представил физико-математическому факультету Московского университета для соискания степени магистра прикладной математики. Защита прошла успешно, оппонентами были: профессор физики А. Г. Столетов, декан физико-математического факультета математик-геометр В. Я. Цингер и профессор механики Ф. А. Слудский, возглавлявший в то время кафедру прикладной математики.

Прежде всего, Жуковский рассматривает исследования, примерно, за 50 лет (1827–1874), проведенные в различных странах такими крупными учеными как Г. Гельмгольц (1858), Г. Кирхгоф (1874), А. Коши (1827), В. Томсон (1867) и другими.

Анализ сочинений выбранных авторов позволяет Н. Е. Жуковскому сделать вывод, что теория движения простейших неизменяемых систем развивалась на основе обобщения идей о движении твердого тела, общая же теория движения изменяемой системы базировалась на соображениях теории упругости и гидродинамики; при этом оба направления развивались независимо друг от друга.

Магистерская диссертация Н. Е. Жуковского «Кинематика жидкого тела» была посвящена той области механики, в которой он работал всю свою жизнь и в которой им были достигнуты крупные успехи.

Кинематика, т.е. учение о геометрической стороне движений для случая твердого тела, с аналитической точки зрения, была разработана Л. Эйлером еще во второй половине XVIII века. В работе Л. Пуансо «Начала статики» (1803 г.) была дана наглядная, геометрически ясная картина равновесия. Краткий оригинальный его трактат «Новая теория вращения тел» (1834), посвящён в основном вопросам кинематики и динамики твёрдого тела, с неподвижной точкой, явился новым существенным вкладом учёного в эти разделы механики. В кинематике Пуансо ввёл: понятие пары вращений (с доказательством её эквивалентности поступательному движению); понятие мгновенной оси вращения твёрдого тела, совершающего сферическое движение; понятие центральной оси системы вращений и поступательных движений (мгновенная винтовая ось).

Задача, которую поставил Жуковский, была сложнее. Вместо твердого тела Николай Егорович изучал движение жидкости, частицы которой могли свободно перемещаться друг относительно друга. По кинематике жидких тел первые работы принадлежали Ж. Лагранжу и О. Коши, но они носили исключительно аналитический характер. Задача, которую ставил в своей работе Жуковский, состояла в том, чтобы методами геометрии внести наглядность и ясность в эту сложную область механики.

Магистерская диссертация Н. Е. Жуковского «Кинематика жидкого тела» посвящена выявлению законов распределения скоростей и ускорений частицы жидкости и представляет по существу введение в общий курс гидромеханики.

Второй вывод Жуковского — в кинематике жидкого тела использовался только аналитический метод исследования, а геометрическая теория движения изменяемой системы находится на первых степенях своего развития. Однако обстоятельное геометрическое исследование может, по мнению Жуковского, «всего более осветить трудные вопросы гидродинамики» [2, с. 10]. Далее он проводит блестящее исследование, предпочитая, где было можно, геометрические соображения аналитическим.

В первой главе изложено движение бесконечно малой жидкой частицы, «при этом мы [Н. Е. Жуковский] старались обобщить различные воззрения на этот вопрос, исходя из одного общего исследования о свойствах поверхности удлинения Коши» [2, с. 6].

Вторая глава «Исследование течения жидкости» посвящена изучению линий токов и скоростей движущейся жидкости. В ней Жуковский вводит новый термин, «характеризующий, как линии токов, так и скорости точек жидкости, – *течение жидкости*». Глава начинается общим геометрическим и кинематическим исследованием течения жидкости и кончается специальным изучением течения жидкости без сжатия и вращения. В этой главе Н. Е. Жуковскому принадлежит общий метод исследования и теоремы о зависимости изменения жидкой частицы от кривизны линий токов и теория критических точек. Здесь он дает определение особых точек. «Будем называть критическими точки, в которых линии токов пересекаются, соприкасаются или имеют бесконечно большую кривизну» [2, с. 97].

Третью главу под названием «Сложение и разложение течений жидкости» Николай Егорович называет «компилятивной»; в ней излагается согласно с приемами исследования, предложенными во 2-й главе, учение о сложении и разложении течений жидкости, которое установили Г. Гельмгольц, Г. Рох, В. Томсон, Р. Липшиц и Э. Бельтрам.

Четвертая глава носит название «Об ускорениях точек движущейся жидкости». Н. Е. Жуковский начинает ее «общими теоремами об ускорениях, стараясь при этом выставить с возможной ясностью идеи В.В. Преображенского и теорему Липшица, которые, на наш взгляд, должны играть высокую роль в гидродинамике» [2, с. 7]. Глава оканчивается приложением найденных общих результатов к исследованию перманентного движения несжимаемой жидкости и движения несжимаемой жидкости, для которой давление равно нулю. В этой главе Н. Е. Жуковскому принадлежит обобщение теоремы Кориолиса и многие новые результаты по перманентному движению, которые значительно пополняют теоремы найденные Р. Клебшем.

В этой работе Н. Е. Жуковский совершенно ясно высказывает свою точку зрения о методе исследования: «Мы старались сделать изложение по возможности простым, предпочитая, где было возможно, геометрические соображения аналитическим и пользуясь криволинейными координатами, имеющие непосредственное кинематическое значение в разбираемом вопросе».

Важно отметить, что во всей работе рассматривается общий случай сжимаемой жидкости и отмечаются особенности жидкости несжимаемой.

Именно историко-научный анализ, позволил Жуковскому утверждать, что «Та высокая степень ясности, которая была внесена в область динамики твердого тела геометрическими исследованиями движения неизменяемой системы, заставляет ожидать значительного успеха гидродинамики от сближения ее с кинематикой изменяемой системы» [2, с. 5].

Выдающимся сочинением по гидромеханике была работа Николая Егоровича «О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные капельной жидкостью» (1885) [3], удостоенная Московским университетом премии профессора Брашмана. Эта работа имеет принципиальное значение не только для гидромеханики. Методы, разработанные Жуковским, дают возможность решать задачи в области астрономии (исследование законов вращения планет), баллистики (теория движения снарядов с жидким наполнением).

Решение первых задач об обтекании тел жидкостью и о силах, которые при этом возникают, принадлежат Л. Эйлеру; Ж. Лагранжем разработаны общие методы для такого исследования.

Н. Е. Жуковский доказал, что при изучении поступательных движений тел с жидким наполнением мы можем пользоваться теми же самыми уравнениями механики, что и при изучении сплошного твердого тела. Вращательное движение твердого тела вызывает относительное движение жидкости в полостях, и законы вращательного движения твердого тела с жидким наполнением будут совершенно другими.

Николай Егорович выяснил, что относительное движение идеальной жидкости в полостях вполне определяется движением тела. Как только движение жидкости будет определено (считая скорости на границах полостей известными), тогда, рассматривая твердое тело и жидкость в полостях как одну динамическую систему, можно получить основные дифференциальные уравнения движения тела. Оказывается, что движение тела совершается так, как будто бы жидкие массы были заменены эквивалентными твердыми телами. Массы этих эквивалентных тел равны массам жидких наполнений; центры тяжести эквивалентных тел совпадают с центрами тяжести объемов жидкостей, заполняющих полости. Однако моменты инерции эквивалентных тел относительно любой оси, проходящей через их центры тяжести, будут *меньше* моментов инерции соответственной жидкой массы относительно той же оси. Если же тело с жидким наполнением имеет некоторое начальное движение, то в этом случае его движение происходит так, как будто внутри тела находится вращающийся гироскоп, кинематический момент которого вполне определяется начальным движением жидкости. Эти рассуждения справедливы для идеальной жидкости. Естественно, что реальные жидкости тем ближе к идеальной, чем меньше внутреннее трение при движении частиц жидкости друг относительно друга. Например, вода, спирт, бензин имеют очень малую вязкость, малое внутреннее трение, а смазочные масла, мед имеют большое внутреннее трение (большую вязкость).

Для труднейшей проблемы гидромеханики, когда вязкостью жидкости пренебречь нельзя (даже для случая полостей простейших геометрических очертаний), Жуковский указал метод определения того *предельного движения,* которое будет иметь тело по истечении достаточно большого времени. Он сформулировал теорему: «Если в теле имеется какая-нибудь полость, наполненная трущейся жидкостью, и такой системе сообщены какие-нибудь начальные скорости, то движение ее будет стремиться к предельному состоянию, при котором одна из главных осей инерции рассматриваемых масс займет направление главного момента начальных количеств движения, и вся система будет вращаться около нее как одно неизменяемое тело с постоянной угловой скоростью, получаемой от разделения главного момента начальных количеств движения на момент инерции системы относительно этой оси» [3, с.181].

Поясним эту теорему Жуковского. Для однородного тела главные центральные оси инерции будут совпадать с осями симметрии. Так, например, для однородного шара любая прямая, проходящая через центр шара, будет главной осью инерции. Землю, на которой мы живем, можно приближенно рассматривать как немного сплюснутый шар, плотность этого шара зависит только от глубины погружения. Внутренняя часть Земли находится, по-видимому, в расплавленном состоянии, т.е. представляет собой сильно вязкую жидкость. У немного сплющенного шара (точно говоря, эллипсоида вращения) одна из главных центральных осей инерции будет совпадать с «осью Земли», т.е. с прямой, проходящей через Северный и Южный полюсы и являющейся осью симметрии эллипсоида вращения. Жуковский видел в факте вращения Земли около своей оси симметрии подтверждение полученных им теоретических результатов.

«Не этой ли теоремой, – пишет в заключении своего сочинения Жуковский, – следует объяснить то обстоятельство, что, несмотря на всякие случайные начальные скорости, планеты вращаются около своих главных осей инерции?» В факте вращения Земли около своей оси симметрии он видел подтверждение полученных им теоретических результатов.

Кстати сказать, что строгая теория движения артиллерийских снарядов с жидким наполнением основывается на методах, развитых Жуковским в этой работе.

Особенно важными и интересными являются работы по устойчивости движения ракет с баками, частично заполненными жидким окислителем и горючим. В наши дни ученые успешно продолжили исследования Николая Егоровича по проблеме движения тел с полостями, наполненными капельной жидкостью.

Характерно, что в этом теоретическом и математическом по своему стилю трактате содержится описание собственных экспериментов Жуковского, которые были выполнены для проверки некоторых частных результатов, выведенных им теоретическим путём. Здесь же он наметил новые опыты, которые следовало бы провести для дальнейшего изучения вопроса и для определения численных значений некоторых параметров движения.

Это сочинение Жуковского положило начало циклу исследований, имеющих большое научное и практическое значение. Работа была представлена на соискание премии профессора Брашмана. Отзыв на это выдающееся произведение механики был составлен учителем Николая Егоровича, профессором Ф.А. Слудским. Он писал: «Если бы сочинение Николая Егоровича состояло только из шести последних страниц, то и тогда оно было бы вполне достойно премии профессора Брашмана». Впоследствии оно неоднократно служило исходной работой в ряде важных научных и технических исследований.

В 1890 г. появилось другое крупное исследование Н. Е. Жуковского «Видоизменение метода Кирхгофа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока» [4]. Н. Е. Жуковский дает оригинальный и эффективный метод решения важнейшей задачи гидромеханики, относящейся к *теории струй*. Развитие этой теории тесно связано с определением сил воздействия потока воздуха на движущиеся в нем тела, что было использовано в дальнейшем в его работах по аэродинамике.

Решение первых задач об обтекании тел жидкостью и о силах, которые при этом возникают, принадлежат еще Эйлеру; Лагранжем разработаны общие методы для такого исследования.

Известно, что в механике приходится при изучении движений тел вносить те или иные упрощения, заменяя реальные условия некоторыми фиктивными, не существующими в природе, но близко к ним подходящими. В гидромеханике вместо действительных жидкостей, между частицами которых существуют силы сцепления (вязких жидкостей) рассматривают так называемые идеальные жидкости, совершенно лишенные вязкости. Оказывается, что для решения некоторых вопросов такое упрощение достаточно. Применение этого упрощения к задаче обтекания тел приводит к совершенно парадоксальному выводу: оказывается, что идеальная жидкость, обтекающая погруженное в жидкость тело, не оказывает на тело никакого давления (так называемый парадокс Даламбера). Опыт показывает, что, наоборот, жидкость, обтекающая тело, оказывает на тело иногда очень большое давление [5, с. 33]. Таким образом, предположение о жидкости, совершенно лишенной сил вязкости и плавно обтекающей погруженное в нее тело, не соответствует тому, что имеет место в действительности, когда не идеальная, а реально существующая жидкость обтекает погруженное в жидкость тело. Французский ученый А. Навье и англичанин Дж. Стокс, которые вывели уравнения, для решения задач, связанных с течением вязкой жидкости, учитывали влияние вязкости. Другой подход – можно оставить идеальную жидкость, но учесть то обстоятельство, что плавного обтекания в действительности нет; сзади обтекаемого тела струи текущей жидкости срываются, и образуется область с беспорядочным сравнительно медленным движением -– область гидродинамической тени. Течения с образованием таких струй и гидродинамической тени впервые были изучены для некоторых частных случаев в работах Г. Гельмгольца и Г. Кирхгофа, ученых, которых Николай Егорович знал не только по их работам, но и слушал их во время своей первой заграничной поездки в 1877 году.

Решение задач на течение жидкостей с образованием срывов в общем случае представляет очень большие трудности так же, как и в случае вязкой жидкости; но, как это выяснил Кирхгоф, есть один случай, где исследование упрощается; это случай так называемого плоскопараллельного течения. В математике в XIX столетии трудами крупнейших ученых была разработана теория функций комплексного переменного, облегчающая изучение плоскопараллельных течений жидкости. Кирхгоф разработал метод решения задач на обтекание со срывом пластинок в условиях плоскопараллельного течения. Используя этот метод, английский ученый Рэлей получил свою знаменитую формулу, решая вопрос о силах, действующих на плоскую пластинку, помещенную в потоке, набегающем на плоскую пластинку и образующем срыв.

Но число задач, решенных методом Кирхгофа, было весьма ограничено.

В работе «Видоизменение метода Кирхгофа» Н. Е. Жуковский дал существенное усовершенствование метода, предложенного для решения подобных задач Кирхгофом, и разобрал своим методом большое число частных примеров, например, решил задачу на обтекание пластинок различного сечения (пластинки ковшеобразной формы или пластики, помещенной в потоке, ограниченном двумя параллельными твердыми стенками, и т.д.).

Хорошо известно, что если тело произвольной формы перемещать в жидкости или газе равномерно, поступательно и прямолинейно, то эффект действия окружающей среды можно представить в виде системы сил, распределенных по поверхности движущегося тела и не зависящих от «истории» движения тела. Эта система сил может быть в общем случае приведена к одной результирующей силе и к одной результирующей паре сил. Проекция результирующей силы на направление скорости поступательного движения тела называется лобовым сопротивлением. В реальных жидкостях и газах результирующая поверхностных сил воздействия среды складывается из местных сил трения, расположенных в касательных плоскостях к поверхности обтекаемого тела, и местных сил нормальных давлений, направленных по перпендикулярам к поверхности, ограничивающей тело.

Проекция на направление скорости движения тела результирующей всех местных сил нормальных давлений называется сопротивлением давления. Возникновение сопротивления давления обусловлено вязкостью жидкости или газа. Поток жидкости, без трения, плавно обтекающей какое-либо тело, приводит к такому распределению местных нормальных давлений по поверхности тела, что результирующая этих давлений не дает составляющей в направлении движения тела. Если при обтекании тела образуются свободные струи, тогда давление в струйной области понижается по сравнению с давлением в невозмущенном потоке. Сила сопротивления, возникающая при образовании струй, может быть рассчитана методами, предложенными Н. Е. Жуковским [6, с. 40].

Жуковский вводит две ортогональные линии, которые называет *образующей и направляющей* сетями. Причем, образующая сеть дает в плоскости изображения линии тока и эквипотенциальных линий струйного течения, кинематические и динамические характеристики которого нужно еще найти. Направляющая сеть должна соответствовать или стенкам контуров, или свободным струям. «Все умение решить задачу заключается в том, чтобы подобрать *образующую и направляющую* сети, которые удовлетворяли бы условиям данной задачи. Мы идем, однако, обратным путем: выбрав направляющую и образующую сети. Мы исследуем, какой задаче они соответствуют» [4, с. 504].

Жуковский видоизменил метод Кирхгофа, позволяющий решать задачи при одной критической точке, и разработал свой наглядный геометрический метод, позволяющий изучить струйное течение жидкости при любом числе струй и критических точек. Наиболее трудные задачи методом Кирхгофа были решены русскими учеными Д. К. Бобылевым и И. В. Мещерским, которые подробно исследовали задачу о сопротивлении клина, помещенного в поток жидкости и газа. Мещерский особенно детально произвел расчеты, дал таблицы для определения силы давления потока в зависимости от угла клина и от направления потока. Н. Е. Жуковский решил своим методом не только задачи, рассмотренные указанными авторами, но и ряд новых задач.

В конце своего мемуара он применяет свой метод для исследования действия турбин.

Метод Жуковского в теории струй позволяет быстро учесть физические особенности задачи, и он гораздо удобнее других методов позволяет получить конкретный численный ответ при решении практических задач. Многие из вопросов, затронутых в работе Жуковского, были впоследствии развиты как учеными нашей страны, так и за границей [6, с. 44].

В заключении к этой работе Жуковский указывает, что «при некотором видоизменении метода возможно также решение задач об ударе беспредельного потока на тела, ограниченные кривыми контурами, и об истечении жидкостей из сосудов с кривыми стенками. Мы решили несколько таких задач, но нам не удалось, несмотря на продолжительные изыскания, решить задачу об ударе беспредельного потока на круглый цилиндр. Может быть, эта задача могла быть разрешена как предельный случай задачи об ударе потока на многогранный контур, причем в пределе выходящие углы дали бы конечное значение для скорости» [4, с. 626].

Новый метод математического рассмотрения задач струйной теории сопротивления, предложенный Жуковским в этой замечательной работе, получил всеобщее признание в мировой гидродинамической литературе и в настоящее время приводится почти во всех учебниках.

В «Лекциях по гидродинамике» Н. Е. Жуковский писал: «...главная часть успешных динамических исследований нашего века выпала на долю гидродинамики. Если в старое время гидродинамика изгонялась из курсов теоретической механики, как недостойная этого названия, то теперь, разумеется, она должна занять видное место, являясь одной из блестящих глав механики» [7].

В весеннем полугодии 1886 г. Жуковский читал курс гидродинамики, впервые выделенный в качестве самостоятельной дисциплины в университете. Этот курс, содержащий много нового, был опубликовал в «Ученых записках Московского университета» за 1887 г.

Н. Е. Жуковским рассматривались задачи, посвященные различным инженерным проблемам прикладной механики, чрезвычайно актуальные для практики того времени. Работы Жуковского представляют не только весьма серьезный вклад в область прикладной механики, но также и эффективный метод современного университетского преподавания механико-математических дисциплин и исследований: геометрического представления и моделирования.

Н. Е. Жуковский, как профессор Технического училища и один из самых активных докладчиков Политехнического общества,поддерживал связь с инженерами и был в курсе разнообразных технических проблем. От вопросов чисто теоретических, которым посвящена, например, его диссертация, Николай Егорович постепенно переходит к вопросам, которые ставила современная техника.

Так, его классическая работа «О гидравлическом ударе в водопроводных трубах», переведенная на немецкий, английский и французский языки, выдвинула Жуковского на первое место среди теоретиков-механиков, работавших в области гидравлики.

Об этом исследовании Жуковского написано в [5, с. 47] А. А. Космодемьянским. В работе «О гидравлическом ударе» видно, насколько тесно были переплетены интересы и способности Н. Е. Жуковского — математические, экспериментальные и инженерные.

Исследования Н. Е. Жуковского по кинематике жидкого тела, проведенные с большим мастерством, точно и просто изложенные, широко используются современными учеными, работающими в области гидродинамики и аэродинамики.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуковский Н. Е. Механика в Московском университете за последнее пятидесятилетие. Собр. соч., т. VII, М.–Л.: ГИТТЛ, 1950. С. 57–65.
2. Жуковский Н. Е. Кинематика жидкого тела. Собр. соч., т. II. М.–Л.: ГИТТЛ,1949. С. 5–142.
3. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч., т. II. М.–Л.: ГИТТЛ, 1949. С. 152–309.
4. Жуковский Н. Е. Видоизменение метода Кирхгофа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока. Собр. соч., т. II. М.–Л.: ГИТТЛ, 1949. С. 489–626.
5. Голубев В. В. Жуковский. М.: Ин-т компьт.иссл-й, 2002, 216 с.
6. Космодемьянский А. А. Николай Егорович Жуковский (1847–1921). М.: Наука. 1984, 192 с.
7. Жуковский Н. Е. Лекции по гидродинамике. Собр. соч., т. II. М.–Л.: ГИТТЛ, 1949. С. 316–488.

REFERENCES

1. Zhukovsky N. E., 1950, "Mechanics at Moscow University for the last fifty years", Coll. Works, vol. VII, GITTL, M.–L., pp. 57–65.
2. Zhukovsky N. E., 1949, "Kinematics of the liquid body" , Coll. Works, vol. II, GITTL, M.–L., pp. 5–142.
3. Zhukovsky N. E., 1949, "On the motion of a solid body having cavities filled with a homogeneous dropping liquid", Coll. Works, vol. II, GITTL, M.-L., pp. 152-309.
4. Zhukovsky N. E., 1949, "A modification of Kirchhoff's method for determining the motion of a fluid in two dimensions at a constant velocity given on an unknown current line", Coll. Works, vol. II, GITTL, M.–L., pp. 489-626.
5. Golubev V. V., 2002, "Zhukovsky", M.: Institute of Computer Science, 216 p.
6. Kosmodem'yanskiy A. A., 1984, "Nikolai Egorovich Zhukovsky (1847–1921)", M.: Nauka. 192 p.
7. Zhukovsky N. E., 1949, "Lectures on hydrodynamics", Coll. Works, vol. II, GITTL, M.–L., pp. 316–488.

Получено 14.10.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 539.67:621.785 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-513-531

История создания метода оценки поврежденности сталей на базе механической спектроскопии[1]

А. Н. Чуканов, А. Е. Гвоздев, А. Н. Сергеев, А. А. Яковенко, П. Н. Медведев, С. Н. Кутепов, Д. В. Малий

Чуканов Александр Николаевич — доктор технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: alexchukanov@yandex.ru
Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Сергеев Александр Николаевич — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: ansergueev@gmail.com
Яковенко Александра Александровна — кандидат технических наук, инженер-технолог, ООО «Металлург-Туламаш» (г. Тула).
e-mail: Alexyakovenk@gmail.com
Медведев Павел Николаевич — кандидат педагогических наук, доцент кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: medvedeff_82@mail.ru
Кутепов Сергей Николаевич — кандидат педагогических наук, доцент кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
Малий Дмитрий Владимирович — старший преподаватель кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

Аннотация

На фоне становления и развития одного из перспективных методов физического материаловедения – механической спектроскопии - представлена история открытия тульскими металлофизиками Н.Н. Сергеевым и В.С. Агеевым ранее неизвестного эффекта неупругого поведения сталей. Описана их первая попытка теоретического описания механизма его формирования. Изложена дальнейшая судьба обнаруженного эффекта в переплетении с судьбами его исследователей. Предложена история реновации забытого почти на 30 лет открытия. Подробно представлена реализованная через десятилетия последователями первооткрывателей многоплановая программа масштабного изучения механизма незаслуженно

[1]Работа выполнена в рамках реализации федеральной целевой программе «Исследование и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы» (уникальный идентификатор проекта RFMEF 157717X0271)

забытого эффекта. Описаны споры со скептиками. Изложены основные альтернативные идеи, как причины научных споров вокруг природы эффекта. Даны ответы на критические вопросы, позволившие авторам статьи убедить скептиков в реальности обнаруженного явления и создать на его базе новое направление в исследовании сталей и сплавов – метод оценки их повреждаемости по результатам механической спектроскопии. Описаны примеры промышленного применения созданного направления. Перечислены области применения разработанной авторами на основе возрожденного метода методики применения комплекса эффектов неупругости для разномасштабного описания структурных изменений в сталях и сплавах в ходе внешних деструктивных воздействий различной природы. Описаны новые пути развития и совершенствования предложенного авторами метода в исследовании изделий, полученных как по типовой слитковой технологии, так и в условиях аддитивных технологий 3d печати.

Ключевые слова: механическая спектроскопия, внутреннее трение, температурная зависимость, деформация, насыщение водородом, эффект неупругости, механизм, деструкция, новое направление исследований, современное состояние.

Библиография: 37 названия.

Для цитирования:
А. Н. Чуканов, А. Е. Гвоздев, А. Н. Сергеев, А. А. Яковенко, П. Н. Медведев, С. Н. Кутепов, Д. В. Малий. История создания метода оценки поврежденности сталей на базе механической спектроскопии // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 513–531.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 3.

UDC 539.67:621.785 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-513-531

The story of the creation method of assessing damage of steels on the basis of mechanical spectroscopy[2]

A. N. Chukanov, A. E. Gvozdev, A. N. Sergeev, A. A. Yakovenko, P. N. Medvedev, S. N. Kutepov, D. V. Maliy

Chukanov Alexander Nikolaevich — Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Leading researcher of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
Gvozdev Aleksander Evgenievich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief researcher of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Sergeev Aleksander Nikolaevich — Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Head of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: ansergueev@gmail.com
Yakovenko Aleksandra Aleksandrovna — Candidate of Technical Sciences, Process Engineer, «Metallurg-Tulamash Ltd.» (Tula).
e-mail: Alexyakovenk@gmail.com
Medvedev Pavel Nikolaevich — Candidate of Pedagogical Science, Associate Professor of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

[2]The work was carried out within the framework of the Federal Program "Research and development in priority areas of development of the scientific and technological complex of Russia for 2014–2020"(unique identifier of the project RFMEF 157717X0271).

e-mail: medvedeff_82@mail.ru
Kutepov Sergey Nikolaevich — Candidate of Pedagogical Science, Associate Professor of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
Maliy Dmitry Vladimirovich — Senior Lecturer of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

Abstract

Against the background of the formation and development of one of the promising methods of physical materials science – mechanical spectroscopy - the history of the discovery of Tula metal physicists N.N. Sergeev and V.S. Ageev previously unknown effect of inelastic behavior of steels. Their first attempt of theoretical description of the mechanism of its formation is described. Set out the further fate of the detected effect in the interplay with the lives of its researchers. The history of the renovation of the forgotten for almost 30 years of discovery is proposed. A multi-faceted program of large-scale study of the mechanism of undeservedly forgotten effect, implemented in decades by the followers of the pioneers, is presented in detail. Disputes with skeptics are described. The main alternative ideas as the reasons of scientific disputes around the nature of effect are stated. Answers to critical questions are given, which allowed the authors to convince skeptics of the reality of the discovered phenomenon and to create a new direction in the study of steels and alloys – a method of assessing their damage by the results of mechanical spectroscopy. The examples of industrial application of the created direction are described. The areas of application of the method of application of the complex of inelastic effects developed by the authors on the basis of the revived method for a multi-scale description of structural changes in steels and alloys in the course of external destructive effects of different nature are listed. New ways of development and improvement of the method proposed by the authors in the study of products obtained both by standard ingot technology and in the conditions of additive 3D printing technologies are described.

Keywords: mechanical spectroscopy, internal friction, temperature dependence, strain, saturation with hydrogen, the effect of inelasticity, the mechanism of destruction, a new direction of research, the current state.

Bibliography: 37 titles.

For citation:
A. N.Chukanov, A. E. Gvozdev, A. N. Sergeev, A. A. Yakovenko, P. N. Medvedev, S. N. Kutepov, D. V. Maliy, 2019, "The story of the creation method of assessing damage of steels on the basis of mechanical spectroscopy", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 513–531.

1. Введение

В период с 40-х и до конца 90-х годов 20 века в физическом материаловедении был крайне популярен и активно использовался метод изучения структурного состояния материалов на их различных масштабных уровнях (атомарном – субзеренном, мезо- и макроскопическом), получивший в последствии название механической спектроскопии (МС). Сейчас активность использования МС по ряду причин снижена. С помощью МС изучали и продолжают изучают природу структурных и фазовых превращений в металлах и сплавах. Выявляют и используют явления, контролирующие свойства сталей и сплавов в ходе различных видов воздействия: термического, деформационного, термо-деформационного, электромагнитного, радиационного, агрессивных сред и др. Во многих случаях метод МС является уникальным с точки зрения избирательности, так как получаемая с его помощью информация (в том числе атомарного уровня) не может быть получена другими методами.

Технически МС заключается в измерении и анализе частотных, температурных, амплитудных и временных спектров рассеиваемой материалом энергии [1]. Подведение энергии к материалу производят как правило в виде колебаний (крутильные, изгибные) или статического нагружения (рис.1).

Chukanov/image1-eps-converted-to.pdf

Рис. 1: Развёртка затухающих колебаний стержня и соответствующая ей кривая рассеяний энергии

Рассеивание (диссипация) энергии связана с внутренним трением (ВТ) материала – переходом части энергии упорядоченных процессов в энергию неупорядоченных процессов, в конечном счёте - в теплоту. Процессы рассеяния энергии связаны с явлениями как фундаментальными, присущими идеальным кристаллам, так и со структурными, обусловленными наличием дефектов кристаллической решётки (рис. 2). В кристаллических материалах – диссипация реализуется перемещением и взаимодействием дефектов строения (точечных, линейных, поверхностных, объёмных) [2-5].

Chukanov/image2-eps-converted-to.pdf

Рис. 2: Частотная зависимость внутреннего трения ($Q^{-1}(\omega)$ (или $tg\delta(f)$) в широком диапазоне частот [1]

За меру ВТ можно принять энергию, рассеянную в единице объёма за одну секунду, т.е. величину:

$$\omega = \overline{\sigma}\dot{\varepsilon}\text{Дж/с см}^3 \tag{1}$$

Удобно пользоваться безразмерными величинами. Фундаментальной мерой ВТ является отношение $\Delta W/W$, где W– энергия колебаний, а ΔW – потеря энергии колебаний за один цикл. Энергия, рассеянная за один период по всему объёму образца:

$$W = \frac{1}{2}\int \sigma_0\varepsilon_0 d\upsilon \tag{2}$$

Важной характеристикой ВТ является величина $\psi = \Delta W/W$ – коэффициент поглощения, который можно определить по развёртке свободных затухающих колебаний образца изучаемого материала – рис. 1.

В таком случае:

$$\psi = \int_t^{t+T} \frac{dW}{W} \tag{3}$$

Полагая $W \sim \varepsilon_0^2$ (из рис. 1), получают:

$$\psi = \int_t^{t+T} fracd\varepsilon_0(t)\varepsilon_0(t) = 2ln\frac{\varepsilon_0(t)}{\varepsilon_0(t+T)} = 2ln\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}, \tag{4}$$

здесь $\partial = ln\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}$ – логарифмический декремент колебаний, $\partial = \psi/2$.

По аналогии с терминами, применяемыми в электротехнике, вводят понятие добротности Q системы.

$$Q = 2\pi/\psi = \pi/\partial \tag{5}$$

Для определения ВТ обычно используют логарифмический декремент ∂ или ширину резонансного пика образца при вынужденных колебаниях. В таком случае ВТ выражается следующим образом:

$$Q^{-1} = (\omega_2 - \omega_1)/\omega_\tau \tag{6}$$

где ω_τ – резонансная частота при вынужденных колебаниях, а ω_1 и ω_2 – частоты, при которых амплитуда колебаний снижается до значения, составляющего $1/\sqrt{2}$ от ее максимальной величины. Для образца, деформация в котором имеет гомогенный характер, а ВТ невелико и не зависит от амплитуды колебаний, можно показать, что

$$Q^{-1} = \partial/\pi = \Delta W/2\pi W \tag{7}$$

Выражения (7) справедливы при $(Q^{-1}) \leq 1$. Это условие, как правило, выполняется на практике. Хотя выражения (6) строго справедливы только в случае, когда внутреннее трение не зависит от амплитуды колебаний, их можно применять в качестве первого приближения, если зависимость от амплитуды не очень велика. Иногда внутреннее трение измеряют по затуханию звуковой волны, проходящей через материал; в этом случае

$$\delta = \alpha\lambda \tag{8}$$

где α – константа затухания, λ – длина звуковой волны.

Помимо описанного выше, ВТ весьма наглядно рассматривают с помощью диаграммы напряжение – деформация. В идеально упругом материале кривая в координатах напряжение — деформация является прямой линией; при наличии ВТ кривая образует петлю гистерезиса, площадь которой равна потере энергии на единицу объёма за один цикл (рис.3). (Так как потери за счет ВТ обычно очень невелики ($Q^{-1} < 10^{-2}$), гистерезисная кривая лишь очень слабо отклоняется от прямой).

В случае гистерезиса фаза деформации отстаёт от фазы колебаний на угол φ, следующим образом связанный с декрементом системы:

$$\varphi \approx tg\varphi = Q^{-1} = \partial/\pi \tag{9}$$

Chukanov/image3-eps-converted-to.pdf

Рис. 3: Петля механического гистерезиса при растяжении – сжатии

Угол сдвига фазы φ также является мерой ВТ.

Явление ВТ материалов неразрывно связано с понятием их упругости и относится к группе явлений несовершенной (не полной) упругости (ВТ, последействие) [1]. Формирование современного металлофизического подхода к анализу неупругого поведения материалов при их циклическом деформировании начато К.М. Зинером [1]. Яркий след в науке о неупругости материалов оставили работы А. Новика, Т.С. Кê, Ч. Верта, Ж. Снука, К. Люкке, А. Гранато, А. Зегера. В России систематическое изучение физики неупругости начато Б.Н. Финкельштейном в середине 1950-х годов в Московском институте стали и сплавов. Исследования неупругости были продолжены Ю.В. Пигузовым, Н.А. Тяпуниной, М.С. Блантером, Г.М. Ашмариным, И.Б. Кекало, Е.К. Наими и др. Сложились сильные научные школы в Ленинграде (С.П. Никаноров), Воронеже (В.С. Постников), Туле (М.А. Криштал), Киеве, Харькове, Тбилиси (Ф.Н. Тавадзе), Ереване и других городах.

Наиболее активные исследования в области неупругости металлических материалов ведутся в странах Европы: Швейцарии (В. Бенуа, Г. Гремо, Р. Шаллер, Д. Мари), Германии (К. Люкке, А. Зегер, М. Веллер, Х.-Р. Зиннинг, В. Риеманн), Италии (П. Бордони, Р. Кантелли, Г. Каннели, Ф. Маззолаи, Ф. Кордеро), Испании (Х. Сан Хуан, М. Но, Э. Цезари), Франции (Г. Фантоззи, А. Ривиер, Дж. Дегог), Бельгии (Р. Де Батист, Я. Ван Хумбек), Великобритании (Р. Адамс, С. Редферн), Польши (Я. Ильчук, Л. Магалас), Чехии (С. Троянова), Словакии (А. Пушкар), Украины (П.П. Паль-Валь, В.Д. Нацик), Азии: Японии (М. Коива, Х. Ми-Зубаяши, Х. Нумакура, И. Нишино, Т. Косуги), Китае (Т.С. Кк, К. Конг, К. Фанг, Ф. Хан, Дж. Джу, М. Ченг), Северной и Южной Америки: США (А. Гранато, Д. Бешерс, Р. Гибала, Р. Лейкс, М. Вутиг), Канаде (З. Пан, Г. Джохари), Бразилии (К. Грандини) и Аргентине (О. Ламбри, А. Сальва).

Первая международная конференция по проблеме неупругости материалов состоялась в 1956 г. в США под названием «Внутреннее трение и рассеяние ультразвука». В 2002 г. ее название было частично изменено на «Внутреннее трение и механическая спектроскопия» (International Conference on Internal Friction and Mechanical Spectroscopy: ICIFMS), а нумерация конференций сохранилась с 1956 г.: ICIFMS-14 прошла в 2005 г. в Японии, ICIFMS-15 – в 2008 г. в Италии, ICIFMS-16 – в 2011 г. в Швейцарии, ICIFMS-17 в 2014 г. в Китае. Впервые за всю историю Международная конференция ICIFMS-19 («Внутреннее трение и механическая спектроскопия») будет проведена в 2020 году (начало июля) в Москве на базе НИТУ МИСиС! Помимо конференций этой серии было проведено шесть Европейских конференций ECIFAS и три Международные школы по механической спектроскопии, в США – серия симпозиумов M3D (Mechanics and Mechanisms of Materials Damping), в Азии, в Китае проведено девять Национальных конференций по внутреннему трению.

В России первая межвузовская конференция «Релаксационные явления в металлах и сплавах» была организована и проведена Б.Н. Финкельштейном в 1958 г. в Москве (МИСиС) и затем, начиная с 1960 г. регулярно проводились национальные и международные конференции по проблемам неупругости в твёрдых телах: в Воронеже (ВорГТУ, В. С. Постников, Б. М. Даринский), в Туле (ТПИ-ТГПУ-ТулГУ, М. А. Криштал, С. А. Головин, Д. М. Левин), а также на Украине (Харьковский университет, Б. Я. Пинес; Университет им. Коцюбинского Винница, Мозговой В. А.), в Грузии (Институт металлургии и материаловедения, Ф. Н. Тавадзе) [1].

Основными количественными мерами ВТ в зависимости от способа внешнего воздействия являются: при затухающих колебаниях - логарифмический декремент затухания или ВТ (Q^{-1}); при статическом нагружении - относительное изменение площади петли механического гистерезиса [1]. Далее будем описывать результаты измерения спектров ВТ в ходе свободно затухающих колебаний (резонансный метод). При описанной реализации МС измеряют и анализируют параметры частотных или температурных зависимостей ВТ (ЧЗВТ, ТЗВТ) (рис. 4).

Chukanov/image4-eps-converted-to.pdf

Рис. 4: Частотная (а) и температурная (б) зависимости внутреннего трения ($Q^{-1}(\omega)$ и $Q^{-1}(T)$) и модуля упругости ($E(\omega)$ и $E(T)$) в районе релаксационного пика

На территории России наибольшее распространение получили измерения ТЗВТ. Указанные зависимости представляют собой зависимости $Q^{-1}(T)$ с характерными максимумами (диапазонами интенсивного затухания), отражающими эффекты неупругости (ЭН) различной природы в определенном диапазоне температур.

Природа подавляющего большинства наблюдаемых ЭН хорошо изучена. Подробно описаны их механизмы и произведены расчеты термодинамических параметров ЭН (температурного положения T_{max}, высоты максимума ВТ Q^{-1}_{max}, энергии активации $H_{\text{ак}}$).

Рассеяние энергии механических колебаний из-за движения дефектов кристаллического строения получило большое практическое использование и определило области применения метода МС. Исследования спектров ВТ для различных материалов при различных условиях эксперимента позволили обнаружить ЭН (пики ВТ), отвечающие за те или иные процессы релаксации в материалах. Обнаружение и изучение релаксационных процессов для разнообразных металлов и сплавов, раскрытие физических механизмов их структурообразования можно считать современной историей механической спектроскопии и физики неупругости (рис.5).

В середине XX в. с помощью метода МС было сделано множество открытий о строении, поведении и взаимодействии дефектов строения кристаллических и аморфных металлических материалов под нагрузкой. Были обнаружены и получили своё объяснение базовые эффекты релаксационного (эффекты Зинера и Снука, Бордони, Хазигути, Финкельштейна – Розина, Снука – Кёстера, Горского и др.) и гистерезисного(теории Давиденкова, Гранато и Люкке, Бешерса, Гремо и др.) рассеяния энергии. Метод МС укрепил связь между материаловедением, кибернетикой (программирование аппаратуры быстрого и точного измерения рассеяния

Chukanov/image5-eps-converted-to.pdf

Рис. 5: Схема типичной ТЗВТ сплавов системы $Fe--C(f \sim 1$кГц)(Сн – максимум Снука, С-К – максимум Снука – Кестера, Д – деструкционный максимум)

энергии в исследуемом материале), акустикой и электрофизикой (создание схем для моделирования поведения твёрдого тела под нагрузкой).

Анализ пиков ВТ является эффективным, а иногда и уникальным инструментом изучения структуры материала и соответствующих физических механизмов релаксации. Он позволяет оценивать поведение структуры материала в различных режимах и средах эксплуатации и формировать в нём заведомо известные физико-механические свойства за счёт разработки новых сплавов и технологий обработки.

Цель работы – знакомство с историей открытия нового эффекта неупругости (ЭН), его забвением более, чем на 25 лет, и последующим возрождением приведшим к разработке нового направления МС - исследования деградации и деструкции сталей и прогнозирования перехода стали к локальному разрушению.

Основная идея. Открытие и забвение. В конце 80-х годов прошлого века активность использования МС снизилась. Казалось, что новую информацию с помощью метода МС получить сложно. Однако в 1974 году в Тульском политехническом институте его сотрудниками Николаем Николаевичем Сергеевым и Виталием Степановичем Агеевым при измерении ТЗВТ образцов арматурных сталей после термомеханической обработки был открыт ранее не описанный ЭН [6, 7]. Новый ЭН фиксировали совместно с уже известным эффектом Снука, который вуалировал «новичка». Исследователи определили, что интенсивность обнаруженного ЭН возрастала вместе с ростом интенсивности внешнего термического и деформационного воздействия. К анализу физической природы обнаруженного ЭН был привлечен перспективный и молодой тогда физик-теоретик, выпускник Харьковского университета, Даниил Михайлович Левин (будущий заведующий кафедрой физики ТулГУ). Совместно была высказана гипотеза о связи появления нового ЭН с формированием и эволюцией микротрещин в объёме образцов, подвергшихся ТМО разной интенсивности [8] (рис. 6, 7).

Специфической особенностью обнаруженного пика являлось то, что он достигал заметной величины в момент предразрушения образца. Энергия активации данного максимума, рассчитанная по температурному сдвигу, составила 57,8 кДж/моль (0,6 эВ), а вычисленная по формуле Верта-Маркса 57,8–69,4 кДж/моль (0,6–0,72 эВ).

Авторы предполагали, что пик затухания на температурной зависимости ВТ соответствовал моменту появления микротрещин, а также накоплению других дефектов кристаллического строения типа скоплений дислокаций, пор и т. д.

Природа описанных экстремумов до конца не была выяснена и предположения о процессах, приводящих к их появлению, были неоднозначны.

Chukanov/image6-eps-converted-to.pdf

Рис. 6: Температурные зависимости ВТ стали 20ГС2 после испытаний на длительную прочность в водородосодержащей среде при уровнях напряжений 0,5 (а); 0,6 (б); 0,7 (в) и 0,8 (г) от предела прочности. Цифры у кривых – время испытания, час: а) 1 – 0,5; 2 – 1; 3 – 2; б)1 – 0,25; 2 – 1; 3 – 2; в) 1 – 0,26; 2 – 0,5; 3 – 1; г) 1 – 0,25; 2 – 0,5; 3 – 0,55 [6]

Chukanov/image7-eps-converted-to.pdf

Рис. 7: Температурная зависимость ВТ образцов стали 20ГС2 в исходном состоянии (1) и после растяжения до момента предразрушения (2-4). Шейка разрушения находится: 2 – в средней части образца; 3 – вблизи торца образца; 4 – удалена от места вырезки образца на 200 мм [7]

Однако, вследствие близости значений температурных и энергетических характеристик эти эффекты можно отнести к одному классу явлений. Особенно важно отметить, что проявление эффектов наблюдается в материалах, находящихся в предельном состоянии.

Однако, к сожалению, на этом активные исследования природы обнаруженного ЭН были приостановлены. Причин было несколько. С одной стороны, это изменения в личной и научной жизни исследователей. Трагически ушёл из жизни талантливейший экспериментатор и специалист в области МС В.С. Агеев. Научные и практические интересы Н.Н. Сергеева привели его на новую работу в НИИ при ТулаЧермете. Д. М. Левин активно включился в исследовательский и учебный процессы кафедры физики.

С другой стороны, выдвинутая авторами гипотеза о механизме формирования обнаруженного ЭН и его связи с трещинообразованием не нашла поддержки у коллег, работавших в данной области. Главная причина этого – отсутствие масштабных теоретических и экспериментальных исследований, подтверждающих описанную гипотезу, а также наличие альтернативных взглядов на природу обнаруженного ЭН.

Таким образом, обнаруженный в 1974 году Н. Н. Сергеевым и В. С. Агеевым интереснейший ЭН был забыт. Вопрос о его природе был отложен до 1997 года.

2. Возрождение открытия. Новое – это хорошо забытое старое?

Вопрос о природе ЭН, зафиксированного Н. Н. Сергеевым и В. С. Агеевым был поднят автором этой статьи А. Н. Чукановым при подготовке его докторской диссертации. Проведя обширный анализ литературы о свойствах (и в частности ВТ) сталей, подвергшихся различным деструктивным воздействиям, А. Н. Чуканов обратил внимание на появляющуюся у разных исследователей информацию о некотором ЭН, встречающимся после деформации, деформационно-термического воздействия и обработок, приводящих к поверхностному трещинообразованию. Практически все исследователи никак не пытались идентифицировать его природу. Вот тут-то и были подняты архивы с работой Н. Н. Сергеева и В. С. Агеева. После предварительных экспериментов с арматурными и конструкционными сталями стало понятно, что ранее обнаруженный ЭН действительно существует. А. Н. Чуканов решил сделать его центральным в своей диссертационной работе. К исследованиям был вновь привлечен Д. М. Левин и группа аспирантов. А. Н. Чуканов и Д. М. Левин провели подробные теоретические и экспериментальные исследования, воспользовавшись помощью коллег из ЦНИИЧерМет им. И. П. Бардина (Институт качественных сталей, Москва).

На специально разработанном А. Н. Чукановым оборудовании [9-11, 12-14] были проведены измерения и выполнен анализ температурных и амплитудных спектров ВТ и модулей упругости углеродистых, конструкционных, легированных сталей и чугунов различных марок, после разных видов деструкционных воздействий (деформация, ТМО, водородная коррозия) (рис. 8).

Chukanov/image8-eps-converted-to.pdf

Рис. 8: ТЗВТ сплава Fe-0,09%C, $\varepsilon_{\text{пр}} = 17\%$, $f \sim 1$ Гц после компьютерного анализа [23]

Оценен комплекс физико-механических свойств этих материалов (прочность, пластичность, упругость, плотность, электросопротивление и др.) [15–22]. Проведен микроструктурный анализ наличия микротрещин и пор с использованием программной обработки (рис. 8, 9). Проведены рентгеноструктурные исследования наличия и количества дефектов кристаллического строения. В итоге было четко определено, что ЭН, обнаруженный Сергеевым-Агеевым действительно имеет место.

Chukanov/image9-eps-converted-to.pdf

Рис. 9: Температурные зависимости внутреннего трения (ТЗВТ) и модуля упругости (ТЗМУ) (сталь 20; $\varepsilon_{\text{пр}} = 8\%$; $f \sim 1$кГц; 1-нагрев, 2-охлаждение) [23]

А. Н. Чуканов предложил использовать его параметры в качестве инструмента, фиксирующего самые ранние этапы зарождения, эволюции несплошностей. От субструктурных размеров до микроструктурных и далее, к переходу в состояние, названное «локальным предельным». После него материал переходит к необратимой поврежденности и далее – макроскопическому разрушению. Выяснилось, что описываемый ЭН по-разному реагирует на появление и развитие трещин, образующихся при силовом воздействии и коррозии в водородсодержащих средах. Это позволяло выделять вклады в трещинообразование различных по природе физических процессов. Кроме этого, были созданы статистические прогнозные модели, позволявшие по результатам измерения ВТ прогнозировать переход материалов промышленных объектов (трубные стали, тяжело нагруженные стальные конструкции) в состояние предразрушения. Безымянный до тех пор ЭН получил название «деструкционного» эффекта неупругости [23–26].

Авторами были рассчитаны характеристики (время релаксации, энергия активации, температурный диапазон его развития при различных частотах нагружения и др.) релаксационного эффекта (деструкционный максимум), образованного в ходе обратимого скольжения дислокаций только у концентраторов внутренних напряжений (трещин), которые суммируясь с циклическими внешними напряжениями вызывают развитие дислокационных реакций (термофлуктуационного образования и взаимодействия двойных дислокационных перегибов s– и e– типов) [23–26]. Поскольку образование микротрещин обусловлено деструкционными процессами, то изучение деструкционного максимума стало инструментом для установления закономерностей перехода материала в предельное состояние.

Полученными результатами сразу активно заинтересовались практики. Это были эксплуатационники транспортных систем нефте- и газопроводов России. Они хотели иметь метод мониторинга состояния трубопроводов для предотвращения их преждевременного выхода из строя и недопущения катастрофических разрушений. Решения, полученные А. Н. Чукановым и Д. М. Левиным были поддержаны документами Росстандарта и грантами РФФИ [27–30].

А. Н. Чукановым была разработана методика, основанная на анализе ТЗВТ и установлении параметров целого комплекса неупругих эффектов, отражающих концентрацию атомарного (H^-) и молизованного (H_2) водорода (пик Каннели-Вердини, водородный максимум Снука-Кёстера), примесей внедрения N,C в феррите (максимум Снука), интенсивность дислокационно-примесного взаимодействия, блокировку дислокаций (максимум Снука-Ке-Кёстера), а также трещинообразование («деструкционный» максимум) и уровень микроискажений в объёме (фон ВТ) [23–26]. Совместный анализ параметров перечисленных эффектов неупругости позволял детально описать изменения субструктуры, приводящие материал в предельное состояние, близкое к началу локального разрушения.

3. О пророках в своём отечестве

Однако даже после такого информативного подтверждения жизнеспособности описания «деструкционного» ЭН и его производственного использования ряд коллег-металлофизиков продолжал сомневаться в реальном существовании успешно фиксируемого авторами ЭН и первенстве коллектива А. Н. Чуканова в его исследованиях.

Аргументы скептиков сводились в основном к двум замечаниям. Первое, обнаруженный ЭН с их точки зрения мог быть одним из ранее известных, но видоизменённых ЭН. Вторым был вопрос: как возможно, что столько лет активного исследования в области МС не выявили наличия «деструкционного» эффекта?

На первое замечание ответ был дан очень быстро. С ним согласились даже скептики. Дело в том, что в исследованных материалах, с их концентрациями основных элементов и структурным составом отсутствовали другие эффекты неупругости. Это не могли быть ЭН дислокационной природы (например, «усиленный дислокациями» ЭН, описанный Л. Магаласом). Его фиксация была возможна только в очень чистых сплавах с концентрацией углерода не более 0,003%. В исследованных же сталях и сплавах содержание углерода составляло в сто и даже тысячу раз большую величину.

Другой особенностью «деструкционного» НЭ было то, что в условиях, наиболее часто применявшихся для измерения ТЗВТ (частота колебаний порядка 1000 Гц), его температурное положение было близко к положению известного максимума Снука. Последний часто маскировал «деструкционный» максимум. Однако, если использовать методику подавления «снуковского» пика (например, последовательно деформировать с нарастающей нагрузкой), то максимум Снука резко снижался, а из-за его «спины» появлялся «деструкционный» пик. Кроме того, успешно разделить оба максимума можно было, проведя измерения ТЗВТ при низких (1–2 Гц) частотах колебаний. В этом случае, температурные положения обоих максимумов резко отличались: плюс $30\ldots40^0$C у пика Снука и минус $40\ldots20^0$C у «деструкционного» максимума. Однако, проведение низкотемпературных испытаний требовало наличия криокамеры, охладителя, специальных методик, что могли себе позволить не все исследовательские коллективы.

Второе замечание заставило авторов исследований «деструкционного» эффекта задуматься. Однако, и здесь ответ был найден. Он лежал буквально на поверхности и был перед глазами. Однако «…лицом к лицу лица не рассмотреть…».

Почему же «деструкционный» эффект ВТ не был обнаружен и подробно исследован ранее? Да, Н. Н. Сергеев и В. С. Агеев обнаружили его. Но натолкнулись, если так можно сказать, на него почти случайно. Что же мешало обнаружить его? Ответ прост: отсутствие целенаправленных поисков.

Оказывается, что до 1997 года и начала исследований А. Н. Чуканова никто из специалистов в области МС системно не применял метод измерения ТЗВТ для анализа повреждаемости сталей и сплавов.

Те, кто проводил практические исследования, согласятся со следующими утверждениями. Перед экспериментами подготавливается комплект(ы) образцов идентичного состава, одного структурного состояния и физико-механических свойств. В последствии их подвергают базовой (исходной) обработке (зачастую высокотемпературному гомогенизирующему отжигу в вакууме), нивелирующей оставшиеся различия. После этого образцы делят на партии для различных видов воздействий и последующих испытаний.

Так вот, на этапе комплектования не допустимо различие в свойствах исходных образцов. Для специалистов в области ВТ одним из главных требований к образцам являлось и является одинаковое рассеивание ими механической энергии или их добротность. Это проверяют, измеряя фон ВТ. Если он резко отличался в каких-либо образцах, то эти образцы удаляли из комплекта.

Причина более высокого рассеивания – наличие внутренних дефектов в виде различного рода несплошностей: трещин, расслоений, волосовин, раковин. Сходным образом хозяйки проверяют при покупке керамическую и хрустальную посуду. То есть, образцы с трещинами, которые необходимо было бы исследовать для фиксации «деструкционного» эффекта, просто выбрасывали! Вот и ответ на второе замечание скептиков.

Альтернативой могло быть только скурпулёзное исследование образцов, подвергнутых деструкционным воздействиям разной природы и степени интенсивности, позволявшее контролировать появление, размер и количество несплошностей (микротрещин, пор) в них. Параллельно было необходимо микроскопически и по физическим свойствам (плотность) подтвердить изменявшееся количество и геометрию трещин. Измерения ВТ должны были идти в купе с перечисленными исследованиями, взаимно дополняя друг друга. Именно таким образом А. Н. Чуканов провёл исследования параметров «деструкционного» ЭН в сталях и чугунах после различных видов внешних воздействий.

4. Выводы

Сейчас «деструкционный» эффект в комплексе с другими ЭН успешно применяется авторами статьи и их коллегами для анализа состояния слитковых сталей и сплавов после различных обработок, для изучения экстремальных эффектов и причин изменения прочности и пластичности в гетерофазных металлических системах при термомеханических воздействиях и в предпереходных состояниях для оптимизации режимов ресурсосберегающих способов их обработки. К областям использования деструкционного эффекта можно отнести следующие: изучение стадийности деградации и разрушения сталей, оценку роли водорода в этих процессах (с 2013 года проводилась совместно с Н. Н. Сергеевым), использование этого эффекта как основы структурного моделирования поврежденности гетерогенных материалов, изучение поверхностной активности углерода и развития локального обезуглероживания в сталях при деструктивных воздействиях [31–36].

В качестве совсем нового направления можно указать исследования с помощью описанного эффекта механизмов упругости и порообразования при производстве изделий из порошковых материалов в рамках аддитивных технологий 3d печати.

5. Заключение

Применение механической спектроскопии в анализе спектров внутреннего трения (демпфирующей способности) и модулей упругости твёрдых тел представляет собой перспективную и продолжающуюся развиваться область физики твёрдого тела и является источником уникальных сведений о процессах, происходящих в субструктуре твёрдых тел на их атомарном уровне. Полученная с помощью механической спектроскопии информация позволяет физически обоснованно анализировать состояние материала, а также разрабатывать методики получения сталей и сплавов с особыми свойствами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Метод внутреннего трения в металловедческих исследованиях / Под ред. М. С. Блантера, Ю. В. Пигузова. М: Металлургия, 1991. 248 с.

2. Физика конденсированного состояния. Точечные дефекты кристаллического строения в формировании свойств материалов: учеб. пособие / А.Н. Чуканов, Н.Н. Сергеев, А.Е. Гвоздев, А.Н. Сергеев, П.Н. Медведев, Ю.С. Дорохин, С.Н. Кутепов, А.А. Яковенко, Д.В. Малий. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. 104 с.

3. Физика конденсированного состояния. Линейные дефекты кристаллического строения в формировании свойств материалов: учеб. пособие / А.Н. Чуканов, Н.Н. Сергеев, А.Е. Гвоздев, А.Н. Сергеев, П.Н. Медведев, Ю.С. Дорохин, С.Н. Кутепов, А.А. Яковенко, Д.В. Малий. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. 154 с.

4. Физика конденсированного состояния. Поверхностные и объёмные дефекты кристаллического строения в формировании свойств материалов: учеб. пособие / А.Н. Чуканов, Н.Н. Сергеев, А.Е. Гвоздев, А.Н. Сергеев, П.Н. Медведев, Ю.С. Дорохин, С.Н. Кутепов, А.А. Яковенко, Д.В. Малий. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. 156 с.

5. Физика конденсированного состояния. Дефекты строения и создание теорий упрочнения материалов: учеб. пособие / А.Н. Чуканов, Н.Н. Сергеев, А.Е. Гвоздев, А.Н. Сергеев, П.Н. Медведев, Ю.С. Дорохин, С.Н. Кутепов, А.А. Яковенко, Д.В. Малий. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. 298 с.

6. Агеев В.С., Постников В.А., Сергеев Н.Н. Внутреннее трение в высокопрочных арматурных сталях, подвергнутых испытаниям на релаксационную стойкость и длительную прочность в коррозионных средах // Вопросы металловедения и физики металлов. – Тула: ТПИ, 1974. Вып. 3. С. 73-80.

7. Сергеев Н.Н., Извольский В.В., Агеев В.С. Влияние температуры отпуска на механические свойства и стойкость против растрескивания в агрессивных средах арматурной стали 20ГС2 // Вопросы металловедения и физики металлов. - Тула. -ТПИ. - 1974. Вып. 3. С. 103-107.

8. Агеев В.С., Сергеев Н.Н., Петрушин Г.Д. Механизм рассеяния энергии колебаний, обусловленный подвижностью микротрещин в твердых телах // Внутреннее трение в металлах, полупроводниках, диэлектриках и ферромагнетиках. – М.: Наука, 1978. С. 97-102.

9. Чуканов А.Н. Точность определения модуля нормальной упругости // Проблемы качества и эффективности использования металла в машиностроении ТПИ- Тула 1982. С.169 – 172.

10. Чуканов А.Н. Комплексное исследование характеристик микродеформации, внутреннего трения и модуля сдвига при кручении // Взаимодействие дефектов кристаллической решетки и свойства металлов Тула. -ТПИ. - 1983. С.132-135.

11. Чуканов А.Н. Совершенствование аппаратуры для измерения низкочастотного внутреннего трения//Дефекты кристаллической решетки и сплавы с особыми свойствами -Тула, - ТулПИ, -1994. С.177-182.

12. Патент РФ. № 1067406. Крутильный маятник для определения механических свойств материалов/ Чуканов А.Н., Головин С.А., Левин Д.М., Юркин И.Н. // Бюл. изобр., 1993. № 7.

13. Патент РФ. № 1756803. Способ определения верхней границы упругого гистерезиса материала/ Левин Д.М., Чуканов А.Н., Головин С.А., Чуканов И.В.// Бюл. изобр., 1993. № 3.

14. Чуканов А.Н., Яковенко А.А., Хонелидзе Д.М. Упрочняющая восстановительная обработка сортового проката углеродистых сталей // Известия ТулГУ. Серия: Технические науки. - 2015. - Вып. 5-2. С. 240 - 251.

15. Патент РФ. № 1794096. Способ упрочнения металлических изделий /Чуканов А.Н., Левин Д.М. //Бюл.изобр., 1993. № 5.

16. Чуканов А.Н., Головин С.А., Левин Д.М. Анализ кривых микропластичности в медно-алюминиевых сплавах // Термическая обработка и свойства металлов - Свердловск. -УПИ. - 1985. С.93-98.

17. Чуканов А.Н., Левин Д.М., Канунникова И.Ю. Развитие микропластичности в медно-алюминиевых сплавах // Диффузионные процессы в металлах Тула - ТулПИ.- 1986. С.139-145.

18. Чуканов А.Н., Левин Д.М., Канунникова И.Ю. Особенности процесса микропластической деформации в твердых растворах замещения // Взаимодействие дефектов кристаллической решетки и свойства металлов и сплавов – Тула: ТулПИ, 1986. С.21-27.

19. Чуканов А.Н., Ганопольская Н.Е. Особенности микродеформационной кривой однофазных сплавов замещения // Дислокационная структура в металлах и сплавах и методы ее исследования/Тула-ТулПИ. -1987. С.104-107.

20. Левин Д.М., Чуканов А.Н. Дефект упаковки и твердорастворное упрочнение в однофазных сплавах меди и никеля // Роль дефектов кристаллической решетки в структурообразовании сплавов Тула, -ТулПИ. - 1989. С. 69-73.

21. Чуканов А.Н., Левин Д.М. О концентрационной зависимости микродеформационных характеристик твердых растворов Cu - Al и Ni - Al // Внутреннее трение и дислокационная структура металлов - Тула, - ТулПИ, 1990. С.88-93.

22. Чуканов А.Н. Анализ механизмов твердорастворного упрочнения в однофазных сплавах систем медь-алюминий и никель-алюминий // Влияние дислокационной структуры на свойства металлов и сплавов. -Тула. - ТулПИ, 1991. С.35-40.

23. Чуканов А.Н. Подвижность дислокаций в однофазных сплавах системы алюминий-магний//Дефекты кристаллической решетки и свойства металлов и сплавов -Тула, - ТулПИ, 1992. С.99-104.

24. Чуканов А.Н. Физико-механические закономерности формирования предельного состояния и развития локального разрушения в металлических материалах // Дисс. на соиск. уч. степ. докт. техн. наук. - Тула: ТулГУ, 2001. 387 с.

25. Чуканов А.Н. Низкотемпературное внутреннее трение в микролегированном алюминии // Известия Российской АН. Серия физическая. -1993. -Т. 57-№ 11. С.90-93

26. Chukanov A.N., Levin D.M., Muravleva L.V. Internal friction as a measure of local damage of metallic materials // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. 2000. Vol. 64. № 9. P. 1714 - 1717.

27. Levin D.M., Chukanov A.N. Effect of local stresses induced by structural defects of dislocation cluster dynamics //Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. 2005. T. 69. № 8. C. 1345-1350.

28. Чуканов А.Н., Головин С.А., Левин Д.М., Петрушин Г.Д. Таблицы стандартных справочных данных СЭВ 21-88. - М.: Изд. Стандартов, 1989. 12 с.

29. Чуканов А.Н., Головин С.А., Левин Д.М., Петрушин Г.Д. ГСССД 58-83. Строительные стали. Модуль упругости при температурах от -70 до 700^0С - М.: Изд-во Стандартов, 1984. - 4С.

30. Чуканов А.Н., Головин С.А., Левин Д.М., Петрушин Г.Д. Таблицы стандартных справочных данных СЭВ 21-88 М.: Изд. стандартов. -1989. 12 С.

31. Чуканов А.Н., Яковенко А.А., Хонелидзе Д.М. Упрочняющая восстановительная обработка сортового проката углеродистых сталей // Известия ТулГУ. Серия: Технические науки. - 2015. Вып. 5-2. С. 240 - 251.

32. Chukanov A.N., Levin D.M., Yakovenko A.A. Use and Prospects for the Internal Friction Method in Assessing the Degradation and Destruction of Iron-Carbon Alloys // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics. - 2011. Vol. 75. № 10. pp. 1340-1344.

33. Чуканов А.Н., Гвоздев А.Е., Сергеев А.Н., Яковенко А.А., Хонелидзе Д.М. Применение метода механической спектроскопии для изучения субструктурной деградации и начальных этапов разрушения сталей // «XV Междунар. Конгресс сталеплавильщиков и производителей металла (ISCON-2018)», 15-19.10.18 г., Москва-Тула, Сб. матер. С. 606 -612.

34. Sergeyev N.N., Tereshin V.A., Chukanov A.N., Kolmakov A.G., Yakovenko A.A., Sergeyev A.N., Leontyev I.M., Khonelidze D.M., and Gvozdev A.E. Formation of Plastic Zones near Spherical Cavity in Hardened Low-Carbon Steels under Conditions of Hydrogen Stress Corrosion // Inorganic Materials: Applied Research, 2018, Vol. 9, No. 4, pp. 663–669.

35. Чуканов А.Н., Яковенко А.А., Леонтьев И.М., Широкий И.Ф. Механическая спектроскопия металлов. История зарождения, развитие и перспективы // «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения». Матер. XV межд. конф. посвящ. столетию со дня рожд. проф. Н.М. Коробова. - Тула: ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2018. С. 364-366.

36. Чуканов А.Н., Гвоздев А.Е., Сергеев А.Н., Широкий И.Ф., Яковенко А.А., Леонтьев И.М. Ультразвуковая диагностика литых и порошковых сталей // «Прочность неоднородных структур» (ПРОСТ-2018): IX Евразийская научно-практическая конф. (Москва, НИТУ МИСиС, 24–26.04.18): Сб. тр.– НИТУ МИСиС, 2018. С. 151.

37. Sergeev N.N., Chukanov A.N., Baranov V.P., Yakovenko A.A. Development of Damage and Decarburization of High-Strength Low-Alloy Steels Under Hydrogen Embrittlement // Metal Science and Heat Treatment. 2015. vol. 57. № 1-2. P. 63-68.

REFERENCES

1. The method of internal friction in physical metallurgy research, ed. by M.S. Blanter, Y.V. Piguzov.- M: Metallurgy, 1991. 248 p.

2. Chukanov A.N. Condensed matter physics. Point defects of crystal structure in the formation of material properties: studies. manual // A.N. Chukanov, N. N. Sergeev, A. E. Gvozdev, A. N. Sergeev, P. N. Medvedev, Y. S. Dorokhin, S. N. Kutepov, A. A. Yakovenko, D. V. Mali. - Tula: Publishing House of TulGU, 2017. 104 p.

3. Chukanov A.N. Condensed matter physics. Linear defects of crystal structure in the formation of material properties: studies. manual / A.N. Chukanov, N.N. Sergeev, A.E. Gvozdev, A.N. Sergeev, P.N. Medvedev, Y.S. Dorokhin, S.N. Kutepov, A.A. Yakovenko, D.V. Mali. - Tula: Publishing House of TulGU, 2017. 154 p.

4. Chukanov A.N. Condensed matter physics. Surface and volume defects of the crystal structure in the formation of material properties: studies. manual // A.N. Chukanov, N.N. Sergeev, A.E. Gvozdev, A.N. Sergeev, P.N. Medvedev, Y.S. Dorokhin, S.N. Kutepov, A.A. Yakovenko, D.V. Mali. - Tula: Publishing House of TulGU, 2017. 156 p.

5. Chukanov A.N. Condensed matter physics. Defects of structure and creation of theories of hardening of materials: studies. manual // A.N. Chukanov, N.N. Sergeev, A.E. Gvozdev, A.N. Sergeev, P.N. Medvedev, Y.S. Dorokhin, S.N. Kutepov, A. A. Yakovenko, D. V. Mali. - Tula: Publishing House of TulGU, 2017. 298 p.

6. Ageev V.S., Postnikov V.A., Sergeev N.N. Internal friction in high-strength reinforcing steels subjected to tests for relaxation resistance and long-term strength in corrosive environments // Problems of metallurgy and physics of metals. – Tula: TPI, 1974. Issue. 3. Pp. 73-80.

7. Sergeev N.N., Izvolskiy V.V., Ageev V.S. the Influence of the tempering temperature of the mechanical properties and resistance to cracking in aggressive environments of reinforcing steel 20GS2 // Problems of metallurgy and physics of metals. - Tula. TPI. 1974. Issue. 3. Pp. 103-107.

8. Ageev V.S., Sergeev N.N., Petrushin G.D. the Mechanism of vibration energy scattering due to the mobility of microcracks in solids // Internal friction in metals, semiconductors, dielectrics and ferromagnets. – M.: Science, 1978. Pp. 97-102.

9. Chukanov A.N. Accuracy of determination of the module of normal elasticity // Problems of quality and efficiency of use of metal in mechanical engineering TPI-Tula. 1982. P. 169 – 172.

10. Chukanov A. N. Complex study of micro-deformation characteristics, internal friction and shear modulus at torsion // Interaction of crystal lattice defects and properties of Tula metals. -TPI. 1983. P. 132-135.

11. Chukanov A.N. Improvement of equipment for measuring low-frequency internal friction lattice Defects and alloys with specific properties. - Tula, TPI. 1994. P. 177-182.

12. The patent of the Russian Federation. № 1067406. Torsional pendulum for determination of mechanical properties of materials // Chukanov A.N., Golovin S.A., Levin D.M., Yurkin I.N. // Byul. Fig., 1993. № 7.

13. The patent of the Russian Federation. № 1756803. Method for determining the upper limit of the elastic hysteresis of the material // Chukanov A.N., Levin D.M., Golovin S.A., Chukanov I.V. // Byul. Fig., 1993. № 3.

14. Chukanov A.N., Yakovenko A.A., Honelidze D.M. Hardening reduction treatment rolled carbon steels // Izvestiya TulGU. Series: Technical Sciences. 2015. Issue. 5-2. P. 240 - 251.

15. The patent of the Russian Federation. № 1794096. The method of hardening metal products // Chukanov A.N., Levin D.M. // Bulletin SB Rams. Fig., 1993. № 5.

16. Chukanov A.N., Golovin S.A., Levin D.M. Analysis of microplasticity curves in copper-aluminum alloys // Heat treatment and properties of metals - Sverdlovsk. -UPI. - 1985. P. 93-98.

17. Chukanov A.N., Levin D.M., Kanunnikova I.Y. Development of microplasticity in copper-aluminum alloys // Diffusion processes in metals Tula - TPI. 1986. P. 139-145.

18. Chukanov A. N., Levin D. M., Kanunnikova I.Yu. Features of the process of microplastic deformation in solid solutions of substitution // Interaction of lattice defects and properties of metals and alloys – Tula: TPI, 1986. Pp. 21 - 27.

19. Chukanov A.N., Ganopolskaiy N.E. Features microdeformations curve of single-phase alloys of substitution // Dislocation structure in metals and alloys and methods of its study / Tula. -TPI. 1987. Pp. 104-107.

20. Levin D.M., Chukanov A.N. Defect packaging and solid solution hardening in single-phase alloys of copper and Nickel // The Role of lattice defects in the structure formation of alloys of Tula, -TPI. 1989. P. 69-73.

21. Chukanov A.N., Levin D.M. On concentration dependence of microdeformation characteristics of solid solutions of Cu - Al and Ni - Al // Internal friction and dislocation structure of metals - Tula, - TPI. 1990. P. 88-93.

22. Chukanov A.N. Analysis of the mechanisms of solid-solution hardening in single-phase alloys of copper-aluminum and Nickel-aluminum // Influence of dislocation structure on the properties of metals and alloys. -Tula. – TPI. 1991. P. 35-40.

23. Chukanov A.N. Mobility of dislocations in single-phase alloys of aluminum-magnesium system // Defects of crystal lattice and properties of metals and alloys -Tula, - TPI, 1992. P. 99-104.

24. Chukanov A.N. Physical and mechanical regularities of formation of limit state and development of local fracture in metal materials // Diss. on competition of a scientific degree. academic step. doctor. Techn. sciences. - Tula: TulGU, 2001. 387 p.

25. Chukanov A.N. Low-temperature internal friction in micro-alloyed aluminium // Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Series physical. 1993. Vol. 57. № 11. P. 90-93.

26. Chukanov A.N., Levin D.M., Muravleva L.V. Internal friction as a measure of local damage of metallic materials // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. 2000. Vol. 64. № 9. P. 1714 - 1717.

27. Levin D.M., Chukanov A.N. Effect of local stresses induced by structural defects of dislocation cluster dynamics // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. 2005. Vol. 69. № 8. P. 1345-1350.

28. Chukanov A.N., Golovin S.A., Levin D.M., Petrushin G.D. Tables of standard reference data of the CMEA 21-88. - M.: Ed. Standards, 1989. 12 p.

29. Chukanov A.N., Golovin S.A., Levin D.M., Petrushin G.D. GSSSD 58-83. The construction began. Modulus of elasticity at temperatures from -70 to 700 0C - M.: Publishing house of Standards, 1984. 4 P.

30. Chukanov A.N., Golovin S.A., Levin D.M., Petrushin G.D. Tables of standard reference data of the CMEA 21-88 M. Ed. standards. 1989. 12 P.

31. Chukanov A.N., Yakovenko A.A., Honelidze D.M. Hardening reduction treatment rolled carbon steels // Izvestiya TulGU. Series: Technical Sciences. 2015. Issue. 5-2. P. 240 - 251.

32. Chukanov A.N., Levin D.M., Yakovenko A.A. Use and Prospects for the Internal Friction Method in Assessing the Degradation and Destruction of Iron-Carbon Alloys // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics. 2011. Vol. 75. № 10. pp. 1340-1344.

33. Chukanov A.N., Gvozdev A.E., Sergeev A.N., Yakovenko A.A., Honelidze D.M. Application of the method of mechanical spectroscopy to study substructures degradation and the initial stages of the destruction of steel // "The XV Intern. Congress of steelmakers and metal producers (ISCON-2018) 15-19.10.18 G., Moscow-Tula, Sat. mater., P. 606 -612.

34. Sergeyev N.N., Tereshin V.A., Chukanov A.N., Kolmakov A.G., Yakovenko A. A., Sergeyev A. N., Leontyev I. M., Khonelidze D. M., Gvozdev A.E. Formation of Plastic Zones near Spherical Cavity in Hardened Low-Carbon Steels under Conditions of Hydrogen Stress Corrosion // Inorganic Materials: Applied Research, 2018 vol. 9, No. 4, pp. 663-669.

35. Chukanov A.N., Yakovenko A.A., Leontiev I.M., Shirokiy I.F. Mechanical spectroscopy of metals. History of origin, development and prospects // "Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications". Matera. XV inter. Conf. dedicated. the centenary of the birth. prof.M. Korobov. - Tula: TSPU them. L. N. Tolstoy, 2018. P. 364-366.

36. Chukanov A.N., Gvozdev A.E., Sergeev A.N., Shirokiy I.F., Yakovenko A.A., Leontiev I.M. Ultrasonic diagnostics of cast and powder steels // "Strength of heterogeneous structures" (PROST-2018): IX Eurasian scientific and practical Conf. (Moscow, NUST MISIS, 24-26.04.18): Sat. Tr.– NUST MISIS, 2018. P. 151.

37. Sergeev N.N., Chukanov A.N., Baranov V.P., Yakovenko A.A. Development of Damage and Decarburization of High-Strength Low-Alloy Steels Under Hydrogen Embrittlement // Metal Science and Heat Treatment. 2015. vol. 57. № 1-2. P. 63-68.

Получено 30.09.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 929+666.982.24 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-532-557

Сергеев Николай Николаевич, доктор технических наук, профессор ТГПУ им. Л. Н. Толстого — яркий представитель научной школы фундаментального физического и прикладного материаловедения М. А. Криштала

А. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, М. В. Ушаков, П. Н. Медведев, Ю. С. Дорохин, С. Н. Кутепов, Д. В. Малий

Сергеев Александр Николаевич — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: anserguееv@gmail.com
Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Ушаков Михаил Витальевич — доктор технических наук, профессор кафедры инструментальных и метрологических систем, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: tulaumv@yandex.ru
Медведев Павел Николаевич — кандидат педагогических наук, доцент кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: medvedeff_82@mail.ru
Дорохин Юрий Сергеевич — кандидат педагогических наук, доцент кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: avangard-tula@yandex.ru
Кутепов Сергей Николаевич — кандидат педагогических наук, доцент кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
Малий Дмитрий Владимирович — старший преподаватель кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

Аннотация

Важнейшей научной проблемой, решаемой под руководством профессора Криштала М. А. была проблема коррозионно-механического разрушения высокопрочных арматурных железных сплавов. Много сил было затрачено для решения данной научной проблемы громадного прикладного значения. Были установлены комплексные закономерности и выявлены физическая природа и механизмы водородного охрупчивания и разрушения арматурных высокопрочных сталей, применяемых в композиционных железобетонных конструкциях и сооружениях в виде волокнистых стальных арматурных наполнителей. В тульском регионе в решении данной проблемы значительный вклад внес ученик Михаила Ароновича Криштала – профессор Николай Николаевич Сергеев, защитивший под его руководством кандидатскую и докторскую диссертации.

Ключевые слова: механическая спектроскопия, внутреннее трение, температурная зависимость, деформация, насыщение водородом, эффект неупругости, механизм, деструкция, новое направление исследований, современное состояние.

Библиография: 102 названия.

Для цитирования:
А. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, М. В. Ушаков, П. Н. Медведев, Ю. С. Дорохин, С. Н. Кутепов, Д. В. Малий. Сергеев Николай Николаевич, доктор технических наук, профессор ТГПУ им. Л. Н. Толстого — яркий представитель научной школы фундаментального физического и прикладного материаловедения профессора М. А. Криштала // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 532–557.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 3.

UDC 929+666.982.24 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-532-557

Nikolay Nikolaevich Sergeev, Doctor of Technical Sciences, Professor of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University — bright representative of the scientific school of physical fundamental and applied materials science M. A. Krishtal

A. N. Sergeev, A. E. Gvozdev, M. V. Ushakov, P. N. Medvedev, Yu. S. Dorohin, S. N. Kutepov, D. V. Maliy

Sergeev Aleksander Nikolaevich — Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Head of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: anserguееv@gmail.com

Gvozdev Aleksander Evgenievich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief researcher of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Ushakov Mikhail Vitalievich — Doctor of Technical Sciences, Professor of the Chair of Instrumental and Metrological systems, Tula State University (Tula).
e-mail: tulaumv@yandex.ru

Medvedev Pavel Nikolaevich — Candidate of Pedagogical Science, Associate Professor of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: medvedeff_82@mail.ru

Kutepov Sergey Nikolaevich — Candidate of Pedagogical Science, Associate Professor of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru

Dorokhin Yuriy Sergeevich — Candidate of Pedagogical Science, Associate Professor of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: avangard-tula@yandex.ru

Maliy Dmitry Vladimirovich — Senior Lecturer of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

Abstract

The most important scientific problem solved under the guidance of Professor Krishtal M. A. was the problem of corrosion-mechanical destruction of high-strength reinforcing iron alloys. Much effort has been expended to solve this scientific problem of great applied importance. Complex regularities were established and the physical nature and mechanisms of hydrogen embrittlement and destruction of reinforcing high-strength steels used in composite reinforced concrete structures and structures in the form of fibrous steel reinforcing fillers were revealed. In the Tula region in solving this problem a significant contribution was made by a student of Mikhail Aronovich Krishtal – Professor Nikolay Nikolaevich Sergeev, who defended his PhD and doctoral dissertations under his leadership.

Keywords: mechanical spectroscopy, internal friction, temperature dependence, strain, saturation with hydrogen, the effect of inelasticity, the mechanism of destruction, a new direction of research, the current state.

Bibliography: 102 titles.

For citation:
A. N. Sergeev, A. E. Gvozdev, M. V. Ushakov, P. N. Medvedev, Yu. S. Dorohin, S. N. Kutepov, D. V. Maliy, 2019, "Nikolay Nikolaevich Sergeev, Doctor of Technical Sciences, Professor of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University — bright representative of the scientific school of physical fundamental and applied materials science of Professor M. A. Krishtal", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 532–557.

1. Биографический очерк

Sergeev/image1-eps-converted-to.pdf

Сергеев Николай Николаевич,
доктор технических наук, профессор

Сергеев Николай Николаевич родился 15 апреля 1944 года в деревне Доробино Тепло-Огаревского района Тульской области. В 1959 г. окончил школу №16, в 1963 г. – Тульский механический техникум им. С. И. Мосина получив квалификацию техника-технолога, а в 1968 г. – Тульский политехнический институт по специальности литейное производство черных и цветных металлов с присвоением квалификации инженера-металлурга.

Н.Н. Сергеев рано начал трудовую деятельность. С 1962 г. работал фрезеровщиком, формовщиком, обрубщиком литья, грузчиком, лаборантом, мастером плавильного участка на Тульском оружейном и Тульском комбайновом заводах.

В 1972 г. поступил в аспирантуру, которую в 1975 г. окончил с досрочной защитой диссертации на тему «Водородное охрупчивание и растрескивание высокопрочной арматурной стали» по специальности 05.16.01 «Металловедение и термическая обработка металлов» на механико-технологическом факультете Тульского политехнического института. Научным руководителем Н.Н. Сергеева был доктор технических наук, профессор М. А. Криштал – ведущий специалист по физике прочности и пластичности металлов и металлических сплавов.

После окончания аспирантуры работал в Тульском политехническом институте в отраслевой научно-исследовательской лаборатории №3 младшим научным сотрудником, а после получения диплома кандидата технических наук он переведен по конкурсу в ОНИЛ3 на должность старшего научного сотрудника.

После присвоения ученого звания старшего научного сотрудника (Решение Высшей аттестационной комиссии при Совете Министров СССР от 22 марта 1978 г.) Н. Н. Сергеев переведен на соответствующую данному званию должность, а затем был избран по конкурсу на должность старшего преподавателя кафедры общетехнических дисциплин ТГПИ им. Л. Н. Толстого, а в 1981 г. – на должность доцента кафедры «Машиноведение», где он проработал доцентом до 1983 г.

С 1983 по 1986 г. Н. Н. Сергеев работает в научно-исследовательском институте «ТУЛАЧЕРМЕТ» заведующим лабораторией физики металлов.

21 апреля 1986 г. Н. Н. Сергеев был избран по конкурсу в Тульском государственном педагогическом институте на должность доцента кафедры «Машиноведение». С 1990 г. в связи с избранием по конкурсу, он заведующий, профессор кафедры «Современные технические средства и видеотехника», которая в 1995 г. переименована на кафедру «Технологии».

В 1996 г. Н. Н. Сергеев защищает в Самарском государственном техническом университете докторскую диссертацию на тему «Механические свойства и внутреннее трение высокопрочных сталей в коррозионных средах» по специальности «Физика твердого тела», после чего ему присуждается ученая степень доктора технических наук и присваивается ученое звание профессора по кафедре «Физика металлов и материаловедение» (2002 г.).

В Тульском государственном педагогическом университете с 1990 по 2016 г. Н. Н. Сергеев заведовал многими кафедрами: «Машиноведение», «Современные технические средства и видеотехника», «Технологии», «Технологии, машиноведение и безопасность жизнедеятельности», «Технологии и сервис», исполнял обязанности декана Сельскохозяйственного факультета. Н.Н. Сергеевым были организованы лаборатория «Поверхностное упрочнение и длительная прочность конструкционных материалов» и центр «Наукоемкие лазерные технологии» при кафедре «Технологии и сервис» факультета «Технологий и бизнес» ТГПУ им. Л. Н. Толстого, которыми он руководил впоследствии.

За годы его руководства в ТГПУ им. Л. Н. Толстого были созданы такие специализированные лаборатории, как «Автомобили», «Тракторы и сельскохозяйственная техника», «Эксплуатация и ремонт машинно-тракторного парка», «Материаловедение», «Декоративно-прикладное творчество», которые в данный момент реорганизуются в соответствии с требованиями ГОС ВПО.

На кафедре «Технологии» им была создана уникальная исследовательская база для проведения ускоренных лабораторных испытаний натурных образцов сталей на коррозионное растрескивание и водородное охрупчивание. По данному научному направлению защищены две докторские диссертации по специальностям: 01.04.07 – Физика твердого тела (Сергеев Н. Н. Самарский государственный технический университет, 1997 г.) и 01.04.07 – Физика конденсированного состояния (В. П. Баранов Тульский государственный университет, 2007 г.). В последнее время проводимые им научные исследования финансировались за счет грантов губернатора Тульской области в сфере науки и техники и государственных заданий МО РФ.

2. Результаты научной деятельности

Одним из основных направлений научной работы Н. Н. Сергеева было фундаментальное научное направление прикладного значения, связанное с повышением долговечности высокопрочных металлических сплавов на железной основе, используемых в сложных композиционных материалах, для изготовления железобетонных конструкций и сооружений в качестве арматурных стержневых и каркасных стальных наполнителей. Для повышения долговечности и исследования влияния внутренних и внешних факторов на чувствительность арматурных сталей к коррозионно-механическому разрушению коллективом авторов ТГПУ им. Л. Н. Толстого под руководством Н. Н. Сергеева была разработана комплексная методология ускоренных испытаний на КМР высокопрочных сталей, которая включала:

1. Исследование ресурсостойкости высокопрочных сталей к ВР и КРН в агрессивных средах на точеных и натурных образцах арматурных сталей марок: Ст3, Ст5, 18ГС, 20ГС, 20ГС2, 22ГСРМ, 30ГСТ, 35ГС, 20ХГ2Ц, 22Х2Г2АЮ, 23Х2Г2Т, 80С гладкокатанного и периодического профиля Ш6...22 мм и l = 100...400 мм, как в исходном (горячекатанном или термоупрочненном состоянии), так и прошедших последующую термическую обработку. При выборе водородсодержащей среды для ускоренных лабораторных испытаний исходили из того, что ее действие должно соответствовать действию среды в реальных условиях работы конструкции (характер разрушения в лабораторных и эксплуатационных условиях должен быть одинаковым), и, вместе с тем, она должна обеспечивать сокращение длительности лабораторных испытаний. В связи с этим, в качестве среды вызывающей КРН использовали кипящий раствор нитратов (60% в.ч Ca(NO3)2 + 5% в.ч. NH4NO3 + 35% в.ч. H2O) при температурах 70; 90; 110°C; а для исследования ВР использовали водный раствор серной кислоты с добавлением роданистого аммония (4,5% H2SO4 + 2,5% NH4CNS) при комнатной температуре с катодной поляризацией при плотности тока DK = 60 А/м2, так и без нее. Испытания проводили с использованием коррозионных камер и рычажных установок, разработанных Н. Н. Сергеевым [10] в условиях статического нагружения (при постоянной растягивающей нагрузке) при напряжениях σЭ = (0,1...0,9)σВ. Стойкость стали против коррозионно-механического разрушения (КМР) оценивали временем до разрушения по результатам испытаний 4...6 образцов на каждую экспериментальную точку графика. Сталь считали стойкой к растрескиванию если она не разрушилась после 200 часов испытаний при величине статических растягивающих напряжений не менее 75% от критического разрушающего напряжения [12-15].

2. Исследование влияния наводороживания, уровня растягивающих напряжений, длительности коррозионных процессов на субмикроструктурные изменения высокопрочной стали при испытаниях на длительную прочность применяли метод внутреннего трения (ВТ), позволяющий судить о характеристиках локального напряженного состояния металла. Измерения температурных зависимостей внутреннего трения (ТЗВТ) проводили на натурных образцах (d = 8, 10 и 12 мм; l = 200 мм) сталей (гладкокатанных и периодического профиля). Исследования кинетики процесса КМР производили в следующей последовательности: предварительно образцы подвергали комплексному и раздельному влиянию различных факторов – коррозионной среды, растягивающих напряжений, катодной поляризации от внешнего источника тока при различном времени выдержки вплоть до момента предразрушения. Затем из натурных образцов вырезали образцы l = 200 мм и определяли ТЗВТ. Время между подготовкой образцов и измерением ВТ не превышало 1 часа. Измерения ТЗВТ проводили при различных температурах (20...500 °C) при $f \sim 103$ с–1 по резонансной методике [15]. Наблюдали изменение высоты пика Кестера под влиянием вышеуказанных факторов. Измеряли также величину низкотемпературного фона ВТ∼150°C, который связан с наличием в материале субмикропустот. По резонансной частоте определяли величину модуля упругости.

3. Установление закономерностей влияния температуры отпуска на механические свойства и стойкость против растрескивания в водородсодержащих средах. Отпуск осуществляли с электронагрева в диапазоне температур 150...600°C с интервалом в 50°C. Скорость электронагрева составляла 10...15°C/сек. Превращения, происходящие при отпуске, оценивали по изменению высоту пика Кестера, природу которого связывают с взаимодействием примесных атомов с дислокациями, а также с обусловленным этим взаимодействием уровнем внутренних локальных (пиковых) микронапряжений.

Проведение большого числа сравнительных испытаний наиболее широко распространенных марок арматурных сталей позволило получить систематические базы данных и установить, что при высоком уровне приложенных растягивающих напряжений ($0{,}9\ldots 0{,}7\sigma$В) практически все стали обладают высокой чувствительностью к КМР.

Несмотря на большую разницу в абсолютных значениях стойкости образцов, испытываемых в различных средах, и характера зависимости времени до разрушения от уровня приложенных напряжений – имеется идентичность в определении порядка стойкости при проведении сравнительных испытаний.

Установлено, что увеличение уровня приложенных растягивающих напряжений приводит к сокращению инкубационного периода развития микротрещин при водородном растрескивании.

Зарождение и развитие трещин при этом происходит преимущественно в объеме образца в местах локализации растягивающих напряжений на дефектных участках структуры и субструктуры.

Исследование влияния внутренних и внешних факторов на кинетику процесса КМР позволило выявить, что длительная прочность термически упрочненного арматурного проката в значительной степени определяется релаксационной способностью структуры – релаксация остаточных пиковых микронапряжений, локализующихся у границ зерен и субструктурных границ способствует снижению чувствительности к растрескиванию.

Полученные результаты испытаний на коррозионное растрескивание в растворах нитратов показали, что стержневая арматура периодического профиля из стали 80С в состоянии поставки при механических свойствах класса прочности А600 имеет достаточно высокую стойкость против КРН. Наилучшие коррозионные и механические свойства для арматуры, изготовленной из стали 80С обеспечивают структуры сорбита и тонкого перлита.

Арматура из стали марки 20ХГ2Ц в состоянии поставки при сложившейся технологии производства отличается большой нестабильностью стойкости против КРН при изменении химического состава (в основном углерода) в пределах марочного. Высокую коррозионную стойкость арматура из стали 20ХГ2Ц имеет только при содержании углерода на нижнем пределе марочного состава, что обеспечивается структурой однородного бейнита при механических свойствах на уровне класса прочности А600.

При более высоких механических свойствах арматура из стали 20ХГ2Ц имеет более низкую коррозионную стойкость.

Исследование влияния химического состава и температуры отпуска на чувствительность стали 23Х2Г2Т к КРН позволило установить, что контролируя химический состав (и прежде всего содержание углерода и хрома) и технологические режимы получения данной стали можно не только резко повысить ее сопротивляемость растрескиванию, но и получить гарантированный комплекс высоких эксплуатационных свойств – механических и коррозионных. Наибольшую устойчивость против КРН при практически неизменной прочности для арматуры из стали 23Х2Г2Т обеспечивает 2-х часовой отпуск в интервале температур 350...400°С. Полученные данные об изменении высоты 200° пика на ТЗВТ при отпуске стали 23Х2Г2Т в интервале температур 150...400°С, позволяют предполагать, что снижение чувствительности стали 23Х2Г2Т к КРН при отпуске обусловлено протеканием релаксационных процессов. Проведенные исследования показывают, что влияние микроструктуры и термической обработки на чувствительность арматурной стали 23Х2Г2Т к КРН в растворах нитратов, сводится к изменению уровня и распределения остаточных напряжений в структуре стали и особенностям распределения примесей внедрения (C и N) по объему зерен. По-видимому, наличие примесей (C и N) на границах зерен является необходимым условием для возникновения коррозионного процесса, а его скорость определяется напряженным состоянием, способностью структуры к релаксации напряжений и концентрацией агрессивной среды. Таким образом, для повышения стойкости арматурной стали 23Х2Г2Т к КРН необходимо обеспечивать такой состав и условия термической обработки, в результате которых примеси внедрения (C и N) будут удерживаться преимущественно в объеме зерен, а структура стали будет отличаться однородностью и повышенной стойкостью к релаксации напряжений.

Разработанная методика сравнительных испытаний, позволяет достаточно экспрессно определять стойкость против коррозионно-механического разрушения арматурных сталей. Установлено влияние термической обработки на механические и коррозионные свойства арматурного проката. Выявлены кинетические закономерности процессов разрушения высокопрочных сталей в условиях воздействия механических, тепловых, концентрационных полей и агрессивных сред, необходимые для повышения и прогнозирования долговечности арматурного проката из высокопрочных сталей в композиционных железобетонных конструкциях и сооружениях. Предложены физико-химические комплексные методы защиты черных и цветных металлов и сплавов от коррозионно-механического разрушения, которые могут обеспечить повышение долговечности высокопрочных сталей, эксплуатируемых в агрессивных водородсодержащих средах и ресурс композиционных железобетонных конструкций со стальными арматурными стержневыми высокопрочными наполнителями.

Доктором технических наук, профессором Сергеевым Николаем Николаевичем написано и опубликовано 122 работы, из них 22 учебно-методических, 100 научных статей и 5 монографий, которые широко используются в педагогической практике, по результатам исследований получено 5 авторских свидетельств на изобретения. Результаты научной деятельности представлены в монографиях и печатных трудах доктора технических наук, профессора Н. Н. Сергеева [1-102].

3. Отношение Н. Н. Сергеева к людям. Индивидуальные особенности личности

Секрет успеха Николая Николаевича заключается в его человеческой, научной и педагогической уникальности: трудолюбии, целеустремленности, обязательности, уважении ко всем окружающим, никогда не останавливаться на достигнутом и желании идти только вперед.

Знакомство с Николаем Николаевичем, мне А. Е. Гвоздеву, профессору, доктору технических наук позволило обрести большую уверенность в своих жизненных познаниях, в необходимости продолжения научной исследовательской деятельности на благо своей страны, иметь пример для подражания в чисто человеческих взаимоотношениях.

Расскажу истории, характеризующие доктора технических наук, профессора Н. Н. Сергеева как комплексную научно-педагогическую личность.

1. Рабочий день у Н. Н. Сергеева начинался в 07.30 ч. Он заходил в ауд. 413, приглашал к себе меня, предложив присесть на стул, доставал из портфеля свой бутерброд для завтрака, разрезал на 2 части, одну давал мне со словами: «Это скушай, пожалуйста, сейчас, тебе надо подкрепиться, так как мы решаем важные научные для вуза вопросы». Меня до сих пор поражает его человеческая, душевная и сердечная теплота и постоянная забота об окружающих его сотрудниках.

2. Н. Н. Сергеев заботился о своих учениках (аспирантах) и всегда во всем им помогал. Одним из них является аспирант Д. М. Хонелидзе, который в данный момент готовит диссертацию к защите.

3. Очень любил выращивать цветы, особенно розы, что говорит о его любви к природе и ко всему прекрасному.

Профессор Н. Н. Сергеев очень стремился, чтобы результаты научных исследований сотрудников кафедры «Технологии и сервис» ТГПУ им. Л. Н. Толстого публиковались в научных статьях в центральных отечественных и известных научно-технических, зарубежных журналах. Хотел, чтобы кафедра, возглавляемая им, и её сотрудники, представляющие факультет и педагогический вуз, участвовали в организации и проведении ведущих международных научных конференций, чтобы сотрудники кафедры, входили в состав докторских и кандидатских советов, в которых могли бы представлять и защищать диссертации выпускники кафедры ТиС ТГПУ им. Л. Н. Толстого; чтобы на кафедре решались задачи по интеграции вузовской и академической наук.

Н. Н. Сергеевым было отдано много сил для решения этих задач, он этим занимался постоянно. Задачи, поставленные профессором Н. Н. Сергеевым, решаются и в настоящее время. Ведется научная работа. Осуществляется подготовка диссертаций. Издаются монографии. Результаты научных исследований сотрудников кафедры, которой он руководил, публикуются в отечественных и зарубежных журналах и в материалах международных конференций [1-102].

В настоящее время кафедра технологии и сервиса, возглавляемая заведующим А. Н. Сергеевым, доктором педагогических наук, профессором, сыном Н. Н. Сергеева сотрудничает с институтом металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова РАН, лабораторией прочности и пластичности металлических и композиционных материалов и наноматериалов (г. Москва), ФГУП Всероссийским научно-исследовательским институтом авиационных материалов (Государственный научный центр РФ, г. Москва), научно-образовательным центром «Порошковая металлургия и функциональные покрытия» (г. Курск), Рыбинским государственным авиационным техническим университетом им. П. А. Соловьева, (г. Рыбинск), Санкт-Петербургским политехническим университетом Петра Великого (г. Санкт-Петербург), институтом высокоточных систем им. В. П. Грязева Тульского государственного университета (г. Тула), научно-производственными предприятиями «ТЕЛАР», «ВУЛКАН-ТМ» (г. Тула), осуществляя интеграцию вузовской и академической науки и выполняя научные программы и государственные задания Минобрнауки России.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лабораторный практикум по курсу «Эксплуатационные материа-лы»: учеб. – метод. пособие/ Н. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, А. Н. Сергеев, Д. М. Хонелидзе, С. Н. Кутепов, П. Н. Медведев, Ю. С. Дорохин. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. 96 с.

2. Современные проблемы технических наук: учебное пособие / Н. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, А. Н. Сергеев, Ю. С. Дорохин, П. Н. Медведев. – Тула: Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2016. 120 с.

3. Жидкие и консистентные смазочные композиционные материалы, со-держащие дисперсные частицы гидросиликатов магния, для узлов трения управляемых систем: монография / А. Д. Бреки, В. В. Медведева, Н. А. Крылов, С. Е. Александров, А. Е. Гвоздев, А. Н. Сергеев, Н. Е. Стариков, Д. А. Провоторов, Н. Н. Сергеев, Д. В. Малий; под ред. А. Д. Бреки. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. 166 с.

4. Особенности структурных и фазовых превращений в титановых за-готовках в процессе высокоскоростного пластического деформирования: монография / Н. А. Крылов, М. А. Скотникова, А. Д. Бреки, В. В. Медведева, А. Е. Гвоздев, А. Н. Сергеев, Н. Е. Стариков, Д. А. Провоторов, Н. Н. Сергеев, Д. В. Малий; под ред. Н. А. Крылова – Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. 202 с.

5. О состоянии предпревращения металлов и сплавов: монография / О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев, И. В. Тихонова, Н. Н. Сергеев, А. Д. Бреки, Н. Е. Стариков, А. Н. Сергеев, А. А. Калинин, Д. В. Малий, Ю. Е. Титова, С. Е. Александров, Н. А. Крылов. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. 245 с.

6. Разработка прогрессивных технологий получения и обработки металлов, сплавов, порошковых и композиционных наноматериалов: монография / М. Х. Шоршоров, А. Е. Гвоздев, В. И. Золотухин, А. Н. Сергеев, А. А. Калинин, А. Д. Бреки, Н. Н. Сергеев, О. В. Кузовлева, Н. Е. Стариков, Д. В. Малий. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. 235 с.

7. Моделирование ресурсосберегающих процессов обработки металлов и сплавов: монография / Е. М. Селедкин, Г. М. Журавлев, А. Е. Гвоздев, Н. Н. Сергеев, А. А. Калинин, Д. В. Малий. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. 204 с.

8. Ресурсы деформационной способности различных материалов: учеб. пособие / Н. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, А. Н. Сергеев, А. Д. Бреки, А. А. Калинин, С. Е. Александров, Н. Е. Стариков, О. В. Кузовлева, Д. В. Малий, С. Н. Кутепов, Е. В. Цой, Д. С. Клементьев, Е. Б. Соломатникова. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. 172 с.

9. Образец для определения когезионной прочности газотермических порошковых покрытий: пат. № 166249 Российская Федерация: МПК G01N 19/04 (2006.01) [Электронный ресурс] / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, Д. А. Провоторов, Д. М. Хонелидзе, И. В. Тихонова, А. Д. Бреки, И. В. Минаев, О. В. Кузовлева, Д. В. Малий, А. А. Калинин, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, М. В. Ушаков; заявитель и патентообладатель А. Е. Гвоздев – №2016122692/28; заявл. 08.06.2016; опубл. 20.11.2016, Бюл. № 32. 2 с.

10. Современные перспективные материалы и технологии: учеб. Пособие / А. Н. Сергеев, Н. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, П. Н. Медведев, Ю. С. Дорохин, Д. В. Малий. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. 87 с.

11. Основы технологии металлов: учебник / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, Г. М. Журавлев, Д. Н. Провоторов, А. Д. Бреки, А. Е. Гвоздев; под ред. проф. А. Е. Гвоздева. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. 450 с.

12. Лабораторный практикум по курсу «Эксплуатация, сервисное обслуживание и ремонт автомобиля»: учеб.-метод. пособие / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, А. А. Потапов, А. Е. Гвоздев, К. Г. Мирза, Ю. С. Дорохин, П. Н. Медведев. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. 370 с.

13. Основы функционирования систем сервиса: учеб. пособие / Ю. С. Дорохин, А. Н. Сергеев, Н. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, П. Н. Медведев, Д. В. Малий – Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. – 244 с.

14. Технологические процессы в сервисе: учебное пособие / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, Ю. С. Дорохин, П. Н. Медведев, А. В. Сергеева. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. – 248 с.

15. Современные проблемы науки и образования: учебник / В. М. Заёнчик, А. Н. Сергеев, Н. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, П. Н. Медведев, Ю. С. Дорохин. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. – 202 с.

16. Эксплуатационные материалы: учебное пособие / Н. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, А. Н. Сергеев, Д. М. Хонелидзе, С. Н. Кутепов, П. Н. Медведев, Ю. С. Дорохин. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. – 160 с.

17. Технология конструкционных и эксплуатационных материалов: учебник / А. Е. Гвоздев, Н. Е. Стариков, В. И. Золотухин, Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, А. Д. Бреки; под ред. проф. А. Е. Гвоздева. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. – 351 с.

18. Организация и планирование деятельности предприятий сервиса: учебное пособие / Ю. С. Дорохин, А. Н. Сергеев, К. С. Дорохина, Н. Н. Сер-геев, А. Е. Гвоздев, П. Н. Медведев, А. В. Сергеева, Д. В. Малий – Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. – 380 с.

19. Сопряженные поля в упругих, пластических, сыпучих средах и металлических труднодеформируемых системах: монография / Э. С. Макаров, В. Э. Ульченкова, А. Е. Гвоздев, Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев; под ред. проф. А. Е. Гвоздева. Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. 526 с.

20. Композиционные покрытия на основе полиимида А-ООО и наночастиц WS2 с повышенными триботехническими характеристиками в условиях сухого трения скольжения / А. Д. Бреки, А. Л. Диденко, В. В. Кудрявцев, Е. С. Васильева, О. В. Толочко, А. Е. Гвоздев, Н. Н. Сергеев, Д. А. Провоторов, Н. Е. Стариков, Ю. А. Фадин, А. Г. Колмаков // Материаловедение. – 2016. – № 5. – С. 41-44.

21. О фрикционном взаимодействии металлических материалов с учетом явления сверхпластичности / А. Д. Бреки, А. Е. Гвоздев, А. Г. Колмаков, Н. Е. Стариков, Д. А. Провоторов, Н. Н. Сергеев, Д. М. Хонелидзе // Материаловедение. – 2016. – № 8. – С. 21-25.

22. Распределение температур и структура в зоне термического влияния для стальных листов после лазерной резки / А. Е. Гвоздев, Н. Н. Сергеев, И. В. Минаев, А. Г. Колмаков, И. В. Тихонова, А. Н. Сергеев, Д. А. Прово-торов, Д. М. Хонелидзе, Д. В. Малий, И. В. Голышев // Материаловедение. – 2016. – № 9. – С. 3-7.

23. Вариант расчета максимального упрочнения малоуглеродистых сталей в процессах пластической деформации / Г. М. Журавлев, А. Е. Гвоздев, Н. Н. Сергеев, Д. А. Провоторов // Производство проката. – 2016. – № 7. – С. 9-13.

24. Расчет деформационной повреждаемости в процессах обратного выдавливания металлических изделий / А. Е. Гвоздев, Г. М. Журавлёв, А. Г. Колмаков, Д. А. Провоторов, Н. Н. Сергеев // Технология металлов. – 2016. – № 1. – С. 23-32.

25. Триботехнические свойства пластичных смазочных композиционных материалов с наполнителями из дисперсных частиц меди и цинка / В. В. Медведева, А. Д. Бреки, Н. А. Крылов, С. Е. Александров, А. Е. Гвоздев, Н. Е. Стариков, Н. Н. Сергеев, Е. В. Агеев, А. Н. Сергеев, Д. В. Малий, Д. А. Провоторов // Известия Юго-Западного государственного университета. – 2016. – № 2 (65). С. 109-119.

26. Триботехнические характеристики композиционных покрытий с матрицей из полигетероарилена ПМ-ДАДФЭ и наполнителями из наночастиц дихалькогенидов вольфрама при трении скольжения в среде жидкого смазочного материала / А. Д. Бреки, А. Л. Диденко, В. В. Кудрявцев, Е. С. Васильева, О. В. Толочко, А. Г. Колмаков, Ю. А. Фадин, Н. Е. Стариков, А. Е. Гвоздев, Н. Н. Сергеев, Е. В. Агеев, Д. А. Провоторов // Известия Юго-Западного государственного университета. – 2016. – № 3 (66). – С. 17-28.

27. Влияние неоднородности механических свойств на силовые параметры пластического формоизменения / Г. М. Журавлев, А. Е. Гвоздев, Д. А. Провоторов, Н. Н. Сергеев, Е. В. Агеев, Е. А Гречишкин., Д. В. Малий // Известия Юго-Западного государственного университета. – 2016. – № 3 (66). – С. 52-60.

28. Физико-механический подход к анализу процессов вытяжки с утонением цилиндрических изделий с прогнозированием деформационной повреждаемости материала / Г. М. Журавлев, Н. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, А. Н. Сергеев, Е. В. Агеева, Д. В. Малий // Известия Юго-Западного государственного университета. – 2016. – № 4 (67). – С. 39-56.

29. Synthesis and tribotechnical properties of composite coatings with PM–DADPE polyimide matrix and fillers of tungsten dichalcogenide nanoparticles upon dry sliding friction / A. D. Breki, E. S. Vasilyeva, O. V. Tolochko, A. L. Didenko, V. V. Kudryavtsev, A. G. Kolmakov, N. N. Sergeyev, A. E. Gvozdev, N. E. Starikov, D. A. Provotorov, Y.A. Fadin // Inorganic Materials: Applied Research. – 2016. – Т. 7. – № 4. – С. 542-546.

30. Антифрикционные свойства композиционных материалов на основе алюминия, упрочнённых углеродными нановолокнами, при трении по стали 12Х / А. Д. Бреки, Т. С. Кольцова, А. Н. Скворцова, О. В. Толочко, С. Е. Александров, А. А. Лисенков, Д. А. Провоторов, Н. Н. Сергеев, Д. В. Малий, А. Н. Сергеев, Е. В. Агеев, А. Е. Гвоздев // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии. – 2016. – № 4 (21). – С. 11-23.

31. To the effective properties estimation of materials / G. M. Zhuravlev, A. N. Sergeyev, A. E. Gvozdev, N. N. Sergeyev, A. N. Privalov, D. A. Provotorov // IEJME: Mathematics Education. – 2016. – Т. 11. – № 6. – С. 1481-1493.

32. Противоизносные свойства консистентного смазочного композиционного материала, содержащего смесь гидросиликатов магния / В. В. Медведева, А. Д. Бреки, Н. А. Крылов, С.Е. Александров, А. Е. Гвоздев, Н. Е. Стариков, Е. В. Агеев, Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, Д. В. Малий // Известия Юго-Западного государственного университета. – Серия: Техника и технологии. – 2016. – № 2 (19). – С. 30-40.

33. Технология металлов и сплавов: учебник / Н. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, Н. Е. Стариков, В. И. Золотухин, А. Н. Сергеев, А. Д. Бреки, О. В. Кузовлева, Г. М. Журавлёв, Д. А. Провоторов; под ред. проф. Н.Н. Сергеева. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. – 490 с.

34. Материаловедение: учебник для вузов / Н. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, В. К. Зеленко, А. Н. Сергеев, О. В. Кузовлева, Н. Е. Стариков, В. И. Золотухин, А. Д. Бреки; под ред. проф. А.Е. Гвоздева. Изд. 2-е доп. и испр. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. – 469 с.

35. Атлас микроструктур неметаллических и металлических материалов: учеб. пособие / Н. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева, А. Н. Сергеев, Н. Е. Стариков, В. Ю. Кузовлев, А. Д. Бреки, А. А. Калинин, П. Н. Медведев, Ю. С. Дорохин, Д. В. Малий, В. И. Абрамова, К. Н. Старикова, И. Д. Зайцев, С. Н. Кутепов. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. – 96 с.

36. Образец для определения адгезионной прочности покрытий: пат. № 170385 Российская Федерация: МПК G01N1/28 (2006.01); G01N19/04 (2006.01) [Электронный ресурс] / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, Д. А Прово-торов., Д. М. Хонелидзе, И. В. Тихонова, А. Д. Бреки, И. В. Минаев, О. В. Кузовлева, Д. В. Малий, А. А. Калинин, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, А. И. Кузнецова, А. В. Казакова, Д. Н. Романенко, Е. Ф. Романенко, В. Э. Лисицина; заявитель и патентообладатель А. Е. Гвоздев – № 2016142134; заявл. 26.10.2016; опубл. 24.04.2017, Бюл. № 12. – 6 с.

37. Физика конденсированного состояния: Точечные дефекты кристаллического строения в формировании свойств материалов: учеб. пособие / А. Н. Чуканов, Н. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, А. Н. Сергеев, П. Н. Медведев, Ю. С. Дорохин, С. Н. Кутепов, А. А. Яковенко, Д. В. Малий. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. – 104 с.

38. Физика конденсированного состояния: Линейные дефекты кристаллического строения в формировании свойств материалов: учеб. пособие / А. Н. Чуканов, Н. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, А. Н. Сергеев, П. Н. Медведев, Ю. С. Дорохин, С. Н. Кутепов, А. А. Яковенко, Д. В. Малий. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. – 154 с.

39. Физика конденсированного состояния: Поверхностные и объемные дефекты кристаллического строения в формировании свойств материалов: учеб. пособие / А. Н. Чуканов, Н. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, А. Н. Сергеев, П. Н. Медведев, Ю. С. Дорохин, С. Н. Кутепов, А. А. Яковенко, Д. В. Малий. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. – 156 с.

40. Физика конденсированного состояния: Дефекты строения и создание теорий упрочнения материалов: учеб. пособие / А. Н. Чуканов, Н. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, А. Н. Сергеев, П. Н. Медведев, Ю. С. Дорохин, С. Н. Кутепов, А. А. Яковенко, Д. В. Малий. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. – 298 с.

41. Лабораторный практикум по курсу «Обработка конструкционных материалов»: учеб.-метод. пособие / А. Н. Сергеев, Н. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, М. В. Ушаков, Ю. С. Дорохин, П. Н. Медведев, С. Н. Кутепов, Д. С. Клементьев, А. М. Медведева. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. – 146 с.

42. Выпускная квалификационная работа студентов-магистрантов направления подготовки 44.04.01 Педагогическое образование (направленность (профиль) «Технология») (уровень магистратуры): учеб.-метод. пособие / А. Н. Сергеев, Н. Н. Сергеев, П. Н. Медведев, Ю. С. Дорохин, В. М. Заёнчик, А. Е. Гвоздев, А. Н. Чуканов, А. В. Сергеева, Д. В. Малий, Д. С. Клементьев – Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. – 196 с.

43. Комплексный подход к моделированию ресурсосберегающих процессов обработки и фрикционного взаимодействия металлических систем: монография / А. Е. Гвоздев, Н. Н. Сергеев, И. В. Минаев, А. Н. Сергеев, А. Д. Бреки, Д. В. Малий, А. А. Калинин, С. В. Сапожников, С. Н. Кутепов, Д. А. Провоторов; под ред. д-ра техн. наук, проф. А. Е. Гвоздева. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. – 232 с.

44. Выпускная квалификационная работа бакалавра педагогического образования: учеб.-метод. пособие для подготовки к Государственной итоговой аттестации по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профили «Технология» и «Экономика» / А. Н. Сергеев, Н. Н. Сергеев, Н. А. Шайденко, А. Е. Гвоздев, В. Г. Подзол-ков, П. Н. Медведев, А. Ю. Кальянов, С И. Логвинов, Ю. С. Дорохин, А. В. Сергеева, А. М. Лунева, С. Н. Кипурова, В. М. Заёнчик, А. Н. Чуканов, С. Н. Кутепов, Д. В. Малий, Д. М. Хонелидзе; под ред. д-ра педагогических наук, проф. А. Н. Сергеева. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. – 240 с.

45. Обработка конструкционных материалов: учебное пособие / А. Н. Сергеев, Н. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, М. В. Ушаков, А. Н. Чуканов, Ю. С. Дорохин, П. Н. Медведев, С. Н. Кутепов, Д. М. Хонелидзе, Д. С. Клементьев. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. – 276 с.

46. Влияние химического состава листового проката и параметров лазерной обработки на показатели качества / Н. Н. Сергеев, И. В. Минаев, И. В. Тихонова, М. Ю. Комарова, А. Е. Гвоздев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Д. Бреки, А. А. Калинин, Д. В. Малий // Сб. матер. VII Международной конференции «Деформация и разрушение материалов и наноматериалов». (7–10 ноября 2017, Москва). – М.: ИМЕТ РАН, 2017. – С. 208-209.

47. Зависимость показателей качества поверхности от режимов лазерной и газоплазменной обработки листового проката из углеродистых сталей / Н. Н. Сергеев, И. В. Тихонова, А. Е. Гвоздев, И. В. Минаев, Е. С. Алявдина, А. Н. Сергеев, А. Д. Бреки, С. Н. Кутепов, А. А. Калинин, Д. В. Малий // Сб. матер. VII Международной конференции «Деформация и разрушение материалов и наноматериалов». (7–10 ноября 2017, Москва). – М.: ИМЕТ РАН, 2017. – С. 210.

48. Изменение характеристик прочности и пластичности порошковой металлической системы железо-углерод-вольфрам-молибден-хром-ванадий при термомеханическом растяжении / Н. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, С. Н. Кутепов // Сб. матер. VII Международной конференции «Деформация и разрушение материалов и наноматериалов». (7–10 ноября 2017, Москва). – М.: ИМЕТ РАН, 2017. – С. 574-575.

49. Формирование пластических зон около сферической полости в упрочненных низкоуглеродистых сталях в условиях водородной стресс-коррозии / Н. Н. Сергеев, В. А. Терешин, А.Н. Чуканов, А. Г. Колмаков, А. А. Яковенко, А. Н. Сергеев, И. М. Леонтьев, Д. М. Хонелидзе, А. Е. Гвоздев // Материаловедение. – 2017. – № 12. – С. 18-25.

50. Противоизносные свойства пластичных смазочных композиционных материалов «ЛИТОЛ24-частицы гидросиликатов магния» / А. Д. Бреки, В. В. Медведева, Н. А. Крылов, А. Г. Колмаков, Ю. А. Фадин, А. Е. Гвоздев, Н. Н. Сергеев, С. Е. Александров, Д. А. Провоторов // Материаловедение. – 2017. – № 3. – С. 38-42.

51. Многоуровневый подход к проблеме замедленного разрушения высокопрочных конструкционных сталей под действием водорода / В. П. Баранов, А. Е. Гвоздев, А. Г. Колмаков, Н. Н. Сергеев, А. Н. Чуканов // Материаловедение. – 2017. – № 7. – С. 11-22.

52. Вариант определения максимального пластического упрочнения в инструментальных сталях / Г. М. Журавлев, А. Е. Гвоздев, А. Е. Чеглов, Н. Н. Сергеев, О. М. Губанов // Сталь. – 2017. – № 6. – С. 26-39.

53. Maximum plastic strengthening in tool steels / G. M. Zhuravlev, A. E. Gvozdev, A. E. Cheglov, N. N. Sergeev, O. M. Gubanov // Steel in Translation. – 2017. – Т. 47. – № 6. – С. 399-411.

54. Механизмы водородного растрескивания металлов и сплавов, связанные с усилением дислокационной активности / Н. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, Е. В. Агеев // Известия Юго-Западного государственного университета. – 2017. – Т. 21, № 2(71). – С. 32-47.

55. Анализ теоретических представлений о механизмах водородного растрескивания металлов и сплавов / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, Е. В. Агеев // Известия Юго-Западного государственного университета. – 2017. – Т. 21, № 3(72). – С. 6-33.

56. Диффузия водорода в сварных соединениях конструкционных сталей / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, Е. В. Агеев // Известия Юго-Западного государственного университета. – 2017. – Т. 21, № 6(75). – С.85-95.

57. On friction of metallic materials with consideration for superplasticity phenomenon / A. D. Breki, A. E. Gvozdev, A. G. Kolmakov, N. E. Starikov, D. A. Provotorov, N. N. Sergeyev, D. M. Khonelidze // Inorganic Materials: Ap-plied Research. – 2017. – Т. 8. – № 1. – С. 126-129.

58. Temperature distribution and structure in the heat-affected zone for steel sheets after laser cutting / A. E. Gvozdev, N. N. Sergeyev, I. V. Minayev, I. V. Tikhonova, A. N. Sergeyev, D. M. Khonelidze, D. V. Maliy, I. V. Golyshev, A. G. Kolmakov, D. A. Provotorov // Inorganic Materials: Applied Research. – 2017. – Т. 8. – № 1. – С. 148-152.

59. Composite coatings based on A-OOO polyimide and WS2 nanoparti-cles with enhanced dry sliding characteristics / A. D. Breki, A. L. Didenko, V. V. Kudryavtsev, E. S. Vasilyeva, O. V. Tolochko, A. E. Gvozdev, N. N. Sergeyev, D. A. Provotorov, N. E. Starikov, Yu. A. Fadin, A. G. Kolmakov // Inorganic Materials: Applied Research. – 2017. – Т. 8. – № 1. – С. 56-59.

60. Перспективные стали для кожухов доменных агрегатов / Н. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, А. Н. Сергеев, И. В. Тихонова, С. Н. Кутепов, О. В. Кузовлева, Е. В. Агеев // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии. – 2017. – Т. 7, № 2(23). – С. 6-15.

61. Влияние режимов термической обработки на стойкость высокопрочной арматурной стали к водородному растрескиванию / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, Е. В. Агеев // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии. – 2017. – Т. 7, № 4 (25). – С. 6-20.

62. Водородное охрупчивание и растрескивание высокопрочной арматурной стали: монография / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. – 180 с.

63. Аномальные механические свойства некоторых металлических систем: монография / А. Е. Гвоздев, Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, Д. М. Хонелидзе, С. В. Сапожников; под ред. д-ра техн. наук, проф. А. Е. Гвоздева. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. – 149 с.

64. Технология конструкционных, эксплуатационных и инструментальных материалов: учебник 2 изд., доп. / А. Е. Гвоздев, Н. Е. Стариков, Н. Н. Сергеев, В. И. Золотухин, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Д. Бреки. – Изд-во ТулГУ, 2018. – 406 с.

65. Основы ресурсосберегающих процессов получения быстрорежущего инструмента: монография / А. Е. Гвоздев, Н. Е. Стариков, Н. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, С. В. Сапожников, А. А. Калинин, Д. С. Клементьев; под ред. проф. А. Е. Гвоздева. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. – 209 с.

66. Основы лазерной и газоплазменной обработки конструкционных сталей: монография / Н. Н. Сергеев, И. В. Минаев, И.В . Тихонова, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, М. Ю. Комарова, А. Е. Гвоздев; под ред. проф. Н. Н. Сергеева. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. – 283 с.

67. Antiwear properties of composite greases «LITOL-24–magnesium hy-drosilicate particles» / A. D. Breki, V. V. Medvedeva, N. A. Krylov, S. E. Ale-ksandrov, A. G. Kolmakov, A. E. Gvozdev, N. N. Sergeev, D. A. Provotorov, Y. A. Fadin // Inorganic Materials: Applied Research. – 2018. – Т. 9. – № 1. – С. 21-25.

68. Исследование трения верчения стали ШХ15 по сталям Р6М5 И 10Р6М5-МП с использованием математического моделирования / А. Д. Бре-ки, А. Е. Гвоздев, А. Г. Колмаков, Н. Н. Сергеев // Материаловедение. – 2018. – № 12. – С. 40-45.

69. Механизмы водородного растрескивания металлов и сплавов. Ч. I (обзор) / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Г. Колмаков, А. Е. Гвоздев // Материаловедение. – 2018. – № 3. – С. 27-33.

70. Механизмы водородного растрескивания металлов и сплавов. Ч. II (обзор) / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Г. Колмаков, А. Е. Гвоздев // Материаловедение. – 2018. – № 4. – С. 20-29.

71. Влияние содержания углерода и параметров лазерной резки на строение и протяженность зоны термического влияния стальных листов / Н. Н. Сергеев, И. В. Минаев, А. Е. Гвоздев, А. Е. Чеглов, И. В. Тихонова, О. М. Губанов, И. А. Цыганов, Е. С. Алявдина, А. Д. Бреки // Сталь. – 2018. – № 5. – С. 21-26.

72. Decarburization and the influence of laser cutting on steel structure / N. N. Sergeev, I. V. Minaev, A. E. Gvozdev, A. E. Cheglov, I. A. Tsyganov, I. V. Tikhonova, E. S. Alyavdina, O. M. Gubanov, A. D. Breki // Steel in Translation. – 2018. – Т. 48. – № 5. – С. 313-319.

73. Некоторые задачи расчета мощности пластической деформации порошковых металлических систем / Э. С. Макаров, А. Е. Чеглов, А. Е. Гвоздев, Г. М. Журавлев, Н. Н. Сергеев, В. С. Юсупов, О. М. Губанов, М. В. Казаков, А. Д. Бреки // Сталь. – 2018. – № 9. – С. 23-27.

74. Conception of a plastic gas and model medium for dilatable isotropic materials / E. S. Makarov, A. E. Gvozdev, G. M. Zhuravlev, V. S. Yusupov, N. N. Sergeev, O. M. Gubanov, I. A. Tsyganov // Физика и химия обработки материалов. – 2018. – № 4. – С. 57-64.

75. Использование водородных ловушек для контроля процесса водородного растрескивания сварных соединений высокопрочных сталей / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, Н. Е. Стариков, О. В. Пантюхин // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2018. – № 4. – С. 344-356.

76. Влияние температуры отпуска на длительную прочность арматурных сталей в водородсодержащих средах / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, Н. Е. Стариков, О. В. Пантюхин // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2018. – № 6. – С. 514-525.

77. Исследование влияния легирования на механические и коррозионные свойства арматурного проката / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, А. Н. Чуканов, С. Н. Кутепов, О. В. Пантюхин // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2018. – № 7. С. 117-131.

78. Исследование коррозионной стойкости интерметаллических порошковых материалов / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, О. В. Пантюхин // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2018. – № 8. – С. 108-121.

79. Разработка методики исследования коррозионно-механического разрушения арматурных сталей в водородосодержащих средах / Н. Н. Сер-геев, В. В. Извольский, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, Д. С. Клементьев, О. В. Пантюхин // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2018. – № 8. – С. 35-56.

80. Когезионная прочность металлических и интерметаллических порошковых плазменных покрытий / Н. Н. Сергеев, М. В. Ушаков, А. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, С. Н. Кутепов, О.В. Пантюхин // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2018. – № 8. – С. 62-79.

81. Влияние режимов отпуска на длительную прочность арматурных сталей в водородсодержащих средах / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, О. В. Пантюхин // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2018. – № 8. – С. 94-107.

82. Влияние химического состава стали 23Х2Г2Т на стойкость против коррозионного растрескивания / Н. Н. Сергеев, В. В. Извольский, А. Н. Сер-геев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, А. Н. Чуканов, О. В. Пантюхин // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2018. – № 9. – С. 409-420.

83. Влияние условий отпуска на механические и коррозионные свойства стали 23Х2Г2Т / Н. Н. Сергеев, В. В. Извольский, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев // Вестник Рыбинской государственной авиационной технологической академии им. П. А. Соловьева. – 2018. – № 2 (45). – С. 128-135.

84. Влияние микроструктурных факторов и термической обработки на коррозионную стойкость арматурной стали класса А600 / Н. Н. Сергеев, В. В. Извольский, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, Е. В. Агеев, Д. С. Клементьев // Известия Юго-Западного государственного университета. – 2018. – Т. 22, № 2(77). – С. 52-63.

85. Применение технологии изготовления «корковым» способом формообразующих вставок для литья под давлением медных сплавов / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, Е. В. Агеев, Д. С. Клементьев // Известия Юго-Западного государственного университета. – 2018. – Т. 22, № 3(78). – С. 67-83.

86. Formation of plastic zones near spherical cavity in hardened low-carbon steels under conditions of hydrogen stress corrosion / N. N. Sergeev, V. A. Tereshin, A. N. Sergeev, D. M. Khonelidze, A. E. Gvozdev, A. N. Chuka-nov, I. M. Leont'ev, A. G. Kolmakov, A. A. Yakovenko // Inorganic Materials: Applied Research. – 2018. – Т. 9. – № 4. – С. 663-669.

87. Кинетика распространения трещин в металлических материалах при коррозионно-механическом разрушении / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, Е. В. Агеев // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии. – 2018. – Т. 8, № 1 (26). – С. 24-37.

88. Исследование сравнительной стойкости арматурных сталей в процессе ускоренных лабораторных испытаний на водородное растрескивание / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, Е. В. Агеев, Д. С. Клементьев // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии. 2018. Т. 8, № 1 (26). С. 38-48.

89. Влияние температуры отпуска на стойкость арматурной стали 20ГС2 против водородного растрескивания / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, Е. В. Агеев // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии. – 2018. – Т. 8, № 2 (27). – С. 54-67.

90. Влияние уровня растягивающих напряжений на длительную прочность арматурных сталей в водородсодержащих средах / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, И. В. Тихонова, С. Н. Кутепов, Е. В. Агеев // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии. – 2018. – Т. 8, № 2 (27). – С. 6-19.

91. Механические свойства и внутреннее трение высокопрочных сталей в коррозионных средах: монография / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. – 430 с.

92. Основы повышения долговечности высокопрочных сталей, эксплуатируемых в водородсодержащих средах: монография / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, Г. М. Журавлев, А. Е. Гвоздев. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2019. – 348 с.

93. Особые состояния металлических систем и ресурсосберегающие технологии процессов обработки давлением композиционных материалов, сплавов цветных металлов, слитковых и порошковых сталей: монография (2-е издание, дополненное) / Н. Е. Стариков, А. Е. Гвоздев, С. Н. Кутепов, Н. Н. Сергеев, Р. В. Старков, А. В. Лаврушин, С. Н. Богомолов; под редакцией профессора А. Е. Гвоздева. – Рязань: РВВДКУ, 2019. – 194 с.

94. Влияние внутренних и внешних факторов на кинетику процесса коррозионно-механического разрушения арматурных сталей / Н. Н. Сергеев, В. В. Извольский, А. Н. Сергеев, С.Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, Д. С. Клементьев, О. В. Пантюхин // Известия Тульского государственного университета. – Технические науки. – 2019. – № 2. – С. 410-429.

95. Влияние процесса оплавления на когезионную прочность порошковых плазменных покрытий / Н. Н. Сергеев, М. В. Ушаков, А. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, С. Н. Кутепов, О. В. Пантюхин // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2019. – № 2. – С. 430-441.

96. Влияние температуры начала мартенситного превращения на характер водородного растрескивания сварных соединений / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, Д. С. Клементьев, А. А. Калинин // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2019. – № 3. – С. 523-528.

97. Влияние технологических режимов упрочнения арматурного прока-та для композиционных железобетонных конструкций на чувствительность к коррозионно-механическому разрушению / Н. Н. Сергеев, В. В. Извольский, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, О. В. Пантюхин // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2019. – № 3. – С. 558-568.

98. Исследование коррозионной стойкости конструкционных легированных сталей в агрессивных средах / Н. Н. Сергеев, М. В. Ушаков, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, О. В. Пантюхин // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2019. – № 3. – С. 591-601.

99. Исследование влияния механической обработки на коррозионную стойкость интерметаллических покрытий / Н. Н. Сергеев, М. В. Ушаков, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, А. А. Калинин // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2019. – № 3. – С. 601-614.

100. Влияние комплексного легирования на физико-механические и коррозионные свойства низколегированной стали 09Г2 / Н. Н. Сергеев, В. В. Извольский, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, Е. В. Агеев // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии. – 2019. – Т. 9, № 1 (30). – С. 6-18.

101. Влияние качества шихты на чувствительность стали 30ХГСА к водородному растрескиванию / Н. Н. Сергеев, И. В. Тихонова, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, Е. В. Агеев, А. Е. Гвоздев, Д. С. Клементьев // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии. – 2019. – Т. 9, № 1 (30). – С. 37-48.

102. Минас Хачатурович Шоршоров, выдающийся ученый, педагог, учитель (1922-2005) / В.Н. Гадалов, А.Е. Гвоздев, В.И. Золотухин, М.М. Криштал, Н.Н. Сергеев, А.Н. Сергеев, Н.Е. Стариков, А.А. Шатульский // Вестник Рыбинской государственной авиационной технологической академии им. П.А. Соловьева. № 3 (26), 2013. – С. 3-7.

REFERENCES

1. Sergeev, N. N., Gvozdev, A. E., Sergeev, A. N., et al., (2016), Laboratory workshop on the course “Operational materials” [Laboratornyj praktikum po kursu «Ekspluatacionnye materialy»], TulGU, Tula, 96 p.

2. Sergeev, N. N., Gvozdev, A. E., Sergeev, A. N., et al., (2016), Modern problems of technical Sciences [Sovremennye problemy tekhnicheskih nauk], TGPU L. N. Tolstoy, Tula, 120 p.

3. Breki, A. D., Medvedeva, V. V., Krylov, N. A., et al., (2016), Liquid and grease lubricating composite materials containing dispersed particles of magnesium hydrosilicates for friction units of controlled systems [Zhidkie i konsistentnye smazochnye kompozicionnye materialy,

soderzhashchie dispersnye chasticy gidrosilikatov magniya, dlya uzlov treniya upravlyaemyh sistem], TulGU, Tula, 166 p.

4. Krylov, N. A., Skotnikova, M. A., Breki, A. D., et al., (2016), Features of structural and phase transformations in titanium preparations in the process of high-speed plastic deformation [Osobennosti strukturnyh i fazovyh prevrashchenij v titanovyh zagotovkah v processe vysokoskorostnogo plasticheskogo deformirovaniya], TulGU, Tula, 202 p.

5. Kuzovleva, O. V., Gvozdev, A. E., Tikhonova, I. V., et al., (2016), On the state of pre-conversion of metals and alloys [O sostoyanii predprevrashcheniya metallov i splavov], TulGU, Tula, 245 p.

6. Shorshorov, M. H., Gvozdev, A. E., Zolotukhin, V. I. et al., (2016), Development of progressive technologies for obtaining and processing metals, alloys, powder and composite nanomaterials [Razrabotka progressivnyh tekhnologij polucheniya i obrabotki metallov, splavov, poroshkovyh i kompozicionnyh nanomaterialov], TulGU, Tula, 235 p.

7. Seledkin, E. M., Zhuravlev, G. M., Gvozdev, A. E., et al., (2016), Modeling of resource-saving processes of processing of metals and alloys [Modelirovanie resursosberegayushchih processov obrabotki metallov i splavov], TulGU, Tula, 204 p.

8. Sergeev, N. N., Gvozdev, A. E., Sergeev, A. N., et al., (2016), Resources of deformation ability of various materials [Resursy deformacionnoj sposobnosti razlichnyh materialov], TulGU, Tula, 172 p.

9. Sergeev, N. N., Sergeev, A. N., Provotorov, D. A., et al., (2016), Sample for determination of cohesive strength of gas-thermal powder coatings [Obrazec dlya opredeleniya kogezionnoj prochnosti gazotermicheskih poroshkovyh pokrytij]: patent No 166249, Russian Federation; applicant and patentee A. E. Gvozdev, 2 p.

10. Sergeev, A. N., Sergeev, N. N., Gvozdev, A. E., et al., (2016), Modern perspective materials and technologies [Sovremennye perspektivnye materialy i tekhnologii], TulGU, Tula, 87 p.

11. Sergeev, N. N., Sergeev, A. N., Zhuravlev, G. M. et al., (2016), Fundamentals of metal technology [Osnovy tekhnologii metallov], TulGU, Tula, 450 p.

12. Sergeev, N. N., Sergeev, A. N., Potapov, A. A., et al., (2016), Laboratory workshop on the course “Operation, maintenance and repair of the car” [Laboratornyj praktikum po kursu «Ekspluataciya, servisnoe obsluzhivanie i remont avtomobilya»], TulGU, Tula, 370 p.

13. Dorokhin, Yu. S., Sergeev, A. N., Sergeev, N. N., et al., (2016), Fundamentals of the functioning of service systems [Osnovy funkcionirovaniya sistem servisa], TulGU, Tula, 244 p.

14. Sergeev, N. N., Sergeev, A. N., Gvozdev, A. E. et al., (2016), Technological processes in service [Tekhnologicheskie processy v servise], TulGU, Tula, 248 p.

15. Zaenchik, V. M., Sergeev, A. N., Sergeev, N. N., et al., (2016), Modern problems of science and education [Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya], TulGU, Tula, 202 p.

16. Sergeev, N. N., Gvozdev, A. E., Sergeev, A. N., et al., (2016), Operational materials [Ekspluatacionnye materialy], TulGU, Tula, 160 p.

17. Gvozdev, A. E, Starikov, N. E., Zolotukhin, V. I., et al., (2016), Technology of constructional and operational materials [Tekhnologiya konstrukcionnyh i ekspluatacionnyh materialov], TulGU, Tula, 351 p.

18. Dorokhin, Yu. S., Sergeev, A. N., Dorokhina, K. S., Sergeev, N. N., et al., (2016), Organization and planning of activity of service enterprises [Organizaciya i planirovanie deyatel'nosti predpriyatij servisa], TulGU, Tula, 380 p.

19. Makarov, E. S., Ulchenkova, V. E., Gvozdev, A. E., Sergeev, N. N. and Sergeev, A. N. et al., (2016), Conjugate fields in elastic, plastic, bulk media and metal hard-to-deform systems [Sopryazhennye polya v uprugih, plasticheskih, sypuchih sredah i metallicheskih trudnodeformiruemyh sistemah], TulGU, Tula, 526 p.

20. Sergeev, N. N., Breki, A.D., Didenko, A. L., et al., (2016), Composite coatings based on polyimide A-1 and WS2 nanoparticles with increased tribotechnical characteristics under dry sliding friction [Kompozicionnye pokrytiya na osnove poliimida A-OOO i nanochastic WS2 s povyshennymi tribotekhnicheskimi harakteristikami v usloviyah suhogo treniya skol'zheniya], Materials Science, No. 5, pp. 41-44.

21. Breki, A. D., Gvozdev, A. E., Sergeev, N. N., et al., (2016), On the frictional interaction of metal materials taking into account the phenomenon of superplasticity [O frikcionnom vzaimodejstvii metallicheskih materialov s uchetom yavleniya sverhplastichnosti], Materials Science, No. 8, pp. 21-25.

22. Gvozdev, A. E., Sergeev, N. N., Minaev, I. V., et al., (2016), Temperature distribution and structure in the zone of thermal influence for steel sheets after laser cutting [Raspredelenie temperatur i struktura v zone termicheskogo vliyaniya dlya stal'nyh listov posle lazernoj rezki], Materials Science, No.9, pp. 3-7.

23. Zhuravlev, G. M., Gvozdev, A. E., Sergeev, N. N. and Provotorov, D. A., et al., (2016), Variant of calculation of maximum hardening of low-carbon steels in plastic deformation processes [Variant rascheta maksimal'nogo uprochneniya malouglerodistyh stalej v processah plasticheskoj deformacii], Proizvodstvo prokata, No. 7, pp. 9-13.

24. Gvozdev, A. E., Zhuravlev, G. M., Kolmakov, A. G., Provotorov, D. A. and Sergeev, N. N., et al., (2016), Calculation of deformation damage in the processes of reverse extrusion of metal products [Raschet deformacionnoj povrezhdaemosti v processah obratnogo vydavlivaniya metallicheskih izdelij], Technology of metals, No. 1, pp. 23-32.

25. Medvedeva, V. V., Breki, A. D., Krylov, N. A., et al., (2016), Tribotechnical properties of plastic lubricating composite materials with fillers of dispersed particles of copper and zinc [Tribotekhnicheskie svojstva plastichnyh smazochnyh kompozicionnyh materialov s napolnitelyami iz dispersnyh chastic medi i cinka], Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta, vol. 65, No. 2, pp. 109-119.

26. Breki, A. D., Didenko, A. L., Kudryavtsev, V. V., et al., (2016), Tribotechnical characteristics of composite coatings with a matrix of polyheteroarylene PM-DADFE and fillers of tungsten dichalcogenide nanoparticles under sliding friction in the medium of liquid lubricant [Tribotekhnicheskie harakteristiki kompozicionnyh pokrytij s matricej iz poligeteroarilena PM-DADFE i napolnitelyami iz nanochastic dihal'kogenidov vol'frama pri trenii skol'zheniya v srede zhidkogo smazochnogo materiala], Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta, vol. 66, No. 3, pp. 17-28.

27. Zhuravlev, G. M., Gvozdev, A. E., Provotorov, D. A., et al., (2016), Influence of inhomogeneity of mechanical properties on force parameters of plastic shaping [Vliyanie neodnorodnosti mekhanicheskih svojstv na silovye parametry plasticheskogo formoizmeneniya], Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta, vol. 66, No. 3, pp. 52-60.

28. Zhuravlev, G. M., Sergeev, N. N., Gvozdev, A. E., et al., (2016), Physico-mechanical approach to the analysis of drawing processes with thinning of cylindrical products with the prediction of deformation damage of the material [Fiziko-mekhanicheskij podhod k analizu processov vytyazhki s utoneniem cilindricheskih izdelij s prognozirovaniem deformacionnoj povrezhdaemosti materiala], Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta, vol. 67, No. 4, pp. 39-56.

29. Breki, A. D., Vasilyeva, E. S., Tolochko, O. V., et al., (2016), Synthesis and tribotechnical properties of composite coatings with PM–DADPE polyimide matrix and fillers of tungsten dichalcogenide nanoparticles upon dry sliding friction, Inorganic Materials: Applied Research, vol. 7, No. 4, pp. 542-546.

30. Breki, A.D., Koltsova, T. S., Skvortsova, A. N., et al., (2016), Antifriction properties of composite materials based on aluminum, reinforced with carbon nanofibers, at friction on steel 12H [Antifrikcionnye svojstva kompozicionnyh materialov na osnove alyuminiya, uprochnyonnyh uglerodnymi nanovoloknami, pri trenii po stali 12H], Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Tekhnika i tekhnologii, vol. 21, No. 4, pp. 11-23.

31. Zhuravlev, G. M., Sergeyev, A. N., Gvozdev, A. E., Sergeyev, N. N., et al., (2016), To the effective properties estimation of materials, IEJME: Mathematics Education, vol. 11, No. 6, pp. 1481-1493.

32. Medvedeva, V. V., Breki, A. D., Krylov, N. A., et al., (2016), Anti-wear properties of a grease-based composite material containing a mixture of magnesium hydrosilicates [Protivoiznosnye svojstva konsistentnogo smazochnogo kompozicionnogo materiala, soderzhashchego smes' gidrosilikatov magniya], Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Tekhnika i tekhnologii, vol. 19, No. 2, pp. 30-40.

33. Sergeev, N. N., Gvozdev, A. E., Starikov, N. E. et al., (2017), Technology of metals and alloys [Tekhnologiya metallov i splavov], TulGU, Tula, 490 p.

34. Sergeev, N. N., Gvozdev, A. E., Zelenko, V. K. et al., (2017), Materials science [Materialovedenie], TulGU, Tula, 469 p.

35. Sergeev, N. N., Gvozdev, A. E., Kuzovleva, O. V., et al., (2017), Atlas of microstructures of nonmetallic and metallic materials [Atlas mikrostruktur nemetallicheskih i metallicheskih materialov], TulGU, Tula, 96 p.

36. Sergeev, N. N., Sergeev, A. N., Provotorov, D. A., et al., (2017), Sample for determination of adhesive strength of coatings [Obrazec dlya opredeleniya adgezionnoj prochnosti pokrytij]: patent No. 170385 Russian Federation; applicant and patentee A.E. Gvozdev, 6 p.

37. Chukanov, A. N., Sergeev, N. N., Gvozdev, A. E., et al., (2017), Condensed matter physics: Point defects of crystal structure in the formation of material properties [Fizika kondensirovannogo sostoyaniya: Tochechnye defekty kristallicheskogo stroeniya v formirovanii svojstv materialov], TulGU, Tula, 104 p.

38. Chukanov, A. N., Sergeev, N. N., Gvozdev, A. E., et al., (2017), Condensed matter physics: Linear defects of crystal structure in the formation of material properties [Fizika kondensirovannogo sostoyaniya: Linejnye defekty kristallicheskogo stroeniya v formirovanii svojstv materialov], TulGU, Tula, 154 p.

39. Chukanov, A. N., Sergeev, N. N., Gvozdev, A. E., et al., (2017), Condensed matter physics: Surface and bulk defects of crystal structure in the formation of material properties [Fizika kondensirovannogo sostoyaniya: Poverhnostnye i ob"emnye defekty kristallicheskogo stroeniya v formirovanii svojstv materialov], TulGU, Tula, 156 p.

40. Chukanov, A. N., Sergeev, N. N., Gvozdev, A. E., et al., (2017), Condensed matter physics: structural Defects and the creation of theories of hardening of materials [Fizika kondensirovannogo sostoyaniya: Defekty stroeniya i sozdanie teorij uprochneniya materialov], TulGU, Tula, 298 p.

41. Sergeev, A. N., Sergeev, N. N., Gvozdev, A. E., et al., (2017), Laboratory workshop on the course "Processing of structural materials" [Laboratornyj praktikum po kursu «Obrabotka konstrukcionnyh materialov»], TulGU, Tula, 146 p.

42. Sergeev, A. N., Sergeev, N. N., Medvedev, P. N., et al., (2017), Final qualifying work of students-undergraduates of the direction of preparation 44.04.01 Pedagogical education (orientation (profile) "Technology") (master's level) [Vypusknaya kvalifikacionnaya rabota studentov-magistrantov napravleniya podgotovki 44.04.01 Pedagogicheskoe obrazovanie (napravlennost' (profil') «Tekhnologiya») (uroven' magistratury)], TulGU, Tula, 196 p.

43. Gvozdev, A. E., Sergeev, N. N., Minaev, I. V., et al., (2017), Complex approach to modeling of resource-saving processes of processing and frictional interaction of metal systems [Kompleksnyj podhod k modelirovaniyu resursosberegayushchih processov obrabotki i frikcionnogo vzaimodejstviya metallicheskih sistem], TulGU, Tula, 232 p.

44. Sergeev, A. N., Sergeev, N. N., Shaidenko, N. A., et al., (2017), Final qualifying work of the bachelor of pedagogical education: studies.-method. the manual for preparation for the state final certification in the direction of preparation 44.03.05 Pedagogical education (with two profiles of preparation), profiles "Technology" and "Economy" [Vypusknaya kvalifikacionnaya rabota bakalavra pedagogicheskogo obrazovaniya: ucheb.-metod. posobie dlya podgotovki k Gosudarstvennoj itogovoj attestacii po napravleniyu podgotovki 44.03.05 Pedagogicheskoe obrazovanie (s dvumya profilyami podgotovki), profili «Tekhnologiya» i «Ekonomika»], TulGU, Tula, 240 p.

45. Sergeev, A. N., Sergeev, N. N., Gvozdev, A. E. et al., (2017), Processing of structural materials [Obrabotka konstrukcionnyh materialov], TulGU, Tula, 276 p.

46. Sergeev, N. N., Minaev, I. V., Tikhonova, I. V. et al., (2017), Influence of chemical composition of sheet metal and laser processing parameters on quality indicators [Vliyanie himicheskogo sostava listovogo prokata i parametrov lazernoj obrabotki na pokazateli kachestva], VII International conference "Deformation and destruction of materials and nanomaterials", IMET RAN, Moscow, pp. 208-209.

47. Sergeev, N. N., Tikhonova, I. V., Gvozdev, A. E., et al., (2017), Dependence of surface quality indicators on laser and gas-plasma treatment of carbon steel sheet products [Zavisimost' pokazatelej kachestva poverhnosti ot rezhimov lazernoj i gazoplazmennoj obrabotki listovogo prokata iz uglerodistyh stalej], VII International conference "Deformation and destruction of materials and nanomaterials", IMET RAN, Moscow, p. 210.

48. Sergeev, N. N., Gvozdev, A. E. and Kutepov, S. N., (2017), Change of characteristics of strength and plasticity of powder metal system iron-carbon-tungsten-molybdenum-chromium-vanadium at thermomechanical tension [Izmenenie harakteristik prochnosti i plastichnosti poroshkovoj metallicheskoj sistemy zhelezo-uglerod-vol'fram-molibden-hrom-vanadij

pri termomekhanicheskom rastyazhenii], VII International conference “Deformation and destruction of materials and nanomaterials”, IMET RAN, Moscow, pp. 574-575.

49. Sergeev, N. N., Tereshin, V. A., Chukanov, A. N., et al., (2017), Formation of plastic zones near a spherical cavity in hardened low-carbon steels under conditions of hydrogen stress corrosion [Formirovanie plasticheskih zon okolo sfericheskoj polosti v uprochnennyh nizkouglerodistyh stalyah v usloviyah vodorodnoj stress-korrozii], Materials Science, No. 12, pp. 18-25.

50. Breki, A. D., Medvedeva, V. V., Krylov, N. A., et al., (2017), Anti-wear properties of plastic lubricating composite materials “LITHOLITE-particles of magnesium hydrosilicates” [Protivoiznosnye svojstva plastichnyh smazochnyh kompozicionnyh materialov «LITOL24-chasticy gidrosilikatov magniya»], Materials Science, No. 3, pp. 38-42.

51. Baranov, V. P., Gvozdev, A. E., Kolmakov, A. G., Sergeev, N. N. and Chukanov, A. N., (2017), Multilevel approach to the problem of delayed destruction of high-strength structural steels under the action of hydrogen [Mnogourovnevyj podhod k probleme zamedlennogo razrusheniya vysokoprochnyh konstrukcionnyh stalej pod dejstviem vodoroda], Materials Science, No. 7, pp. 11-22.

52. Zhuravlev, G. M., Gvozdev, A. E., Cheglov, A. E., Sergeev, N. N. and Gubanov, O. M., (2017), Variant of determination of maximum plastic hardening in tool steels [Variant opredeleniya maksimal’nogo plasticheskogo uprochneniya v instrumental’nyh stalyah], Steel, No. 6, pp. 26-39.

53. Zhuravlev, G. M., Gvozdev, A. E., Cheglov, A. E., Sergeev, N. N. and Gubanov, O. M. (2017), Maximum plastic strengthening in tool steels, Steel in Translation, vol. 47, No. 6, pp. 399-411.

54. Sergeev, N. N., Kutepov, S. N., Gvozdev, A. E. and Ageev, E. V., (2017), Mechanisms of hydrogen cracking of metals and alloys associated with increased dislocation activity [Mekhanizmy vodorodnogo rastreskivaniya metallov i splavov, svyazannye s usileniem dislokacionnoj aktivnosti], Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta, vol. 21, No. 2(71), pp. 32-47.

55. Sergeev, N. N., Sergeev, A. N., Kutepov, S. N., et al., (2017), Analysis of theoretical ideas about the mechanisms of hydrogen cracking of metals and alloys [Analiz teoreticheskih predstavlenij o mekhanizmah vodorodnogo rastreskivaniya metallov i splavov], Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta, vol. 21, No. 3(72), pp. 6-33.

56. Sergeev, N. N., Sergeev, A. N., Kutepov, S. N., et al., (2017), Diffusion of hydrogen in welded joints of structural steels [Diffuziya vodoroda v svarnyh soedineniyah konstrukcionnyh stalej], Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta, vol. 21, No. 6(75), pp. 85-95.

57. Breki, A. D., Gvozdev, A. E., Kolmakov, A. G., et al., (2017), On friction of metallic materials with consideration for superplasticity phenomenon, Inorganic Materials: Applied Research, vol. 8, No. 1, pp. 126-129.

58. Gvozdev, A. E., Sergeyev, N. N., Minayev, I. V., et al., (2017), Temperature distribution and structure in the heat-affected zone for steel sheets after laser cutting, Inorganic Materials: Applied Research, vol. 8, No. 1, pp. 148-152.

59. Breki, A. D., Didenko, A. L., Kudryavtsev, V. V., et al., (2017), Composite coatings based on A-OOO polyimide and WS2 nanoparticles with enhanced dry sliding characteristics, Inorganic Materials: Applied Research, vol. 8, No. 1, pp. 56-59.

60. Sergeev, N. N., Gvozdev, A. E., Sergeev, A. N., et al., (2017), Promising steels for blast furnace casings [Perspektivnye stali dlya kozhuhov domennyh agregatov], Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Tekhnika i tekhnologii, vol. 7, No. 2(23), pp. 6-15.

61. Sergeev, N. N., Sergeev, A. N., Kutepov, S. N., et al., (2017), Influence of heat treatment regimes on the resistance of high-strength reinforcing steel to hydrogen cracking [Vliyanie rezhimov termicheskoj obrabotki na stojkost' vysokoprochnoj armaturnoj stali k vodorodnomu rastreskivaniyu], Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Tekhnika i tekhnologii, vol. 7, No. 4 (25), pp. 6-20.

62. Sergeev, N. N., Sergeev, A. N., (2017), Hydrogen embrittlement and cracking of high-strength reinforcing steel [Vodorodnoe ohrupchivanie i rastreskivanie vysokoprochnoj armaturnoj stali], TulGU, Tula, 180 p.

63. Gvozdev, A. E., Sergeev, N. N., Sergeev, A. N., et al., (2018), Anomalous mechanical properties of some metallic systems [Anomal'nye mekhanicheskie svojstva nekotoryh metallicheskih sistem], TulGU, Tula, 149 p.

64. Gvozdev, A. E., Starikov, N. E., Sergeev, N. N., et al., (2018), The technology of construction, maintenance and operation of tool materials [Tekhnologiya konstrukcionnyh, ekspluatacionnyh i instrumental'nyh materialov], TulGU, Tula, 406 p.

65. Gvozdev, A. E., Starikov, N. E., Sergeev, N. N., et al., (2018), Fundamentals of resource-saving processes for the production of high-speed tool [Osnovy resursosberegayushchih processov polucheniya bystrorezhushchego instrumenta], TulGU, Tula, 209 p.

66. Sergeev, N. N., Minaev, I. V., Tikhonova, I. V., et al., (2018), Fundamentals of laser and gas-plasma treatment of structural steels [Osnovy lazernoj i gazoplazmennoj obrabotki konstrukcionnyh stalej], TulGU, Tula, 283 p.

67. Breki, A. D., Medvedeva, V. V., Krylov, N. A., et al., (2018), Antiwear properties of composite greases "LITOL-24 – magnesium hydrosilicate particles", Inorganic Materials: Applied Research, vol. 9, No. 1, pp. 21-25.

68. Breki, A. D., Gvozdev, A. E., Kolmakov, A. G. and Sergeev, N. N., (2018), The study of the friction of steel spinning SHX15 on steels R6M5 and 10R6M5-MP using mathematical modeling [Issledovanie treniya vercheniya stali SHKH15 po stalyam R6M5 I 10R6M5-MP s ispol'zovaniem matematicheskogo modelirovaniya], Materials Science, No. 12, pp. 40-45.

69. Sergeev, N. N., Sergeev, A. N., Kutepov, S. N., et al., (2018), Mechanisms of hydrogen cracking of metals and alloys. Part I (review) [Mekhanizmy vodorodnogo rastreskivaniya metallov i splavov. CH. I (obzor)], Materials Science, No. 3, pp. 27-33.

70. Sergeev, N. N., Sergeev, A. N., Kutepov, S. N., et al., (2018), Mechanisms of hydrogen cracking of metals and alloys. Part II (review) [Mekhanizmy vodorodnogo rastreskivaniya metallov i splavov. CH. II (obzor)], Materials Science, No. 4, pp. 20-29.

71. Sergeev, N. N., Minaev, I. V., Gvozdev, A. E., et al., (2018), Influence of carbon content and laser cutting parameters on the structure and extent of the zone of thermal influence of steel [Vliyanie soderzhaniya ugleroda i parametrov lazernoj rezki na stroenie i protyazhennost' zony termicheskogo vliyaniya stal'nyh listov], Steel, No. 5, pp. 21-26.

72. Sergeev, N. N., Minaev, I. V., Gvozdev, A. E., et al., (2018), Decarburization and the influence of laser cutting on steel structure, Steel in Translation, vol. 48, No. 5, pp. 313-319.

73. Makarov, E. S., Cheglov, A. E., Gvozdev, A. E., et al., (2018), Some problems of calculation of power of plastic deformation of powder metal systems [Nekotorye zadachi rascheta moshchnosti plasticheskoj deformacii poroshkovyh metallicheskih sistem], Steel, No. 9, pp. 23-27.

74. Makarov, E. S., Gvozdev, A. E., Zhuravlev, G. M., et al., (2018), Conception of a plastic gas and model medium for dilatable isotropic materials, Physics and Chemistry of Materials Processing, No. 4, pp. 57-64.

75. Sergeev, N. N., Sergeev, A. N., Kutepov, S. N., et al., (2018), The use of hydrogen traps to control the process of hydrogen cracking of welded joints of high-strength steels [Ispol'zovanie vodorodnyh lovushek dlya kontrolya processa vodorodnogo rastreskivaniya svarnyh soedinenij vysokoprochnyh stalej], Izvestiya Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki, No. 4, pp. 344-356.

76. Sergeev, N. N., Sergeev, A. N., Kutepov, S. N., et al., (2018), Effect of tempering temperature on long-term strength of reinforcing steels in hydrogen-containing media [Vliyanie temperatury otpuska na dlitel'nuyu prochnost' armaturnyh stalej v vodorodsoderzhashchih sredah], Izvestiya Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki, No. 6, pp. 514-525.

77. Sergeev, N. N., Sergeev, A. N., Gvozdev, A. E., et al., (2018), Research of influence of alloying on mechanical and corrosion properties of reinforcing rolled products [Issledovanie vliyaniya legirovaniya na mekhanicheskie i korrozionnye svojstva armaturnogo prokata], Izvestiya Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki, No. 7, pp. 117-131.

78. Sergeev, N. N., Sergeev, A. N., Kutepov, S. N., et al., (2018), Investigation of corrosion resistance of intermetallic powder materials [Issledovanie korrozionnoj stojkosti intermetallicheskih poroshkovyh materialov], Izvestiya Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki, No. 8, pp. 108-121.

79. Sergeev, N. N., Izvolsky, V. V., Sergeev, A. N., et al., (2018), Development of a method of investigation of corrosion-mechanical destruction of reinforcing steels in hydrogen-containing media [Razrabotka metodiki issledovaniya korrozionno-mekhanicheskogo razrusheniya armaturnyh stalej v vodorodosoderzhashchih sredah], Izvestiya Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki, No. 8, pp. 35-56.

80. Sergeev, N. N., Ushakov, M. V., Sergeev, A. N., et al., (2018), Cohesive strength of metal and intermetallic powder plasma coatings [Kogezionnaya prochnost' metallicheskih i intermetallicheskih poroshkovyh plazmennyh pokrytij], Izvestiya Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki, No. 8, pp. 62-79.

81. Sergeev, N. N., Sergeev, A. N., Kutepov, S. N., et al., (2018), Influence of tempering regimes on long-term strength of reinforcing steels in hydrogen-containing media [Vliyanie rezhimov otpuska na dlitel'nuyu prochnost' armaturnyh stalej v vodorodsoderzhashchih sredah], Izvestiya Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki, No. 8, pp. 94-107.

82. Sergeev, N. N., Izvolsky, V. V., Sergeev, A. N., et al., (2018), Influence of chemical composition of steel 23X2G2T on resistance against corrosion cracking [Vliyanie himicheskogo sostava stali 23H2G2T na stojkost' protiv korrozionnogo rastreskivaniya], Izvestiya Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki, No. 9, pp. 409-420.

83. Sergeev, N. N., Izvolsky, V. V., Sergeev, A. N., et al., (2018), Influence of tempering conditions on mechanical and corrosion properties of steel 23X2G2T [Vliyanie uslovij otpuska na mekhanicheskie i korrozionnye svojstva stali 23H2G2T], Vestnik Rybinskoj gosudarstvennoj aviacionnoj tekhnologicheskoj akademii im. P. A. Soloveva, vol. 45, No. 2, pp. 128-135.

84. Sergeev, N. N., Izvolsky, V. V., Sergeev, A. N., et al., (2018), Influence of microstructural factors and heat treatment on corrosion resistance of reinforcing steel class A600 [Vliyanie mikrostrukturnyh faktorov i termicheskoj obrabotki na korrozionnuyu stojkost' armaturnoj stali klassa A600], Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta, vol. 22, No. 2(77), pp. 52-63.

85. Sergeev, N. N., Sergeev, A. N., Kutepov, S. N., et al., (2018), Application of manufacturing technology "cortical" method of forming inserts for injection molding of copper alloys [Primenenie tekhnologii izgotovleniya «korkovym» sposobom formoobrazuyushchih vstavok dlya lit'ya pod davleniem mednyh splavov], Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta, vol. 22, No. 3(78), pp. 67-83.

86. Sergeev, N. N., Tereshin, V. A., Sergeev, A. N., et al., (2018), Formation of plastic zones near spherical cavity in hardened low-carbon steels under conditions of hydrogen stress corrosion, Inorganic Materials: Applied Research, vol. 9, No. 4, pp. 663-669.

87. Sergeev, N. N., Sergeev, A. N., Kutepov, S. N., et al., (2018), Kinetics of crack propagation in metal materials at corrosion-mechanical destruction [Kinetika rasprostraneniya treshchin v metallicheskih materialah pri korrozionno-mekhanicheskom razrushenii], Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Tekhnika i tekhnologii, vol. 8, No. 1 (26), pp. 24-37.

88. Sergeev, N. N., Sergeev, A. N., Kutepov, S. N., et al., (2018), Research of comparative resistance of reinforcing steels in the process of accelerated laboratory tests for hydrogen cracking [Issledovanie sravnitel'noj stojkosti armaturnyh stalej v processe uskorennyh laboratornyh ispytanij na vodorodnoe rastreskivanie], Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Tekhnika i tekhnologii, vol. 8, No. 1 (26), pp. 38-48.

89. Sergeev, N. N., Sergeev, A. N., Kutepov, S. N., et al., (2018), Effect of tempering temperature on the resistance of reinforcing steel 20GX2 against hydrogen cracking [Vliyanie temperatury otpuska na stojkost' armaturnoj stali 20GS2 protiv vodorodnogo rastreskivaniya], Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Tekhnika i tekhnologii, vol. 8, No. 2 (27), pp. 54-67.

90. Sergeev, N. N., Sergeev, A. N., Gvozdev, A. E., et al., (2018), Influence of the level of tensile stresses on the long-term strength of reinforcing steels in hydrogen-containing media [Vliyanie urovnya rastyagivayushchih napryazhenij na dlitel'nuyu prochnost' armaturnyh stalej v vodorodsoderzhashchih sredah], Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Tekhnika i tekhnologii, vol. 8, No. 2 (27), pp. 6-19.

91. Sergeev, N. N., Sergeev, A. N., (2018), Mechanical properties and internal friction of high-strength steels in corrosive environments [Mekhanicheskie svojstva i vnutrennee trenie vysokoprochnyh stalej v korrozionnyh sredah], TulGU, Tula, 430 p.

92. Sergeev, N. N., Sergeev, A. N., Kutepov, S. N., et al., (2019), Bases of increase of durability of the high-strength steels operated in hydrogen-containing environments [Osnovy povysheniya dolgovechnosti vysokoprochnyh stalej, ekspluatiruemyh v vodorodsoderzhashchih sredah], TulGU, Tula, 348 p.

93. Starikov, N. E., Gvozdev, A. E., Kutepov, S. N., Sergeev, N. N., et al., (2019), Special conditions of metal systems and resource-saving technologies of pressure treatment of composite materials, alloys of non-ferrous metals, ingot and powder steels [Osobye sostoyaniya metallicheskih sistem i resursosberegayushchie tekhnologii processov obrabotki davleniem kompozicionnyh materialov, splavov cvetnyh metallov, slitkovyh i poroshkovyh stalej], RVVDKU, Ryazan, 194 p.

94. Sergeev, N. N., Izvolsky, V. V., Sergeev A. N., et al., (2019), Influence of internal and external factors on kinetics of process of corrosion-mechanical destruction of reinforcing steels [Vliyanie vnutrennih i vneshnih faktorov na kinetiku processa korrozionno-mekhanicheskogo razrusheniya armaturnyh stalej], Izvestiya Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki, No. 2, pp. 410-429.

95. Sergeev, N. N., Ushakov, M. V., Sergeev A. N., et al., (2019), Influence of reflow process on cohesive strength of powder plasma coatings [Vliyanie processa oplavleniya na kogezionnuyu prochnost' poroshkovyh plazmennyh pokrytij], Izvestiya Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki, No. 2, pp. 430-441.

96. Sergeev, N. N., Sergeev, A. N., Kutepov, S. N., et al., (2019), Influence of temperature of the beginning of martensitic transformation on character of hydrogen cracking of welded joints [Vliyanie temperatury nachala martensitnogo prevrashcheniya na harakter vodorodnogo rastreskivaniya svarnyh soedinenij], Izvestiya Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki, No. 3, pp. 523-528.

97. Sergeev, N. N., Izvolsky, V. V., Sergeev A. N., et al., (2019), Influence of technological regimes of reinforcement reinforcement for composite reinforced concrete structures on the sensitivity to corrosion and mechanical destruction [Vliyanie tekhnologicheskih rezhimov uprochneniya armaturnogo prokata dlya kompozicionnyh zhelezobetonnyh konstrukcij na chuvstvitel'nost' k korrozionno-mekhanicheskomu razrusheniyu], Izvestiya Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki, No. 3, pp. 558-568.

98. Sergeev, N. N., Ushakov, M. V., Sergeev, A. N., et al., (2019), Investigation of corrosion resistance of structural alloy steels in aggressive environments [Issledovanie korrozionnoj stojkosti konstrukcionnyh legirovannyh stalej v agressivnyh sredah], Izvestiya Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki, No. 3, pp. 591-601.

99. Sergeev, N. N., Ushakov, M. V., Sergeev, A. N., et al., (2019), Research of influence of mechanical processing on corrosion resistance of intermetallic coverings [Issledovanie vliyaniya mekhanicheskoj obrabotki na korrozionnuyu stojkost' intermetallicheskih pokrytij], Izvestiya Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki, No. 3, pp. 601-614.

100. Sergeev, N. N., Izvolsky, V. V., Sergeev A. N., et al., (2019), Influence of complex alloying on physico-mechanical and corrosion properties of low-alloy steel 09G2 [Vliyanie kompleksnogo legirovaniya na fiziko-mekhanicheskie i korrozionnye svojstva nizkolegirovannoj stali 09G2], Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Tekhnika i tekhnologii, vol. 9, No. 1 (30), pp. 6-18.

101. Sergeev, N. N., Tikhonova, I. V., Sergeev, A. N., et al., (2019), Influence of charge quality on sensitivity of 30HGCA steel to hydrogen cracking [Vliyanie kachestva shihty na chuvstvitel'nost' stali 30HGSA k vodorodnomu rastreskivaniyu], Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Tekhnika i tekhnologii, vol. 9, No. 1 (30), pp. 37-48.

102. Gadalov, V. N., Gvozdev, A. E., Zolotukhin, V. I., et al., (2019), Minas Khachaturovich Shorshorov, outstanding scientist, teacher, teacher (1922-2005) [Minas Hachaturovich Shorshorov, vydayushchijsya uchenyj, pedagog, uchitel' (1922-2005)], Vestnik Rybinskoj gosudarstvennoj aviacionnoj tekhnologicheskoj akademii im. P. A. Soloveva, No. 3 (26), pp. 3-7.

Получено 14.10.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 20 Выпуск 3

THE EDITORIAL BOARD

Volume 20, Issue 3

TABLE OF CONTENTS

Volume 20 Issue 3